Національна академія наук України
Інститут математики

Коваленко Валерій Миколайович

УДК 514.1+515.1

Аналітичні методи в фрактальній геометрії

01.01.04 — геометрія та топологія

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені
М. П. Драгоманова, декан
фізико-математичного факультету; Інститут
математики НАН України, завідувач відділу
фрактального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Пришляк Олександр Олегович,
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, професор кафедри
геометрії;

доктор фізико-математичних наук, професор
Савченко Олександр Григорович,
Херсонський державний аграрний університет,
професор кафедри вищої математики та
економічної кібернетики.

Захист відбудеться «20» вересня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «18» серпня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена розробці аналітичних методів дослідження математичних об'єктів комплексної площини з фрактальними властивостями, які ґрунтуються на різних системах кодування (зображення) чисел.

Актуальність теми. За останні десятиліття така галузь математики як геометрія суттєво розширила коло досліджуваних об'єктів завдяки долученню до розгляду фрактальних фігур та фрактальних відношень, зокрема фрактальних перетворень метричного простору. Більш того, з групової точки зору фрактальна геометрія є теорією інваріантів групи перетворень метричного простору, які зберігають фрактальну розмірність (Гаусдорфа-Безиковича, ентропійну та інші). Спалах інтересу до математичних об'єктів зі складною локальною геометричною структурою, неоднорідними просторовими властивостями ґрунтувався на кристалізації ідей самоподібності, самоафінності, автомодельності. Спочатку він реалізовувався на геометрично-інтуїтивних принципах і геометрично-описових засобах дослідження, що викликало у строгих аналітиків науковий песимізм. В останній період теорія фракталів (фрактальна геометрія та фрактальний аналіз) перебудовується на основі гармонізації методів вивчення об'єктів і домінування аналітичних основ досліджень. Класичні фрактальні об'єкти (лінії та поверхні), які увійшли в усі серйозні аннали з теорії фракталів, почали вимагати нових засобів опису та дослідження (починаючи від коректності означення і закінчуючи повнотою обґрунтованості властивостей). Одним з таких об'єктів є сніжинка Коха – добре відома кусково-самоподібна фрактальна замкнена крива нескінченної довжини, у жодній точці якої не існує дотичної. Проблема її ефективного аналітичного задання існувала тривалий час. Різні пропозиції для цього обговорювались у роботах М. В. Працьовитого, А. А. Маляренка та ін. Зокрема, пропонувалось використовувати для цього представлення чисел рядами з комплексними членами, для зображення яких використовувався шестірковий алфавіт. Оскільки задача до кінця не була розв'язаною, то ми запропонували для її вирішення використовувати іншу систему зображення чисел рядами – з основою 4 і п'ятисимвольним симетричним алфавітом, геометрію якого ми вивчаємо.

Геометрія числових рядів – сучасний актуальний напрям досліджень у математиці, який розвивається більше ста років (починаючи з піонерської роботи С. Какея у 1914 р.) і сьогодні обіцяє різноманітні застосування у різних галузях математики: геометрії, топології, математичному аналізі, теорії функцій, теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії динамічних систем тощо. За останні десятиліття здійснено суттєвий прорив у дослідженні тополого-метричних властивостей множин неповних сум (підсум) абсолютно збіжних рядів з дійсними членами (завершено класифікацію існуючих топологічних типів таких множин (Дж. Гатрі, Дж. Німан, Р. Сеінза та ін.), отримано ряд важливих результатів стосовно міри Лебега та фрактальних розмірностей (розмірність Гаусдорфа-Безиковича, Гаусдорфа-Біллінгслі, клітинкова розмірність) для певних класів множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з дійсними членами (Т. О. Банах, М. В. Працьовитий, О. М. Барановський, Н. М. Василенко, Я. В. Гончаренко, Н. О. Корсунь, І. О. Савченко, Г. М. Торбін, Р. Джонс, М. Купер, М. Моран, Т. Шалат, Е. Шимонік, Ю. Перес, Б. Солом'як та ін.)). Але цього не можна сказати про ряди з комплексними членами (К. Бандт, М. Моран, Б. Солом'як та ін). Тому актуальною є задача дослідження структурних, тополого-метричних та фрактальних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та їх різнопланових узагальнень. У дисертації введено у розгляд певне узагальнення множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами – так звані Σ-множини, які є нескінченними арифметичними сумами спеціальних послідовностей скінченних підмножин $\mathbb{C}$. Вивчено властивості цих множин.

Серед ймовірнісних мір у просторі $\mathbb{R}^2$ зі складною локальною лебегівською структурою окрему увагу привертають міри, зосереджені на фрактальних кривих. Один з найпростіших класів таких кривих на евклідовій площині утворюють автомодельні (самоподібні, самоафінні тощо) лінії та їх комбінації (прикладами таких є криві Серпінського, Коха, Осгуда, Вічека та інші). Існують певні методологічні труднощі у коректному означенні та дослідженні таких мір. Одним з ефективних засобів їх визначення є різні системи кодування дійсних та комплексних чисел і розподіли випадкових елементів простору, індуковані розподілами символів (цифр) системи кодування.

Цей підхід у дисертаційній роботі ми реалізовуємо на самоподібній фрактальній кривій – фракталі Вічека.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводиться на кафедрі вищої математики НПУ імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження здійснювалось у рамках науково-дослідних тем:
– системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали (№ державної реєстрації U02125295);
– фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053).

Об'єкт дослідження. Множини неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та фрактальні криві комплексної площини.

Предмет дослідження. Структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості основних об'єктів дослідження.

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є опис структурних, топологічних, метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум окремих абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та фрактальних кривих на комплексній площині.

Основними *завданнями дослідження* є такі:

— знайти комплексну функцію, множиною значень якої є сніжинка Коха, і побудувати її узагальнення;
— знайти аналітичний вираз гомеоморфного відображення сніжинки Коха на коло;
— описати клас підмножин комплексної площини, які узагальнюють поняття множини неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами; вивчити топологічні, метричні та фрактальні властивості цих множин;
— вивчити структурні (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент), тополого-метричні та самоподібні властивості розподілу ймовірностей на фракталі Вічека – фрактальній кривій павутинного типу, індуко-

ваного розподілами символів кодування точок кривої засобами п'ятисимвольного алфавіту.

Методи дослідження. У роботі використовувалися прийоми та методи топології, теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), математичного аналізу, алгебри та теорії чисел, теорії міри, теорії ймовірностей.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

— на основі представлення чисел у системі з основою 4 і надлишковим симетричним алфавітом $-2, -1, 0, 1, 2$ введено в розгляд так зване прагматичне представлення дійсних чисел, яке має нульову надлишковість, та описано його тополого-метричні властивості;

— на основі прагматичного представлення дійсних чисел отримано аналітичне задання класичної сніжинки Коха як множини значень побудованої комплексної функції дійсного аргументу;

— знайдено аналітичний вираз гомеоморфного відображення кола на сніжинку Коха;

— побудовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха, описано тополого-метричні та самоподібні властивості кривих цієї сім'ї;

— описано клас множин, які узагальнюють поняття множини неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами; вивчено структурні, топологічні, метричні та фрактальні властивості цих множин;

— для розподілу ймовірностей на фракталі Вічека, індукованого розподілами символів кодування його точок засобами п'ятисимвольного алфавіту, вивчено спектральні властивості, доведено лебегівську чистоту (чисту дискретність або чисту неперервність), у випадку неперервності встановлено його сингулярність канторівського типу.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані у ній результати можуть бути використані у дослідженнях з теорії фракталів, неперервних ніде не диференційовних функцій, метричної теорії чисел, при вивченні математичних об'єктів зі складною локальною будовою.

Особистий внесок здобувача. Усі положення і результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних з науковим керівником (Працьовитим М. В.) публікаціях Працьовитому М. В. належить загальна постановка задач, деякі ідеї доведень та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на наступних конференціях:

— Міжнародна конференція пам'яті В.Я. Буняковського (1804-1889). 16-21 серпня, 2004, Київ;

— International conference "Modern problems and new trends in probability theory". June 19-26, 2005, Kyiv;

— Міжнародна конференція "Сучасна стохастика: теорія і застосування". 19-23 червня, 2006, Київ;

— Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь."13-14 грудня, 2012, Київ;

— Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. 25-27 квітня, 2013, Київ;

— П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк. 16-20 вересня, 2013, Київ;

— Міжнародна науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі". 25-26 червня, 2015, Київ.

Результати дисертаційного дослідження доповідались на наукових семінарах:
– семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);
– семінар відділу топології Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук С. І. Максименко);
– семінар відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю. Б. Зелінський).

Публікації. Основні результати роботи викладено у шести наукових статтях [1, 2, 3, 4, 5, 6], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, та додатково відображено у матеріалах семи конференцій [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Стаття [6] опублікована у виданні, що включене до наукометричних баз Scopus, Zentralblatt, MATH.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який нараховує 104 найменування, списку публікацій автора, списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи – 116 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, дається загальна характеристика та формулюються основні результати, що виносяться на захист.

Розділ 1 "Огляд літератури та концептуальні засади дослідження" носить вступний характер. У ньому проведено аналіз літератури з теми дослідження, систематизовано теоретичні відомості про об'єкти дослідження, сформульовано означення базових понять та факти, необхідні для виконання дисертаційного дослідження.

У **розділі 2 "Аналітичне задання сніжинки Коха та її модифікацій"** розв'язується задача аналітичного задання класичної фрактальної кривої — сніжинки Коха. На основі отриманого параметричного рівняння сніжинки Коха побудовано аналітичний вираз гомеоморфного відображення одиничного кола на сніжинку Коха. Також сконструйовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха, описано структурні, топологічні, метричні та самоподібні властивості кривих цієї сім'ї.

У пункті 2.1 розглядається система числення з основою 4 та надлишковим симетричним алфавітом $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, L – простір послідовностей елементів алфавіту A. У цій системі деякі числа відрізка $D_0 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ мають скінченну множину різних зображень, інші – зчисленну, а решта – континуальну множину різних зображень. А саме, мають місце наступні твердження.

Теорема 2.1. *Для будь-якого $x \in D_0$ існує $(\alpha_k) \in L$ така, що*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{4^k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \qquad (2.1)$$

Подання числа x рядом (2.1) називатимемо Δ-*представленням*, а його скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ – Δ-*зображенням*. Далі пишемо $\bar{2}$ замість числа -2, $\bar{1}$ замість числа -1.

Лема 2.3. *Число $x \in D_0$ має різних Δ-зображень*

1. *скінченну множину, якщо одне з його зображень має період* (0),

2. *зліченну множину, якщо одне з його зображень має простий період (a), де $a \in \{\bar{2}, \bar{1}, 1, 2\}$.*

Якщо ж у Δ-зображенні числа $x \in D_0$ міститься нескінченне число пар послідовних цифр з набору $\{\bar{2}2, \bar{1}2, 02, 12, \bar{1}\bar{2}, 0\bar{2}, 1\bar{2}, 2\bar{2}\}$, то воно має континуальну множину різних Δ-зображень.

Суттєва надлишковість Δ-зображення чисел в окремих задачах є його недоліком. Це змушує "оптимізувати"систему, щоб домогтись її нульової надлишковості. Цього можна досягти різними способами. Один з них ґрунтується на використанні так званого канонічного зображення.

Означення 2.3. Δ-зображення $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}$ числа $x \in D_0$, кожна пара будь-яких послідовних цифр якого відмінна від $\bar{1}\bar{2}, \bar{1}2, 1\bar{2}$ і 12, тобто $(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \notin \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, 2), (1, \bar{2}), (1, 2)\}$, називатимемо *канонічним* Δ-зображенням або $\bar{\Delta}$-зображенням.

Теорема 2.2. *Будь-яке число $x \in D_0$ має не більше двох канонічних $\bar{\Delta}$-зображень.*

Альтернативою канонічному зображенню у вказаному аспекті є так зване *прагматичне* Δ-зображення, яке далі є основним у дослідженні.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}_0$ позначимо

$$B_k = \{(-2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -2), (-2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -1), (2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1), (2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 2)\}.$$

Теорема 2.3. *Будь-яке число $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \equiv I_0$ може бути пред-*

ставлене у вигляді $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, *де послідовність* (α_n) *задовольняє умови: для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

1. $\alpha_n \in A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;
2. $(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k+1}) \notin B_k \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_0)$.

Означення 2.5. Δ-зображення числа $x \in I_0$ з обмеженнями 1-2 називатимемо *прагматичним* або П-зображенням.

Існують числа (їх злічення множина), які мають два П-зображення. Це числа виду $x = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2(0)} = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]\bar{2}(0)}$. Такі числа називатимемо П-раціональними. Всі інші числа будуть мати єдине П-зображення, їх будемо називати П-ірраціональними.

У пункті 2.2 розглядається функція $f(t)$, визначена на відрізку I_0 рівністю $f(t) = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)}$, де $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t \in I_0$.

Лема 2.8. *Відображення* $f:\ I_0 \to P_0 = f(I_0)$ *є гомеоморфізмом.*

На відрізку $I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$ означимо функцію $F(t)$ рівністю

$$F(t) = e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} z_0(t - \alpha_0(t)) = e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)},$$

де $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}]$, а $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t - \alpha_0(t)$.

Теорема 2.5. *Функція* $F(t)$ *є неперервною на відрізку* I.

Позначимо $J = [0, 2]$.

Лема 2.11. *Множина* $F(J)$ *є кривою Коха.*

Теорема 2.6. *Множиною значень комплекснозначної функції*

$$F(t) = e^{\frac{i\pi\alpha_0(t)}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)}, \quad t \in I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$$

є сніжинка Коха.

Теорема 2.7. *Відповідність* $h:\ e^{\frac{\pi i t}{3}} \to F(t)$ *задає гомеоморфізм одиничного кола* $\omega = \{z = e^{\frac{\pi i t}{3}}:\ t \in I\}$ *і сніжинки Коха.*

У підрозділі 2.4 вводиться у розгляд узагальнене прагматичне зображення дійсних чисел відрізка I_0. Нехай p – фіксоване натуральне число. Для довільного $k \in \mathbb{Z}_0$ позначимо

$$B_k^{(p)} = \bigcup_{j=1}^{p} \{(-p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -j), (p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, j)\}.$$

Теорема 2.8. *Будь-яке число $x \in I_0$ може бути представлене у вигляді*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(2p)^n} \equiv \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \qquad (2.47)$$

де послідовність (α_n) задовольняє умови: для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

1. *$\alpha_n \in A_p = \{-p, -p+1, \ldots, 0, \ldots, p-1, p\}$;*
2. *$(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k+1}) \notin B_k^{(p)}$ $\quad(\forall k \in \mathbb{Z}_0)$.*

Представлення числа $x \in I_0$ рядом (2.47) з обмеженнями 1-2 називатимемо *узагальненим прагматичним* або Π_p-представленням числа x, а символічний запис $x = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – Π_p-зображенням числа x. При цьому число α_n $(n \in \mathbb{N})$ будемо називати n-ою Π_p-цифрою (символом, знаком) числа x.

У п. 2.5 розглядається однопараметрична сім'я комплексних функцій $F_q(t)$ $(q \geqslant 5,\ q \in \mathbb{N})$, визначених на відрізках $W_q = \left[-\frac{1}{2}, q - \frac{1}{2}\right]$ рівностями

$$F_q(t) = e^{\frac{2\pi i}{q}\alpha_0(t)} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(q))^k e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)},$$

де $\lambda(q) = \sin\frac{\pi}{q} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{q} + \sin\frac{\pi(2p(q)-1)}{q}\right)^{-1}$, $\alpha_0(t) = \left[t + \frac{1}{2}\right]$ – ціла частина числа $t + \frac{1}{2}$, $p(q) = \left[\frac{q+3}{4}\right]$, $\alpha_m(t)$ – m-ий символ $\Pi_{p(q)}$-зображення числа $t - \alpha_0(t)$.

Теорема 2.10. *Функція $F_q(t)$ є неперервною на відрізку W_q.*

Лема 2.15. *Множини $\mathcal{S}_q = F_q(W_q)$ є неперервними замкненими кривими.*

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.11. *Криві $\mathcal{S}_q$ $(q \geqslant 5)$ є замкненими та кусково-самоподібними. Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича цих кривих виконується нерівність*

$$\dim \mathcal{S}_q \leqslant -\frac{\ln 2p(q)}{\ln \lambda(q)},$$

де $p(q) = \left[\frac{q+3}{4}\right]$, $\lambda(q) = \sin\frac{\pi}{q}\left(\sin\frac{\pi}{q} + \sin\frac{\pi(2p(q)-1)}{q}\right)^{-1}$.

У **розділі 3. "Геометрія абсолютно збіжних рядів з комплексними членами"** вводиться до розгляду клас компактних підмножин $\mathbb{C}$ – так звані Σ-множини, які є узагальненнями множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами. Вивчаються їх структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості.

У підрозділі 3.1 наведено означення та досліджено топологічні властивості Σ-множин.

Означення 3.2. Будемо казати, що множина S є Σ-множиною, якщо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$, де Z_k $(k \in \mathbb{N})$ – скінченні підмножини комплексної площини $\mathbb{C}$, для яких виконуються наступні умови:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty$, де $\mu_k = \max\{|z| : z \in Z_k\}$,

2) серед множин Z_k існує нескінченна кількість множин, що містять не менше двох елементів.

Лема 3.1. *Довільна Σ-множина є компактною.*

Нехай $(c_1, \ldots, c_k)$ – фіксований упорядкований набір, де $c_j \in I_j$ $(j = \overline{1,k})$. Циліндром рангу k з основою $c_1 \ldots c_k$ називається множина

$$S_{c_1 \ldots c_k} = \{x = \sum_{m=1}^{\infty} z_{i_m m} :\ i_m = c_m\ (m = 1, \ldots, k),\ z_{i_m m} \in Z_m\}.$$

Теорема 3.1. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність $l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ (або $l(Z_k) > \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ у випадку, коли всі циліндри є центрально-симетричними), то множина S є: 1) цілком незв'язною; 2) континуальною.*

Теорема 3.2. *Кожна Σ-множина $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ є досконалою множиною потужності континууму.*

Теорема 3.3. *Нехай задано сім'ю компактних множин $\{B_{i_1 \ldots i_k}\}$ $(i_k \in I_k,\ k \in \mathbb{N})$, які володіють властивостями: 1) $B_{i_1 \ldots i_k} \supset S_{i_1 \ldots i_k}$, 2) $B_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}} \subset B_{i_1 \ldots i_k}$, 3) $\lim\limits_{k \to \infty} d(B_{i_1 \ldots i_k}) = 0$. Тоді множина S може* *бути подана наступним чином:*

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k}.$$

Підрозділ 3.2 присвячений метричним властивостям Σ-множин.

Теорема 3.4. *Для двовимірної міри Лебега λ Σ-множини S виконується рівність $\lambda(S) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(\bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k})$, де множини $B_{i_1\dots i_k}$ задовольняють умови попередньої теореми.*

Наслідок 3.1.*Якщо для Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ виконується рівність*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} m_j \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} d(Z_n) \right)^2 = 0,$$

де m_j – кількість елементів множини Z_j, $d(Z_n)$ – діаметр множини Z_n ($j, n = 1, 2, \dots$), то множина S має нульову двовимірну міру Лебега.

У підрозділі 3.3 вивчаються фрактальні властивості Σ-множин.

Теорема 3.6. *Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ виконується нерівність*

$$\dim_H S \leqslant \underline{\dim}_B S \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(\prod\limits_{j=1}^{k} m_j)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))},$$

де m_j, $d(Z_j)$ – відповідно кількість елементів та діаметр множини Z_j ($j \in \mathbb{N}$).

У підрозділі 3.4 вивчаються тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами.

Множиною неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплек-

ксними членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ називається наступна множина:

$$S(c) = \{z : z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k, \varepsilon_k \in \{0,1\}\}.$$

Очевидно, що множина $S(c)$ є Σ-множиною, оскільки вона може бути представлена у вигляді $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$, де $C_k = \{0, c_k\}$. Звідси безпосередньо випливають такі властивості множини $S(c)$ як континуальність, компактність та досконалість.

Опис властивостей множини $S(c)$ одержуємо з загальних теорем, які отримані для Σ-множин.

Теорема 3.7. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність $|c_k| > \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$, то множина $S(c)$ є цілком незв'язною.*

Теорема 3.8. *Якщо* $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k \left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |c_n| \right)^2 = 0$, *то множина $S(c)$ має нульову двовимірну міру Лебега.*

Нехай задано дві нескінченні диз'юнктні підмножини $\mathbb{N}$:
$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k}, \dots\}$.

Теорема 3.9. *Якщо множини $C_{a_{ik}}$ задовольняють умови:*

1. *$C_{a_{ik}} \subset l_i$, де $l_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ – прямі, які мають рівно одну спільну точку – початок координат,*
2. *для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$|c_{a_{ik}}| \leqslant \sum_{p=k+1}^{\infty} |c_{a_{ip}}|, \quad i \in \{1, 2\},$$

то множина $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ *має додатну міру Лебега.*

Теорема 3.10. *Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду виконується нерівність*

$$\dim_H S(c) \leqslant \underline{\dim}_B S(c) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{k \ln(2)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} |c_i|)}.$$

Розділ 4. "Застосування геометрії абсолютно збіжних рядів з комплексними членами" присвячений використанню аналітичного представлення фрактальної кривої для задання на ній розподілів ймовірностей.

У підрозділі 4.1 вводиться у розгляд комплекснозначна випадкова величина $\zeta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}\varepsilon_{\eta_k} \equiv \Delta_{\eta_1 \ldots \eta_k \ldots}$, де індекси η_k – незалежні випадкові величини, що набувають значень 0, 1, 2, 3, 4 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}, p_{4k}$ відповідно, $p_{ik} \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{4} p_{ik} = 1 (\forall k \in \mathbb{N})$, $\varepsilon_m = e^{\frac{m\pi i}{2}} = i^m \quad (m = \overline{0,3})$ – корені 4-го степеня з одиниці, $\varepsilon_4 = 0$.

Лема 4.1. *Випадкова величина ζ набуває значень з множини*

$$V = \{z : \ z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}\varepsilon_{i_k} \equiv \Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots}\},$$

де послідовності (i_k) пробігають простір $L \equiv A_5^{\infty} = A_5 \times A_5 \times \cdots \times A_5 \times \ldots$, яка є зв'язною самоподібною фрактальною кривою з розмірністю $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

У підрозділі 4.2 досліджується лебегівська структура розподілу випадкової величини ζ.

Теорема 4.1. *Розподіл випадкової величини ζ є чисто дискретним або чисто неперервним, причому дискретним – тоді і тільки тоді, коли $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant 4}\{p_{jk}\} > 0$.*

У випадку дискретності точковий спектр D_ζ розподілу випадкової величини ζ може бути поданий як об'єднання $D_\zeta = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$, де D_k – множина, яка складається з усіх точок виду $z = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{i_j} + \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{m_j}$, причому індекси (символи) i_j $(j = \overline{1,k})$ набувають всіх можливих значень з множини A_5, а m_n – такий індекс, що $\max\limits_{0 \leqslant l \leqslant 4}\{p_{ln}\} = p_{m_n n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Наслідок 4.3. *Розподіл випадкової величини ζ є неперервним тоді і тільки тоді, коли $M = 0$.*

У підрозділі 4.3 розглядається випадок неперервності розподілу випадкової величини ζ.

Теорема 4.2. *Спектром S_ζ розподілу випадкової величини ζ є множина $C = \{z: \ z = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}, \ p_{i_j j} > 0 \ \forall j \in N\}$.*

Наслідок 4.4. *Якщо $M = 0$, то розподіл випадкової величини ζ є сингулярно неперервним, тобто ортогональним двовимірній мірі Лебега.*

У підрозділі 4.4 досліджується випадок однакової розподіленості символів η_k.

Лема 4.5. *Якщо випадкові величини η_k однаково розподілені, тобто $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $i = \overline{0,4}$, то математичне сподівання та дисперсія випадкової величини ζ обчислюються за формулами:*

$$\mathrm{M}\zeta = p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3),$$

$$\mathrm{D}\zeta = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - p_0^2 - p_2^2 + 2p_0p_2 - 2p_1p_3 + p_0 - p_1 + p_2 - p_3 -$$
$$-2(p_0 - p_2)(p_1 - p_3)i).$$

Лема 4.6. *Нехай $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $i = \overline{0,4}$. Тоді S_ζ є самоподібною множиною, самоподібна розмірність якої дорівнює $\log_3 m$, де m – кількість додатних координат ймовірнісного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$, причому*

1. *якщо $p_0 = p_2 = 0$ (або $p_1 = p_3 = 0$), а $p_1p_3p_4 \neq 0$ (або $p_0p_2p_4 \neq 0$), то S_ζ є відрізком;*
2. *якщо $p_4 = 0$ і $p_0p_1p_2p_3 \neq 0$, то S_ζ є цілком незв'язною множиною.*

У підрозділі 4.5 розглядається циліндрична щільність розподілу випадкової величини ζ та досліджується суттєвий носій щільності розподілу.

Циліндричною щільністю розподілу випадкової величини ζ в точці z_0 називається границя (якщо вона існує) відношення

$$\frac{\mathrm{P}(\zeta \in \Delta_{i_1(z_0) i_2(z_0) \dots i_k(z_0)})}{5^{-k}} \quad \text{при } k \to \infty,$$

яка позначається $P'(z_0)$. Суттєвим носієм щільності розподілу випадкової величини ζ називається множина $N_\zeta = \{z : P'(z) \neq 0\}$.

Лема 4.7. *Якщо в точці* $z_0 = \Delta_{i_1(z_0)\ldots i_k(z_0)\ldots}$ *існує циліндрична щільність розподілу випадкової величини* ζ, *то вона може бути обчислена за формулою*

$$P'(z_0) = \prod_{j=1}^{\infty}(5p_{i_j(z_0)j}).$$

Теорема 4.3. *Якщо матриця ймовірностей* $||p_{ik}||$ *має асимптотичні властивості, тобто* $\lim\limits_{k\to\infty} p_{in} = p_i$, $i = \overline{0,4}$, *то* $N_\zeta = S_\zeta$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню структурних, топологічних, метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та фрактальних кривих на комплексній площині. Її основними об'єктами дослідження є криві типу Коха, множини неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та їх узагальнення.

У дисертаційній роботі отримано такі результати.

— Введено до розгляду систему числення з основою $2p$ ($p \in \mathbb{N}$) та надлишковим алфавітом $A_p = \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\}$ – прагматичне представлення чисел. Нульова надлишковість даної системи числення забезпечується певними обмеженнями на послідовні цифри алфавіту. Вивчено геометрію цього представлення чисел.

— Знайдено аналітичне задання відомої фрактальної кривої – сніжинки Коха як множини значень побудованої неперервної комплексної функції $F(t)$ дійсного аргументу t. Аналітичний вираз даної функції використовує символи прагматичного зображення аргументу t. Описано властивості функції F.

— Побудовано аналітичний вираз гомеоморфного відображення одиничного кола на сніжинку Коха.

— Сконструйовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха. Описано топологічні, метричні та самоподібні властивості кривих цієї сім'ї.

— Описано клас підмножин комплексної площини, які є узагальненням множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами. Вивчено структурні, топологічні, метричні та фрактальні властивості цих множин.

— Вивчено структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості розподілу ймовірностей на фракталі Вічека– фрактальній кривій павутинного типу, індукованого дискретними розподілами символів кодування точок кривої засобами п'ятисимвольного алфавіту.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Коваленко В.М.* Про одну комплекснозначну функцію дійсного аргументу / В.М. Коваленко // Наук. записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. – №4. – С. 250-260.
2. *Коваленко В.М.* Тополого-метричні властивості однієї сім'ї комплекснозначних випадкових величин / В.М. Коваленко // Наук. записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – №2. – С. 162-171.
3. *Коваленко В.М.* Множина неповних сум абсолютно збіжного комплексного ряду / В.М. Коваленко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – №10. – С. 150-162.
4. *Коваленко В.М.* Скінченні та нескінченні арифметичні суми множин комплексних чисел / В.М. Коваленко // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2014. – **11**, 1. – С. 241-256.
5. *Коваленко В.М.* Сніжинка Коха як параметрично задана плоска крива / В.М. Коваленко, М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – №16(2). – С. 61-80.
6. *Kovalenko V.M.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on the Vicsek fractal) / M.V. Pratsiovytyi, V.M. Kovalenko // Random Oper. Stoch. Equ. 2015; **23**(3), P. 161-168.

7. *Коваленко В.М.* Аналітичне задання однієї сім'ї фрактальних кривих / В.М. Коваленко // Міжнародна конференція пам'яті В.Я. Буняковського (1804-1889): Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 16-21 серпня, 2004. – С.74.
8. *Kovalenko V.* Fractal properties of one class complex-valued random variables / V. Kovalenko // International conference "Modern problems and new trends in probability theory": Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, June 19-26, 2005. – P. 112.
9. *Коваленко В.М.* Тополого-метричні властивості однієї сім'ї комплекснозначних випадкових величин / В.М. Коваленко // Міжнародна конференція "Сучасна стохастика: теорія і застосування", Київ, Національний університет імені Тараса Шевченка, 19-23 червня, 2006 р.: Тези допов. – Київ, 2006. – С.41-42.
10. *Коваленко В.М.* Множина неповних сум одного абсолютно збіжного ряду з комплексними членами / В.М. Коваленко // Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Матеріали конф. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — С. 70-71.
11. *Коваленко В.М.* Тополого-метричні властивості множини неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами / В.М. Коваленко // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: зб. тез (Національний університет "Києво-Могилянська академія", 25-27 квітня 2013 р., м. Київ). – Київ, 2013. – С. 105-106.
12. *Коваленко В.М.* Нескінченні арифметичні суми скінченних підмножин комплексної площини / В.М. Коваленко // П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк: тези доповідей (16-20 вересня, Київ, Україна). – Київ: Інститут математики НАН України та Фізико-математичний інститут НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – С. 45-46.
13. *Kovalenko V.* Probability measures on the one fractal curves / V. Kovalenko // International scientific and methodical conference«Modern scientific and methodical issues of Mathematics in higher school», June 25-26, 2015. – P. 85-87.

АНОТАЦІЇ

Коваленко В. М. Аналітичні методи в фрактальній геометрії. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена розвитку аналітичних методів дослідження фрактальних об'єктів комплексної площини: кривих, множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами, неперервних недиференційовних відображень, ймовірнісних мір з фрактальними носіями.

Для представлення та зображення чисел у системі числення з натуральною парною основою і симетричним мінімально надлишковим алфавітом вводиться прагматичне зображення, яке має нульову надлишковість. На основі вивченої геометрії цього зображення знайдено аналітичне задання сніжинки Коха як множини значень певної неперервної комплексної функції дійсного аргументу. Побудовано явний аналітичний вираз гомеоморфного відображення кола на сніжинку Коха. Сконструйовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха. Вивчено властивості цих кривих.

Описано клас множин, які є узагальненням множин неповних сум спеціальних абсолютно збіжних рядів з комплексними членами; знайдено достатні умови цілком незв'язності, зв'язності, існування внутрішніх точок, нульмірності (відносно двовимірної міри Лебега) цих множин, а також оцінки їх розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Вивчено структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості розподілу ймовірностей на фракталі Вічека – фрактальній кривій павутинного типу, індукованого дискретними розподілами символів кодування точок кривої засобами п'ятисимвольного алфавіту.

Ключові слова: неповна сума (підсума) ряду, множина неповних сум (підсум) ряду, геометрія числового ряду, фрактальні криві, сніжинка Коха, фрактал Вічека, комплексна функція з фрактальною множиною значень, міра Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Коваленко В. Н. Аналитические методы в фрактальной

геометрии. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена развитию аналитических методов исследования фрактальных объектов комплексной плоскости: кривых, множеств неполных сумм абсолютно сходящихся рядов, непрерывных недифференцируемых отображений, вероятностных мер.

Для представления и изображения чисел в системе счисления с четным натуральным основанием и симметричным минимально избыточным алфавитом вводится прагматическое изображение, которое имеет нулевую избыточность. На основе изученной геометрии этого изображения найдено аналитическое задание снежинки Коха как множества значений следующей непрерывной комплексной функции действительного аргумента:

$$F(t) = e^{\frac{\pi i}{3}\alpha_0(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{\pi i}{3} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)}, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right],$$

где $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}]$ – целая часть числа $t + \frac{1}{2}$, $\alpha_m(t)$ – m-й символ прагматического изображения числа $t - \alpha_0(t)$ в системе счисления с основанием 4 и алфавитом $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Построено явное аналитическое выражение гомеоморфного отображения окружности на снежинку Коха. Сконструировано однопараметрическую семью фрактальных кривых, которая содержит снежинку Коха. Изучены свойства этих кривых.

Описан класс множеств, являющихся обобщением множеств неполных сумм абсолютно сходящихся рядов с комплексными членами; найдены достаточные условия вполне несвязности, связности, существования внутренних точек, нульмерности (относительно двухмерной меры Лебега) этих множеств, а также оценки их размерности Хаусдорфа-Безиковича.

Изучены структурные, тополого-метрические и фрактальные свойства распределения вероятностей на фрактале Вичека – фрактальной кривой паутинного типа, индуцированного распределениями символов кодирования точек кривой средствами пятисимвольного алфавита.

Ключевые слова: неполная сумма (подсумма) ряда, множество неполных сумм (подсумм) ряда, геометрия числового ряда, фрактальные кривые, снежинка Коха, фрактал Вичека, комплексная функция с фрактальным множеством значений, мера Лебега, размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Kovalenko V. M. Analytic methods in fractal geometry. — Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.04 — geometry and topology. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2016.

In the thesis, we develop analytic methods for the study of fractal objects on the complex plane: curves, sets of incomplete sums of absolutely convergent series with complex terms, continuous non-differentiable mappings, probability measures with fractal supports.

To express and represent numbers in numeral system with even positive integer base and symmetric minimal redundant alphabet we introduce pragmatic representation with zero redundancy. Using geometry of this representation we construct an analytic representation of the Koch snowflake as the image of a certain complex valued function of real argument. An explicit analytic expression for homeomorphism of the circle to the Koch snowflake and one-parameter family of fractal curves containing the Koch snowflake are found. The structural, topological, metric and self-similar properties of these curves are studied.

We describe the class of sets generalizing the sets of incomplete sums of absolutely convergent series with complex terms. Sufficient conditions for these sets to be disconnected or connected, to have interior points, to be of zero two-dimensional Lebesgue measure are found. Hausdorff–Besicovitch dimension of these sets is also estimated.

Vicsek fractal is a fractal curve of web type. We study the structural, topological, metric and fractal properties of probability distributions on the Vicsek fractal induced by the discrete distributions of symbols of encoding of curve's points with the 5-symbol alphabet.

Key words: incomplete sum (subsum) of the series, set of incomplete sums (subsums) of the series, geometry of numeral series, fractal curves, Koch snowflake, Vicsek fractal, complex function with fractal set of values, Lebesgue measure, Hausdorff-Besicovitch dimension.

Підписано до друку 29.07.2016. Формат 60×84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,5. Умовн. друк. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 89.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова, 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9.
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2012.
(044) 239-30-26.