НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Пігура Оксана Василівна

УДК 512.552.13

МОРФІЧНІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Забавський Богдан Володимирович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
завідувач кафедри алгебри і логіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Бондаренко Євген Володимирович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри алгебри та математичної логіки;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Щедрик Володимир Пантелеймонович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри.

Захист відбудеться “20” вересня 2016 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 у Інституті математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий “10” серпня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Для асоціативного кільця R з одиницею Ерліх[1] у 1976 році показала, що кільце R є одинично-регулярним тоді і тільки тоді, коли R є регулярним (в сенсі Неймана) і для довільного елемента $a \in R$ виконується умова $R / Ra \cong l(a)$, як ліві R-модулі ($l(a)$ – лівий анулятор елемента a). На основі цього результату Ніколсон і Санчез Кампос[2] у 2004 році ввели у розгляд поняття морфічного кільця. Цей новий клас кілець знайшов широке застосування у сучасних алгебраїчних дослідженнях.

Капланський вказав, що регулярне (в сенсі Неймана) кільце є одинично-регулярним тоді і тільки тоді, коли стабільний ранг цього кільця дорівнює 1. Згідно з результатами, отриманими Капланським та Ерліх, встановлено тісний зв'язок між морфічними кільцями та таким важливим інваріантом алгебраїчної K-теорії, як стабільний ранг кільця.

Поняття стабільного рангу кільця було введено Басом в 1964 році у зв'язку з задачами стабілізації і стало наріжним каменем в дослідженнях алгебраїчної K-теорії. Сучасні дослідження МакГоверна, Кушо, Чена і Забавського показали, яку велику роль відіграє поняття стабільного рангу кільця у класичних задачах канонічної діагональної редукції матриць над кільцями. Задачі, пов'язані із діагоналізацією матриць, мають глибокі історичні корені і в різних аспектах їм приділяли увагу багато відомих математиків, серед яких можна відзначити Веддерберна, Ван Дер Вардена, Джекобсона, Капланського, Хенріксена, Кона та багатьох інших.

Капланський у 1949 році ввів поняття кільця елементарних дільників і показав, що над цим кільцем довільний скінченно-зображуваний модуль розкладається в пряму суму циклічних модулів. Ларсен, Левіс, Шорес у випадку комутативного кільця R показали, що якщо кожен скінченно-зображуваний R-модуль розкладається в пряму суму циклічних модулів, то кільце R є кільцем елементарних дільників.

Цей результат є частковим розв'язком відомої проблеми Уорфілда[3]: «Над якими кільцями довільний скінченно-зображуваний модуль розкладається в пряму

---

[1] Erlich G. Units and one-sided units in regular rings/ G. Erlich // Trans. Amer. Math.Soc. – 1976. – 216. – P.81–90.

[2] Nicholson W. K. Rings with the dual of the isomorphism theorem / W. K. Nicholson, E. Sanchez Campos // J. Algebra – 2004. – 271. – P.391–406.

[3] Warfield R. B. Stable equivalence of matrices and resolutions / R. B. Warfield // Comm. Algebra. – 1978. – 17. – P.1811–1828.

суму циклічних?». Розв’язання цієї проблеми для класу узагальнено однорядних кілець отримано Дроздом[4].

Особливу роль у класі кілець елементарних дільників відіграють адекватні кільця. Вони були введені Хелмером 1943 році, на основі досліджень Веддерберна кільця аналітичних функцій на комплексній площині. Клас адекватних кілець володіє такою властивість: їх нетривіальні скінченні гомоморфні образи є напіврегулярними кільцями, які, в свою чергу, є чистими. Чисті кільця були введені Ніколсоном і активно вивчаються в сучасних алгебраїчних дослідженнях. Зауважимо, що у комутативному випадку клас чистих кілець співпадає з класом кілець з властивістю заміни, які були введені Уорфілдом.

Окрім того, відзначимо результат Шореса, який показав, що напівспадкове комутативне кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного регулярного елемента (не дільника нуля) $a \in R$ фактор-кільце R/aR є кільцем елементарних дільників. Зауважимо, що це фактор-кільце є морфічним кільцем. Тобто, відома задача: «Чи буде комутативна область Безу областю елементарних дільників?» зводиться до: «Чи буде комутативне морфічне кільце кільцем елементарних дільників?».

Забавський[5], на основі досліджень Щедрика та Ройтмана, ввів у розгляд поняття кільця акуратного рангу 1, як узагальнення поняття кільця стабільного рангу 1, і показав, що комутативна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є областю акуратного рангу 1, що обґрунтовує актуальність задач знаходження умов акуратного рангу 1 для морфічних кілець і дослідження умов, коли вони є кільцями елементарних дільників.

Особливу роль в усіх вказаних дослідженнях відіграють скінченні гомоморфні образи комутативних областей. Так, більшість результатів та понять, які пов’язані із діагоналізацією матриць можуть бути охарактеризовані у цих термінах (Забавський, Чен, Факкіні, Джейн, Туганбаєв, Ніколсон, Камілло, Санчез Кампос).

В загальному, тематика дисертаційної роботи відноситься до тих розділів математики, які бурхливо розвиваються і мають важливі застосування. Це дозволяє зробити висновок про актуальність дисертації.

[4] Дрозд Ю. А. Об обобщенно однорядных кольцах / Ю. А. Дрозд // Мат. заметки. – 1975. – 18, №5. – С.705–710.

[5] Zabavsky B. V. Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. – 2014. – 41, №1. – P.101–108.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, належить до основних досліджень кафедри алгебри і логіки, а також, пов’язаний з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною досліджень держбюджетної теми ММ–146Ф “Аналітичні методи дослідження випадкових еволюцій та гомологічна класифікація алгебраїчних систем з використанням теорії стабільності” (номер державної реєстрації 0113U003052), яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є дослідження скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу, морфічних кілець та обчислення стабільного рангу цих класів кілець.

Об'єктом дослідження є кільця скінченного стабільного рангу, кільця Безу, морфічні кільця, гельфандові кільця.

Предметом дослідження є стабільний ранг кільця та його узагальнення.

Завданнями дослідження є:

– дослідити властивості нетривіальних скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу;

– дослідити канонічну діагональну редукцію над комутативними морфічними кільцями акуратного рангу 1;

– вказати необхідні і достатні умови, коли нетривіальні скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є кільцями Каша;

– дослідити зв'язок морфічних кілець з чистими;

– обчислити стабільний ранг однозначно морфічних кілець;

– розглянути різноманітні узагальнення гельфандових кілець, встановити їх існування, дослідити питання діагональної редукції матриць над ними;

– встановити зв'язок розмірності $\dim R$ (по Канфелу) зі стабільним рангом морфічного кільця;

– дослідити комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом, і описати такі кільця в класі напіврегулярних кілець.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використовуються методи теорії кілець і модулів над кільцями та алгебраїчної К-теорії.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими і полягають в наступному:

– доведено, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є морфічними кільцями;

– вказано необхідні і достатні умови, коли скінченні гомоморфні образи комутатавної області Безу є кільцями Каша (часткова відповідь на запитання Фейса й Факкіні);

– дано відповідь на відкрите запитання Ніколсона і Санчес Кампоса, про існування морфічних кілець, які не є чистими;

– показано, що стабільний ранг однозначно морфічних кілець рівний 1 і, як наслідок, отримано, що однозначно морфічні кільця є кільцями елементарних дільників;

– встановлено, що умова акуратного рангу 1 для морфічного кільця еквівалентна умові однозначності твірних елементів головного ідеалу з точністю до акуратності;

– встановлено необхідні і достатні умови на розмірність кільця (в сенсі Канфела) щоб кільце було кільцем стабільного рангу 2;

– вказано, що клас комутативних кілець Безу є кільцями, в яких нуль є адекватним, тоді і тільки тоді, коли ці кільця є напіврегулярними (відповідь на запитання Ларсена, Левіса, Шореса);

– доведено, що комутативна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників (відповідь на відкрите запитання Забавського);

– введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу та встановлено його властивості;

– введено гельфандовий аналог радикала Джекобсона і досліджено його властивості;

– досліджено локально негельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та, як наслідок, доведено, що вони є кільцями елементарних дільників.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і є новими в теорії кілець. Розроблені методи та одержані результати можуть бути використані у подальших К-теоретичних дослідженнях та у задачах теорії кілець і модулів, які пов'язані з поняттями стабільного рангу та кільцями елементарних дільників.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Постановка задач, вибір методів дослідження, аналіз результатів та загальна координація роботи належать науковому керівнику. У спільних з науковим керівником публікаціях за темою дисертації внески співавторів є рівними.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертаційної роботи були оприлюднені і обговорені на таких конференціях:

- IX міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, м. Львів (8 – 13 липня 2013 р.);
- науковій конференції "Підстригачівські читання – 2014", м.Львів (28 – 30 травня 2014 р.);
- міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна, м. Київ (7 – 12 липня 2014 р.);
- X міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда, м. Одеса (20 – 27 серпня 2015 р.);
- Всеукраїнській науковій конференції: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", м. Ворохта, (24 – 27 лютого 2016 р.).

Крім того, результати дисертації неодноразово доповідалися на наукових семінарах:

- Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, керівник – член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд, 2016 р.);

- Алгебраїчному семінарі «Problems of elementary divisor rings» (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Б. В. Забавський, 2013–2016 рр.);
- Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет ім. І. Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор М. Я. Комарницький, 2016 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 11 наукових працях з них 6 [1–6] – у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (2 без співавторів), одна з них [3] опублікована у виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази даних “Scopus”, 3 – у матеріалах міжнародних наукових конференціях, 2 – у матеріалах всеукраїнської наукової конференції.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу та п’яти розділів: «Попередні відомості та допоміжні факти», «Морфічні кільця», «Комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом», «Локально гельфандові області Безу», «Максимально негельфандові ідеали», які розділені на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 121 сторінку. Список використаних джерел налічує 86 найменувань та займає 9 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано її мету, завдання та основні задачі, які розв’язуються в цій роботі, вказано наукову новизну отриманих результатів, їх застосування та наведено форми їх апробації.

У **першому розділі**, який є допоміжним, наведено огляд літератури за темою дисертації та сформульовано необхідні означення та факти, пов’язані з тематикою досліджень, що використовуються у роботі, а також, важливі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

У **другому розділі** розглядаються морфічні кільця, досліджується стабільний ранг цього класу кілець. Також наведено всеможливі нові приклади морфічних кілець.

Означення 2.1 *Нехай* R *– асоціативне кільце, елемент* $a \in R$ *називається лівим морфічним, якщо* $R/Ra \cong l(a)$ *, як ліві* R*-модулі, де* $l(a) = \{x \mid xa = 0, \forall a \in R\}$. *Кільце* R *називається лівим морфічним кільцем, якщо кожен елемент кільця є лівим морфічним. Аналогічно вводяться і праві морфічні кільця. Кільце, яке є лівим і правим морфічним одночасно називається морфічним кільцем*[2].

Означення 1.28. *Комутативне кільце* R *називається P-ін'єктивним, якщо для будь-якого елемента* a *кільця* R*, виконується умова* $Ann(Ann(aR)) = aR$ [6].

Означення 1.29. *Комутативне кільце* R *називається когерентним, якщо*

(1). анулятор довільного елемента a *кільця* R *є скінченнопородженим ідеалом і*

(2). скінченний перетин скінченнопороджених ідеалів є скінченнопородженим ідеалом[12].

Доведено, що скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є морфічним кільцем, тобто, справедливим є такий результат.

Теорема 2.1 *Нехай* R *– комутативна область Безу, елемент* $a \in R \setminus \{0\}$*, тоді:*

(1). R/aR *– когерентне;*

(2). R/aR *– P-ін’єктивне;*

(3). R/aR *– морфічне.*

---

[6] Nicholson W. K. Quasi-Frobenius rings / W. K. Nicholson, M. F. Yousif // Cambridge Univ. Press. – 2003. – 158. – P.327.

Зауважимо, що комутативне морфічне кільце є кільцем Безу[2].

Також у цьому розділі отримано відповідь на відкрите питання Ніколсона та Санчез Кампоса про існування морфічних кілець, які не є чистими. Нагадаємо, що кільце R називається *чистим*, якщо довільний елемент $x \in R$ можна представити у вигляді суми ідемпотента та оборотного елемента цього кільця[7].

Приклад 2.1. (Приклад Хенріксена)

Розглянемо кільце

$$R = \{z_0 + a_1 x + a_1 x_2 + \ldots \mid z_0 \in \square,\ a_i \in \square,\ i = 1, 2, \ldots\}.$$

Зауважимо, що R є комутативною областю Безу Фактор-кільце R / xR за теоремою 2.1 є морфічним кільцем, але воно не є чистим, оскільки, для ідеалу

$$N = \{a_1 x + a_1 x_2 + \ldots \mid a_i \in \square,\ i = 1, 2, \ldots\}$$

ідеал N / xR є простим ідеалом, який міститься у всіх максимальних ідеалах даного фактор-кільця R / xR. Тому, R / xR не є чистим кільцем, оскільки чисте кільце є PM-кільцем.

Вивчаючи скінченні гомоморфні образи комутативних кілець Прюфера, Фейс та Факкіні виділили в класі IF-кілець підклас кілець Каша і поставили питання про існування і методи побудови таких кілець[8]. У дисертації дається відповідь на це запитання у випадку скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу.

Означення 2.2. *Комутативне кільце R називається кільцем Каша, якщо анулятор довільного ідеалу кільця R відмінний від нуля*[9].

Теорема 2.2. *Нехай R — комутативна область Безу, елемент $a \neq 0$ належить R, тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(1). R / aR — кільце Каша;

(2). довільний максимальний ідеал M кільця R, що містить елемент a є головним.

Наслідок 2.1 *Якщо R — комутативна область головних ідеалів, тоді R / aR є кільцем Каша для будь-якого ненульового елемента $a \in R$.*

---

[7] Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings / W. K. Nicholson // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – 229. P.269–278.

[8] Facchini A., Faith C. FP-injective quotient rings and elementary divisor rings / A. Facchini, C. Faith // Commut. Ring Theory Proc. // Int. conf., –1996. – 185. – P. 293—302.

Також, у цьому розділі, розглянуто поняття однозначно морфічного кільця, яке було введено у 2010[9] та обчислено стабільний ранг цього класу кілець.

Означення 2.3. *Кільце* R *називається однозначно морфічним, якщо для довільного елемента* a *кільця* R *існує єдиний елемент* $b \in R$*, для якого виконується* $Ra = l(b)$ *і* $l(a) = Rb$[9].

Теорема 2.3. *Однозначно морфічне кільце є кільцем стабільного рангу* 1.

Також доведено, що однозначно морфічне кільце є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.5 *Однозначно морфічне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Також, у цьому розділі досліджуються морфічні кільця акуратного рангу 1.

МакГоверн у 2006 році ввів поняття акуратного елемента кільця і воно знайшло широке застосування у сучасних алгебраїчних дослідженнях.

Означення 2.4. *Елемент* $a \in R \setminus \{0\}$ *називається акуратним елементом в кільці* R*, якщо* R / aR *є чистим.*

Означення 2.5. R *є кільцем акуратного рангу* 1*, якщо для довільних елементів* $a, b \in R$ *таких, що* $aR + bR = R$ *існує* $t \in R$*, такий що* $a + bt$ *є акуратним елементом кільця* R[10].

У випадку морфічних кілець поставлена задача знаходження умови на твірні елементи головних ідеалів є еквівалентною умові кільця акуратний ранг якого дорівнює 1. Має місце таке твердження:

Твердження 2.2 *Морфічне кільце є кільцем акуратного рангу* 1 *тоді і тільки тоді, коли для довільної пари елементів* $a, b \in R$ *такі, що* $aR = bR$ *існують акуратні елементи* $s, t \in R$ *такі, що* $as = b$ *та* $a = bt$.

Також встановлено існування морфічних кілець акуратного рангу 1.

Теорема 2.7 *Нехай* R *є комутативним кільцем з* 1. *Якщо* R *є областю елементарних дільників та* $a \in R \setminus \{0\}$*, тоді, фактор-кільце* R / aR *є морфічним*

[9]Tamer Kosan M. Uniquely morphic rings / M. Tamer Kosan, Tsin-Knen Ice, Yigiang Thoun // J. Algebra. – 2010. – 217, №32.– P.1072–1085.

[10]Zabavsky B. Diagonal reduction of matrices over rings / B. Zabavsky // Matematychni Studii Monograph Series, volume XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, 251 p.

кільцем акуратного рангу 1.

Канфел[11] ввів поняття однозначної породжуваності для множини головних ідеалів, тобто, множина $\{a_iR \mid i=1,2,...,n\}$ є однозначно породжуваною, якщо $a_iR=b_iR$ то існують елементи $u_i \in R$ такі, що $a_i=b_iu_i$, $i=1,2,...,n$ і $u_1R+u_2R+...+u_nR=R$.

Розмірністю комутативного кільця R назвемо найменше ціле число n таке, що кожна множина з $n+1$ головних ідеалів однозначно породжується. Дане число, якщо воно існує, будемо позначати $\dim(R)$.

В цьому розділі, на основі поняття розмірності за Канфелом встановлено, що умова стабільного рангу 2 для комутативного морфічного кільця еквівалентна умові $\dim(R)=1$, що є розширенням відомого результату Канфела про стабільний ранг 1 кільця розмірності $\dim(R)=0$.

Означення 1.30. *Комутативне кільце R називається кільцем майже Бера, якщо для кожного $x\in R$ існує елемент $y\in R$ такий, що $Ann(xR)=yR$, де $Ann(xR)=\{z \mid zxr=0,\ r\in R\}$.*

Теорема 2.9. *Нехай R — комутативне кільце Безу і $\dim(R)=1$. Тоді стабільний ранг кільця R дорівнює* 2.

Теорема 2.10. *Нехай R комутативне майже Бера кільце Безу стабільного рангу* 2*. Тоді* $\dim(R)=1$.

Теорема 2.11. *Комутативне морфічне кільце R є кільцем стабільного рангу* 2 *тоді і тільки тоді, коли* $\dim(R)=1$.

У **третьому розділі** розглядаються комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом. Зокрема, в роботі наведено критерій, коли напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним через властивості радикала Джекобсона, а також, розглянуто різноманітні приклади таких кілець.

Означення 3.1. *Елемент a комутативного кільця Безу R називається адекватним, якщо для довільного елемента $b\in R$ елемент a можна зобразити у вигляді $a=r\cdot s$, де $rR+bR=R$ та $s'R+bR\neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s*[7].

---

[11] Canfell M. J. Uniqueness of generators of principal ideals in rings of continuous function / M. J. Canfell // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – 26. – P.517–573.

Теорема 3.3 *Нехай R — комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним елементом. Тоді, для довільного ненульового і необоротного елемента $b \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $be \in J(R)$ і $eR + bR = R$.*

Напіврегулярні кільця є відомим прикладом кільця з властивістю заміни. Нагадаємо, що кільце R називається *кільцем з властивістю заміни*, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in aR$, що $(1-e) \in (1-a)R$[13]. Зауважимо, що у комутативному випадку поняття кільця з властивістю заміни і чистого кільця співпадають.

В роботі описано комутативні напіврегулярні кільця Безу, як кільця в яких нуль є адекватним.

Теорема 3.4 *Напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним елементом тоді і лише тоді, коли воно є регулярним (в сенсі Неймана).*

Дослідження комутативних кілець Безу, в яких нуль є адекватним, започатковано у 1974 році Ларсеном, Левісом та Шоресом[12]. Вони ж неявно ставлять задачу повного опису таких кілець і наступний результат є повною відповіддю на їх запитання. Більше того, цей результат дає методи побудови таких класів кілець у вигляді скінченних гомоморфних образів адекватних областей.

Теорема 3.5 *Нехай R – комутативне кільце Безу. Тоді такі твердження є еквівалентними:*

(1). R *– кільце, в якому нуль є адекватним;*

(2). R *– напіврегулярне кільце.*

У **четвертому розділі** по аналогії до поняття локально регулярного кільця введеного Контесою[13], введено поняття локально гельфандової області Безу та встановлено її найпростіші властивості.

Означення 1.25. *Кільце R назвемо гельфандовим, якщо для довільної пари $a, b \in R$, для якої виконується умова $a + b = 1$ існують елементи $r, s \in R$, такі, що $(1+ar)(1+bs) = 0$.*

Означення 1.26. *Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R назвемо гельфандовим, якщо фактор-кільце R / aR є гельфандовим кільцем.*

---

[12] Larsen M. Elementary divisor rings and finitely presented modules / M. Larsen, W. Lewis, T. Shores // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P.231–248.

[13] Contessa M. On certain classes of PM-rings / M. Contessa // Commun. Algebra – 1984. – 12. – P. 1447–1469.

Нагадаємо, що кільце R називається *PM-кільцем*, якщо довільний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. Кільце R називається *PM*-кільцем*, якщо довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Зауважимо, що у комутативному випадку поняття гельфандового кільця та PM-кільця співпадають.

Означення 4.1. *Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R називається PM-елементом, якщо фактор-кільце R/aR є PM-кільцем.*

Означення 4.2. *Комутативне кільце є локально гельфандовим кільцем (позначимо GLR), якщо для довільного $a \in R$ або a або $1-a$ є PM-елементом.*

Твердження 4.3. *Комутативна область, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, є локально гельфандовим кільцем.*

Твердження 4.4. *Комутативна область Безу є GLR кільцем тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a,b \in R$ таких, що $aR+bR=R$ один з елементів a або b є PM-елементом.*

Також, у цьому розділі доведено, що локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників.

Теорема 4.1. *Довільна GLR область Безу є кільцем елементарних дільників.*

У **п'ятому розділі** на основі поняття гельфандового елемента введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу.

Означення 5.1. *Назвемо ідеал I кільця R гельфандовим, якщо I містить хоча б один гельфандовий елемент. У протилежному випадку ідеал I назвемо негельфандовим, тобто, довільний ненульовий елемент ідеалу I є негельфандовим.*

Означення 5.2. *Негельфандовий ідеал N назвемо максимально негельфандовим, якщо для довільного ідеалу I такого, що $N \subset I$, $I \neq N$ існує гельфандовий елемент a, який належить I.*

Встановлено, що довільний негельфандовий ідеал міститься хоча б в одному максимально негельфандовому ідеалі, а також, показано, що максимально негельфандовий ідеал є простим.

Твердження 5.2. *Довільний негельфандовий ідеал комутативної області Безу* *міститься хоча б в одному максимально негельфандовому ідеалі.*

Твердження 5.3. *Кожний максимально негельфандовий ідеал комутативної області Безу є простим ідеалом.*

Більше того, отримано такий результат.

Твердження 5.4. *Нехай R – комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал містить гельфандовий елемент, тоді R є областю, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному.*

Цей результат дає нове описання комутативних *PM**-областей Безу за допомогою гельфандових елементів. Це дозволило ввести аналог радикала Джекобсона для максимально негельфандових ідеалів. А саме, через $A\ R$ позначимо перетин всіх максимально негельфандових ідеалів. Доведено наступну властивість, яка аналогічна до відомої властивості радикала Джекобсона.

Твердження 5.5. *Нехай R – комутативна область Безу, $b \in A\ R$ і a – гельфандовий елемент в R. Тоді для довільного $x \in R$ елемент $a + bx$ є гельфандовим.*

Наступне твердження у випадку єдиного максимально негельфандового ідеалу показує, що така область має аналогічні властивості до локальної області.

Твердження 5.7 *Для комутативної області Безу такі властивості еквівалентні:*

(1). *у кільці R існує єдиний максимально негельфандовий ідеал N;*

(2). *сума довільних двох негельфандових елементів є негельфандовим елементом.*

Показано, що комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів є кільцем гельфандового рангу 1. Звідси випливає основний результат цього розділу:

Теорема 5.2. *Комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів є кільцем елементарних дільників.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню морфічних кілець та скінченних гомоморфних образів комутативних областей Безу. Також обчислюється стабільний ранг різних класів кілець Безу та його узагальнень.

У дисертації автором отримано такі нові результати:

1. доведено, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є морфічними кільцями;
2. вказано необхідні і достатні умови коли скінченні гомоморфні образи комутатавної області Безу є кільцями Каша (часткова відповідь на запитання Фейса й Факкіні);
3. дано відповідь на відкрите запитання Ніколсона і Санчес-Кампоса, про існування морфічних кілець, які не є чистими;
4. показано, що стабільний ранг однозначно морфічних кілець рівний 1 і, як наслідок, отримано, що однозначно морфічні кільця є кільцями елементарних дільників;
5. встановлено, що умова акуратного рангу 1 для морфічного кільця еквівалентна умові однозначності твірних елементів головного ідеалу з точністю до акуратності;
6. встановлено необхідні і достатні умови на розмірність кільця (в сенсі Канфела) щоб це кільце було кільцем стабільного рангу 2;
7. вказано, що клас комутативних кілець Безу є кільцями, в яких нуль є адекватним, тоді і тільки тоді, коли ці кільця є напіврегулярними (відповідь на запитання Ларсена, Левіса, Шореса);
8. доведено, що комутативна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників (відповідь на запитання Забавського);
9. досліджено комутативні локально гельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та доведено, що вони є кільцями елементарних дільників.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Богдану Володимировичу Забавському за постановку задач та ідейне наповнення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Пігура О. В. Комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом, напіврегулярні / О. В. Пігура // Прикл. пробл. мех. та мат. – 2014. – 12. – С.56–58.

2. Пігура О. В. Максимально негельфандові ідеали комутативної області Безу / О. В. Пігура // Прикл. пробл. мех. та мат. – 2015. – 13. – С.47–52.

3. Pihura O. V. A morphic ring of neat range one / O. V. Pihura, B. V. Zabavsky // Algebra and Discrete Mathematics – 2015. – 20, №1 – P.325–329.

4. Zabavsky B. V. Bezout morphic rings / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2014. – 79. – P.163–168.

5. Zabavsky B. V. Commutative morphic rings of stable range 2 / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // Proc. Inter. Geom. Center – 2015. – 8, №3-4 – P.65–68.

6. Zabavsky B. V. Gelfand local Bezout domains are elementary divisor rings / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // Carpathian Math. Publ. – 2015. – 2, №2 – P.188–190.

7. Zabavsky B. V., Pihura O. V. Bezout morphic rings / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // 9th International Algebraic Conference in Ukraine, July 8 – 13, 2013: Book of Abstract. – L’viv, 2013. – P.222.

8. Пігура О. В. Скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу скінченної розмірності Голді / О. В. Пігура // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2014”, 28 – 30 травня 2014 р., Львів. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: (http://iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Pigura.pdf).

9. Zabavsky B. V. Conditions under which a morphic ring of stable range 2 is an elementary divisor ring / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin, July 7 – 12, 2014: Book of Abstracts. – Kyiv, 2014. – P.66-67.

10. Pihura O.V. Gelfand local Bezout domains are elementary divisor rings / O. V. Pihura // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20 – 27, 2015: Book of Abstracts. – Odessa, 2015. – P.86.

11. Пігура О. В. Максимально негельфандові ідеали комутативної облаті Безу / О. В. Пігура // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, 24 – 27 лютого 2016р.: Тези доповідей. – Ворохта, 2016. – С.112–113.

АНОТАЦІЯ

Пігура О. В. *Морфічні кільця Безу*. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню морфічних кілець та скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу, обчисленню стабільного рангу різних класів кілець Безу та їх узагальнень. Доведено, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є морфічними кільцями. Обчислено стабільний ранг однозначно морфічних кілець та доведено, що такі кільця є кільцями елементарних дільників. Встановлено, що умова акуратного рангу 1 для морфічного кільця еквівалентна умові однозначності твірних елементів головного ідеалу з точністю до акуратності. Встановлено необхідні і достатні умови на розмірність морфічного кільця (в сенсі Канфела) для того, щоб кільце було кільцем стабільного рангу 2. Введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу та встановлено його властивості, а також, введено гельфандовий аналог радикала Джекобсона і доведено його властивості. Також досліджено локально негельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та доведено, що вони є кільцями елементарних дільників. А також, дано відповіді на запитання Забавського, Ніколсона та Санчез Кампоса, Фейса й Факкіні, Ларсена, Левіса та Шореса.

Ключові слова: стабільний ранг, акуратний ранг 1, адекватне кільце, кільце Безу, кільце елементарних дільників, морфічне кільце, однозначно морфічне кільце, регулярне кільце, напіврегулярне кільце, PM-кільце, PM*-кільце, локально гельфандове кільце, максимально негельфандовий ідеал.

АННОТАЦИЯ

Пигура О. В. *Морфические кольца Безу.*– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2016.

В диссертационной работе исследуются морфические кольца и конечные гомоморфные образы коммутативной области Безу, вычисляется стабильный ранг разнообразных классов колец Безу, а также их обобщений. Доказано, что конечные гомоморфные образы коммутативной области Безу являются морфическими кольцами. Вычислен стабильный ранг однозначно морфических колец и доказано, что эти кольца являются кольцами элементарных делителей. Получена эквивалентность условия аккуратного ранга 1 для морфических колец и однозначности определения образующих главных идеалов с точностью до умножения на аккуратный элемент. Найдены необходимые и достаточные условия для размерности (по Канфеллу) морфического кольца, чтобы его стабильный ранг был равен 2. Определено понятие максимального негельфандового идеала коммутативной области Безу, доказаны его основные свойства, рассмотрен гельфандов аналог радикала Джекобсона. Кроме этого, исследованы локально гельфандовые области Безу и коммутативные области Безу с конечным числом максимально негельфандовых идеалов. Доказано, что такие кольца являются кольцами гельфандового ранга 1 и это кольца элементарных делителей. А также, получены ответы на вопросы Забавского, Николсона и Санчез Кампоса, Фейса и Факкини, Ларсена, Льюиса, Шореса.

Ключевые слова: стабильный ранг, аккуратный ранг 1, адекватное кольцо, кольцо Безу, кольцо элементарных делителей, морфическое кольцо, однозначно морфическое кольцо, регулярное кольцо, полурегулярное кольцо, PM-кольцо, PM*-кольцо, локально гельфандовое кольцо, максимально негельфандовый идеал.

ABSTRACT

Pihura O. V. *Bezout morphic rings.* – Manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences by the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to investigation of the morphic rings and finite homomorphic images of commutative Bezout domains, as well as calculations of stable range for the different Bezout rings and their generalizations. Fundamental connections of problems of diagonalization of matrix with stable range and its modern generalizations are obtained. It is proved that any finite homomorphic image of a commutative Bezout domain is a morphic ring, thus answering the question of Nicholson and Sanchez Campos on the existence of morphic rings that are not clean. Necessary and sufficient conditions for the finite homomorphic images of commutative Bezout rings to be Kasch rings are presented; this answers an open question of Faith and Facchini. The stable range of uniquely morphic rings is calculated and it is proved that these rings are elementary divisors rings. We know that in the case of a left quasi morphic ring the property of being uniquely generated is equivalent to that a ring has stable range one. It is proved that for a commutative morphic ring the condition of a neat range one is equivalent to the uniquely generated weak condition up to a neat element. Equivalent definition for the stable range 2 of morphic rings in terms of its Kanfell dimension are found. It is proved that a commutative semiprime Bezout ring is a ring in which zero is an adequate element if and only if it is a regular (von Neuman) ring. Moreover, we answer to the open question of Larsen, Lewis and Shores on the equivalence of rings in which zero is an adequate element and semiregular rings. We define the notion of maximal nongelfand ideal of the commutative Bezout domain, the Gelfand analog of Jacobson radical with their basic properties proved. Answering Zabavsky’s question it is proved that any commutative Gelfand local Bezout domain is an elementary divisor ring. It is proved that a commutative domain in which each nonzero prime ideal is a contained in a unique maximal ideal, is a Gelfand local ring. As a consequence we obtain that a commutative Bezout domain in which each nonzero prime ideal is contained in a unique maximal ideal, is an elementary divisor ring. Also the Gelfand local domains and the commutative Bezout domains with finite number of maximal non-Gelfand ideals are studied in the research. It is proved that such rings are the rings of Gelfand range 1 and they are elementary divisor rings.

Keywords: stable range, neat range 1, adequate ring, Bezout ring, elementary divisor ring, morphic ring, uniquely morphic ring, von Neumann regular ring, semiregular ring, PM-ring, PM*-ring, Gelfand local ring, maximal non-Gelfand ideal.