МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Пігура Оксана Василівна

УДК 512.552.13

МОРФІЧНІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Забавський Богдан Володимирович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{M}_{n\times m}(R)$ — кільце матриць розміру $n \times m$ над кільцем R;

D_n — діагональна матриця розміру $n \times n$ над кільцем R $D = (d_{ii}),\ \ i = 1, 2, \dots, n$;

$A \sim B$ — матриці A та B еквівалентні;

$GL_n(R)$ — група оборотніх матриць порядку $n \times n$;

$\mathbb{R}[x]$ — кільце многочленів з коефіцієнтами з кільця R;

$\mathcal{C}(X)$ — кільце неперервних дійсних функцій на просторі X;

$\mathbb{Q}_{Cl}(R)$ — класичне кільце дробів кільця R;

$R \propto M$ — тривіальне розширення (R – кільце, ${}_RM_R$ – бімодуль);

$U(R)$ — група одиниць кільця R;

$\mathbb{Z}_n$ — кільце лишків за модулем n;

$\mathbb{Z}_{(p)}$ — кільце всіх раціональних чисел, знаменник яких взаємно простий з p;

$\mathrm{spec}\,(R)$ — множина всіх простих ідеалів комутативного кільця R;

$\mathrm{mspec}\,(R)$ — множина всіх максимальних ідеалів комутативного кільця R;

$\overline{R}$ — скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу ($\overline{R} = R/aR$ для довільного ненульового елемента $a \in R$);

J(R) — радикал Джекобсона кільця R;

$N\,(R)$ — ніль-радикал кільця R;

$\mathrm{st.r}\,(R)$ — стабільний ранг кільця R;

$l(a)$	— лівий анулятор елемента a $l(a) = \{z \mid za = 0, a \in R\}$;
$r(a)$	— правий анулятор елемента a $r(a) = \{z \mid az = 0, a \in R\}$;
$\mathrm{Ann}(a)$	— анулятор елемента a (комутативний випадок);
$a \mid b$	— елемент a є дільником елемента b (a ділить b) $(aR \subset bR)$ (R – комутативне кільце);
$a \parallel b$	— елемент a є повним дільником елемента b $(RbR \subseteq aR \cap Ra)$;
(a, b)	— найбільший спільний дільник елементів a і b, де $a, b \in R$, R – комутативне кільце.

ВСТУП

Актуальність теми.

Для асоціативного кільця R з одиницею Ерліх [28] у 1976 році показала, що кільце R є одинично-регулярним тоді і тільки тоді, коли воно є регулярним (в сенсі фон Неймана) і для довільного елемента $a \in R$ виконується умова

$$R/Ra \cong l(a)$$

в сенсі R-модульного ізоморфізму, де $l(a)$ — лівий анулятор елемента a.

На основі цього результату Ніколсон і Санчез Кампос [58] у 2004 році ввели у розгляд поняття морфічного кільця, а саме: асоціативне кільце R з одиницею називається лівим морфічним, якщо для довільного елемента $a \in R$ виконується

$$R/Ra \cong l(a).$$

Зауважимо, що ця умова еквівалентна наступній властивості: для довільного елемента $a \in R$ існує елемент $b \in R$ такий, що

$$Ra = l(b) \text{ і } l(a) = Rb.$$

Цей новий клас кілець знайшов широке застосування у сучасних алгебраїчних дослідженнях. Клас лівих морфічних кілець містить одинично-регулярні кільця, артінові кільця, кільця головних ідеалів [47].

Зауважимо, що в регулярних (в сенсі фон Неймана) кільцях для довільного елемента $a \in R$ існують елементи $b, c \in R$ такі, що

$$Ra = l(b) \text{ і } l(a) = Rc.$$

На основі цієї властивості Каміло і Ніколсон [14] ввели в розгляд ліві квазі-морфічні кільця, як узагальнення морфічних кілець, а саме: асоціативне кільце R з одиницею називається лівим квазі-дуо кільцем, якщо для довільного елемента $a \in R$ існують елементи $b, c \in R$ для яких виконується умова

$$Ra = l(b) \ \text{ і } \ l(a) = Rc.$$

Жу і Дінг [86] назвали кільце R лівим узагальнено морфічним, якщо $l(a)$ є головним лівим ідеалом для довільного елемента $a \in R$. Праві аналоги таких кілець визначаються у цей же спосіб.

Аналогічно визначаються квазі-морфічні та узагальнено морфічні кільця. Каміло і Ніколсон [14] довели, що ліве квазі-морфічне кільце є лівим кільцем Безу, а також, воно є лівим когерентним. У випадку комутативних кілець, класи морфічних і квазі-морфічних кілець співпадають. Більше того, ці кільця є IF-кільцями, тобто, всі ін'єктивні модулі над цими кільцями є плоскими [30].

Вивчення дробових IF-кілець є актуальною задачею теорії кілець і модулів. Нехай $\mathcal{P}$ деяка кільцева властивість. Згідно з Вамосом [66], комутативне кільце R є дробовим кільцем з властивістю $\mathcal{P}$, якщо класичне кільце дробів $\mathbb{Q}_{Cl}(R/I)$ кільця R/I володіє властивістю $\mathcal{P}$ для довільного ненульового ідеалу I кільця R. Так, на приклад, довільне нетерове кільце є дробово напівлокальним і, також, дробовим кільцем Каша. В роботі [30] автори вивчають різні класи IF-кілець, зокрема, арифметичні дробові кільця Каша, а також, встановлюють їх зв'язок з кільцями елементарних дільників.

Ніколсон і Санчез Кампос [58] показали, що напівдосконале ліве морфічне кільце є скінченним добутком матричних кілець над локальними лівими морфічними кільцями. Крім того, ними було поставлено ряд відкритих питань. Зокрема, Каміло і Ю показали, що довільне одинично-регулярне кільце є чистим (тобто кільцем в якому довільний елемент є сумою оборотнього елемента та ідемпотента). Це дозволило Ніколсону і Санчез Кампосу поставили питання: "Чи є довільне ліве і праве морфічне кільце чистим [58]?". В цій дисертаційній роботі наводиться приклад, який є негативною відповіддю на це питання. Автори [58] зазначили, що кільце лишків по модулю натурального числа n є завжди морфічним кільцем. В цій роботі доводиться більш загальний результат, а саме: довільний нетривіальний скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є морфічним кільцем.

Ці ж автори [55] розглядають поняття морфічного модуля, а саме: модуль M називається морфічним, якщо

$$M/M\alpha \cong \mathrm{Ker}\alpha$$

для довільного ендоморфізму $\alpha \in \mathrm{End}M$ та доводять, що кільце $M_n(R)$ є лівим морфічним тоді і лише тоді, коли ${}_RR^n$ є морфічним [55].

В роботі [56] розглянуто ліві морфічні кільця, які є правими головними (тобто є кільцями головних правих ідеалів) та показано, що цей клас кілець є Моріта інваріантом. Прикладом такого кільця є кільце $M_n(\mathbb{Z}_{p^n})$, де p — просте число. Більше того, показано, що ліве морфічне праве головне кільце є кільцем з властивістю заміни тоді і лише тоді, коли воно є лівим артіновим (напівдосконалим) кільцем. В роботі [17] вивчаються умови, при яких групові кільця є морфічними.

Достатньо поверхневого погляду по інтернету, щоб побачити величезну кількість сучасних робіт, які стосуються теорії кілець з властивістю заміни та чистих кілець. Те, що досліджувані класи кілець тісно пов'язані з класами чистих кілець підкреслює той факт, що комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним елементом, співпадають з класами комутативних чистих кілець. Зазначимо, що вивчення кілець, в яких нуль є адекватним, було започатковано Левісом, Ларсеном та Шоресом [46] і активно продовжується Забавським та його учнями [80, 81, 85].

Зауважимо, що клас комутативних кілець з властивістю заміни можна визначити як клас кілець ідемпотентного стабільного рангу 1 [50].

Це показує, що дані класи кілець стоять на передньому плані не тільки досліджень алгебри, а й алгебраїчної K-теорії. Тому, вивчення комутативних областей Безу скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни (чистими кільцями) є доволі актуальною задачею як теорії кілець та модулів, так і алгебраїчної K-теорії.

В роботі [27] авторами встановлено умови, коли $R \propto \mathbb{Q}_{Cl}(R)$ є морфічним, де R є комутативним редукованим кільцем з класичним кільцем дробів $\mathbb{Q}_{Cl}(R)$ кільця R. Зокрема, показано, що тривіальне розширення $R \propto M$, де R є кільцем, а M є бімодулем, є лівим морфічним, тоді R є лівим кільцем Безу і ${}_RM$ є (лівим) модулем Безу.

Більше того, якщо R є комутативним редукованим кільцем з класичним кільцем дробів $\mathbb{Q}_{Cl}(R)$ кільця R, тоді кільце

$$R \propto \mathbb{Q}_{Cl}(R)$$

є морфічним тоді і тільки тоді, коли R є узагальнено морфічним кільцем Безу. Як наслідок, для комутативної області Безу R отримуємо, що

$$R \propto \mathbb{Q}_{Cl}(R)$$

є морфічним.

Більше того, у випадку коли R є кільцем елементарних дільників (не обов'язково комутативним) і M є бімодулем таким, що $R \propto M$ є морфічним, тоді

$$S = R \propto M$$

є строго морфічним, тобто S є кільцем, над яким всі матричні кільця є морфічними.

В алгебрі зустрічаються різні означення кілець над якими діагоналізуються матриці, а саме: кільця над якими діагоналізуються всі матриці, кільця над якими діагоналізуються лише квадратні матриці або матриці певного вигляду або матриці певного розміру [81].

Означення 0.1 *Кільце R називається кільцем елементарних дільників (класична діагоналізація або кільце елементарних дільників за Капланським), якщо для довільної матриці $A_{n\times m}(R)$ існують оборотні матриці $P \in GL_n(R)$, $Q \in GL_m(R)$ такі, що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $d_{i+1} \parallel d_i$ для всіх $i = 1, 2, \dots, r-1$.

Означення 0.2 *Кільце R називається таким, що може бути діагоналізованим (кільцем елементарних дільників за Хенріксеном), якщо для кожної квадратної матриці A порядку n над R існують оборотні матриці $P \in GL_n(R)$, $Q \in GL_n(R)$ такі, що*

$$PAQ = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0).$$

В багатьох роботах постає питання діагоналізації лише ідемпотентних матриць (ID-кілець), або лише регулярних матриць.

Нагадаємо [9], що матриця A над кільцем R називається регулярною (в сенсі фон Неймана), якщо над цим кільцем існує матриця X така, що

$$AXA = A.$$

Так, на приклад, в роботі [9] розглядається питання діагоналізації регулярних (в сенсі фон Неймана) матриць над кільцями з властивістю заміни.

Згідно з результатами [46] комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільний скінченнозображений

R-модуль є прямою сумою циклічних підмодулів. Тобто, клас кілець елементарних дільників, у комутативному випадку, є розв'язком проблеми Уорфілда: "Над якими кільцями довільний скінченнозображений модуль є прямою сумою циклічних підмодулів?".

У випадку діагоналізації матриць (за Хенріксеном) Меналом і Монказі [53] показано, що довільна прямокутна матриця над регулярним (в сенсі фон Неймана) кільцем R діагоналізується (за Хенріксеном) тоді і тільки тоді, коли скінченнопороджені проективні модулі володіють властивістю скорочуваності, тобто, з того, що

$$2R \oplus A \cong R \oplus B$$

випливає, що

$$R \oplus A \cong B.$$

Якщо R регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце таке, що

$$2R \cong R \neq \{0\}$$

(на приклад, якщо R є чисто нескінченне кільце [33]), то властивість скорочення не виконується у випадку, коли $A = B = \{0\}$. Більше того, стабільний ранг такого регулярного (в сенсі фон Неймана) кільця більший 2 [9].

В роботі [9] показано, що регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце R є кільцем елементарних дільників, якщо виконується наступна умова скорочуваності для скінченнопороджених проективних модулів, а саме: з умови

$$A \oplus A \cong A \oplus B \cong B \oplus B$$

випливає, що

$$A \cong B.$$

Зауважимо, що ця властивість є еквівілентна умові, що кутове кільце eRe (для довільного ідемпотента $e \in R$) є кільцем елементарних дільників (за Хенріксеном).

Відзначимо, що цей клас кілець володіє такою властивістю: над даними кільцями довільна квадратна матриця діагоналізується. Зауважимо, що прямокутні матриці, взагалі кажучи, не діагоналізуються. Аналогічна властивість, як показав Леві, характерна для матриць над ланцюговим кільцем [49].

Кільця елементарних дільників є кільцями Безу [42]. У випадку комутативних кілець Гілман і Хенріксен [32] побудували приклад комутативного кільця Безу, яке не є кільцем елементарних дільників. Більше того, вони побудували приклад комутативного кільця Безу над яким всі матриці розміру 1×2 і 2×1 володіють канонічною діагональною редукцією, а матриці порядку 2×2 не володіють. У випадку комутативної області Безу залишається відкритим питання: "Чи буде комутативна область Безу кільцями елементарних дільників (за Капланським)?" [40, 46, 50, 61, 81].

Різними авторами досліджувались класи кілець елементарних дільників. Зокрема, на основі досліджень у 1915 році Веддерберна, властивостей кілець аналітичних функцій на комплексній площині [72], Хелмер ввів у розгляд адекватні кільця і довів, що вони є кільцями елементарних дільників. Гілман і Хенріксен [31] показали, що комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є адекватним, а, отже, і кільцем елементарних дільників. У випадку некомутативних кілець Кон [22, 23] показав, що права головна область Безу є кільцем елементарних дільників, а Хенріксен довів, що над одинично-регулярними кільцями довільна матриця приводиться до діагонального вигляду шляхом домноження на відповідні оборотні матриці [39]. Зазначимо, що регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним тоді і тільки тоді, коли стабільний ранг кільця R дорівнює 1, тобто, якщо довільних елементів $a, b \in R$ таких, що

$$aR + bR = R$$

існує елемент $t \in R$, що

$$(a + bt)R = R.$$

Більше того, Забавський показав, що над комутативним кільцем Безу R довільна 1×2 (2×1) матриця діагоналізується тоді і тільки тоді, коли стабільний ранг кільця R дорівнює 2, тобто, з умови

$$aR + bR + cR = R$$

для довільних елементів $a, b, c \in R$ виконується

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$ [81].

Зауважимо, що поняття стабільного рангу кільця було введено Басом в 1964 році у зв'язку з задачами стабілізації [11] і стало наріжним каменем в дослідженнях алгебраїчної K-теорії. Особливу роль поняття стабільного рангу відіграло в задачах канонічної діагональної редукції матриць над кільцями [81]. Особливе місце в цих дослідженнях відіграли введені Мак Говерном кільця майже стабільного рангу 1, тобто, кільця нетривіальні скінченні гомоморфні образи яких є кільцями стабільного рангу 1 [50].

Звернемо увагу на те, що питання про асоційованість твірних елементів головних ідеалів, які співпадають (умова однозначної породжуваності) було поставлено Капланським в його класичній роботі [42]. Ніколсон, вивчаючи морфічні кільця і їх узагальнення, поставив питання: "Якщо R є лівим квазі-морфічним кільцем і в R виконується умова однозначної породжуваності головних лівих ідеалів, то чи це кільце R є кільцем стабільного рангу 1?"Сідью [64] анонсував позитивну відповідь на дане питання. На основі поняття однозначності твірних елементів головних ідеалів, Канфел ввів таке поняття: множина головних ідеалів $\{a_iR \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ комутативного кільця R є однозначно породжуваною, якщо з умови $a_iR = b_iR$ існують елементи $u_i \in R$ такі, що $a_i = b_iu$, де $i = 1, 2, \ldots, n$ і

$$u_1R + u_2R + \ldots + u_nR = R.$$

Згідно з Канфелом, скажемо, що комутативне кільце має розмірність n (в позначенних $\dim R = n$), якщо n є найменшим натуральним числом таким, що множина $n + 1$ головних ідеалів є однозначно породженою. Канфел, вивчаючи кільце неперервних дійснозначних функцій $\mathcal{C}(X)$ на топологічних F-просторах X встановив зв'язок введеної розмірності з топологічною розмірністю простору X [16]. Тому, актуальною є задача з'ясування зв'язку $\dim R$ з поняттям стабільного рагу кільця R (особливо морфічних кілець стабільного рангу 2).

Відзначимо, що результат Шореса [63], який показав, що напівспадкове комутативне кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного регулярного (в сенсі фон Неймана) елемента (не дільника нуля) $a \in R \setminus \{0\}$ фактор-кільце R/aR є кільцем елементарних дільників. Зауважимо, що це фактор-кільце є морфічним кільцем. Тобто, древнє питання: "Чи буде комутативна область Безу областю елементарних дільників?" зводиться до питання: "Чи буде комутативне морфічне кільце кільцем елементарних дільників?"

Забавський, на основі досліджень Щедрика [62] та Ройтмана [61], ввів поняття кільця акуратного рангу 1 і показав, що комутативна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є областю акуратного рангу 1 [80]. Більше того, на основі поняття PM-елемента та PM-кільця Гаталевич і Забавський показали, що комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі (згідно з МакГоверном PM^*-область [51]) є кільцем елементарних дільників [74]. Відмітимо, той факт, що адекватна область є PM^*-кільцем. Цей результат показав Хенріксен [40], а Ларсен, Левіс, Шорес поставили ряд відкритих питань щодо досліджень комутативних PM^*-областей Безу. Зауважимо, що нетривіальний гомоморфний образ PM^*-кільця є PM-кільцем, яке було введено Контесою, а клас комутативних PM-кілець співпадають з класом гельфандових кілець [24].

Тому задача вивчення кілець, які узагальнюють PM^*-кільця, гельфандові кільця, і, зокрема, вивчення морфічних кілець акуратного рангу 1, гельфандавого рангу 1 є актуальною і затребуваною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, належить до основних досліджень кафедри алгебри і логіки, а також, пов'язаний з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною досліджень держбюджетної теми ММ–146Ф "Аналітичні методи дослідження випадкових еволюцій та гомологічна класифікація алгебраїчних систем з використанням теорії стабільності"(номер державної реєстрації 0113U003052), яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є дослідження скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу, морфічних кілець та обчислення стабільного рангу цих та інших класів кілець.

Завданнями дослідження є:

— дослідити властивості нетривіальних скінченних гомоморфних образів комутативної області Безу;

— дослідити канонічну діагональну редукцію над комутативними морфічними кільцями акуратного рангу 1;

— вказати необхідні і достатні умови, коли нетривіальні скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є кільцями Каша;

— дослідити зв'язок морфічних кілець з чистими;

— обчислити стабільний ранг однозначно морфічних кілець;

— розглянути різноманітні узагальнення гельфандових кілець, встановити їх існування, дослідити питання діагональної редукції матриць над ними;

— встановити зв'язок розмірності (по Канфелу) зі стабільним рангом морфічного кільця;

— дослідити комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом, і описати такі кільця в класі напіврегулярних кілець.

Об'єкт дослідження: кільця скінченного стабільного рангу, кільця Безу, морфічні кільця, гельфандові кільця.

Предмет дослідження: стабільний ранг кільця та його узагальнення, а також, дослідження різних класів кілець Безу.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використовуються методи теорії кілець та модулів і алгебраїчної К-теорії.

Наукова новизна одержаних результатів.

Усі результати дисертації є новими і полягають в наступному:

— доведено, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є морфічними кільцями;

— вказано необхідні і достатні умови, коли скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є кільцями Каша (часткова відповідь на питання Фейса й Факкіні);

— дано відповідь на відкрите питання Ніколсона і Санчез Кампоса, про існування морфічних кілець, які не є чистими;

— показано, що стабільний ранг однозначно морфічних кілець рівний 1 і, як наслідок, отримано, що однозначно морфічні кільця є кільцями елементарних дільників;

— встановлено, що умова акуратного рангу 1 для морфічного кільця еквівалентна умові однозначності твірних елементів головного ідеалу з точністю до акуратності;

— встановлено необхідні і достатні умови на розмірність кільця (в сенсі Канфела) щоб кільце було кільцем стабільного рангу 2;

— вказано, що клас комутативних кілець Безу є кільцями, в яких нуль є адекватним, тоді і тільки тоді, коли ці кільця є напіврегулярними (відповідь на питання Ларсена, Левіса, Шореса);

— доведено, що комутативна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників (відповідь на відкрите питання Забавського);

— введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу та встановлено його властивості;

— введено гельфандовий аналог радикала Джекобсона і досліджено його властивості;

— досліджено локально негельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та, як наслідок, доведено, що вони є кільцями елементарних дільників.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати дисертації мають теоретичний характер і є новими в теорії кілець. Розроблені методи та одержані результати можуть бути використані у подальших K-теоретичних дослідженнях та у задачах теорії кілець і модулів, які пов'язані з поняттями стабільного рангу та кільцями елементарних дільників.

Особистий внесок здобувача.

Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Постановка задач, вибір методів дослідження, аналіз результатів та загальна координація роботи належать науковому керівнику. У спільних з науковим керівником публікаціях за темою дисертації внески співавторів є рівними і невіддільними.

Основні результати дисертаційної роботи були оприлюднені і обговорені на таких конференціях:

— IX міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, м. Львів (8–13 липня 2013 р.);

— науковій конференції "Підстригачівські читання — 2014 м. Львів (28–30 травня 2014 р.);

— міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна, м. Київ (7–12 липня 2014 р.);

— X міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда, м. Одеса (20–27 серпня 2015 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу м. Ворохта, (24–27 лютого 2016 р.).

Крім того, результати дисертації неодноразово доповідалися на наукових семінарах:

— Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, керівник — член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд, 2016 р.);

— Алгебраїчному семінарі "Problems of elementary divisor rings"(Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор Б. В. Забавський, 2013–2016 рр.);

— Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет ім. І. Франка, керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор М. Я. Комарницький, 2016 р.).

Публікації.

Результати дисертаційної роботи опубліковано у 11 наукових працях, з них 5 [5, 6, 76, 77, 84] — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (2 без співавторів), 1 [59] — у наукових фахових виданнях, які включені до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus" та 3 [60, 75, 79] — у матеріалах міжнародних наукових конференціях і 2 [7, 8] — у матеріалах всеукраїнської наукової конференції.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Б. В. Забавському за постановку задач та ідейне наповнення.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації — 121 сторінка. Список використаних джерел займає 9 сторінок та містить 86 найменувань.

РОЗДІЛ 1
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ, ДОПОМІЖНІ ФАКТИ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Попередні відомості та допоміжні факти

У цьому розділі розглядаються різноманітні класи кілець, а також, подаються означення, відомі теореми, твердження та факти, що стосуються теми дисертаці.

Під кільцем розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, в якому $1 \neq 0$.

Означення 1.1 *[42] Дві матриці A і B над кільцем R називаютьcя еквівалентними, якщо існують такі оборотні матриці P і Q відповідних розмірів над кільцем R для яких виконуєтьcя така умова:*

$$B = PAQ.$$

Як правило, позначення $A \sim B$ означає, що матриця A еквівалентна матриці до B [42].

Згідно з Меналом та Монґазі [52, 53] маємо:

Означення 1.2 *Кільцем елементарних дільників (за Хенріксеном) називається таке кільце R, у якому довільна матриця A над цим кільцем володіє діагональною редукцією. Іншими словами, якщо довільна квадратна матриця $A \sim D$, де D – діагональна матриця, $D = (d_{ii})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Класичне означення кільця елементаних дільників було введено Капланським [42].

Означення 1.3 *Кільце R називається кільцем елементарних дільників (за Капланським), якщо довільна матриця A розміру $m \times n$ еквівалентна канонічній діагональній матриці, а саме, для матриці A існують оборотні матриці $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ такі, що матриця*

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $d_i \parallel d_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$.

Означення, наведене вище, вважається класичним означенням кільця елементарних дільників [81]. У цій роботі під кільцем елементарних дільників, як правило, розумітимемо кільце елементарних дільників за Капланським.

В класі кілець елементарних дільників виділяють підклас кілець з елементарною редукцією матриць.

Означення 1.4 *[81] Кільцем з елементарною редукцією матриць називається таке кільце R, над яким довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці.*

Кільця елементарних дільників є кільцями Ерміта.

Означення 1.5 *[42, 81] Якщо над кільцем R всі матриці розміру 1×2 діагоналізуються, то таке кільце називається правим кільцем Ерміта.*

Лівим кільцем Ерміта називається таке кільце R над яким всі матриці розміру 2×1 діагоналізуються.

Кільце, яке є одночасно і правим, і лівим кільцем Ерміта називається кільцем Ерміта.

Зауважимо, що в класі комутативних кілець поняття лівого кільця Ерміта, правого кільця Ерміта і кільця Ерміта співпадають [81].

З кільцями Ерміта тісно пов'язані багато класів кілець. Наведемо їх нижче.

Означення 1.6 *[22] Правим кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним. Аналогічно визначаються і ліві кільця Безу, а саме: кільце, в якому довільний скінченнопороджений лівий ідеал є головним. Кільце Безу — це кільце, яке є одночасно правим і лівим кільцем Безу.*

За допомогою теорії тривіальних розширень будуться нові приклади комутативних кілець Безу з наперед заданими властивостями, які пов'язані з класами кілець, що досліджуються в даній роботі [41].

Типовим прикладом правого (лівого) кільця Безу служить кільце правих (лівих) головних ідеалів.

Означення 1.7 *[3] Кільце R називається кільцем головних лівих (правих) ідеалів, якщо в ньому довільний лівий (правий) ідеал є головним.*

Наступні теореми визначають умови при яких кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорема 1.1 *[42] Якщо довільні матриці над комутативним кільцем R розміру 1×2, 2×1 та 2×2 володіють канонічною діагональною редукцією, то кільце R є кільцем елементарних дільників.*

Теорема 1.2 *[46] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна квадратна матриця розміру*

2×2, *елементи якої належать кільцю R, володіє канонічною діагональною редукцією.*

Теорема 1.3 *[42] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є кільце Ерміта і для довільних елементів $a, b, c \in R$, які задовольняють умову*

$$aR + bR + cR = R,$$

існують такі елементи $p, q \in R$, для яких виконується

$$(pa + qb)R + qcR = R.$$

У класі кілець елементарних дільників важливе місце займають адекватні кільця, оскільки вони є досить широким класом кілець і містять в собі комутативні області головних ідеалів. Це поняття було введено Хелмером [38]. Воно є часто використовуваним в сучасних алгебраїчних дослідженнях.

Означення 1.8 *[38, 81] Елемент a комутативного кільця Безу R називається адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ елемент a можна зобразити у вигляді добутку двох елементів*

$$a = r \cdot s,$$

де

$$rR + bR = R$$

та

$$s'R + bR \neq R,$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s.

Прикладами адекватних елементів можуть послужити факторіальні та оборотні елементи кільця [81].

Означення 1.9 *[38,81] Адекватним кільцем називається комутативне кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним.*

Справедливим є наступний результат, який встановлює зв'язок адекватних кілець з кільцями елементарних дільників.

Теорема 1.4 *[2] Комутативне адекватне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Наступний клас комутативних кілець є адекватним кільцем.

Означення 1.10 *[33] Кільце R називається регулярним кільцем (в сенсі фон Неймана), якщо для довільного елемента $a \in R$ існує елемент $x \in R$, для якого виконується умова*

$$axa = a.$$

Для регулярних (в сенсі фон Неймана) кілець таке твердження є справедливим.

Теорема 1.5 *[33] Для кільця R наступні властивості є еквівалентними:*

1. *кільце R — регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце;*
2. *довільний головний правий (лівий) ідеал кільця R є породжений ідемпотентом;*
3. *довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал кільця R є породжений ідемпотентним елементом.*

В класі регулярних (в сенсі фон Неймана) кілець відзначимо підклас одинично-регулярних кілець.

Означення 1.11 *[33] Кільце R називається одинично-регулярним кільцем, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує оборотний елемент*

$u \in U(R)$ такий, що

$$aua = a.$$

Теорема 1.6 *[21] Комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним кільцем.*

Більше того, справедливим є такий результат:

Твердження 1.1 *[34, 39] Нехай R — одинично-регулярне кільце. Тоді, для довільного елемента $a \in R$ існують ідемпотентні елементи $e_1 = e_1^2$, $e_2 = e_2^2$, які належать кільцю R і оборотні елементи $u_1,\ u_2 \in U(R)$ такі, що*

$$a = e_1 u_1 = u_2 e_2.$$

Теорема 1.7 *[31] Комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є адекватним кільцем.*

Зауважимо, що у випадку регулярного (в сенсі фон Неймана) кільця умова з означення адекватного кільця, виконується для нульового елемента, більше того, вона виконується і для кільця нормування [46].

Означення 1.12 *[43] Комутативне кільце R називається кільцем нормування, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ виконується $a \mid b$ або $b \mid a$.*

Означення 1.13 *[81] Комутативне кільце Безу R називається всюди адекватним, якщо всі елементи кільця R (зокрема і 0) є адекватним.*

Теорема 1.8 *[81] Комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є всюди адекватним кільцем.*

Теорема 1.9 *[81] Кільце нормування є всюди адекватним кільцем.*

Важливу роль у дослідженнях кілець, які розглядаються в дисертаційній роботі, відіграє такий важливий інваріант K-теорії, як стабільний ранг кільця.

Означення 1.14 *[81] Рядок*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

елементів кільця R називається унімодулярним, якщо

$$a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R.$$

Означення 1.15 *[69] Стабільним рангом кільця R називається найменше натуральне число n таке, що для довільного унімодулярного рядка*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in R^{n+1}$$

довжини $n+1$ існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ такі, що рядок

$$(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n) \in R^n$$

є унімодулярним.

Той факт, що стабільний ранг кільця R дорівнює n позначатимемо так:

$$\mathrm{st.r}(R) = n.$$

Згідно з результатами Васерштейна [68] та Уорфілда [71] ці поняття є ліво-право симетричними.

Означення Васерштейна [68], тобто, $\mathrm{st.r}(R) = n$, передбачає, що дана властивість виконується для довільного натурального числа більшого ніж n, тобто n є найменшим натуральним з даною властивістю. Більше того, існують такі класи кілець (на приклад, чисто нескінченні кільця [33,81]), що поняття скінченного стабільного рангу не визначено, тобто є нескінченним. Такі кільця отримали назву кілець нескінченного стабільного рангу.

В процесі дослідження кілець скінченного стабільного рангу виявилось, що, як правило, основні дослідження проводяться для кілець стабільного рангу 1 або 2.

Означення 1.16 *[69] Кільце R називається кільцем стабільного рангу 1 (цей факт позначатимемо* $\mathrm{st.r}(R) = 1$*), якщо для довільних елементів $a, b \in R$, які задовільняють умову*

$$aR + bR = R,$$

існує елемент $t \in R$ такий, що

$$a + bt \in U(R).$$

Класи кілець стабільного рангу 1 є доволі широкими і найбільш досліджуваними.

Кільце Кронекерівських функцій на цілозамкненій області є не лише кільцем Безу, але і кільцем стабільного рангу 1 [81]. Васерштейн, вивчаючи клас кілець дійснозначних функцій $\mathcal{C}(X)$, які визначені на топологічному просторі X, описав умови, коли дане кільце є кільцем стабільного рангу 1 та 2. Зокрема, він показав, що $\mathrm{st.r}(\mathcal{C}(X)) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\dim(X) = 0$ [68, 69].

Напівлокальне кільце є кільцем стабільного рангу 1 [70]. В цей же час, існують кільця головних ідеалів стабільного рангу 1, які не є напівлокальними [69]. А також, існують кільця Дедекінда стабільного рангу 1, які не є кільцями головних ідеалів [81]. Кільця формальних степеневих рядів над полем P від багатьох змінних є кільцем стабільного рангу 1, хоча, кільце многочленів не є таким [68].

Теорема 1.10 *[67] Нехай існує такий примітивний многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, що $f(r) = 0$ для довільного елемента r кільця R. Тоді стабільний ранг кільця R дорівнює* 1.

Для регулярних (в сенсі фон Неймана) кілець має місце такий результат Капланського:

Теорема 1.11 *[39] Регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 1.*

Зауважимо, що комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є одинично-регулярним [31]. А згідно з попередньою теоремою, це кільце є кільцем стабільний ранг якого дорівнює 1.

Відзначимо користь в дослідженнях наступних результатів.

Теорема 1.12 *[69] Стабільний ранг кільця R дорівнює 1 тоді і лише тоді, коли стабільний ранг фактор-кільця $R/J(R)$ кільця R по радикалу Джекобсона $J(R)$ дорівнює 1.*

Серед властивостей кілець стабільного рангу 1 виділимо наступні властивості:

Теорема 1.13 *[69] Довільне фактор-кільце кільця стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 1.14 *[69] Якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 1 і елемент $e = e^2$ — довільний ідемпотент кільця R, то кільце eRe також є кільцем стабільного рангу 1.*

У випадку комутативних областей головних ідеалів стабільного рангу 1 маємо:

Теорема 1.15 *[29] Нехай R — комутативна область головних ідеалів стабільного рангу 1, тоді R є евклідовим кільцем.*

Хоча не всяке евклідове кільце (зокрема, $\mathbb{Z}$) є кільцем стабільного рангу 1. Зауважимо, що довільний скінченний гомоморфний образ кільця цілих чисел є скінченним кільцем, тобто є кільцем стабільного рангу 1.

Згідно з результатами МакГоверна, класи кілець, нетривіальні гомоморфні образи яких є кільцями стабільного рангу 1 отримали назву кілець майже стабільного рангу 1 [59].

Означення 1.17 *[85] Елемант a комутативного кільця R називається елементом майже стабільного рангу 1, якщо*

$$\mathrm{st.r}(R/aR) = 1.$$

Очевидно, що довільна одиниця кільця R є елементом майже стабільного рангу 1. Зауважимо, що $\mathrm{st.r}(R) = 1$ то, тоді, для довільного ідеалу I $\mathrm{st.r}(R/I) = 1$, тобто, кільце стабільного рангу 1 є кільцем майже стабільного рангу 1 [69, 71]. Як відзначалось, кільце цілих чисел є прикладом кільця майже стабільного рангу 1, яке не є кільцем стабільного рангу 1.

Більше того, справедливим є наступний результат:

Теорема 1.16 *[29] Довільна адекватна область Безу є кільцем майже стабільного рангу 1.*

Означення 1.18 *[68, 81] Кільце R називається кільцем стабільного рангу 2 (позначатимемо цей факт так: $\mathrm{st.r}(R) = 2$), якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R,$$

виконується співвідношення

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$.

Очевидним прикладом кільця стабільного рангу 2 може послужити довільне комутативне кільце головних ідеалів. Більше того, матимемо:

Теорема 1.17 *[2] Стабільний ранг адекватної області рівний 2.*

Що стосується властивостей кілець стабільного рангу 1 та 2, то їх приклади можна знайти в роботах [19, 20, 34, 35, 37, 44, 45, 52].

Особливе місце в класі кілець стабільного рангу 1 відіграють наступні класи кілець, які були введені Ніколсоном.

Означення 1.19 *[54] Кільце R називають чистим, якщо довільний елемент $x \in R$ можна представити у вигляді суми ідемпотента та оборотного елемента, тобто*

$$x = u + e,$$

де $e = e^2$ і $u \in U(R)$.

Найбільш відомим тривіальним класом чистих кілець є локальне кільце.

Справді, якщо R — локальне кільце та M — єдиний максимальний ідеал кільця R, причому $x \in R$, то можливі два випадки:

1. якщо $x \in M$, то $1 - x \notin M$ і, оскільки, M — єдиний максимальний ідеал, тоді $1 - x$ — оборотний елемент кільця R. Отже,

$$x = 1 - (1 - x);$$

2. якщо $x \notin M$, то x — оборотний елемент, звідси, $x = 0 + x$, де $0 = 0^2$ — ідемпотент, а $x \in U(R)$.

В класі кілець стабільного рангу 1 важливу роль відіграє наступний клас кілець.

Означення 1.20 *[13, 50, 51] Кільце R називають кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ для яких виконується умова*

$$aR + bR = R$$

існує ідемпотент $e \in R$ такий, що

$$(a + be)R = R,$$

тобто, елемент $a + be$ є оборотним елементом кільця R.

Означення 1.21 *[54] Кільце R називається кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує ідемпотент $e \in aR$ такий, що*

$$(1 - e) \in (1 - a)R.$$

Зауважимо, що клас комутативних кілець з властивістю заміни співпадає з класом кілець ідемпотентного стабільного рангу 1 [13, 50]. Також зазначимо, що у випадку комутативного кільця, чисте кільце є кільцем з властивістю заміни, а в некомутативному кільці клас чистих кілець міститься в класі кілець з властивістю заміни [13].

Теорема 1.18 *[13, 50] Наступні властивості комутативного кільця R є еквівалентними:*

1. *R — кільце ідемпотентного стабільного рангу 1;*
2. *R — чисте кільце;*
3. *R — кільце з властивістю заміни.*

Означення 1.22 *[24, 25] Кільце R називається PM-кільцем, якщо кожен його простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Відмітимо, що чисті кільця є PM-кільцями [24, 54].

Означення 1.23 *[74] Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R назвемо PM-елементом, якщо фактор-кільце R/aR є PM-кільцем.*

Клас PM-кілець тісно пов'язаний з наступним класом кілець.

Означення 1.24 *[51] Кільце R називається PM^*-кільцем, якщо кожен його ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Означення 1.25 *[51] Кільце R називається гельфандовим, якщо для довільної пари $a, b \in R$, для якої виконується умова*

$$a + b = 1,$$

існують елементи $r, s \in R$ такі, що

$$(1 + ar)(1 + bs) = 0.$$

По аналогії до PM-елемента наведемо поняття гельфандового елемента.

Означення 1.26 *[74] Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R назвемо гельфандовим, якщо фактор-кільце R/aR є гельфандовим кільцем.*

Прикладом гельфандових елементів можуть служити оборотні та адекватні елементи кільця [74].

Зауважимо, що у комутативному випадку поняття гельфандового елемента та PM-елемента співпадають [51].

У праці [74] встановлено такі властивості гельфандових елементів комутативного кільця. Наведемо їх, оскільки ці результати будуть необхідні для подальшої роботи.

Твердження 1.2 *[74] Для комутативного кільця R такі твердження еквівалентні:*

1. *$a \in R$ є гельфандовим елементом;*
2. *для довільного простого ідеалу P, такого, що $a \in P$, існує такий єдиний максимальний ідеал M такий, що*

$$P \subset M.$$

Твердження 1.3 *[74] Комутативна область R є областю, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі кільця R тоді і лише тоді, коли кожен ненульовий елемент з R є гельфандовим елементом.*

Твердження 1.4 *[74] Елемент a комутативної області Безу є гельфандовим тоді і лише тоді, якщо для довільних елементів $b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R,$$

елемент a можна подати у вигляді

$$a = rs,$$

де $rR + bR = R$ та $sR + cR = R$.

Ніколсон і Санчез Кампос у 2004 році [58] ввели у розгляд поняття лівого морфічного кільця і воно знайшо широке застосування у сучасних алгебраїчних дослідження.

Означення 1.27 *[58] Нехай R — кільце, елемент $a \in R$ називається лівим морфічним, якщо*

$$R/Ra \cong l(a)$$

як ліві R-модулі. Кільце R називається лівим морфічним кільцем, якщо кожен елемент кільця є лівим морфічним.

Елемент $a \in R$ називається правим морфічним, якщо

$$R/aR \cong r(a)$$

як праві R-модулі. Кільце R називається правим морфічним кільцем, якщо кожен елемент кільця є правим морфічним.

Кільце, яке є лівим і правим морфічним одночасно називається морфічним кільцем.

Наведемо еквівалентні означення лівого морфічного кільця, наведені у цій же роботі.

Лема 1.1 *Нехай R — кільце, елемент $a \in R$. Наступні твердження є еквівалентними:*

1. *елемент a є лівим морфічним, тобто $R/Ra \cong l(a)$;*
2. *існує елемент b, який належить R такий, що*
$$Ra = l(b) \quad i \quad l(a) = Rb;$$
3. *існує елемент b, який належить R такий, що*
$$Ra = l(b) \quad i \quad l(a) \cong Rb.$$

З вищезгаданим класом кілець тісно пов'язані наступні класи кілець.

Означення 1.28 *[57] Комутативне кільце R називається P-ін'єктивним, якщо для будь-якого елемента $a \in R$, виконується умова*
$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(aR)) = aR.$$

Теорема 1.19 *[14, 58] Нехай R — комутативне морфічне кільце, тоді:*

1. *для довільного елемента a кільця R виконується*
$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(aR)) = aR$$
(тобто R є P-ін'єктивним кільцем);
2. *для довільної скінченної множини елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ кільця R існує такий елемент b кільця R, що виконується*
$$a_1R \cap a_2R \cap \ldots \cap a_nR = bR$$
(тобто скінченний перетин головних ідеалів є головним ідеалом);

3. *для довільної скінченної множини елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ кільця R існує елемент a кільця R такий, що*

$$a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = aR.$$

Всі скінченнопороджені ідеали кільця R є головними (тобто R є кільцем Безу).

Приклади різних класів морфічних кілець розглянуто в [15].

Означення 1.29 *[57] Комутативне кільце R називається когерентним, якщо*

1. *аннулятор довільного елемента a кільця R є скінченнопородженим ідеалом і*
2. *скінченний перетин скінченнопороджених ідеалів є скінченнопородженим ідеалом.*

Означення 1.30 *[83] Скажемо, що кільце R називається кільцем майже Бера, якщо для кожного $x \in R$ існує елемент $y \in R$ такий, що*

$$\mathrm{Ann}(xR) = yR,$$

де $\mathrm{Ann}(xR) = \{z \mid zxr = 0, r \in R\}$.

В класі морфічних кілець виділено новий підклас кілець.

Означення 1.31 *[65] Кільце R називається однозначно морфічним, якщо для довільного елемента a кільця R існує єдиний елемент b, який також належить кільцю R, для якого виконується наступна умова*

$$Ra = l(b) \quad і \quad l(a) = Rb.$$

Наступна теорема описує весь клас однозначно морфічних кілець.

Теорема 1.20 *[65] Кільце R є однозначно морфічним кільцем тоді і тільки тоді, коли R є одним з наступних п'яти типів:*

1. R є тілом;

2. R є булеве кільце;

3. $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$;

4. $R \cong \mathbb{Z}_4$;

5. $R \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Означення 1.32 *[54] Елемент $a \in R$ називається акуратним елементом в кільці R, якщо R/aR є чистим.*

Кільце R називається акуратним, якщо кожен елемент з R є акуратним.

Скажемо, що

Означення 1.33 *[80] Кільце R називається кільцем акуратного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ для яких виконується умова*

$$aR + bR = R$$

існує $t \in R$, такий що $a + bt$ є акуратним елементом в R [80].

Зауважимо, що одиниці кільця R є акуратними елементами, отже, кожне кільце стабільного рангу 1 є кільцем акуратного рангу 1.

Зв'язок акуратних кілець з чистими встановлюють наступні результати.

Теорема 1.21 *[51] Чисте кільце є акуратним.*

Теорема 1.22 *[51] Якщо R є акуратним кільцем, яке не є чистим, то тоді R є напівпростим кільцем.*

Теорема 1.23 *[51] Якщо R є комутативною областю розмірності Круля 1, то тоді R є акуратним кільцем.*

Зокрема, довільна комутативна область головних ідеалів є акуратною.

Зауважимо, що якщо P — довільне поле, то кільце $P[x, y]$ не є акуратним, оскільки

$$P[x, y]/yP[x, y]$$

не є чистим, хоча кільце $P[x]$ є акуратним згідно з теоремою 1.23. Більше того, якщо $A[x]$ є акуратним, тоді A є полем [51].

1.2. Основні напрямки та результати досліджень

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано її мету, завдання та основні задачі, які розв'язуються в цій роботі, вказано наукову новизну отриманих результатів, їх застосування та наведено форми їх апробації.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за темою дисертації та сформульовано необхідні означення та факти, пов'язані з тематикою досліджень, що використовуються у роботі, а також, важливі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

У **другому розділі** розглядаються морфічні кільця. В першому підрозділі цього розділу на основі поняття морфічного кільця, яке було введено Ніколсоном і Санчез Кампосом в [58], доведено, що скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є морфічним кільцем, більше того, отримано такий результат:

Теорема 2.1 *Нехай* R *— комутативна область Безу, елемент* $a \in R \setminus \{0\}$*, тоді:*

1. R/aR *— когерентне;*
2. R/aR *—* P*-ін'єктивне;*
3. R/aR *— морфічне.*

А також встановлено умови коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є кільцем Каша, тобто:

Теорема 2.2 *Нехай* R *— комутативна область Безу, елемент* $a \neq 0$ *належить* R*, тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. R/aR *— кільце Каша;*

2. *довільний максимальний ідеал M кільця R, що містить елемент a є головним.*

Також, у цьому підрозділі, розглянуто поняття однозначно морфічного кільця, яке було введено у 2010 в роботі [65] та обчислено стабільний ранг цих кілець, тобто:

Теорема 2.3 *Однозначно морфічне кільце є кільцем стабільний ранг якого дорівнює 1.*

Та, як наслідок, доведено, що однозначно морфічне кільце є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.5 *Однозначно морфічне кільце є кільцем елементарних дільників.*

У другому підрозділі другого розділу досліджуються морфічні кільця акуратного рангу 1. На основі результату Ройтмана [61] та Щедрика [62] Забавський ввів поняття кільця акуратного рангу 1 [80] і у випадку комутативних областей Безу показав, що комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли вона є областю акуратного рангу 1. Тому, актуальним є питання: "При яких умовах морфічне кільце є кільцем акуратний ранг якого дорівнює 1?"

Капланський досліджував кільця з умовою однозначності твірних елементів головних ідеалів, тобто: якщо $aR = bR$, то як пов'язані елементи a і b? Так, на приклад, у випадку області елементи a і b є асоційованими справа, тобто $a = bu$ і $b = av$, де u, v — оборотні елементи кільця R.

В [64] встановлено, що в класі морфічних кілець умова однозначності твірних елементів головних ідеалів є еквівалентна умові кільця стабільного рангу 1.

У випадку морфічних кілець поставлена задача знаходження умови на твірні елементи головних ідеалів, яка є еквівалентна умові кільця акуратного рангу 1. Має місце таке твердження:

Твердження 2.2 *Морфічне кільце R є кільцем акуратного рангу 1 тоді і тільки тоді, коли для довільної пари елементів $a, b \in R$ для яких виконується умова*

$$aR = bR$$

існують акуратні елементи $s, t \in R$ такі, що

$$as = b \quad \text{та} \quad a = bt.$$

У цьому підрозділі також встановлено існування морфічних кілець акуратного рангу 1.

Теорема 2.7 *Нехай R є комутативним кільцем з 1. Якщо R є областю елементарних дільників та $a \in R \setminus \{0\}$, тоді фактор-кільце R/aR є морфічним кільцем акуратного рангу 1.*

В цьому розділі, на основі поняття розмірності за Канфелом встановлено, що умова стабільного рангу 2 для комутативного морфічного кільця еквівалентна умові $\dim(R) = 1$, що є розширенням відомого результату Канфела про стабільний ранг 1 кільця розмірності $\dim(R) = 1$.

Теорема 2.9 *Нехай R — комутативне кільце Безу і* $\dim(R) = 1$. *Тоді* $\mathrm{st.r}(R) = 2$.

Теорема 2.10 *Нехай R комутативне майже Бера кільце Безу стабільного рангу 2. Тоді* $\dim(R) = 1$.

Теорема 2.11 *Комутативне морфічне кільце R є кільцем стабільного рангу 2 тоді і тільки тоді, коли* $\dim(R) = 1$.

Також наведено всеможливі нові приклади морфічних кілець, та, як наслідок, отримано відповідь на відкрите питання Ніколсона та Санчез Кампоса про існування морфічних кілець, які не є чистими.

У **третьому розділі** розглядаються комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом. Адекватні кільця є найбільш відомим прикладом кільця елементарних дільників, яке не є, взагалі кажучи, кільцем головних ідеалів. В роботі [1] показано, що скінченний нетривіальний гомоморфний образ адекватної області Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним. Це дало поштовх для дослідження комутативних кілець Безу, в яких нуль є адекватним. Зокрема, в роботі наведено критерій коли комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним, через певні властивості радикала Джекобсона.

Теорема 3.3 *Нехай R —- комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним елементом. Тоді, для довільного ненульового і необоротного елемента $b \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $be \in \mathrm{J(R)}$ і $eR + bR = R$.*

Як наслідок отримуємо:

Теорема 3.4 *Напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним елементом тоді і лише тоді, коли воно є регулярним (в сенсі фон Неймана).*

Тим самим вказано, що клас комутативних кілець Безу є кільцями, в яких нуль є адекватним, тоді і лише тоді, коли воно є напіврегулярним.

Теорема 3.5 *Нехай R —- комутативне кільце Безу. Тоді такі твердження є еквівалентними:*

1. *R кільце, в якому нуль є адекватним;*
2. *R —- напіврегулярне кільце.*

У **четвертому розділі** розглядаються локально гельфандові області Безу.

Хенріксен [40] показав, що в адекватному кільці будь-який ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. Ларсен, Левіс, Шорес [46] поставили питання: "Чи буде комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, адекватною?" В роботі [12] побудовано приклад кільця, в якому будь-який ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, яке не є адекватним. Неявно в роботі [46] і явно Забавським було поставлено питання: "Коли буде комутативна область Безу, в якій будь який ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі кільцем елементарних дільників?" Забавський і Гаталевич отримали позитивну відповідь на дане питання [74].

Виникло питання про вивчення областей Безу, які є узагальненням областей, в яких будь-який ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному, а саме, в цьому розділі введено локально гельфандові кільця. У випадку комутативних локально гельфандових областей Безу показано, що вони є областями елементарних дільників.

Означення 4.2 *Комутативне кільце є локально гельфандовим кільцем (позначимо GLR), якщо для довільного $a \in R$ або a або $1 - a$ є PM-елементом.*

Має місце натупний результат:

Твердження 4.4 *Комутативна область Безу є GLR кільцем тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$, для яких виконується умова*

$$aR + bR = R$$

один з елементів a або b є PM-елементом.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема

Теорема 4.1 *Довільна GLR область Безу є кільцем елементарних дільників.*

У **п'ятому розділі** на основі поняття гельфандового елемента введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу.

Означення 5.1 *Назвемо ідеал I кільця R гельфандовим, якщо I містить хоча б один гельфандовий елемент. У протилежному випадку ідеал I назвемо негельфандовим, тобто довільний ненульовий елемент ідеалу I є негельфандовим.*

Означення 5.2 *Негельфандовий ідеал N назвемо максимально негельфандовим, якщо для довільного ідеалу I такого, що $N \subset I$, $I \neq N$, існує гельфандовий елемент a, який належить I.*

Встановлено, що довільний негельфандовий ідеал міститься в максимально негельфандовому ідеалі.

Твердження 5.2 *Довільний негельфандовий ідеал комутативної області Безу міститься хоча б в одному максимально негельфандовому ідеалі.*

А також, показано, що максимально негельфандовий ідеал є простим.

Твердження 5.3 *Кожний максимально негельфандовий ідеал комутативної області Безу є простим ідеалом.*

Більше того

Твердження 5.4 *Нехай R — комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал містить гельфандовий елемент,* *тоді R є областю, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному.*

Цей результат дає нове описання комутативних PM^*-областей Безу за допомогою гельфандового елемента. Це дозволило ввести аналог радикала Джекобсона для максимально негельфандових ідеалів. А саме, якщо через $A(R)$ позначити перетин всіх максимально негельфандових ідеалів. Тоді має місце наступна властивасть, яка аналогічна до відомої властивості радикала Джекобсона.

Твердження 5.5 *Нехай R — комутативна область Безу і $b \in A(R)$ і a — гельфандовий елемент R. Тоді, для довільного $x \in R$ елемент $a + bx$ є гельфандовим.*

Наступне твердження у випадку єдиного максимального негельфандового ідеалу показує, що така область має аналогічні властивості до локальної області.

Твердження 5.7 *Для комутативної області Безу такі властивості еквівалентні:*

1. *у кільці існує єдиний максимально негельфандовий ідеал;*
2. *сума довільних двох негельфандових елементів є негельфандовим елементом.*

Показано, що комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів є кільцем гельфандового рангу 1. А звідси отримано основний результат цього розділу:

Теорема 5.2 *Комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів є кільцем елементарних дільників.*

1.3. Висновки до розділу 1

В цьому розділі зроблено стислий огляд літератури за темою дисертації. Сформульовано попередні відомості та допоміжні факти, які використовуються при подальших дослідженнях в наступних чотирьох розділах. Описано основні напрямки та результати досліджень.

РОЗДІЛ 2
МОРФІЧНІ КІЛЬЦЯ

У цьому розділі розглянуто новий клас кілець, а саме, морфічних кілець, який був введений Ніколсоном і Санчез Кампосом [58] у 2004 році, на основі добре відомого результату Ерліх [28]. Досліджено стабільний ранг цього класу кілець та розгянуто розмірність морфічниих кілець (за Канфелом). Описано еквівалентні умови при яких морфічне кільце є кільцем акуратного рангу 1, а також, встановлено умови існування морфічних кілець акуратоного рангу 1.

2.1. Морфічні кільця Безу

У цьому підрозділі встановлено, що скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є морфічним кільцем, а також, описано комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є кільцями Каша, що є відповіддю на відкрите питання Фейса та Факкіні. Також побудовано приклад комутативного морфічного кільця, яке не є чистим, що є відповіддю на відкрите питання Ніколсона і Санчез Кампоса [58].

Надалі будемо вважати, що кільце R є асоціативним кільцем з одиницею і всі модулі є унітарними.

Означення 2.1 *[58] Нехай R — кільце, елемент $a \in R$ називаєтъся лівим морфічним, якщо*

$$R/Ra \cong l(a)$$

як ліві R-модулі, де

$$l(a) = \{x \mid xa = 0, \forall a \in R\}.$$

Кільце R називаеться лівим морфічним кільцем, якщо кожен елемент кільця є лівим морфічним. Аналогічно вводяться і праві морфічні кільця. Кільце, яке є лівим і правим морфічним одночасно називається морфічним кільцем.

Зауважимо, що комутативні морфічні кільця є кільцями Безу [73].

Одним з основних результатів роботи є наступна теорема.

Теорема 2.1 *Нехай R — комутативна область Безу. Виберемо довільний ненульовий елемент $a \in R$. Тоді справедливими є такі твердження:*

1. *R/aR — когерентне;*
2. *R/aR — P-ін'єктивне;*
3. *R/aR — морфічне.*

Доведення. Нехай R — комутативна область Безу. Виберемо деякий ненульовий елемент $a \in R$.

(1) Доведемо, що R/aR — когерентне кільце. Згідно з [83] кільце R/aR є кільцем майже Бера, і, використовуючи теорему 1.19, отримуємо, що R є когерентним кільцем.

(2) Доведемо, що R/aR — P-ін'єктивне кільце. Для цього достатньо використати теорему 1.19.

(3) Доведемо, що R/aR — морфічне кільце. Використовуватимемо позначення $\overline{R} = R/aR$ для скінченного гомоморфного образу комутативної області Безу. Виберемо довільний елемент $\bar{b} \in \overline{R}$, $\bar{b} = b + aR$.

Тоді, опираючись на твердження (1) цієї теореми, стверджуємо, що

$$\operatorname{Ann}(\overline{bR}) = \overline{c}\overline{R},$$

для деякого елемента $\overline{c} = c + aR$, бо кільце $\overline{R}$ є кільцем майже Бера.

Оскільки $\overline{R}$ є P-ін'єктивним кільцем (за твердженням (2)), то, звідси слідує, що

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\overline{bR})) = \overline{bR}$$

і отримуємо, що

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\overline{bR})) = \mathrm{Ann}(\overline{c}\overline{R}).$$

Звідси матимемо, що $\overline{bR} = \mathrm{Ann}(\overline{c}\overline{R})$.

Отже: для будь-якого елемента $\overline{b}$ існує елемент $\overline{c}$ такий, що $\mathrm{Ann}(\overline{b}) = \overline{c}\overline{R}$ і $\mathrm{Ann}(\overline{c}) = \overline{bR}$, а звідси випливає, що $\overline{R}$ є морфічним кільцем (згідно з лемою 1.1).

Теорему доведено.

□

Як наслідок, з даної теореми отримуємо приклад комутативного морфічного кільця, яке не є чистим, що є негативною відповіддю на відкрите питання роботи [58].

Приклад 2.1. Приклад Хенріксена [40]

Нехай

$$R = \{z_0 + a_1x + a_1x^2 + \ldots | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}.$$

Зауважимо, що R є комутативною областю Безу [40]. Фактор-кільце R/xR за теоремою 2.1 є морфічним кільцем, але воно не є чистим, оскільки для ідеалу

$$N = \{a_1x + a_1x^2 + \ldots | a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}$$

ідеал N/xR є простим ідеалом, який міститься у всіх максимальних ідеалах даного фактор-кільця R/xR. Тому, R/xR не є чистим, оскільки чисте кільце є PM-кільцем. Зауважимо, що $xR \neq N$, оскільки $x/2 \in N$, але $x/2 \notin xR$.

Фейс і Факкіні [30] досліджували так-звані кільця Каша і неявно поставили питання: "При яких умовах фоктор-кільце R/aR є кільцем

Каша?" Дамо відповідь на це питання у випадку комутативної області Безу.

Означення 2.2 *[26, 30] Комутативне кільце R називається кільцем Каша, якщо анулятор довільного ідеалу кільця R відмінний від нуля.*

Теорема 2.2 *Нехай R — комутативна область Безу, елемент $a \neq 0$ належить R. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. *R/aR - кільце Каша;*

2. *довільний максимальний ідеал M кільця R, що містить елемент a є головним.*

Доведення. Нехай R є комутативною область Безу. Виберемо довільний ненульовий елемент $a \in R$. Розглянемо еквівалентність умов (1) та (2). Розглянемо спочатку випадок (1) $\Rightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (2). Нехай R/aR є кільцем Каша. Використовуватимемо позначення $\overline{R} = R/aR$ для скінченного гомоморфного образу комутативної області Безу. Виберемо деякий максимальний ідеал $\overline{M}$ кільця $\overline{R}$, $\overline{M} = M + aR$. Запишемо

$$\operatorname{Ann}(\overline{M}) = \overline{H},$$

де $\overline{H}$ є ідеалом в $\overline{R}$ і $\overline{H} \neq \{\overline{0}\}$, та $\overline{H} = H + aR$.

Оскільки $\overline{H}$ анулює максимальний ідеал $\overline{M}$, то справедливим є запис

$$\overline{HM} = \{\overline{0}\}.$$

Отже, $\overline{M}$ належить до $\operatorname{Ann}(\overline{H})$ і за максимальністю $\overline{M}$ ми отримуємо

$$\overline{M} = \operatorname{Ann}(\overline{H}) \neq \overline{R}.$$

Оскільки $\overline{M}$ є максимальним ідеалом у кільці $\overline{R}$, то для довільного елемента $\overline{d} \neq \overline{0}$, який належить ідеалу $\overline{H}$ виконується рівність

$$\overline{dM} = \{\overline{0}\},$$

де $\overline{d} = d + aR$.

Отже, ми отримали, що максимальний ідеал $\overline{M}$ належить до $\mathrm{Ann}(\overline{d})$, де $\overline{d}$ є ненульовим елементом цього ідеалу.

Отже,

$$\overline{M} = \mathrm{Ann}(\overline{d}) = \overline{bR},$$

тому, що R/aR є морфічним кільцем. Тоді, для довільного елемента $\overline{b} = b + aR$ матимемо:

$$\overline{M} = \overline{bR}$$

і

$$M = bR + aR = cR,$$

бо R є комутативною областю Безу для деякого елемента $c \in R$.

Отже, M є максимальним ідеалом, який є головним.

(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай ми маємо довільний максимальний ідеал M, який містить не нульовий елемент a. Згідно з обмежень, які накладені на кільце R, маємо, що ідеал M є головним.

Перейдемо до скінченного гомоморфного образу R/aR. Використаємо позначення $\overline{R} = R/aR$, $\overline{M} = M + aR$, $\overline{m} = m + aR$, $\overline{n} = n + aR$ для довільних елементів $m, n \in R$.

Отримуємо:

$$\overline{M} = \overline{m}\overline{R} = \mathrm{Ann}(\overline{n}\overline{R}),$$

бо R/aR є морфічним кільцем. З того, що $\overline{m} \notin U(\overline{R})$ ми отримуємо

$$\mathrm{Ann}(\overline{n}\overline{R}) \neq \overline{R},$$

а отже, $\overline{n}\overline{R} \neq \{\overline{0}\}$.

Звідси

$$\mathrm{Ann}(\overline{M}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\overline{n}\overline{R})) = \overline{n}\overline{R} \neq \{\overline{0}\},$$

тому, $\mathrm{Ann}(\overline{M})$ є ненульовим головним ідеалом, і цей факт доводить, що R/aR є кільцем Каша.

Теорему доведено.

□

Як наслідок з даної теореми слідує наступний результат.

Наслідок 2.1 *Якщо R — комутативна область головних ідеалів, тоді R/aR — кільце Каша для будь-якого ненульового елемента $a \in R$.*

В класі морфічних кілець у 2010 було виділено новий підклас кілець, який отримав назву однозначно морфічних кілець [65]. Нагадаємо, що

Означення 2.3 *[65] Кільце R називається однозначно морфічним, якщо для довільного елемента a кільця R існує єдиний елемент $b \in R$ для якого виконується умова*

$$Ra = l(b) \quad i \quad l(a) = Rb.$$

Справедливим є наступний результат.

Теорема 2.3 *Однозначно морфічне кільце є кільцем, стабільний ранг якого дорівнює 1.*

Доведення. Згідно з теоремою 1.20 можемо вважати, що кільце R є одним із п'яти зазначених типів, а саме:

1. R є тілом;
2. R є булевим кільцем;
3. $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$;
4. $R \cong \mathbb{Z}_4$;
5. $R \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Покажемо, що стабільний ранг кожного з цих класів кілець рівний 1.

Розглянемо спочатку (2) випадок. Кільце R є булевим кільцем, тобто $x^2 = x$ для довільного $x \in R$. Тоді для довільного елемента $a \in R$

виконується

$$a \cdot 1 \cdot a = a,$$

тобто, кільце R є одинично-регулярним кільцем. Згідно з [33] стабільний ранг одинично-регулярного кільця дорівнює 1.

Оскільки

$$R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}\}$$

є напівлокальним кільцем і

$$\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

є локальним кільцем з максимальним ідеалом $M = (\overline{2})$, тоді, кільця типу (1), (3) і (4) є кільцями стабільного рангу 1, за [10].

Розглянувши $R \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ ми маємо випадок скінченного кільця, тому воно є кільцем стабільного рангу 1.

Теорему доведено.

$\square$

Оскільки однозначно морфічні кільця є морфічними кільцями, а останні є кільцями Безу, тоді, за теоремою 2.3, робимо висновок, що однозначно морфічні кільця є кільцями Безу стабільного рангу 1

А оскільки кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем Ерміта [81], отримуємо наступний результат.

Теорема 2.4 *Однозначно морфічне кільце є кільцем Ерміта.*

Більше того, клас однозначно морфічних кілець є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.5 *Однозначно морфічне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай R однозначно морфічне кільце. Зауважимо, що якщо R є булевим кільцем, або $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$, або $\mathbb{Z}_4$, то R є комутативним кільцем Безу стабільного рангу 1, а значить, згідно з [83] є кільцем елементарних дільників.

Випадок, коли R є тілом є очевидним.

Оскільки поле $\mathbb{Z}_2$ є кільцем елементарних дільників, і зважаючи на те, що кільце матриць над кільцем елементарних дільників є кільцем елементарних дільників [81], то у випадку кільця $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ є очевидним те, що воно є кільцем елементарних дільників.

Теорему доведено.

$\square$

2.2. Морфічні кільця акуратного рангу 1

У цьому підрозділі доведено, що комутативне кільце R є кільцем акуратного рангу 1 тоді і тільки тоді, коли кожна одиниця за модулем головного ідеала піднімається до акуратного елемента. Також показано, що комутативне морфічне кільце R є кільцем акуратного рангу 1 тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR = bR$ існують акуратні елементи $s, t \in R$ такі, що $bs = c$, $ct = b$. Наведено приклади морфічних кілець акуратний ранг яких дорівнює 1.

Капланський [42] сформулював питання про те, коли в кільці задовольнються умови однозначності твірних головних ідеалів, тобто, коли з умови $aR = bR$ випливає, що елементи a і b є асоційованими справа. Він зауважив, що для комутативних кілець властивості однозначної породжуваності головного ідеалу виконуються для кілець головних ідеалів та артінових кілець. У випадку лівих квазі-морфічних кілець властивість однозначної породжуваності є еквівалентною умові кільця стабільного рангу 1 [64].

Поняття акуратного рангу 1 було введено в [80]. У цьому підрозділі показано, що для комутативного морфічного кільця умова акуратного рангу 1 є еквівалентною до однозначної породжуваності головних ідеалів з точністю до акуратності.

Нагадаємо, що

Означення 2.4 *Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ називається акуратним елементом в кільці R, якщо фактор-кільце R/aR є чистим.*

Означення 2.5 *[80] Комутативне кільце R називається кільцем акуратного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, які задовільняють умову*

$$aR + bR = R$$

існує $t \in R$ такий, що $a + bt$ є акуратним елементом в R.

Означення 2.6 *1. Елемент $a \in R$ є одиницею за модулем головного ідеала cR, якщо*

$$ax - 1 \in cR$$

для деякого елемента $x \in R$.

2. Одиниця $a \in R$ за модулем головного ідеала cR піднімаєтьсядо акуратного елемента, якщо

$$a - t \in cR$$

для деякого акуратного елемента $t \in R$.

Твердження 2.1 *Нехай R — комутативне кільце. Наступні твердження є еквівалентними:*

1. R є кільцем акуратного рангу 1;

2. кожна одиниця за модулем головного ідеалу піднімаєтьсядо акуратного елемента за модулем головного ідеала.

Доведення. Доведемо, що з того, що R є кільцем акуратного рангу 1 випливає, що кожна одиниця піднімається до акуратного елемента за модулем кожного головного ідеала.

Припустимо, що R є кільцем акуратного рангу 1, тобто для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що

$$aR + bR = R$$

існує $t \in R$ такий, що

$$a + bt$$

є акуратним елементом кільця R. Оскільки $aR + bR = R$, то існуть елементи $u, v \in R$, для яких вірне таке співвідношення:

$$au + bv = 1.$$

Звідси, матимемо, що

$$au - 1 \in bR,$$

тобто, a є одиницею за модулем головного ідеала bR.

Покажемо, що існує акуратний елемент $t \in R$, відмінний від нуля, такий, що

$$a - t \in bR.$$

Нехай $x \in R$ такий, що

$$au - 1 = bx.$$

Тоді $au - bx = 1$. Оскільки R є кільцем акуратного рангу 1, то існує такий елемент $s \in R$ і акуратний елемент $t \in R$ такий, що

$$a + b(-s) = t.$$

Звідси матимемо, що $a - t = bs$, а отже,

$$a - t \in bR,$$

де t є акуратним елементом в R.

Для того, щоб довести (2) $\Rightarrow$ (1), припустимо, що кожна одиниця кільця R піднімається до акуратного елемента за модулем головного ідеала. Покажемо, що кільце R має акуратний ранг 1.

Нехай $a, b, c \in R$ такі, що

$$ab + cd = 1.$$

Звідси матимемо $ab - 1 = -cd$. Тоді $ab - 1 \in cR$. Тому, за нашим припущенням, існує акуратний елемент $t \in R$ такий, що

$$b - t \in cR.$$

Отже $b - t = cx$ для деякого елемента $x \in R$, тобто

$$b + c(-x) = t$$

є акуратним елементом, а отже R є кільцем акуратного рангу 1.

Твердження доведено.

□

Твердження 2.2 *Морфічне кільце R є кільцем акуратного рангу 1 тоді і тільки тоді, коли для довільної пари елементів $a, b \in R$ для яких виконується умова*

$$aR = bR$$

існують акуратні елементи $s, t \in R$ такі, що

$$as = b \quad \textit{та} \quad a = bt.$$

Доведення. За твердженням 2.1 достатньо показати, що кожна одиниця піднімається до акуратного елемента за модулем головного ідеала в R.

Нехай x — одиниця за модулем головного ідеала yR, тобто існує $z \in R$ такий, що

$$zx - 1 \in yR.$$

Покажемо, що існує акуратний елемент $t \in R$ такий, що

$$x - t \in yR.$$

Оскільки кільце R є комутативним морфічним кільцем, то існують елементи $a, b \in R$, які задовольняють таким умовам:

$$yR = \mathrm{Ann}(a)$$

та

$$xaR = \mathrm{Ann}(b).$$

Очевидно, $xR \subset \mathrm{Ann}(ab)$ і $yR \subseteq \mathrm{Ann}(ab)$.

Оскільки $zx - 1 \in yR$, маємо

$$xR + yR = R$$

і

$$xR + yR = \mathrm{Ann}(ab).$$

Тоді $ab = 0$ та $a \in \mathrm{Ann}(b)$. Також виконується таке співвідношення

$$\mathrm{Ann}(b) = xaR \subseteq aR.$$

Отже,

$$\mathrm{Ann}(b) = xaR = aR.$$

За припущенням, в кільці існує акуратний елемент $t \in R$ такий, що

$$xa = ta.$$

Це означає, що

$$(x - t)a = 0.$$

Маємо

$$x - t \in \mathrm{Ann}(a) = yR.$$

Таким чином, за тверджeням 2.1, кільце R має акуратний ранг 1.

Нехай $aR = bR$. Тоді, існують такі елементи $x, y \in R$, що $a = bx$, $b = ay$. Отже $b = bxy$, $b(1 - xy) = 0$. Звідси

$$1 - xy \in \mathrm{Ann}(b).$$

Отримуємо, що

$$xy + (1 - xy) = 1$$

де $xy \in xR$ і $1 - xy \in (1 - xy)R$. Отже

$$xR + (1 - xy)R = R.$$

Оскільки R, за припущенням, є кільцем акуратного рангу 1, то існує елемент $s \in R$ такий, що

$$x + (1 - xt)s = t$$

є акуратним елементом в R. Оскільки $1 - xy \in \mathrm{Ann}(b)$, маємо

$$(x + (1 - xy)s)b = tb,$$

$xb = tb$ де $xb = a$. Таким чином, $a = tb$ для деякого акуратного елемента $t \in R$.

Аналогічно отримуємо $b = sa$, для деякого акуратного елемента $s \in R$.

Твердження доведено.

$\square$

Теорема 2.6 *Нехай R є кільцем елементарних дільників. Тоді R є кільцем акуратного рангу 1.*

Доведення. За Ройтманом [61] умова кільця елементарних дільників еквівалентна такі умові: для довільних елементів $a, b, c \in R$ для яких виконується

$$aR + bR = R$$

існує елемент $t \in R$ такий, що

$$a + bt = uv,$$

де

$$uR + cR = R,$$

$$vR + (1 - c)R = R,$$

$$uR + vR = R.$$

Позначимо $s = a + bt$. Перейдемо до скінченного гомоморфного образу комутативного кільця R та використовуватимемо позначення $\overline{R} = R/sR$.

Нехай $\overline{u} = u + sR$, $\overline{v} = v + sR$. Зауважимо, що $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{uv} = \overline{0}$. Оскільки

$$uR + vR = R,$$

то для довільних елементів $x, y \in R$ отримуємо

$$\overline{ux} + \overline{vy} = \overline{1},$$

де $\overline{x} = x + sR$, $\overline{y} = y + sR$.

Домноживши цю рівність на $\overline{u}$, $\overline{v}$ отримаємо $\overline{u}^2\overline{x} = \overline{u}$ та $\overline{v}^2\overline{y} = \overline{v}$ відповідно.

Нехай $\overline{vy} = \overline{e}$. Очевидно, що $\overline{e}^2 = \overline{e}$ та $\overline{1} - \overline{e} = \overline{ux}$.

Оскільки $uR + cR = R$, отримуємо наступне співвідношення

$$\overline{ce}\overline{\beta} = \overline{e},$$

для деякого елемента

$$\overline{\beta} \in R/sR.$$

Аналогічно,

$$(\overline{1} - \overline{c})\overline{\alpha}(\overline{1} - \overline{e}) = \overline{1} - \overline{e}$$

для деякого елемента $\overline{\alpha} \in R/sR$.

Отже, доведено, що для довільного елемента $\overline{c} = c + sR$ існує ідемпотент $\overline{e}$ такий, що

$$\overline{e} \in \overline{c}\overline{R}$$

та

$$\overline{1} - \overline{e} \in (\overline{1} - \overline{c})\overline{R}.$$

Оскільки $\overline{R}$ є комутативним кільцем, то за теоремою 1.19 маємо, що $\overline{R}$ є кільцем з властивістю заміни, а отже і R/sR є чистим кільцем.

Теорему доведено.

$\square$

Як наслідок, ми отримуємо наступний результат.

Теорема 2.7 *Нехай R є областю елементарних дільників та елемент $a \in R \setminus \{0\}$. Тоді фактор-кільце R/aR є морфічним кільцем акуратного рангу 1.*

Доведення. Оскільки кожна область елементарних дільників є кільцем Безу [42], за теоремою 2.1 R/aR є морфічним кільцем. Зважаючи на те, що кожен гомоморфний образ кільця елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то за теоремою 2.6 робимо висновок, що R/aR є морфічним кільцем акуратного рангу 1.

Теорему доведено.

$\square$

Зауважимо, що якщо R область елементарних дільників, яка не є областю майже стабільного рангу 1 (приклад Хенріксена [40]), то тоді існує елемент $a \in R$ такий, що у фактор-кільці $\overline{R} = R/aR$ існують такі елементи $\overline{b}, \overline{c} \in \overline{R}$, що $\overline{bR} = \overline{c}\overline{R}$. Тоді існує необоротні акуратні елементи $\overline{s}, \overline{t} \in R$ такі, що $\overline{b}\overline{s} = \overline{c}$, $\overline{c}\overline{t} = \overline{b}$.

2.3. Комутативні морфічні кільця стабільного рангу 2

Відомо, що ліве квазі-морфічне кільце R є кільцем стабільного рангу 1 тоді і тільки тоді, коли $\dim(R) = 0$ [64]. У цьому підрозділі показано, що комутативне морфічне кільце R є кільцем стабільного рангу 2 тоді і тільки тоді, коли $\dim(R) = 1$.

У [42] Капланський підняв питання: якщо $aR = bR$ в кільці R, чи елементи a і b обов'язково є правими асоційованими? Він зазначив, що у випадку комутативного кільця ця властивість виконується для кілець головних ідеалів та артінових кілець. Розвиваючи ці ідеї, Канфел [16] ввів поняття однозначної породжуваності для множини головних ідеалів, тобто, множина $\{a_iR \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ є однозначно породжуваною, якщо

$$a_iR = b_iR,$$

то існують елементи $u_i \in R$ такі, що $a_i = b_iu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ і

$$u_1R + u_2R + \ldots + u_nR = R.$$

Розмірністю комутативного кільця R назвемо найменше ціле число n таке, що кожна множина з $n + 1$ головних ідеалів однозначно породжується. Дане число, якщо воно існує, будемо позначати $\dim(R)$. В [16] Канфел охарактеризував n-вимірний F-простір X в термінах кілець неперервних дійснозначних і комплексних функцій, визначених на просторі X. Розширюючи поняття однозначної породжуваності головних ідеалів ми дамо алгебраїчну характеристику поняття n-вимірності.

В [11] Бас ввів поняття стабільного рангу для кілець. Кільце R стабільного рангу 1 є однозначно породжуваним [81]. Але не кожне однозначно породжуване кільце є кільцем стабільного рангу 1. Зокрема, кільце $\mathbb{Z}$ однозначно породжується, але $\mathbb{Z}$ не є кільцем стабільного рангу

1. Стабільний ранг $\mathbb{Z}$ дорівнює 2 [81]. У випадку лівого квазі-морфічного кільця маємо, що властивість однозначної породжуваності є еквівалентною до умови стабільного рангу 1 [64]. У цьому підрозділі покажемо, що у випадку комутативного морфічного кільця властивість $\dim(R) = 1$ рівносильна умові кільця стабільний ранг якого дорівнює 2.

Всі кільця є комутативними кільцями з одиницею.

Теорема 2.8 *Комутативне кільце Безу R є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{st.r}\,(R) = 2$.

Теорема 2.9 *Нехай R — комутативне кільце Безу і* $\dim(R) = 1$. *Тоді* $\mathrm{st.r}\,(R) = 2$.

Доведення. Нехай R є комутативним кільцем Безу. Для довільних елементів $a, b \in R$ існує $d \in R$ для якого справедливим є таке співвідношення:

$$aR + bR = dR.$$

Тоді існують елементи $a_0, b_0 \in R$ і $u, v \in R$ такі, що

$$a = da_0,$$

$$b = db_0$$

і

$$d = au + bv = a_0ud + b_0vd.$$

Покладемо $q = 1 - a_0u - b_0v$.

Тоді $dq = 0$ і для довільних елементів $t_1, t_2 \in R$ виконуються такі рівності

$$(a_0 + t_1q)d = a,$$

$$(b_0 + t_2q)d = b.$$

Розглянемо елементи $a_0 + t_1q = a_1$ і $b_0 + t_2q = b_2$, які породжують R згідно з обмеженнями накладеними на кільце R.

Тоді $a_1x + b_1y = 1$ для деяких елементів $x, y \in R$ і $a = a_1d$, $b = b_1d$.

За [42] R є кільцем Ерміта і за теоремою 2.8 ми отримуємо, що $\mathrm{st.r}\,(R) = 2$.

Теорему доведено.

□

Теорема 2.10 *Нехай R комутативне майже Бера кільце Безу стабільного рангу 2. Тоді* $\dim(R) = 1$.

Доведення. Нехай $a_1R = b_1R$ і $a_2R = b_2R$. Тоді $a_1 = x_1b_1$, $a_2 = x_2b_2$ і $b_1 = y_1a_1$, $b_2 = y_2a_2$ для деяких $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$. Звідси матимемо, що

$$b_1(1 - x_1y_1) = 0,$$

$$b_2(1 - x_2y_2) = 0$$

і

$$1 - x_1y_1 \in \mathrm{Ann}\,(b_1R),$$

$$1 - x_2y_2 \in \mathrm{Ann}\,(b_2R).$$

Нехай $\mathrm{Ann}\,(b_1R) = \alpha_1R$ і $\mathrm{Ann}\,(b_2R) = \alpha_2R$ для деяких елементів $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Оскільки $1 - x_1y_1 \in \alpha_1R$ і $1 - x_2y_2 \in \alpha_2R$, отримуємо

$$x_1R + \alpha_1R = R$$

і

$$x_2R + \alpha_2R = R.$$

Очевидно, що $x_1R + x_2R + \alpha_1\alpha_2R = R$.

Оскільки $\mathrm{st.r}\,(R) = 2$, то одержуємо наступну рівність

$$(x_1 + \alpha_1\alpha_2s)R + (x_2 + \alpha_1\alpha_2t)R = R$$

для деяких елементів $s, t \in R$. Оскільки

$$(x_1 + \alpha_1\alpha_2t)b_1 = x_1b_1 + \alpha_2t\alpha_1b = x_1b_1 = a_1,$$

$$(x_2 + \alpha_1\alpha_2 s)b_2 = x_2b_2 + \alpha_1 s\alpha_2 b = x_2b_2 = a_2.$$

Позначимо $x_1 + \alpha_1\alpha_2 t = u_1$, $x_2 + \alpha_1\alpha_2 s = u_1$.

Отже, доведено, що $u_1b_1 = a_1$, $u_2b_2 = a_2$ і $u_1R + u_2R = R$, тобто $\dim(R) = 1$.

Теорему доведено.

$\square$

Комутативне морфічне кільце є очевидним прикладом майже Берового кільця Безу [58].

Як результат з теореми 2.9 та теореми 2.10 ми отримали наступний результат.

Теорема 2.11 *Комутативне морфічне кільце R є кільцем стабільного рангу 2 тоді і тільки тоді, коли* $\dim(R) = 1$.

2.4. Приклади морфічних кілець і кілець пов'язаних з ними

Приклад 2.2. [58] Прямий добуток кілець є лівим морфічним тоді і тільки тоді, коли довільний співмножник є лівим мофічним.

Приклад 2.3. [58] Довільне одинично-регулярне кільце є лівим і правим морфічним.

Обернене твердження є невірним. Оскільки $\mathbb{Z}_4$ є морфічним, згідно з роботою [58], як нетривіальний скінченний гомоморфний образ кільця цілих чисел, але $\mathbb{Z}_4$ не є регулярним (в сенсі фон Неймана) кільцем, оскільки ніль-радикал $N(\mathbb{Z}_4)$ рівний $\{\overline{0}, \overline{2}\}$, а в регулярному (в сенсі фон Неймана) кільці він повинен дорівнювати нулю.

Приклад 2.4. [58] Кільце многочленів $R[x]$ ніколи не є ні лівим, ні правим морфічним, для довільного кільця R.

Твердження 2.3 *[58] Нехай R — ліве морфічне кільце. Тоді для довільного елемента $a \in R$ наступні властивості є еквівалентними:*

1. $l(a) = 0$;
2. $Ra = R$;
3. $a \in U(R)$.

Очевидно, що $l(x) = 0$ в $R[x]$, але згідно з твердженням 2.3 $x \in U(R[x])$, але ж $x \notin U(R[x])$, тому $R[x]$ не є лівим (правим) морфічним кільцем.

Приклад 2.5. Приклад Берка [58, 84]

Нехай F поле. Задамо ізоморфізм F в підполе $\overline{F} \neq F$.

Нехай R є лівим F-простором з базою $\{1, c\}$, де $c^2 = 0$ і $cx = \overline{x}c$ для всіх $x \in F$. Тоді R є лівим артіновим локальним лівим морфічним, яке не є правим морфічним. Більше того, кільце $M_2(R)$ не є лівим морфічним. Зауважимо, що R є правим P- ін'єктивним, але не є правим морфічним.

Зауважимо, що якщо F є полем, кільце

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

є лівим артіновим, яке не є ні лівим, ні правим морфічним.

Нагадаємо, що кільце R називається *квазі-фробеніусовим*, якщо довільний ін'єктивний R-модуль є проективним.

Приклад 2.6. [58] Нехай C_r група порядку 2. Розглянемо групове кільце $R = \mathbb{Z}_4 C_r$. Воно є комутативним локальним квазі-фробеніусовим кільцем, яке не є морфічним.

У випадку комутативних кілець R є квазі-фробенусовим тоді і лише тоді, коли R є скінченною прямою сумою локальних артінових кілець, які мають єдиний мінімальний ідеал [57].

Приклад 2.7. Нехай C є підкільцем кільця D. Нехай

$$R[D, C] = \{(d_1, \ldots, d_n, c, c, \ldots) | d_i \in D, c \in C, n \geq 1\}$$

кільце з покомпонентним множенням і додаванням. Нехай

$$S = R[M_n(R), R[x]/x^n R[x]],$$

де R — регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце. Згідно з [48] S не є регулярним (в сенсі фон Неймана) кільцем, але S є напіврегулярним квазі-морфічним кільцем.

Приклад 2.8. Нехай

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$$

і

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

тоді

$$l_R(\alpha) = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

є головним правим ідеалом, але

$$R\alpha = \left\{0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = l\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = l\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

не є лівим анулятором, тобто R є узагальнено морфічним кільцем, яке не є лівим морфічним (і, як висновок, не є лівим квазі-морфічним) [58].

Твердження 2.4 *[73] Нехай R — редуковане кільце. Тоді наступні властивості є еквівалентними:*

1. *R — ліве морфічне;*
2. *$R[x]/Rx^n$ — ліве морфічне;*
3. *R — регулярне (в сенсі фон Неймана);*
4. *R — одинично-регулярне (в сенсі фон Неймана);*
5. *R — абелево-регулярне (в сенсі фон Неймана).*

Приклад 2.9. [18] Нехай R абелево-регулярне кільце і

$$\sigma : R \to R$$

ендоморфізм кільця R, який $\sigma(e) = e$ для довільного ідемпотентного елемента $e \in R$, тоді

$$R[x, \sigma]/(x^2)$$

є лівим морфічним кільцем.

Для довільного напівпростого кільця R кільце матриць тривіальне розширення кільця $R \propto R$ є строго морфічним кільцем, тобто, довільне матричне кільце $M_n(R \propto R)$ є морфічним кільцем.

Для довільних натуральних $d, m > 1$ тривіальне розширення $\mathbb{Z}_{md} \propto \mathbb{Z}_d$ є морфічним тоді і тільки тоді, коли d і m є взаємно простими і d можна подати у вигляді добутку різних простих чисел [18].

Якщо R є областю головних ідеалів з класичним кільцем дробів Q, тоді тривіальне розширення $R \propto Q/R$ є морфічним [18].

Для бімодуля M над Z тривіальне розширення $Z \propto M$ є морфічним тоді і тільки тоді, коли $M \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [18].

Отже, тривіальне розширення $\mathbb{Z} \propto Q/\mathbb{Z}$ є морфічним кільцем і воно не є чистим і не є кільцем стабільного рангу 1.

Приклад 2.10. [58] Оскільки кільце матриць над тілом є лівим і правим морфічним і добуток морфічних кілець є морфічним, тоді класичне напівпросте кільце є правим головним лівим морфічним кільцем.

Приклад 2.11. [58] Якщо p — просте, тоді $M_n(\mathbb{Z}_{p^k})$ є правим головним лівим морфічним кільцем та є лівим і правим морфічним.

Приклад 2.12. Розглянемо прямий добуток $R = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ і нехай $\sigma : R \to R$ задається $\{a_1, a_2\} \to \{a_2, a_1\}$. Тоді σ є ендоморфізмом R де $\sigma(1) = 1$.

Нехай $b = (1, 0)$ і $S = R[x, \sigma]/(x^2)$. В [47] показано, що не існує $e, d \in R$ таких, що

$$l(bx) = S(c + dx)$$

і

$$S(bx) = l(c + dx).$$

Тобто S не є лівим морфічним.

Твердження 2.5 *Якщо R є одинично-регулярним кільцем, тоді $M_n(R[x]/(x^n))$ є морфічним кільцем для довільного $n \in \mathbb{N}$*

Приклад 2.13. Кільце $\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, y^2)$ не є лівим морфічним.

Теорема 2.12 *Наступні властивості кільця R є еквівалентними:*

1. *R — одинично-регулярне;*

2. *$R[x]/(x^2)$ — морфічне кільце.*

Очевидно, що довільне ліве морфічне кільце є лівим узагальнено морфічним кільцем, а обернене твердження є невірним.

Довільне кільце головних лівих ідеалів є узагальнено морфічним, але воно не є лівим морфічним [86].

Зауважимо, що кільце цілих $\mathbb{Z}$ чисел є узагальнено морфічним, але не є морфічним.

У випадку нескінченновимірного лінійного простору, кільце $R = \mathrm{End}(V)$ є регулярним (в сенсі фон Неймана) кільцем, а значить R є узагальнено морфічним, яке не є морфічним [58].

Твердження 2.6 *[86] Кільце R є одинично-регулярним тоді і лише тоді, коли R є лівим напівспадковим і правим морфічним кільцем.*

2.5. Висновки до розділу 2

В даному розділі показано, що:

1) скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є морфічними кільцями;

2) вказано необхідні і достатні умови, коли скінченні гомоморфні образи комутатавної області Безу є кільцями Каша (часткова відповідь на відкрите питання Фейса й Факкіні [30]);

3) дано відповідь на відкрите питання Ніколсона і Санчез Кампоса, про існування морфічних кілець, які не є чистими [58];

4) показано, що стабільний ранг однозначно морфічних кілець рівний 1 і, як наслідок, отримано, що однозначно морфічні кільця є кільцями елементарних дільників;

5) встановлено, що умова акуратного рангу 1 для морфічного кільця еквівалентна умові однозначності твірних елементів головного ідеалу з точністю до акуратності;

6) встановлено необхідні і достатні умови на розмірність кільця (в сенсі Канфела) щоб кільце було кільцем стабільного рангу 2.

РОЗДІЛ 3
КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ, В ЯКИХ НУЛЬ Є АДЕКВАТНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Адекватні кільця є найбільш відомим прикладом кільця елементарних дільників, яке не є, взагалі кажучи, кільцем головних ідеалів. В роботі [1] показано, що нетривіальний скінченний гомоморфний образ адекватної області Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним. Це дало поштовх для дослідження комутативних кілець Безу, в яких нуль є адекватним. Зокрема, в роботі наведено критерій, коли напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним. Описано комутативні області Безу, в яких нульовий елемент є адекватним та отримано нове описання комутативних напіврегулярних кілець Безу.

3.1. Комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом є напіврегулярними

Адекватні кільця як узагальнення кілець аналітичних функцій ввів Хелмер [38], як клас кілець, над якими довільна матриця діагоналізується. Показано [46], що в класі комутативних регулярних (в сенсі фон Неймана) і комутативних кілець нормування нульовий елемент володіє властивостями адекватності. Це дало можливість ввести і розглядати кільця, в яких нульовий елемент є адекватним. Нижче описані різноманітні властивості комутативних кілець Безу з адекватним нульовим елементом [46, 82]. Виявлено, що клас таких кілець збігається з класом напіврегулярних кілець Безу.

Всі розглядувані кільця є комутативними з одиницею і $1 \neq 0$. Оскільки вивчаємо кільця, в яких 0 є адекватним елементом, наведемо відомий результат, який дає можливість будувати приклади таких кілець.

Нагадаємо, що

Означення 3.1 *[38] Елемент a комутативного кільця Безу R називається адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ елемент a можна зобразити у вигляді*

$$a = r \cdot s,$$

де

$$rR + bR = R$$

та

$$s'R + bR \neq R,$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s.

Теорема 3.1 *[82] Нехай a – адекватний елемент комутативного кільця Безу. Тоді $\overline{0} \in R/aR$ є адекватним елементом.*

Покажемо, що властивість нуля бути адекватним піднімається по радикалу Джекобсона J(R).

Теорема 3.2 *Нехай R – комутативне кільце, в якому 0 є адекватним. Тоді в фактор-кільці $R/\mathrm{J(R)}$ елемент $\overline{0}$ теж є адекватним.*

Доведення. Позначимо $\overline{R} = R/\mathrm{J(R)}$. Нехай у кільці R нуль є адекватним. Покажемо, що $\overline{0} = 0 + \mathrm{J(R)}$ є адекватним в $\overline{R}$.

Нехай $\overline{b} = b + \mathrm{J(R)}$ — довільний елемент в $\overline{R}$. Згідно з адекватністю нуля в R маємо $0 = rs$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR \neq R$ —- для довільного необоротного дільника s' елемента s. Нехай $\overline{r} = r + \mathrm{J(R)}$, $\overline{s} = s + \mathrm{J(R)}$.

Звідси

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{bR} = \overline{R}$$

і

$$\overline{s'}\overline{R} + \overline{bR} \neq \overline{R}.$$

Нехай $\bar{t}$ – необоротний дільник елемента $\bar{s} \in \overline{R}$. Тоді існують такі елементи $j \in \mathrm{J(R)}$ і $k \in R$, що $s + j = tk$. Покажемо, що $sR + tR \neq R$. Нехай це не так, тобто $sR + tR = R$, а звідси отримуємо $su + tv = 1$, тоді

$$tku - ju + tv = 1$$

і

$$tku + tv = t(ku + v) = 1 + ju.$$

Оскільки $j \in \mathrm{J(R)}$, то отримаємо, що t є оборотним елементом в R , а це суперечить нашому припущенню. Отже, $\bar{t}$ є необоротнім елементом в $\overline{R}$. Тому,

$$sR + tR + kR \neq R.$$

Згідно з означенням елемента $s \in R$ маємо, що $kR + bR \neq R$, а отже,

$$\overline{kR} + \overline{bR} \neq \overline{R}.$$

Оскільки $\overline{k}$ дільник елемента $\bar{t}$, то

$$\overline{tR} + \overline{bR} \neq \overline{R}.$$

Отже, $\overline{0}$ є адекватним елементом в $\overline{R}$.

Теорему доведено.

$\square$

Опишемо комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним через властивість радикала Джекобсона.

Теорема 3.3 *Нехай R — комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним елементом. Тоді для довільного ненульового і необоротного елемента $b \in R$ існує ідемпотент $e \in R$ такий, що $be \in \mathrm{J(R)}$ і*

$$eR + bR = R.$$

Доведення. Нехай b – ненульовий і необоротний елемент кільця R. Згідно з означенням кільця R маємо, що

$$0 = rs,$$

де

$$rR + bR = R$$

і

$$s'R + bR \neq R$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s. Очевидно, що

$$rR + sR = R.$$

Звідси

$$ru + sv = 1$$

для деяких елементів $u, v \in R$. Отримуємо

$$r^2u = r,$$

при чому

$$(ru)^2 = ru = e.$$

Очевидно, що з умови $rR + bR = R$ і того факту, що $r^2u = r$, маємо

$$eR + bR = R.$$

Зауважимо, що $s^2u = s$ і $1 - e = sv$ – ідемпотент кільця R. Оскільки $eR + bR = R$, то отримуємо рівність

$$rux + by = 1$$

для деяких елементів $x, y \in R$. З цієї рівності випливає, що

$$1 - e \in bR.$$

Звідси

$$\mathrm{mspec}(b) \subset \mathrm{mspec}(1 - e).$$

Нехай існує такий $M \subset \mathrm{mspec}(1 - e)$, що $b \notin M$. Звідси

$$M + bR = R,$$

тобто $m + bt = 1$, де $m \in M$, $t \in R$. Нехай

$$(1 - e)R + mR = d.$$

Оскільки $(1 - e) \in M$ та $m \in M$, то очевидно, що $d \in M$. Оскільки $sv = 1 - e$ та d є необоротним дільником елемента sv та $s^2u = s$, то очевидно, що d є необоротним дільником елемента s . Звідси, згідно з обмеженнями, накладеними на елемент s, маємо $bR + dR \neq R$. Хоча

$$R = bR + mR \subseteq bR + dR \neq R,$$

що неможливо. Отже,

$$\mathrm{mspec}\,(b) = \mathrm{mspec}\,(1 - e).$$

Покажемо, що елемент be міститься в усіх максимальних ідеалах кільця R. Нехай M — довільний максимальний ідеал кільця R. Оскільки

$$\mathrm{mspec}\,(e) \cup \mathrm{mspec}\,(1 - e) = \mathrm{mspec}\,(R),$$

то можливі такі випадки:

1. $M \in \mathrm{mspec}\,(e)$ або
2. $M \in \mathrm{mspec}\,(1 - e)$.

Якщо $M \in \mathrm{mspec}\,(e)$, тоді $be \in M$. Якщо ж $M \in \mathrm{mspec}\,(1 - e)$, то оскільки

$$\mathrm{mspec}(1 - e) = \mathrm{mspec}\,(b),$$

тоді $b \in M$, а отже, $be \in M$.

Через довільність вибору максимального ідеалу M отримуємо, що $be \in \mathrm{J(R)}$.

Теорему доведено.

$\square$

Як наслідок отримуємо такий результат.

Теорема 3.4 *Напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним елементом тоді і лише тоді, коли воно є регулярним (в сенсі фон Неймана).*

Доведення. Нехай R – напівпросте комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним. За теоремою 3.3 для довільного ненульового і необоротного елемента кільця R існує ідемпотент $e \in R$ такий, що

$$be \in \mathrm{J(R)},$$

причому

$$bR + eR = R.$$

Оскільки $\mathrm{J(R)} = 0$, тоді $be = 0$. З огляду на те, що $bR + eR = R$, то

$$bu + ev = 1$$

для деяких елементів $u, v \in R$. Звідси

$$b^2u = b,$$

тобто елемент b є регулярним (в сенсі фон Неймана). Необхідність доведено.

За працею [46] достатність є очевидною.

Теорему доведено.

□

З теорем 3.2 та 3.4 є очевидним такий результат.

Теорема 3.5 *Нехай R – комутативне кільце Безу. Тоді такі твердження є еквівалентними:*

1. *R кільце, в якому нуль є адекватним;*
2. *R — напіврегулярне кільце.*

Ця теорема є новою характеристикою напіврегулярного кільця Безу.

3.2. Приклади напіврегулярних кілець

В даному підрозділі наводяться приклади напіврегулярних кілець і кілець, які тісно пов'язані з ними.

Нагадаємо, що елемент a кільця R називається *регулярним* (в сенсі фон Неймана), якщо він задовільняє наступним еквівалентним умовам:

1. існує елемент $x \in R$ такий, що $axa = a$;

2. $R = aR + T$ для деякого правого ідеалу $T \subseteq R$;

3. $R = Ra + \mathcal{Z}$ для деякого лівого ідеалу $\mathcal{Z} \subseteq R$.

Кільце R назвемо регулярним (в сенсі фон Неймана), якщо довільний елемент кільця R є регулярним.

Очевидно, що довільне класичне напівпросте кільце є регулярним (в сенсі фон Неймана), а в комутативному випадку довільний скінченний прямий добуток полів є регулярним (в сенсі фон Неймана) кільцем.

Наступна лема визначає еквівалентні умови, для елемента, який є розширенням умов для регулярного (в сенсі фон Неймана) елемента.

Лема 3.1 *[57] Наступні умови є еквівалентними для елемента a кільця R:*

1. існує ідемпотент $e \in aR$ такий, що $(1-e)a \in \mathrm{J(R)}$;

2. існує ідемпотент $e \in Ra$ такий, що $a(1-e) \in \mathrm{J(R)}$;

3. $a - b \in \mathrm{J(R)}$.

Означення 3.2 *[54] Елемент a кільця R називається напіврегулярним, якщо він задовільняє умовам даної леми і кільце R називається напіврегулянім, якщо довільний елемент кільця R є напіврегулярним.*

Відмітимо, що напіврегулярне кільце, згідно з лемою є напівпотужним. Нагадаємо, що комутативне кільце R є напівпотужним, якщо довільний ідеал, який неналежить радикалу Джекобсона містить нетривіальний ідемпотент та ідемпотенти піднімаються по модулю радикала Джекобсона.

Зауважимо, що

Твердження 3.1 *[57] Нехай R є напіврегулярним кільцем. Тоді:*

1. *eRe є напіврегулярним для довільного ідемпотента e кільця R;*
2. *R/I є напіврегулярним для довільного ідеалу I кільця R;*

Для ідеалу I кільця R скажемо, що *ідемпотенти підносяться по модулю ідеалу I*, якщо для довільного елемента $x \in R$ такого, що $x - x^2 \in I$ існує в кільці R ідемпотент $e \in R$ для якого $e - x \in I$.

Зауважимо, що кільце з властивістю заміни, згідно з результатами Ніколсона [54], можна визначити, як кільце в якому ідемпотенти підносяться по модулю довільного лівого ідеалу цього кільця. Він же довів, що дане означення є ліво-право симетричним.

За Ніколсоном [54], маємо, що напіврегулярне кільце є кільцем з властивістю заміни

Теорема 3.6 *[54] Для кільця R наступні умови еквівалентні:*

1. *R — напіврегулярне кільця;*
2. *$R/\mathrm{J(R)}$ — регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце і ідемпотенти піднімаються по модулю радикала Джекобсона.*

Нагадаємо, що кільце R називається напівдосконалим, якщо $R/\mathrm{J(R)}$ є класичним напівпростим кільцем і ідемпотенти піднімаються по модулю радикала Джекобсона [54]. Звідси, отримуємо наступні приклади напіврегулярних кілець:

1. R напівдосконале кільце є прикладом напівлокального кільця;

2. R регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце є напіврегулярним.

   Приклади комутативних регулярних (в сенсі фон Неймана) кільць включають всі булеві кільця, поля, скінченні прямі добутки полів.

   Джекобсон показав, що, якщо для довільного елемента r кільця R існує таке натуральне число $n > 1$, що $r^n = r$, тоді R є комутативним кільцем. Неважко побачити, що довільне таке кільце є регулярним (в сенсі фон Неймана), а тому, воно є напіврегулярним [57].

3. Комутативне кільце R назвемо нуль-вимірним (стосовно розмірності Круля), якщо довільний простий ідеал кільця R є максимальним. Є добре відомим фактом [54], що комутативне кільце є нуль-вимірним тоді і тільки тоді, коли $R/\mathrm{J(R)}$ є регулярним і $\mathrm{J(R)}$ є ніль-ідеалом. Зокрема, звідси отримуємо, що комутативне кільце є регулярним (в сенсі фон Неймана) тоді і лише тоді, коли воно є нуль-вимірним і редукованим, тобто нільпотентними елементами кільця R є лише нуль.

   Звідси, кільце $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ є нуль-вимірним, яке не є регулярним (в сенсі фон Неймана). Більше того, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ є нуль-вимірним, але воно є регулярним (в сенсі фон Неймана) тоді і лише тоді, коли n є вільним від квадратів.

   Отже, нуль-мірне кільце є прикладом напіврегулярного кільця, а $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ є напіврегулярного кільця, яке не є регулярним (в сенсі фон Неймана).

4. Як зауважувалось раніше, напіврегулярне кільце є кільцем з властивістю заміни. Ніколсон [54] навів приклад комутативного кільця з властавістю заміни, яке не є напіврегулярним.

Приклад Ніколсона. Нехай D — поле, а S — підкільце в R з одиницею. Позначимо:

$$R(D,S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, \dots) \mid n \geq 1, x_j \in D, s \in S\}.$$

Тоді $R(D,S)$ є кільцем (з покомпонентними операціями) і $R(D,S)$ є кільцем з властивістю заміни тоді і тільки тоді, коли таким є кільце S. Фактично, S є гомоморфним образом R. Більше того, довільний ненульовий лівий (правий) ідеал кільця R містить ненульовий ідемпотент, а, отже, $\mathrm{J(R)} = 0$. Звідси бачимо, що $R(D,S)$ не є регулярним (в сенсі фон Неймана).

У випадку, якщо в якості Q взяти поле раціональних чисел, а в якості S розглядати підкільце раціональних чисел з непарним знаменником, тоді $R(Q,S)$ є комутативним чистим кільцем з нульовим радикалом Джекобсона, яке не є регулярним (в сенсі фон Неймана) (S є гомоморфним образом $R(Q,S)$). Це означає, що $R(Q,S)$ у цьому випадку, є чистим кільцем, яке не є напіврегулярним.

5. Наведемо приклад комутативного кільця Безу, яке не є регулярним (в сенсі фон Неймана) по модулю радикала Джекобсона.

   Нехай $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Визначимо множення на R наступним чином:

$$(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1 n_2, n_1 q_2 + n_2 q_1),$$

   де $n_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

   Розглянемо радикал Джекобсона

$$\mathrm{J(R)} = (0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

   є єдиним нескінченнопородженим ідеалом кільця R. Легко показати, що R кільцем Безу, оскільки довільний скінченнопороджений ідеал кільця R є головними та породжується елементами вигляду

$$(n, 0), n \in \mathbb{Z}$$

або

$$(0, q), q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Але ж маємо, що

$$R/\mathrm{J(R)} = R/(0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

і не є регулярним (в сенсі фон Неймана) кільця.

Оскільки в цій дисертації розглядаються, як правило, комутативні напіврегулярні кільця, то згідно з Туганбаєвим [4] маємо, що комутативні напіврегулярні кільця Безу співпадають з напіврегулярними дистрибутивними кільцями, тобто кільцями, гратка ідеалів яких є дистрибутивною.

3.3. Висновки до розділу 3

В цьому розділі:

1) встановлено умови на комутативне кільце Безу, в яких нуль є адекватним елементом.

2) вказано, що клас комутативних кілець Безу є кільцями, в яких нуль є адекватним, тоді і тільки тоді, коли ці кільця є напіврегулярними, що є відповіддю на питання Ларсена, Левіса, Шореса поставленого в роботі [46].

РОЗДІЛ 4
ЛОКАЛЬНО ГЕЛЬФАНДОВІ ОБЛАСТІ БЕЗУ

В цьому розділі введено локально гельфандові кільця. У випадку комутативних локально гельфандових областей Безу показано, що вони є областями елементарних дільників.

4.1. Локально гельфандові області Безу є кільцями елементарних дільників

Як узагальнення локальних та регулярних (за фон Нейманом) кілець, Контеса в [24] ввела VNL (локально регулярні (за фон Нейманом)) кільця, а саме, кільце R є *VNL (локальним за фон Нейманом)* кільцем, якщо для довільного $a \in R$ один з елементів a або $1 - a$ є регулярним (за фон Нейманом) елементом. Аналогічно розглянемо локально гельфандові кільця, які є узагальненням комутативних областей, в яких кожен ненульвий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. У цьому розділі показано, що комутативна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників. Слід звернути увагу, що ці результати є відповідями на відкриті питання роботи [85].

Всі кільця, які розглядаються в цьому підрозділі, є комутативними кільцями з одиницею.

Означення 4.1 *Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R називається PM-елементом, якщо фактор-кільце R/aR є PM-кільцем.*

Твердження 4.1 *Елемент a комутативної області Безу R є PM-елементом тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R$$

елемент a може бути представлений у вигляді

$$a = rs,$$

де

$$rR + bR = R, \quad sR + cR = R.$$

Доведення. Позначимо $\overline{R} = R/aR$ і $\overline{b} = b + aR$, $\overline{c} = c + aR$. Оскільки $aR + bR + cR = R$, маємо, що

$$\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}.$$

Нехай $\overline{r} = r + aR$ та $\overline{s} = s + aR$. Оскільки $a = rs$, тоді $\overline{0} = \overline{rs}$, де

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R},$$

$$\overline{s}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}.$$

Тоді $\overline{R}$ є гельфандовим кільцем. За [51], $\overline{R}$ є PM-кільцем.

Якщо $\overline{R}$ є PM-кільцем, то $\overline{R}$ є гельфандовим кільцем та $\overline{0} = \overline{rs}$, де

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}, \quad \overline{s}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$$

для довільних $\overline{b}, \overline{c} \in \overline{R}$ таких, що

$$\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}.$$

Звідси, ми отримуємо

$$aR + bR + cR = R$$

і $rs \in aR$, тобто

$$rs = at$$

для деякого $t \in R$.

Нехай

$$rR + aR = r_1R,$$

$$sR + aR = s_1R,$$

де $r = r_1 r_0$, $a = r_1 a_0$, $s = s_1 s_2$, $a = s_1 a_2$ такі, що

$$r_0 R + a_0 R = R$$

та

$$s_2 R + a_2 R = R.$$

Оскільки $r_0 R + a_0 R = R$, отримуємо

$$r_0 u + a_0 v = 1$$

для деяких елементів $u, v \in R$. Оскільки $rs = at$, то

$$r_1 r_0 s = r_1 a_0 t$$

і

$$r_0 s = a_0.$$

З рівності $r_0 u + a_0 v = 1$ маємо $a_0(tu + sv) = s$. Отже,

$$a = r_1 a_0,$$

де $r_1 R + bR = R$ і $a_0 R + cR = R$.

Твердження доведено.

$\square$

Твердження 4.2 *Множина всіх PM-елементів комутативної області Безу R є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.*

Доведення. Нехай a, b — PM-елементи з R. Покажемо, що ab є PM-елементом. Припустимо протилежне. Тоді існує простий ідеал P і максимальні ідеали M_1, M_2 з R такі, що

$$M_1 \neq M_2$$

та

$$ab \in P \subset M_1 \cap M_2.$$

Оскільки $ab \in P$ і P є простим ідеалом в R, отримуємо, що $a \in P$ чи $b \in P$. Це неможливо, бо a, b є PM-елементами та $P \subset M_1 \cap M_2$. Таким чином, множина всіх PM-елементів є мультиплікативно замкненою.

Нехай ab — PM-елемент з R. Якщо a не є PM-елементом, тоді існує простий ідеал P такий, що $a \in P$ і

$$P \subset M_1 \cap M_2$$

для деяких максимальних ідеалів M_1, M_2 для яких $M_1 \neq M_2$. Таким чином, $ab \in P$ та $P \subset M_1 \cap M_2$, $M_1 \neq M_2$. Це неможливо, бо ab є PM-елементом.

Твердження доведено.

□

Означення 4.2 *Комутативне кільце є локально гельфандовим кільцем (позначимо GLR), якщо для довільного $a \in R$ один з елементів a або $1 - a$ є PM-елементом.*

Оскільки в комутативній області, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, кожен ненульовий елемент є PM-елементом, то ми отримуємо наступний результат.

Твердження 4.3 *Комутативна область, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, є локально гельфандовим кільцем.*

Прикладом локально гельфандового кільця (GLR) є приклад Хенріксена [40].

Нехай

$$R = \{z_0 + a_1x + a_1x^2 + \ldots | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}.$$

Очевидно, що радикал Джекобсона кільця R має вигляд

$$\mathrm{J(R)} = \{a_1x + a_1x^2 + \ldots | a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}.$$

Очевидно, якщо $0 \neq a \notin \mathrm{J(R)}$, тоді a є PM-елементом. Якщо $a \in \mathrm{J(R)}$, тоді $1 - a$ є PM-елементом.

Твердження 4.4 *Комутативна область Безуе GLR кільцем тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що*

$$aR + bR = R$$

один з елементів a або b є PM-елементом.

Доведення. Нехай R — локально гельфандовим кільцем і $aR + bR = R$. Тоді $au + bv = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. За означеннням R ми отримуємо, що один з елементів au або $bv = 1 - au$ є PM-елементом. Якщо au є PM-елементом, тоді, за твердженням 4.2, a є PM-елементом також. Якщо bv є PM-елементом, тоді за твердженням 4.2, b є PM-елементом також. Достатність є очевидною.

Твердження доведено.

□

Основним результатом цього розділу є наступна тероема.

Теорема 4.1 *Довільна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай R комутативна GLR область Безу. Нехай $a, b, c \in R$ такі, що

$$aR + bR + cR = R.$$

Нехай $aR + cR = dR$. Оскільки $aR + bR + cR = R$, тоді

$$bR + dR = R.$$

Оскільки R є локально гельфандовою області, тоді можливими є два випадки:

1. b є PM-елементом;

2. d є PM-елементом.

Спочатку розглянемо перший випадок. Якщо b є PM-елементом, маємо $b = rs$ де $rR + aR = R$, $sR + cR = R$. Нехай $p \in R$ такий, що $sp + ck = 1$ для деякого $k \in R$. Отже

$$rsp + rck = r$$

і

$$bp + crk = r.$$

Позначивши $rk = q$, отримуємо

$$(bp + cq)R + aR = R.$$

Нехай $pR + qR = \delta R$ і $\delta = pp_1 + qq_1$ з $p_1R + q_1R = R$. Таким чином,

$$p_1R + (bp_1 + cq_1)R = R.$$

Оскільки $pR \subset p_1R$, маємо

$$p_1R + cR = R$$

і

$$p_1R + (bp_1 + cq_1)R = R.$$

Оскільки

$$bp + cq = \delta(bp_1 + cq_1)$$

і

$$(bp + cq)R + aR = R,$$

то отримуємо

$$(bp_1 + cq_1)R + aR = R.$$

Отже, маємо, що

$$ap_1R + (bp_1 + cq_1)R = R.$$

За [42] комутативна область Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $aR+bR+cR = R$ володіє діагональною редукцією. За [61] зауважимо, що матриця A володіє діагональною редукцією тоді і лише тоді, коли існують $p, q \in R$ такі, що

$$apR + (bp + cq)R = R.$$

Тобто, якщо b є PM-елементом, R є кільцем елементарних дільників.

Розглянемо другий випадок. Нехай d — PM-елемент. Оскільки $dR = aR + cR$, тоді $a = da_0$, $c = dc_0$, де $a_0R + c_0R = R$. Оскільки R є GLR кільцем, за твердженням 4.4 отримуємо, що один з елементів a або c є PM-елемент. Зауважимо, що відповідно до твердження 4.2 матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$ є еквівалентною до матриці B де

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

де β є PM-елемент і $\alpha R + \beta R + \gamma R = R$.

Якщо a є PM-елементом і b не є PM-елементом, тоді $a + b$ є PM-елементом. Якщо c є PM-елементом і b не є PM-елементом, тоді $c+b$ є PM-елементом. Нехай a є PM-елементом і b не є PM-елементом та

$$aR + bR = dR.$$

Тоді $a = a_0d$, $b = b_0d$ і

$$a_0R + b_0R = R.$$

Оскільки $a = a_0 d$ тоді за твердженням 4.2 d є PM-елементом. Оскільки $b = b_0 d$ не є PM-елементом та d є PM-елементом за твердженням 4.2 елемент b_0 не є PM-елементом. Оскільки R є GLR та b_0 не є PM-елементом і

$$b_0 R + (a_0 + b_0) R = R$$

маємо $a_0 + b_0$ є PM-елементом і за твердженням4.2

$$d(a_0 + b_0) = a + b$$

є PM-елементом.

У аналогічний спосіб можна довести і другий випадок, тобто, якщо c є PM-елементом і b не є PM-елементом.

Аналогічними міркуваннями, як у першому випадку, робимо висновок, що матриця B, а отже і матриця A володіє діагональною редукцією. Ми довели, що R є областю елементарних дільників.

Теорему доведено.

$\square$

4.2. Приклади кілець з властивістю заміни, чистих та акуратних кілець

Нагадаємо, що елемент a кільця R називається *чистим*, якщо $a = u + e$, де $u \in U(R)$, e — ідемпотент кільця. Очевидними прикладами чистих елементів є одиниці, ідемпотенти і квазі-регулярні елементи кільця. Дійсно, довільну одиницю u кільця R можна записати у вигляді $u = u + 0$, а довільний ідемпотент e кільця запишемо $e = (e - f) + f$, де $f = 1 - e$.

Нагадаємо [4], що елемент x кільця R називається *квазі-регулярним*, якщо існує елемент $y \in R$ такий, що

$$x + t = xt = yx.$$

Зауважимо, що елемент x кільця R є квазі-регулярним тоді і лише тоді, коли $1 - x$ є одиницею кільця R [4]. Більше того, добре відомо, що довільний лівий (правий) ідеал кільця R, який не міститься в радикалі Джекобсона містить елемент, який не є квазі-регулярним. Тоді, якщо x є квазі-регулярним елементом кільця, представимо

$$x = (x - 1) + 1$$

оскільки $x - 1$ є одиницею кільця R.

Як наслідок, отримуємо твердження.

Твердження 4.5 *Довільне тіло, булеву кільце і локальне кільце є чистим.*

Більше того, у випадку нерозкладного кільця, тобто кільця з тривіальними ідемпотентами, ми маємо наступний результат.

Теорема 4.2 *Наступні властивості є еквівалентними для довільного кільця R:*

1. *R є локальним кільцем;*

2. *R нерозкладне чисте кільце;*

3. *R нерозкладне кільце з властивістю заміни.*

Як наслідок, отримуємо таке твердження.

Твердження 4.6 *Область цілісності є чистою тоді і тільки тоді, коли вона є локальною.*

У випадку напівлокальних кілець маємо наступний результат.

Теорема 4.3 *[51] Напівлокальне кільце є чисте тоді і тільки тоді, коли воно є напівдосконале.*

Більше того, згідно з [51] кільце $\mathbb{Z}_{(2)}$ раціональних чисел з непарними знаменниками є напівдосконалим кільцем, яке не є досконалим і нескінченний прямий добуток

$$\mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}_{(2)} \times \dots$$

є чистим кільцем, яке не є напівдосконалим. Зауважимо, що кільце $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ не є полем, а прямий добуток $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ є напівдосконалим, але не є локальним кільцем.

Як згадувалось раніше, довільне нуль-вимірне кільце є напіврегулярним кільцем, яке, в свою чергу, є чистим кільцем. Звідси $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ є нуль-вимірним кільцем, яке не є регулярним (в сенсі фон Неймана), але є чистим кільцем.

Зауважимо, що нетерове кільце, взагалі кажучи, не є чистим. На приклад, кільце цілих чисел є нетеровим, але не є чистим, а кільце $\mathbb{Z}_{(6)}$ всіх раціональних чисел, знаменник яких взаємно простий з 6 є напівлокальним і нетеровим, але не є чистим.

Згідно з [51], нетерове кільце є чистим (відповідно, кільцем з властивістю заміни, напівпотужним) кільцем тоді і тільки тоді, коли воно є напівдосконалим.

Згідно з результатами Хурани і Кумара [51], групові кільця RC_2 і RS_3, де C_2 — циклічна група порядку 2, S_3 — група підстановок, є чистим, якщо R є комутативним чистим кільцем. Групове кільце RC_n не володіє даною властивістю для довільної циклічної групи C_n порядку $n > 2$.

У задачах вивчення чистих групових кілець вивчаються кільця з кільцево-теоретичною локальною властивістю, тобто коли RH є чистим для довільної скінченнопороджуваною підгрупою H групи G. Скажемо, що групове кільце RG є локально чисте, якщо RH є чистим для довільної скінченнопороджуваної підгрупою H групи G. Як зауважив Чен і Шоу [18] довільне групове локально чисте кільце є чистим. В той же час, $\mathbb{Z}_{(7)}S_3$ є чистим, але не є локально чистим.

Більше того, якщо p — просте число, тоді $\mathbb{Z}_{(p)}C_3$ є чистим тоді і тільки тоді, коли $p \neq 1(\mod 3)$. Такого роду дослідження є доволі актуальною і досліджуваною задачею [51]. Згідно з цією працею елементи a комутативного кільця R називається *акуратним*, якщо R/aR є чистим кільцем. Якщо довільний ненульовий елемент кільця R є акуратним, тоді кільце R є акуратним. Оскільки гомоморфний образ чистого кільця є чистим кільцями, тоді очевидним прикладом акуратних елементів служать одиниці, ідемпотенти і квазірегулярні елементи [51]. Чисте кільце є акуратним. Більше того, у випадку розкладного кільця ми маємо наступний результат:

Твердження 4.7 *[51] Нехай R розкладним комутативним кільцем. Тоді R є акуратним тоді і лише тоді, коли воно є чистим.*

Звідси слідує, що дослідження акуратних кілець, які не є чистими, умова нерозкладності кільця є визначальною. Нагадаємо, що нерозкладне кільце є чистим тоді і тільки тоді, коли воно є локальним.

Оскільки область цілісності завжди є нерозкладною, тому є важливим дослідження акуратних областей цілісності. Стандартним прикладом акуратної області цілісності служить кільце цілих чисел, оскільки добре відомо, що довільний нетривіальний гомоморфний образ кільця $\mathbb{Z}$ є добутком локальних кілець, а значить є чистим. Більше того, справедливим є таке твердження.

Твердження 4.8 *[51] Якщо R є областю розмірності Круля 1, тоді R є акуратною. Зокрема, комутативна область головних ідеалів є акуратною.*

Більше того, згідно з [1], маємо:

Твердження 4.9 *Комутативна адекватна область є акуратною.*

Якщо P — поле і $R = P[x, y]$, тоді R не є акуратною, оскільки

$$R/yR \cong R[x]$$

не є чистим кільцем. Більше того, якщо $P[x]$ є акуратним, тоді P — поле.

Згідно з Капланським [51], комутативне кільце R називається *FGC-кільцем*, якщо довільний скінченнопороджений R-модуль є ізоморфний прямій сумі циклічних підмодулів. Повне описання FGC-кілець дано в [51].

Твердження 4.10 *[51] FGC-область є акуратною.*

Нагадаємо, що комутативне кільце називається *h-локальним*, якщо воно має скінченний характер (тобто довільний ненульовий елемент міститься лише в скінченній множині максимальних ідеалів) і довільний власний гомоморфний образ є PM-кільцем.

Твердження 4.11 *[51] h-локальна область є акуратною.*

Кільце узагальнених чисел Коломбо.

Позначимо через K поле $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, а через

$$\overline{K} = \mathcal{E}_M(K)/N(K),$$

де

$$\mathcal{E}_M(K) = \{(x_\mathcal{E})_\mathcal{E} \in K^{(0,1)} : (\exists a \in \mathbb{R})(\exists \mathcal{E}_0 \in (0,1))(\forall \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_0)(|x_\mathcal{E}| \leq \mathcal{E}^a)\}$$

$$N(K) = \{(x_\mathcal{E})_\mathcal{E} \in K^{(0,1)} : (\exists a \in \mathbb{R})(\exists \mathcal{E}_0 \in \mathbb{R})(\exists \mathcal{E}_0 \in (0,1))(\forall \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_0)(|x_\mathcal{E}| \leq \mathcal{E}^a)\},$$

а операції визначаються поточково.

Позначимо $\alpha \in \overline{K}$ узагальнене число з представленням $(x_\mathcal{E})_\mathcal{E}$. $\overline{K}$ є редукованим кільцем причому кожен ненульовий елемент $\overline{K}$ є дільником нуля або оборотним елементом [36]. Більше того, $\overline{K}$ не є артінове і не є нетеровим і $J(\overline{K}) = 0$. $\overline{K}$ — кільце з незчисленною множиною максимальних ідеалів. Більше того, $\overline{K}$ не є регулярним (в сенсі фон Неймана) кільцем.

Множина ідемпотентів $\overline{K}$ є такою (за [36]):

$$\{e_S : S \subseteq (0,1)\}.$$

Твердження 4.12 *[36] $\overline{K}$ є кільцем з властивастю заміни (чистим).*

Доведення. Доведемо, що $\overline{K}$ є чистим. Нехай $a \in \overline{K}$ з представленням $(a_\mathcal{E})_\mathcal{E}$. Нехай

$$T = \{\mathcal{E} \in (0,1) : |a_\mathcal{E}| \leq \frac{1}{2}\}$$

Тоді,

$$\mathcal{E}_T^2 = \mathcal{E}_T,$$

$$e_T|a| \leq \frac{e_k}{2}$$

і

$$e_{T^e} \geq \frac{e_{T^e}}{2}.$$

Звідси матимемо

$$|\mathcal{E}_T + a| = e_T|1 + a| + e_{T^e}|a| \geq e_T - e_T|a| + e_{T^e}|a| \geq \frac{e_T + e_{T^e}}{2} = \frac{1}{2}$$

Отже елемент $e_T + a$ є оборотним елементом кільця $\overline{K}$ [36].

$\square$

Більше того, $\overline{K}$ є комутативним кільцем Безу.

Твердження 4.13 *[36] Нехай $a, b \in \overline{K}$. Тоді $a\overline{K} + b\overline{K} = (|a| + |b|)\overline{K}$.*

4.3. Висновки до розділу 4

В цьому розділі :

1) на основі введеного поняття PM-елемента по аналогії для VNL кільця введено поняття локально гельфандового кільця;

2) встановлено існування локально гельфандових кілець;

3) доведено, що комутативна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників, що є відповіддю на відкрите питання поставлене Забавським у роботі [85].

РОЗДІЛ 5
МАКСИМАЛЬНО НЕГЕЛЬФАНДОВІ ІДЕАЛИ

Гельфандові кільця були введені Малвеєм у 1979 році як кільця, для яких можливі узагальнення гельфандової дуальності. Вони були названі ним в честь Ізраеля Гельфанда. Найбільш відомим прикладом гельфандового кільця є $\mathcal{C}(X)$ - кільце неперервних дійсних функцій на просторі X [51].

5.1. Максимально негельфандові ідеали комутативної області Безу

На основі поняття гельфандового елемента введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу. Встановлено властивості цих ідеалів. Введено гельфандовий аналог радикала Джекобсона і доведено його властивості. Вивчено локально негельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Зокрема, показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та, як наслідок, доведено, що вони є кільцями елементарних дільників.

Позначимо через $S = S(R)$ множину всіх гельфандових елементів кільця R. Оскільки R є комутативним кільцем і $1 \in S$, то множина S не є порожньою, більше того, справедливий такий результат.

Твердження 5.1 *[78] Множина S всіх гельфандових елементів комутативної області Безу R є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.*

Означення 5.1 *Назвемо ідеал I кільця R гельфандовим, якщо I містить хоча б один гельфандовий елемент. У протилежному випадку* *ідеал I назвемо негельфандовим, тобто довільний ненульовий елемент ідеалу I є негельфандовим.*

Нехай H — множина всіх негельфандових ідеалів кільця R. Оскільки $0 \in H$, то множина H непорожня. Нехай

$$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$$

це довільний ланцюг ідеалів множини H. Розглянемо ідеал

$$I = \bigcup_{\alpha\in\Omega} I_\alpha.$$

Якщо $I \notin H$, то існує такий гельфандовий елемент a, що $a \in I$. Згідно з означенням ідеалу I маємо, існує такий $\beta \in \Omega$, що $a \in I_\beta$. Тобто, ідеал I_β гельфандовий, що неможливо, бо $I_\beta \in H$.

Отже, множина H індукована. За лемою Цорна в H існує хоча б один максимальний елемент множини H. Такі ідеали назвемо максимально негельфандовими.

Означення 5.2 *Негельфандовий ідеал N назвемо максимально негельфандовим, якщо для такого довільного ідеалу I, що $N \subset I$, $I \neq N$, існує гельфандовий елемент a, який належить I.*

З вище сказаного отримуємо такий результат.

Твердження 5.2 *Довільний негельфандовий ідеал комутативної області Безу міститься хоча б в одному максимально негельфандовому ідеалі.*

Твердження 5.3 *Кожний максимально негельфандовий ідеал комутативної області Безу є простим ідеалом.*

Доведення. Нехай P — довільний максимально негельфандовий ідеал. Доводимо від супротивного. Нехай існують такі елементи $b, c \in R$, що $c \notin P$, $b \notin P$, але $cb \in P$.

Розглянемо ідеал $P + cR$. Оскільки

$$P \subset P + cR,$$

де $c \notin P$, тоді ідеал $P + cR$ є гельфандовим, тобто існують елементи $p_1 \in P$ та $r_1 \in R$ такі, що елемент

$$x = p_1 + cr_1$$

є гельфандовим.

Аналогічними міркуваннями для $P \subset P + bR$ маємо: $y = p_2 + br_2$ — гельфандовий елемент для деяких елементів $p_2 \in P$ та $r_2 \in R$.

Оскільки $cb \in P$, тоді очевидно, що $xy \in P$, що неможливо, бо за твердженням 5.1 xy є гельфандовим елементом.

Твердження доведено.

□

Твердження 5.4 *Нехай R — комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал містить гельфандовий елемент, тоді R є областю, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному.*

Доведення. Для доведення цього твердження за твердженням 1.3 достатньо показати, що R не має негельфандових елементів. Припустимо, що в R існує негельфандовий елемент a. Розглянемо ідеал aR. Він є негельфандовим, оскільки $1 \in R$ і $a \in aR$. Зауважимо, що всі елементи ідеалу aR є негельфандовими, бо в протилежному випадку елемент a був би гельфандовим як дільник гельфандового елемента.

Тоді $aR \subset M$, де M — максимально негельфандовий ідеал, який є простим. Оскільки довільний ненульовий простий ідеал містить гельфандовий елемент, то отримуємо протиріччя.

Твердження доведено.

□

Це твердження є узагальненням відомої теореми Капланського, яка стверджує, що комутативна область є факторіальною тоді і лише тоді, коли довільний ненульовий простий ідеал містить простий елемент [43].

Позначимо через $A(R)$ перетин всіх максимально негельфандових ідеалів.

Твердження 5.5 *Нехай R — комутативна область Безу, $b \in A(R)$ та a — гельфандовий елемент R. Тоді для довільного $x \in R$ елемент*

$$a + bx$$

є гельфандовим.

Доведення. Припустимо, що $a + bx$ не є гельфандовим елементом. Тоді $(a + bx)R$ — негельфандовий ідеал R. Згідно з твердженням 5.2 існує максимально негельфандовий ідеал N, який містить ідеал

$$(a + bx)R,$$

а тому і елемент $a + bx$. Оскільки b належить всім максимально негельфандовим ідеалам, то

$$a = (a + bx) - bx \in N,$$

що неможливо, за визначенням ідеалу N. Отже, наше припущення, що $a + bx$ є негельфандовим елементом, невірне.

Твердження доведено.

□

Твердження 5.6 *Нехай I - такий ідеал комутативної області Безу, що для довільних $i \in I$ та гельфандового елемента a, елемент $i + a$ є гельфандовим. Тоді*

$$I \subset A(R).$$

Доведення. Нехай існує максимально негельфандовий ідеал N, що $I \nsubseteq N$. Згідно з означенням максимально негельфандового ідеалу, існує гельфандовий елемент a, який належить $I + N$. Тоді

$$a = -i + n,$$

де $i \in I$ та $n \in N$. Згідно з означенням I маємо, що

$$n = a + i$$

є гельфандовим елементом, що неможливо, бо $n \in N$.

Твердження доведено.

□

Зауважимо, що твердження 5.5 та 5.6 встановлюють для ідеалу $A(R)$ властивості, аналогічні до властивостей радикала Джекобсона, тому $A(R)$ назвемо гельфандовим аналогом радикала Джекобсона.

Наступне твердження у випадку єдиного максимального негельфандового ідеалу засвідчує, що така область має аналогічні властивості локальної області.

Твердження 5.7 *Для комутативної області Безу такі властивості еквівалентні:*

1. *у кільці R існує єдиний максимально негельфандовий ідеал N;*
2. *сума довільних двох негельфандових елементів є негельфандовим елементом.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Припустимо, що існують негельфандові елементи a та b, сума яких $a + b$ — гельфандовий елемент. Через обмеження, накладені на R, маємо, що $a \in N$ та $b \in N$. Оскільки N — ідеал, тоді $a + b \in N$, що неможливо, через припущення, що $a + b$ — гельфандовий елемент, а N — максимально негельфандовий ідеал.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна з огляду на те, що добуток будь-якого негельфандового елемента на довільний елемент кільця є негельфандовим елементом.

Твердження доведено.

$\square$

Означення 5.3 *Нехай R — комутативна область Безу. Скажемо, що R є кільцем гельфандового рангу 1, якщо для довільних $a, b \in R$ для яких виконується умова*

$$aR + bR = R$$

існує елемент $r \in R$ такий, що

$$a + br$$

є гельфандовим елементом.

Теорема 5.1 *[81] Нехай R — комутативна область Безу гельфандового рангу 1. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

є довільною матриця над R, де

$$aR + bR + cR = R.$$

Щоб довести цю теорему, достатньо довести, що A володіє діагональною редукцією [42, 74]. Запишемо

$$ax + by + cz = 1$$

для деяких елементів $x, y, z \in R$. Тоді

$$bR + (ax + cz)R = R.$$

Оскільки R є кільцем гельфандового рангу 1, то існує деякий елемент $t \in R$ такий, що $d = b + t(xa + cz)$ є гельфандовим елементом.

Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ zt & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix},$$

де, очевидно,

$$aR + dR + cR = R$$

і

$$b + t(xa + cz) = d.$$

Відповідно до обмежень, накладених на d, і за твердженням 1.4 маємо, що елемент d можна подати у вигляді

$$d = rs,$$

де $rR + aR = R$ та $sR + cR = R$. Нехай елемент $p \in R$ такий, що

$$sp + ck = 1$$

для деякого елемента $k \in R$. Звідси $rsp + rck = r$ та $dp + crk = r$. Позначивши $rk = q$, отримуємо

$$(dp + cq)R + aR = R.$$

Нехай $pR + qR = \delta R$, тоді $p = p_1\delta$, $q = q_1\delta$ і $\delta = pu + qv$, де $p_1R + q_1R = R$. Звідси маємо, що $pR \subset p_1R$ і $pR + cR = R$ та $p_1R + cR = R$. Оскільки $p_1R + q_1R = R$, то

$$p_1R + (p_1d + q_1c)R = R.$$

З того, що $dp + cq = \delta(dp_1 + cq_1)$ та з $(dp + cq)R + aR = R$, отримуємо

$$(dp_1 + cq_1)R + aR = R.$$

Оскільки одержали, що

$$p_1R + (p_1d + q_1c)R = R,$$

то

$$ap_1R + (dp_1 + c)q_1R = R.$$

За працею [42] матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$$

володіє діагональною редукцією. Тоді, очевидно, і матриця A володіє нею.

Теорему доведено.

□

Позначимо через $Z(a)$ множину всіх максимально негельфандових ідеалів, які містять елемент a.

Теорема 5.2 *Комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Згідно з теоремою 5.1 достатньо довести, що R є кільцем гельфандового рангу 1, тобто, для таких довільних $a, b \in R$, що

$$aR + bR = R,$$

існує такий елемент $r \in R$, що $a+br$ є гельфандовим елементом. Оскільки $aR + bR = R$, то

$$Z(a) \cap Z(b) = \emptyset.$$

Нехай r елемент, який належить всім максимально негельфандовим ідеал, окрім $Z(a)$.

Розглянемо елемент $a + br$. Доведемо, що він є гельфандовим.

Припустимо, що $a + br$ є негельфандовим елементом. Отже, він міститься хоча б в одному максимально негельфандовому ідеалі M.

Можливі такі випадки:

1. $a \in M$, тоді $br \in M$, оскільки $r \notin M$, то $b \in M$, що неможливо, бо $aR + bR = R$.

2. Якщо $r \in M$, то $a \in M$, а це суперечить умові, що

$$Z(r) \cap Z(a) = \emptyset.$$

Коли елемент a належить всім максимальним негельфандовим ідеалам, то b є гельфандовим елементом, а, отже, $a + b$ є гельфандовим за твердженням 5.4. Отже, кільце R є кільцем гельфандового рангу 1.

Звідси, за теоремою 5.1 кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорему доведено.

$\square$

Теорема 5.3 *Нехай R — комутативна область Безу в якій для довільних елементів $a, b \in R$ та $b \neq 0$ існує такий елемент $r \in R$, що $Z(r) = Z(a) \setminus Z(b)$. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Очевидно, що

$$Z(a) \cap Z(b) = \emptyset.$$

За умовою теореми, існує деякий елемент $r \in R$, який належить всім максимально негельфандовим ідеалам кільця R, крім максимально негельфандових ідеалів множини $Z(a)$. Тоді

$$Z(r) = Z(0) \setminus Z(a).$$

Очевидно, що $Z(r) \cap Z(a) = \emptyset$. Розглянемо елемент $(a + br) \in R$. Проводячи аналогічні міркування як в попередній теоремі бачимо, що кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорему доведено.

$\square$

Зауважимо, що умова існування елемента r такого, що

$$Z(r) = Z(a) \setminus Z(b)$$

у випадку максимальних ідеалів була вперше введена Хенріксеном [40].

Теорема 5.4 *Комутативна область Безу R є область з єдиним максимально негельфандовим ідеалом тоді і лише тоді, якщо для довільних $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, один з елементів a або b є гельфандовим.*

Доведення. Нехай R — кільце з єдиним максимально негельфандовим ідеалом та існують негельфандові елементи $a, b \in R$ такі, що із

$$aR + bR = R$$

випливає, що один з елементів a або b є гельфандовим.

Оскільки елементи a і b негельфандові, то $a \in R$ та $b \in R$, а отже,

$$aR + bR \subset N,$$

що неможливо, бо $aR + bR = R$.

Розглянемо другий випадок. Нехай R — комутативна область, та для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$. Доведемо, що кільце R є кільцем з єдиним максимальним негельфандовим ідеалом. Припустимо, що це не так. Нехай існують два максимальні негельфандові ідеали $N_1, N_2 \in R$. Оскільки R є комутативною областю Безу і N_1 та N_2 непорівнювані прості ідеали, то $N_1 + N_2 = R$ [74]. Тобто $n_1 + n_2 = 1$, де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Очевидно, що

$$n_1 R + n_2 R = R,$$

а звідси, через обмеження, накладені на комутативну область Безу, отримуємо, що один з елементів n_1 та n_2 є гельфандовими, що неможливо, бо N_1 або N_2 є максимальними негельфандовими ідеалами за припущенням.

Теорему доведено.

□

Означення 5.4 *Комутативну область Безу назвемо локально гельфандовою, якщо вона містить єдиний максимальний негельфандовий ідеал.*

Прикладом локально гельфандового кільця є приклад Хенріксена, тобто

$$R = \{z_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \ldots \mid z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}.$$

Радикал Джекобсона — єдиний максимально негельфандовий ідеал цього кільця [40].

Теорема 5.5 *Комутативна область Безу R є локально гельфандовою тоді і лише тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ один з елементів a або $1-a$ є гельфандовим елементом.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай R є локально гельфандовою областю. Розглянемо ідеал N — єдиний максимально негельфандовий. Візьмемо довільний елемент $a \in N$. Очевидно, що $(1-a) \notin N$. Отже, $1-a$ є гельфандовим елементом.

Розглянемо другий варіант, тобто $a \notin N$. Тоді елемент a є гельфандовим. Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Припустимо, що існує два максимальних негельфандових ідеали N_1 та N_2. Очевидно, що $N_1 + N_2 = R$ [74]. Звідси маємо, що $n_1 + n_2 = 1$, де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Тоді елемент n_1 або $1 - n_1$ є гельфандовим. Отримали протиріччя.

Теорему доведено.

□

Як наслідок є очевидним такий результат.

Теорема 5.6 *Комутативна область Безу, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, є локально гельфандовим кільцем.*

Теорема 5.7 *Довільна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників.*

5.2. Висновки до розділу 5

В цьому розділі:

1) на основі поняття гельфандового елемента введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу;

2) встановлено властивості максимально негельфандових ідеалів;

3) введено гельфандовий аналог радикала Джекобсона і доведено його властивості;

4) досліджено локально негельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та, як наслідок, доведено, що вони є кільцями елементраних дільників.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню морфічних кілець та скінченних гомоморфних образів комутативних областей Безу. Також обчислюється стабільний ранг різних класів кілець Безу та його узагальнень.

У дисертації отримано такі нові результати:

1) доведено, що скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є морфічними кільцями;

2) вказано необхідні і достатні умови коли скінченні гомоморфні образи комутатавної області Безу є кільцями Каша (часткова відповідь на питання Фейса та Faккіні);

3) дано відповідь на відкрите питання Ніколсона і Санчез Кампоса, про існування морфічних кілець, які не є чистими;

4) показано, що стабільний ранг однозначно морфічних кілець рівний 1 і, як наслідок, отримано, що однозначно морфічні кільця є кільцями елементарних дільників;

5) встановлено, що умова акуратного рангу 1 для морфічного кільця еквівалентна умові однозначності твірних елементів головного ідеалу з точністю до акуратності;

6) встановлено необхідні і достатні умови на розмірність кільця (в сенсі Канфела) щоб це кільце було кільцем стабільного рангу 2;

7) вказано, що клас комутативних кілець Безу є кільцями, в яких нуль є адекватним, тоді і тільки тоді, коли ці кільця є напіврегулярними (відповідь на питання Ларсена, Левіса, Шореса);

8) доведено, що комутативна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників (відповідь на питання Забавського);

9) досліджено комутативні локально гельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та доведено, що вони є кільцями елементарних дільників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Білявська С. І. *Зв'язок адекватних кілець з чистими кільцями*/ С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Прикладні проблеми механіки і математики — 2012. -– № 8. — С.28–32.

[2] Білявська С. І. *Стабільний ранг адекватного кільця* / С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Математичні Студії.— 2008.— Т. 33, №2.— С. 212–214.

[3] Джекобсон Н. *Теория колец* / Н. Джекобсон // М.: Издательство иностранной литературы. — 1947. – 287 с.

[4] Туганбаев А. А. *Теория колец. Арифметические модули і кольца* / А. А. Туганбаев // – М.: МУНМО, — 2009. – 472 с.

[5] Пігура О. В. *Комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним елементом, напіврегулярні* / О. В. Пігура // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2014. Вип. 12. – С.56 – 58.

[6] Пігура О. В. *Максимальльно негельфандові ідеали комутативної облаті Безу* / О. В. Пігура // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2015. Вип. 13. – С.47 – 52.

[7] Пігура О. В. *Скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу скінченної розмірності Голді* [Електронний ресурс] / О. В. Пігура // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2014 28 — 30 травня, 2014 р., Львів. – Електронні дані. – [Львів: Ін–тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України] – Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Pigura.pdf (дата звернення 03.03.2016 р.). – Назва з екрана.

[8] Пігура О. В. *Максимально негельфандові ідеали комутативної облаті Безу* / О. В. Пігура // Всеукраїнська наукова конференція: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": Ворохта, 24 – 27 лютого, 2016: Тези доповідей. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, 2016.: 112–113 с.

[9] Ara P. *Diagonalization of matrices over regular rings* / P. Ara, K. Goodearl, K. C. O'Meara, E. Pardo // Linear algebra and Appl. — 1987. — V. 265. — P. 147–163.

[10] Bass H. *Algebraic K-Theory* / H. Bass // New Yourk, Amsterdam — 1968. — 761 pp.

[11] Bass H. *K–theory and stable algebra* / H. Bass // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1964. — 22. — P.485–544.

[12] Brewer J. W. *Lattice - ordered groups and a conjecture for adequate domains* / J. W. Brewer, P. F. Conrad, P. R. Montgomery // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 43, №1. — P. 31–35.

[13] Camiloo V. P. *Exchange rings, units and idempotents* / V. P. Camiloo, H. P. Yu // Comm. Algebra — 1994.— 22.— P. 4737 – 4749.

[14] Camillo V. P. *Left quasi-morphic rings* / V. P. Camillo, W. K. Nicholson, Z. Wang // J. Algebra Appl. — 2008. — 7. — №6— P. 725—733.

[15] Camillo V. P. *Quasi-morphic rings* / V. P. Camillo, W. K. Nicholson W K // J. Algebra Appl. — 2007. — 6. — P. 789–799

[16] Canfell M. J. *Uniqueness of generators of principal ideals in rings of continuous function* / M. J. Canfell // Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — 26. — P. 517–573.

[17] Chen J. *Morphic groups rings* / J. Chen, Y. Li, Y. Zhou // J. Pure Appl. Algebra — 2006. — 205. — № 3 — P. 621—639.

[18] Chen J. *Morphic rings as trivial extension* / J. Chen, Y. Zhou // Glasg. Math. J. — 2005. — 47. — P. 139—148.

[19] Chen H. *On unit 1-stable range* / H. Chen, M. Chen // J. Appl. Algebra Discrete Strut. — 2003.— 1.— №3.— P. 189–196.

[20] Chen H. *Rings related stable range conditions* / H. Chen // Series in Algebra 11, World Scientific, Hackensack, NJ. — 2011. — 680 pp.

[21] Chen H. *Unit 1-stable range for ideals* / H. Chen, M. Chen // Int. J. Math. and Math. Scien.— 2004.— 46.— P. 2477–2482.

[22] Cohn P. M. *Right principal Bezout domains* / P. M. Cohn // J. London Math. Soc. — 1987.— 35.— №2— P. 251–262.

[23] Cohn P. M. *Two examples of principal ideal domains* /P. M. Cohn, A. H. Schofield // Bull. London Math. Soc. — 1985.— 17.— №1.— P. 26–28.

[24] Contessa M. *On certain classes of PM-rings* / M. Contessa // Commun. Algebra —1984. — 12. — P. 1447–1469.

[25] Contessa M. *On PM-rings* / M. Contessa // Commun. Algebra — 1982. — 10. — P. 93–108 .

[26] Clark J. *On a question of Faith in commutative endomorphism rings* / J. Clark // Proc. Am. Math. Soc. — 1986. — 98. — P. 196–198.

[27] Diesel A. L. *A characterization of certain morphic trivial extensions* / A. L. Diesel, T. J. Dorsey, W. Wm. McGovern // J. of Algebra and Its App. — 2011. — 10, №4. — P. 623—642.

[28] Erlich G. *Units and one-sided units in regular rings* / G. Erlich // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — 216. — P. 81–90.

[29] Estes D. *Stable range in commutative rings* / D. Estes, J. Ohm // J.Algebra. — 1967. — 7. — P. 343–362.

[30] Facchini A. *FP-injective quotient rings and elementary divisor rings* / A. Facchini, C. Faith // Commut. Ring Theory Proc. // Int. conf. — 1996. —185. — P. 293–302.

[31] Gillman L. *Some remarks about elementary divisor rings* / L. Gillman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — 82. — P. 362–365.

[32] Gillman L. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal* / L. Gillman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — 82. — P. 366–391.

[33] Goodearl K. R. *Von Neumann regular rings* / K. R. Goodearl // Pitman, London – San Francisco – Melbourne — 1979. — 369 pp.

[34] Goodearl K. R. *Power-cancellation of groups and modules* / K. R. Goodearl // Pacific J. Math. — 1976. — 64, № 2. — P. 387–413.

[35] Goodearl K. R. *Stable range one for rings with many units* / K. R. Goodearl, P. Menal // J. Pure. Appl. Algebra. — 1998. — 54. — P. 261–287.

[36] Grosser M. *Geometric Theory of generalized functions with applications to general relativity* / M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, R. Steinbauer // Math. and Its Appl. – 2001. — 537. — 516 pp.

[37] Handelman D. *Stable range in AW* algebras* / D. Handelman // Proc. Amer. Soc. — 1979. — V. 76, №2. — P. 241–249.

[38] Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* / O. Helmer // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, №2. — P. 225–236.

[39] Henriksen M. *On a class of regular rings that are elementary divisor rings* / M. Henriksen/ M. Henriksen // Arch. Math. — 1973. — 24, №2.— P. 133–141.

[40] Henriksen M. *Some remarks about elementary divsor rings* / M. Henriksen // Michigan Math. J. 1955–1956. — 3. — P. 159–163.

[41] Houston E., Taylor J. *Arithmetic properties in pulbacks* / E. Houston, J. Taylor // J. Algebra — 2007. — 310. — P. 235– 60.

[42] Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* / I. Kaplansky // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — 66. — P. 464–491.

[43] Kaplansky I. *Commutative rings* / I. Kaplansky // Chicago and London: The University of Chicago Press — 1974. — 182 pp.

[44] Khurana D. *On unit-central rings*/ D. Khurana, G. Marks, A. K. Srivastava // Springer: Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics, Birkhauser Verlag Basel / Switzerland — 2010. —- P. 205-–212.

[45] Lam T.Y. *A first course in noncommutative rings* / T.Y. Lam // Springer-Verlag, New York — 1991. — 397 pp.

[46] Larsen M. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* / M. Larsen, W. Lewis, T. Shores // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — 187. — P. 231–248.

[47] Lee T.-K. *Morphic rings and unit regular rings* / T.-K. Lee, Y. Zhou //J. Pure Appl. Algebra – 2007 – 210 – P. 501–510.

[48] Lee T.-K. *Regularity and morphic property of rings* / T.-K. Lee, Y. Zhou // J. Algebra – 2009. – 322, №4. — P. 1072–1085.

[49] Levy L. S. *Sometimes only square matrices can be diagonalized* / L. S. Levy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — 52. — P. 18–22.

[50] McGovern W. Wm. *Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisor rings* / W. Wm. McGovern // J. Pure and Appl. Algebra. — 2007.— 212.— P.340–348.

[51] McGovern W. Wm. *Neat ring* / W. Wm. McGovern // J. of Pure and Appl. Algebra — 2006. — 205. — P. 243–265.

[52] Menal P. K_1 *of von Neumann regular rings* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Alg.— 1984.— 33.— P. 295–312.

[53] Menal P. *On regular rings with stable range 2* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Algebra — 1982. — 24. — P. 25–40.

[54] Nicholson W. K. *Lifting idempotents and exchange rings* / W. K. Nicholson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — 229. — P. 269–278.

[55] Nicholson W. K. *Morphic modules* / W.K. Nicholson, E. Sanchez Campos // Comm. in Algebra — 2005. — 33. — P. 2629–2647.

[56] Nicholson W. K. // Principal rings with the dual of the isomorphism theorem / W.K. Nicholson, E. Sanchez Campos // Glasgow Math. J. – 2004. — 46, №1. — P. 181–191.

[57] Nicholson W. K. *Quasi-Frobenius Rings* / W. K. Nicholson, M.F. Yousif // Cambridge University Press — 2003. — 327 pp.

[58] Nicholson W. K. *Rings with the dual of the isomorphism theorem* / W. K. Nicholson, E. Sanchez Campos // J. Algebra — 2004. — 271. — P. 391–406.

[59] Pihura O. V. *A morphic ring of neat range one* / O. V. Pihura, B. V. Zabavsky // Algebra and Discrete Mathematics — 2015. — 20, №2. — P. 325–329.

[60] Pihura O.V. *Gelfand local Bezout domains are elementary divisor rings* / O. V. Pihura // X International Algebraic Conference in Ukraine

dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd Odessa, August 20—27, 2015: Book of Abstracts. Odessa: Mechnikov National University, 2015. : P. 86.

[61] Roitman M. *The Kaplansky condition and rings of almost stable range 1* / M. Roitman // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — 141. P. 3013 – 3019.

[62] Shchedryk V.P. *Commutative domains of elementary divisors and some properties of their elements* / V. P. Shchedryk // Ukr. Math. J. — 2012 — 64, №1. — P. 126–139.

[63] Shores T. S. *Bezout rings and their modules* / T. S. Shores // Ring Theory Proc. Okla. Conf. 1973, New-York, — 1974. — P. 63–73.

[64] Siddique F. *On two questions of Nicholson* / F. Siddique // arXiv: 1402.4706V1 [math. RA] 1S Feb 2014, P. 1–5.

[65] Tamer Kosan M. *Uniquely morphic rings* / M. Tamer Kosan, Tsin-Knen Ice, Yigiang Thoun // J. Algebra — 2010. — 32, №217. — P. 1072–1085.

[66] Vamos P. *The decomposition of finitely generated modules and fractionally self-injection rings* / P. Vamos // J. London Math. Soc. — 1977. — 16, №2. — P. 209–220.

[67] Van der Walt *Weakly prime one sided ideals* / Van der Walt // J. Austral Math. Soc.— 1985.— 38. — P. 84–91.

[68] Vaserstein L. N. *The stable rank of ring and dimentionality of topological spaces* / L. N. Vaserstein // Funct. Anal.Appl.— 1971. — 5. — P. 102–110.

[69] Vaserstein L. N. *Bass' first stable range condition* / L. N. Vaserstein // J. Pure and Appl. Alg. —1984. — 34. — P. 319–330.

[70] Vaserstein L. N. *An answer to a question of M.Newmann on matrix completion* / L. N. Vaserstein // Proc. Amer. Math. Soc.— 1997.— 2. — P. 189–196.

[71] Warfield R. B. *Stable equivalence of matrices and resolutions* / R. B. Warfield // Comm. Algebra. —1978.— 17. — P. 1811–1828.

[72] Wedderburn J.H.M. *Non-commutative domains of integrity* / J. H. M. Wedderburn // J.Reine Andrew Math. — 1932. —167, №1. — P. 129–141.

[73] Yang X. *On rings whose finitely generated left ideals are left annihilators of an element* / X. Yang // arXiv:1002.3193v2 [math.RA] 28 Apr 2010.

[74] Zabavsky B. V. *A commutative Bezout PM^*-domain is an elementary divisor ring* / B. V. Zabavsky, A. I. Gatalevych // Algebra and Discrete Math. — 2015. — 19, №2. — P. 295–301.

[75] Zabavsky B. V. *Bezout morphic rings* / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8 — 13, 2013: Book of Abstract. L'viv: Ivan Franko National University, 2013. : P. 222.

[76] Zabavsky B. V. *Bezout morphic rings* / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. — 2014. — 79. — P. 163–168.

[77] Zabavsky B. V. *Commutative morphic rings of stable range 2* / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // Proc. Inter. Geom. Center —- 2015. — 8, №3-4 — P. 65–68.

[78] Zabavsky B. V. *Conditions for stable range of an elementary divisor rings* / B. V. Zabavsky // arXiv:1508.07418v1 [math.RA] 29 Aug 2015.

[79] Zabavsky B. V. *Conditions under which a morphic ring of stable range 2 is an elementary divisor ring* / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin Kyiv, July 7—12, 2014: Book of abstracts. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2014. : P. 66–67.

[80] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings* / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2014. — 41. — P. 101–108.

[81] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over rings* / B. V. Zabavsky // Mathematical Studies, Monograph Series, volume XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, 251 pp.

[82] Zabavsky B. V. *Every zero adequate ring is an exchange ring* / B. V. Zabavsky, S. I. Bilavsky // Fund i Prukl. Mat. — 2011–2012. — 17, №3. — P. 61–66.

[83] Zabavsky B. V. *Fractionally regular Bezout rings* / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2009. — 32. — P. 76–80.

[84] Zabavsky B. V. *Gelfand local Bezout domains are elementary divisor rings* / B. V. Zabavsky, O. V. Pihura // Carpathian Math. Publ. — 2015 — 2, №2 — P. 188–190.

[85] Zabavsky B. V. *Questions related to the K-theoretical aspect of Bezout rings with various stable range conditions* / B. V. Zabavsky // Math. Stud. — 2014. — 42, № 1. — P. 89–109.

[86] Zhu H. *Generalized morphic rings and their applications* / H. Zhu, N. Ding // Comm. Algebra – 2007. — 35, №9. — P. 2820–2837.