Відгук
офіційного опонента
на дисертаційну роботу Меремелі Ірини Юріївни "Лінійні методи наближення та екстремальні задачі на класах голоморфних функцій", поданої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

Фундамент теорії наближення функцій було закладено у класичних роботах П.Л.Чебишева, К.Вейєрштрасса, А.Лебега, Ш.Валле Пуссена, Д.Джексона, С.Н.Бернштейна, Н.І.Ахієзера, А.Зігмунда, Ж.Фавара та інших. В подальшому найбільш суттєві результати для функцій однієї та багатьох змінних було отримано А.М.Колмогорвим, С.М.Нікольським, Н.К.Барі, С.Б.Стєчкіним, П.Л.Ульяновим, А.П.Тіманом, К.І.Бабенком, В.К.Дзядиком, М.П.Корнійчуком, Л.В.Тайковим, А.І.Степанцем та багатьма іншими математиками. І насьогодні теорія наближення функцій є однією з найбільш інтенсивно розвиваючихся областей фундаментальної математики. Задачі, що вивчаються в її рамках, пов'язані з наближенням як індивідуальних функцій, так і їх класів. При цьому важливу роль відіграють як дослідження найкращих поліноміальних наближень класів функцій, так і дослідження певного кола екстремальних задач, зокрема, побудова найкращих лінійних методів наближення, обчислення точних значень різних поперечників, оптимальне відновлення функціоналів, обчислення точних значень коефіцієнтів Фур'є на класах функцій тощо.

Що ж стосується отримання точних розв'язків низки екстремальних задач в теорії наближення голоморфних функцій, то на даний час зазначений напрямок має набагато скромніші здобутки, ніж у випадку функцій дійсної змінної. Нагадаємо, що у 1958 році К.І.Бабенко одержав перший точний результат щодо найкращого поліноміального наближення класів функцій, аналітичних у колі одиничного радіуса. Ці дослідження отримали подальший розвиток у роботахЛ.В.Тайкова, Дж.Т.Шейка, В.І.Білого, М.З.Двейріна, К.Ю.Осипенка, Ю.А.Фаркова, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, В.В.Савчука та інших.

Значну кількість робіт присвячено отриманню точних констант в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора голоморфних функцій. В одновимірному випадку це питання досліджували О.Сас, Е.Ландау, Ф.Вінер, Г.Бор, Г.М.Голузін, Л.Браун, А.Шилдс, К.Зеллер, Г.Вааделанд, Р.Буркель, Д.Маршал, Т.Ренсфорд, В.В.Савчук та інші. В багатовимірному випадку питанням обчислення точних констант в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора обмежених в полікрузі голоморфних функцій в різний час займались І.І.Баврін, Г.Боас, Д.Хавінсон, Л.А.Айзенберг, А.Відрас, В.І.Паулсен, Г.Попеску, Д.Сінгх тощо.

Оцінки похідних голоморфних функцій утворюють окрему групу екстремальних задач сучасної геометричної теорії функцій однієї змінної. Досить повну бібліографію з цього питання можна знайти, наприклад, у монографії G.Kresin, V.Maz'yu "Sharp Real - Part Theorems : A Unified Approach", Berlin

: Springer-Verlag, 2007. Слід зазначити, що в останній час має місце певний інтерес до аналогічних досліджень у випадку голоморфних функцій багатьох змінних і стосується він переважно оцінок типу Шварца-Піка.

Враховуючи вищевикладене і те, що в дисертаційній роботі розглядаються питання, пов'язані, зокрема, з дослідженням екстремальних задач наближення голоморфних функцій лінійними методами; з обчисленням мажоранти залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних в одиничному колі функцій; з отриманням точних констант в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора обмежених в полікрузі голоморфних функцій; з отриманням точної оцінки мішаної похідної голоморфної функції у просторі Гарді в полікрузі тощо вважаю, що тема дисертаційної роботи є **актуальною**.

Дисертація складається з вступу та трьох розділів, два з яких супроводжуються висновками, загальних висновків, списку використаних джерел з 120 найменувань і має 117 сторінок машинописного тексту.

Перший розділ присвячений огляду наукових джерел за темою дисертації. Так, у підрозділі 1.1 наведено низку відомих результатів, які стосуються лінійних методів підсумовування рядів Тейлора голоморфних у одиничному колі функцій. Зокрема, в хронологічному порядку розглянуто історію наближення сумами Фейєра, Валле Пусена, Зигмунда. Також приділено увагу найкращим лінійним методам наближення на класах H_p^{ψ}. У підрозділі 1.2 зроблено історичний екскурс щодо розв'язання екстремальних задач у просторі Гарді, пов'язаних з оцінкою модулів обмежених голоморфних функцій. У підрозділі 1.3 наведено низку історичних відомостей щодо обчислення точних констант в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора голоморфних у одиничному колі функцій.

Другий розділ дисертації присвячений екстремальним задачам наближення голоморфних у одиничному колі функцій лінійними методами. Так, у теоремі 2.1.1 встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда на класах $H_p^{\psi\phi}$, які є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{k+1}\phi_{k+1}z^k$, коли $\psi_k = \int_0^1 \rho^{k-1} d\lambda(\rho)$, $k \in \mathbb{N}$, λ – обмежена неспадна на $[0,1]$ функція, для якої $\int_0^1 d\lambda = 1$. З зазначеного результату, як наслідок, одержано розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для величини $\mathcal{Z}_{n,\psi}(H_p^{\psi\phi}; H_p) = \sup\{\|f - Z_{n,\psi}(f)\|_{H_p} : f \in H_p^{\psi\phi}\}$. У наступній теоремі 2.1.2 одержано порядкові оцінки величини $\mathcal{Z}_{n,\psi}(H_p^{\psi}; H_p)$, коли $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і послідовність $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ задовольняє умовам теореми 2.1.1.

Теорема 2.1.3 містить, на наш погляд, цікавий результат, пов'язаний з отриманням необхідних та достатніх умов на послідовність $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для того щоб забезпечити отримання точного значення $\mathcal{Z}_{n,\psi}(H_p^{\psi,\phi}; H_p) = |\psi_n|$, де $p \geqslant 1$. Витікаючий з зазначеної теореми результат, що міститься у наслідку 2.1.2, дає розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для сум Зигмунда на класах H_p^{r+s} і доповнює та узагальнює відомі результати А.Зигмунда (1945 р.), С.Б.Стєчкіна (1953 р.), В.В.Савчука (2011 р.).

В дисертації також показано (твердження 2.2.1), що теорема 2.1.1 не може бути, взагалі кажучи, наслідком теореми 2.1.3.

У другій частині розділу 2 досліджено поведінку мажоранти $R_n(\rho)$, $\rho \in (0,1]$, залишків рядів Тейлора на класі $B = UH_\infty$ (теорема 2.3.1 та наслідок 2.3.1). Цей результат можна розглядати як певне розвинення досліджень В.В.Савчука (2011 р.)

Завершується розділ теоремою 2.3.3, яка є розвиненням одного результату Г.Вааделанда (1962 р.) з класу B на клас B_1, тобто обчислюється точне значення величини $\max\{|f(z) - f(0)| : f \in B_1\}$. При цьому наводиться приклад екстремальної функції, для якої виконується наведена в зазначеній теоремі рівність (2.37).

Третій розділ дисертації присвячений отриманню точних оцінок коефіцієнтів Тейлора та модулів голоморфних у полікрузі функцій. В теоремі 3.1.1 обчислено точні значення констант $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ та $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$. При цьому було виявлено цікавий ефект, пов'язаний з константою $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$: на її значення впливає співвідношення між компонентами мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$. Теорему 3.1.1 можна розглядати як певне розвинення класичних результатів Е.Ландау, Ф.Вінера, Г.Бора, Г.М.Голузіна на багатовимірний випадок.

Наступна теорема 3.2.1 присвячена розв'язанню задачи Помпея–Ландау–Саса для обмежених голоморфних у бікрузі функцій у випадку, коли множина $\gamma \in \mathbb{Z}_+^2$ має вигляд $\gamma = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, а елементами двократної комплексної послідовності $\{\mu_{k,l}\}$ є числа $\mu_{k,l} = 2\rho_1^{1-l}\rho_2^{1-k}$; $\mu_{1,1} = 1$.

Завершується розділ доведенням теореми 3.3.1, в якій отримано оцінку (3/27) модуля похідної голоморфної функції у кожній точці голоморфності через норму самої функції в банаховому просторі $H_1(\mathbb{D}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Також отримано екстремальну функцію, для якої зазначена нерівність (3.27) перетворюється в рівність. Вказану теорему можна розглядати як певне розвинення відповідного одновимірного результату А.Макентайра та В.Рогозинського на багатовимірний випадок.

Однак є ряд зауважень, які стосуються дисертаційної роботи:

— узагальнені суми Зигмунда позначені різними символами: $Z_n^{\psi}(f)(z)$ (дивись стор. 5, 2-й рядок знизу; стор. 22, 8-й рядок зверху) та $Z_{n,\psi}(f)(z)$ (дивись стор. 10, 9-й та 13-й рядки зверху; стор. 11, 6-й рядок зверху; стор. 42, 2-й рядок зверху);

— на стор. 16 у 3-му рядку знизу, напевно, пропущено слово "в роботах";

— на стор. 19 при формулюванні результатів Г.М.Мордасової та О.І.Маркушевич, С.Я.Хавінсона доцільно було б пояснити зміст символа $\simeq$;

— на стор. 28 у 2-му рядку знизу замість формули $f(r\mathbb{D}) = \{\omega = f(rz) : z \in \mathbb{D}\}$ треба записати $f(r\mathbb{D}) = \{f(rz) : z \in \mathbb{D}\}$;

— на стор. 30 у 4-му рядку зверху замість слова "функції" краще записати "образу";

— при формулюванні твердження 1.2.1 та означення 1.2.1 замість $\widehat{f}(z)$ треба писати $f(z)$;

— на стор. 37 у 13-му рядку зверху замість 3^{-n} треба записати 3^{-k};

— на стор. 40 у 5-му рядку зверху між $\rho \in (0,1]$ та $W_{m,n}$ пропущено символ $\Leftrightarrow$;

— на стор. 47 в означені 2.1.1 не наведено вигляд полінома $U_n(f;x;\Lambda)$;

— на стор. 71 використано означення одиничного полікруга $\mathbb{D}^d = \{z \in \mathbb{C}^d : \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} |z_j| < 1\}$, хоча, зазвичай, покладають $\mathbb{D}^d = \{z \in \mathbb{C}^d : |z_j| < 1, j = \overline{1,d}\}$ (У.Рудин "Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$". М. : Мир, 1984; див. стор. 11);

— на стор. 74, 75 замість $\widehat{f}(0)$ за змістом треба записати $\widehat{f}_0$.

Не зважаючи на зауваження, одержані в дисертації результати та зроблені в ній висновки є **правильними і обґрунтованими**. Основні результати дисертації є новими, отримані особисто здобувачем і досить повно викладені в надрукованих ним роботах. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Основні результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях екстремальних задач для голоморфних функцій однієї та багатьох змінних.

Виходячи з вказаного, вважаю, що дисертаційна робота Меремелі І.Ю. "Лінійні методи наближення та екстремальні задачі на класах голоморфних функцій" є завершеним науковим дослідженням.

Дисертаційна робота "Лінійні методи наближення та екстремальні задачі на класах голоморфних функцій" задовольняє вимогам пп. 9, 11–13 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Меремеля Ірина Юріївна **заслуговує** на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри економіки та
моделювання бізнес-процесів
Дніпропетровського університету імені А.Нобеля — С.Б.Вакарчук

06.09.2016

Підпис С.Б.Вакарчука засвідчую
Вчений секретар,
доктор пед.наук, професор — С.П.Кожушко

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 09.09.2016 р.
секретар ради /Артеменко Ж.Я./

Канцелярія