Національний педагогічний університет
імені М.П. Драгоманова

На правах рукопису

Коваленко Валерій Миколайович

УДК 515.124, 515.125

Аналітичні методи в фрактальній геометрії

01.01.04 — геометрія та топологія

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Працьовитий Микола Вікторович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

СПИСОК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{Z}_0$ — множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$H^k(E)$ — k-вимірна міра Гаусдорфа множини E;

$\dim E$ — розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E;

$\dim_B F$ — ентропійна (клітинкова) розмірність множини F;

$D(E)$ — самоподібна розмірність множини E;

$\lambda(E)$ — міра Лебега множини E;

$\Delta_{c_1 \ldots c_k}$ — циліндрична множина (відрізок), що відповідає певному представленню (зображенню) чисел, відомому з контексту;

$\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ — точка (число), що є спільною для всіх циліндрів $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$;

$\square$ — кінець доведення

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена розробці аналітичних методів дослідження математичних об'єктів комплексної площини з фрактальними властивостями, які ґрунтуються на різних системах кодування (зображення) чисел.

Актуальність теми. За останні десятиліття така галузь математики як геометрія суттєво розширила коло досліджуваних об'єктів завдяки долученню до розгляду фрактальних фігур та фрактальних відношень, зокрема фрактальних перетворень метричного простору. Більш того, з групової точки зору фрактальна геометрія є теорією інваріантів групи перетворень метричного простору, які зберігають фрактальну розмірність (Гаусдорфа-Безиковича, ентропійну та інші) [45, 46, 61]. Спалах інтересу до математичних об'єктів зі складною локальною геометричною структурою, неоднорідними просторовими властивостями ґрунтувався на кристалізації ідей самоподібності, самоафінності, автомодельності. Спочатку він реалізовувався на геометрично-інтуїтивних принципах і геометрично-описових засобах дослідження, що викликало у строгих аналітиків науковий песимізм. В останній період теорія фракталів (фрактальна геометрія та фрактальний аналіз) перебудовується на основі гармонізації методів вивчення об'єктів і домінування аналітичних основ досліджень. Класичні фрактальні об'єкти (лінії та поверхні), які увійшли в усі серйозні аннали з теорії фракталів, почали вимагати нових засобів опису та дослідження (починаючи від коректності означення і закінчуючи повнотою обґрунтованості властивостей). Одним з таких об'єктів є сніжинка Коха – добре відома кусково-самоподібна фрактальна замкнена крива нескінченної довжини, у жодній точці якої не існує дотичної [88, 89]. Проблема її ефективного аналітичного задання існувала тривалий час. Різні пропозиції для цього обговорювались у роботах М. В. Працьовитого [43], А. А. Маляренка [27] та ін. Зокрема, пропонувалось використовувати для цього представлення чисел рядами з комплексними членами, для зображення яких використовувався шестірковий алфавіт. Оскільки задача до кінця не була розв'язаною, то ми запропонували для її вирішення використовувати іншу систему зображення чисел рядами – з основою 4 і п'ятисимвольним симетричним алфавітом, геометрію якого ми вивчаємо.

Геометрія числових рядів – сучасний актуальний напрям досліджень у математиці, який розвивається більше ста років (починаючи з піонерської роботи С. Какея [86] у 1914 р.) і сьогодні обіцяє різноманітні застосування у різних галузях математики: геометрії, топології, математичному аналізі, теорії функцій, теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії динамічних систем тощо. За останні десятиліття здійснено суттєвий прорив у дослідженні тополого-метричних властивостей множин неповних сум (підсум) абсолютно збіжних рядів з дійсними членами (завершено класифікацію існуючих топологічних типів таких множин (Дж. Гатрі [79], Дж. Німан [96, 97], Р. Сеінза [94, 95] та ін.), отримано ряд важливих результатів стосовно міри Лебега та фрактальних розмірностей (розмірність Гаусдорфа-Безиковича, Гаусдорфа-Біллінгслі, клітинкова розмірність) для певних класів множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з дійсними членами (Т. О. Банах [66], М. В. Працьовитий [42, 48], О. М. Барановський [3], Н. М. Василенко [5], Я. В. Гончаренко [8], Н. О. Корсунь [18], І. О. Савченко [50], Г. М. Торбін [51], Р. Джонс [85], М. Купер [73], М. Моран [93], Т. Шалат [100], Е. Шимонік [66], Ю. Перес [99], Б. Солом'як [101] та ін.)). Але цього не можна сказати про ряди з комплексними членами (К. Бандт [68], М. Моран [93], Б. Солом'як [103] та ін). Тому актуальною є задача дослідження структурних, тополого-метричних та фрактальних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та їх різнопланових узагальнень. У дисертації введено у розгляд певне узагальнення множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами – так звані Σ-множини, які є нескінченними арифметичними сумами спеціальних послідовностей скінченних підмножин $\mathbb{C}$. Вивчено властивості цих множин.

Серед ймовірнісних мір у просторі $\mathbb{R}^2$ зі складною локальною лебегівською структурою окрему увагу привертають міри, зосереджені на фрактальних кривих. Один з найпростіших класів таких кривих на евклідовій площині утворюють автомодельні (самоподібні, самоафінні тощо) лінії та їх комбінації (прикладами таких є криві Серпінського [76], Коха [88], Осгуда [74], Вічека [56] та інші). Існують певні методологічні труднощі у коректному означенні та дослідженні таких мір. Одним з ефективних засобів їх визначення є різні системи кодування дійсних та комплексних чисел і розподіли випадкових елементів простору, індуковані розподілами символів (цифр) системи кодування. Цей підхід у дисертаційній роботі ми реалізовуємо на самоподібній фрактальній кривій – фракталі Вічека.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводиться на кафедрі вищої математики НПУ імені М.П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження здійснювалось в рамках науково-дослідних тем:

– системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали (№ державної реєстрації U02125295);

– фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053).

Об'єкт дослідження. Множини неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та фрактальні криві комплексної площини.

Предмет дослідження. Структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості основних об'єктів дослідження.

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є опис структурних, топологічних, метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум окремих абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та фрактальних кривих на комплексній площині.

Основними завданнями дослідження є такі:

- — знайти комплексну функцію, множиною значень якої є сніжинка Коха, і побудувати її узагальнення;
- — знайти аналітичний вираз гомеоморфного відображення сніжинки Коха на коло;
- — описати клас підмножин комплексної площини, які узагальнюють поняття множини неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами; вивчити топологічні, метричні та фрактальні властивості цих множин;
- — вивчити структурні (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент), тополого-метричні та самоподібні властивості розподілу ймовірностей на фракталі Вічека – фрактальній кривій павутинного типу, індукованого розподілами символів кодування точок кривої засобами п'ятисимвольного алфавіту.

Методи дослідження. У роботі використовувалися прийоми та методи топології, теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), математичного аналізу, алгебри та теорії чисел, теорії міри, теорії ймовірностей.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

- — на основі представлення чисел у системі з основою 4 і надлишковим симетричним алфавітом $-2, -1, 0, 1, 2$ введено в розгляд так звaне прагматичне представлення дійсних чисел, яке має нульову надлишковість, та описано його тополого-метричні властивості;

- на основі прагматичного представлення дійсних чисел отримано аналітичне задання класичної сніжинки Коха як множини значень побудованої комплексної функції дійсного аргументу;
- знайдено аналітичний вираз гомеоморфного відображення кола на сніжинку Коха;
- побудовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха, описано тополого-метричні та самоподібні властивості кривих цієї сім'ї;
- описано клас множин, які узагальнюють поняття множини неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами; вивчено структурні, топологічні, метричні та фрактальні властивості цих множин;
- для розподілу ймовірностей на фракталі Вічека, індукованого розподілами символів кодування його точок засобами п'ятисимвольного алфавіту, вивчено спектральні властивості, доведено лебегівську чистоту (чисту дискретність або чисту неперервність), у випадку неперервності встановлено його сингулярність канторівського типу.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані у дослідженнях з теорії фракталів, неперервних ніде не диференційовних функцій, метричної теорії чисел, при вивченні математичних об'єктів зі складною локальною будовою.

Особистий внесок здобувача. Усі положення і результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних з науковим керівником (Працьовитим М.В.) публікаціях Працьовитому М.В. належить загальна постановка задач, деякі ідеї доведень та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на наступних конференціях:

— Міжнародна конференція пам'яті В.Я. Буняковського (1804-1889). 16-21 серпня, 2004, Київ;

— International conference "Modern problems and new trends in probability theory". June 19-26, 2005, Kyiv;

— Міжнародна конференція "Сучасна стохастика: теорія і застосування". 19-23 червня, 2006, Київ;

— Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь."13-14 грудня, 2012, Київ;

— Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. 25-27 квітня, 2013, Київ;

— П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк. 16-20 вересня, 2013, Київ;

— Міжнародна науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі". 25-26 червня, 2015, Київ.

Результати дисертаційного дослідження доповідались на наукових семінарах:

– семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);

– семінар відділу топології Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук С. І. Максименко);

– семінар відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю. Б. Зелінський).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 6 наукових статтях [1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них одна стаття в науковому виданні, що входить до наукометричних баз даних (Scopus, Zentralblatt, MATH), та додатково відображено в матеріалах конференцій [7^a, 8^a, 9^a, 10^a, 11^a, 12^a, 13^a].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який нараховує 104 найменування, списку публікацій автора, списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи – 116 сторінок.

Основний зміст роботи. У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, дається загальна характеристика та формулюються основні результати, що виносяться на захист.

Розділ 1 "Огляд літератури та концептуальні засади дослідження" носить вступний характер. У ньому проведено аналіз літератури з теми дослідження, систематизовано теоретичні відомості про об'єкти дослідження, сформульовано означення базових понять та факти, необхідні для виконання дисертаційного дослідження.

У **розділі 2 "Аналітичне задання сніжинки Коха та її модифікацій"** розв'язується задача аналітичного задання класичної фрактальної кривої — сніжинки Коха. На основі отриманого параметричного рівняння сніжинки Коха побудовано аналітичний вираз гомеоморфного відображення одиничного кола на сніжинку Коха. Також сконструйовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха, описано структурні, топологічні, метричні та самоподібні властивості кривих цієї сім'ї.

У пункті 2.1 розглядається система числення з основою 4 та надлишковим симетричним алфавітом $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, L – простір послідовностей елементів алфавіту A. У цій системі деякі числа відрізка $D_0 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ мають скінченну множину різних зображень, інші – зчисленну, а решта – континуальну множину різних зображень. А саме, мають місце наступні твердження.

Теорема 2.1. *Для будь-якого* $x \in D_0$ *існує* $(\alpha_k) \in L$ *така, що*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{4^k} \equiv \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}. \qquad (2.1)$$

Подання числа x рядом (2.1) називатимемо Δ-*представленням*, а його скорочений запис $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – Δ-*зображенням*. Далі пишемо $\bar{2}$ замість числа -2, $\bar{1}$ замість числа -1.

Лема 2.3. *Число* $x \in D_0$ *має різних* Δ-*зображень*

1. *скінченну множину, якщо одне з його зображень має період* (0),

2. *зліченну множину, якщо одне з його зображень має простий період* (a), *де* $a \in \{\bar{2}, \bar{1}, 1, 2\}$.

Якщо ж у Δ-*зображенні числа* $x \in D_0$ *міститься нескінченне число пар послідовних цифр з набору* $\{\bar{2}2, \bar{1}2, 02, 12, \bar{1}\bar{2}, 0\bar{2}, 1\bar{2}, 2\bar{2}\}$, *то воно має континуальну множину різних* Δ-*зображень.*

Суттєва надлишковість Δ-зображення чисел в окремих задачах є його недоліком. Це змушує "оптимізувати"систему, щоб домогтись її нульової надлишковості. Цього можна досягти різними способами. Один з них ґрунтується на використанні так званого канонічного зображення.

Означення 2.3. Δ-зображення $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ числа $x \in D_0$, кожна пара будь-яких послідовних цифр якого відмінна від $\bar{1}\bar{2}, \bar{1}2, 1\bar{2}$ і 12, тобто $(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \notin \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, 2), (1, \bar{2}), (1, 2)\}$, називатимемо *канонічним* Δ-зображенням або $\bar{\Delta}$-зображенням.

Теорема 2.2. *Будь-яке число* $x \in D_0$ *має не більше двох канонічних* $\bar{\Delta}$-*зображень.*

Альтернативою канонічному зображенню у вказаному аспекті є так зване *прагматичне* Δ-зображення, яке далі є основним у дослідженні.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}_0$ позначимо

$$B_k = \{(-2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -2), (-2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -1), (2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1), (2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 2)\}.$$

Теорема 2.3. *Будь-яке число* $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \equiv I_0$ *може бути представлене у вигляді* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, *де послідовність* (α_n) *задовольняє умови: для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

1. $\alpha_n \in A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$*;*
2. $(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k+1}) \notin B_k \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_0)$.

Означення 2.5. Δ-зображення числа $x \in I_0$ з обмеженнями 1-2 називатимемо *прагматичним* або П-зображенням.

Існують числа (їх зліченна множина), які мають два П-зображення. Це числа виду $x = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2(0)} = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]\bar{2}(0)}$. Такі числа називатимемо П-раціональними. Всі інші числа будуть мати єдине П-зображення, їх будемо називати П-ірраціональними.

У пункті 2.2 розглядається функція $f(t)$, визначена на відрізку I_0 рівністю $f(t) = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)}$, де $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t \in I_0$.

Лема 2.8. *Відображення* $f: I_0 \to P_0 = f(I_0)$ *є гомеоморфізмом.*

На відрізку $I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$ означимо функцію $F(t)$ рівністю

$$F(t) = e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} z_0(t - \alpha_0(t)) = e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)},$$

де $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}]$, а $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t - \alpha_0(t)$.

Теорема 2.5. *Функція* $F(t)$ *є неперервною на відрізку* I*.*

Позначимо $J = [0, 2]$.

Лема 2.11. *Множина* $F(J)$ *є кривою Коха.*

Теорема 2.6. *Множиною значень комплекснозначної функції*

$$F(t) = e^{\frac{i\pi\alpha_0(t)}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)}, \quad t \in I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$$

є сніжинка Коха.

Теорема 2.7. *Відповідність* $h:\ e^{\frac{\pi i t}{3}} \to F(t)$ *задає гомеоморфізм одиничного кола* $\omega = \left\{z = e^{\frac{\pi i t}{3}}\ :\ t \in I\right\}$ *і сніжинки Коха.*

У підрозділі 2.4 вводиться у розгляд узагальнене прагматичне зображення дійсних чисел відрізка I_0. Нехай p – фіксоване натуральне число. Для довільного $k \in \mathbb{Z}_0$ позначимо

$$B_k^{(p)} = \bigcup_{j=1}^{p}\{(-p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -j), (p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, j)\}.$$

Теорема 2.8. *Будь-яке число* $x \in I_0$ *може бути представлене у вигляді*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(2p)^n} \equiv \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \qquad (2.47)$$

де послідовність (α_n) *задовольняє умови: для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

1. $\alpha_n \in A_p = \{-p, -p+1, \ldots, 0, \ldots, p-1, p\}$*;*
2. $(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k+1}) \notin B_k^{(p)} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_0)$.

Представлення числа $x \in I_0$ рядом (2.47) з обмеженнями 1-2 називатимемо *узагальненим прагматичним* або Π_p-представленням числа x, а символічний запис $x = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – Π_p-зображенням числа x. При цьому число α_n $(n \in \mathbb{N})$ будемо називати n-ою Π_p-цифрою (символом, знаком) числа x.

У п. 2.5 розглядається однопараметрична сім'я комплексних функцій $F_q(t)$ $(q \geqslant 5,\ q \in \mathbb{N})$, визначених на відрізках $W_q = \left[-\frac{1}{2}, q - \frac{1}{2}\right]$ рівностями

$$F_q(t) = e^{\frac{2\pi i}{q}\alpha_0(t)} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(q))^k e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)},$$

де $\lambda(q) = \sin\frac{\pi}{q} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{q} + \sin\frac{\pi(2p(q)-1)}{q}\right)^{-1}$, $\alpha_0(t) = \left[t + \frac{1}{2}\right]$ – ціла частина числа $t + \frac{1}{2}$, $p(q) = \left[\frac{q+3}{4}\right]$, $\alpha_m(t)$ – m-ий символ $\Pi_{p(q)}$-зображення числа $t - \alpha_0(t)$.

Теорема 2.10. *Функція $F_q(t)$ є неперервною на відрізку W_q.*

Лема 2.15. *Множини $\mathcal{S}_q = F_q(W_q)$ є неперервними замкненими кривими.*

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.11. *Криві $\mathcal{S}_q$ $(q \geqslant 5)$ є замкненими та кусково-самоподібними. Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича цих кривих виконується нерівність*

$$\dim \mathcal{S}_q \leqslant -\frac{\ln 2p(q)}{\ln \lambda(q)},$$

де $p(q) = \left[\frac{q+3}{4}\right]$, $\lambda(q) = \sin\frac{\pi}{q}\left(\sin\frac{\pi}{q} + \sin\frac{\pi(2p(q)-1)}{q}\right)^{-1}$.

У **розділі 3. "Геометрія абсолютно збіжних рядів з комплексними членами"** вводиться до розгляду клас компактних підмножин $\mathbb{C}$ – так звані Σ-множини, які є узагальненнями множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами. Вивчаються їх структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості.

У підрозділі 3.1 наведено означення та досліджено топологічні властивості Σ-множин.

Означення 3.2. Будемо казати, що множина S є Σ-множиною, якщо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$, де Z_k $(k \in \mathbb{N})$ – скінченні підмножини комплексної площини $\mathbb{C}$, для яких виконуються наступні умови:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty$, де $\mu_k = \max\{|z| : z \in Z_k\}$,

2) серед множин Z_k існує нескінченна кількість множин, що містять не менше двох елементів.

Лема 3.1. *Довільна Σ-множина є компактною.*

Нехай $(c_1, \ldots, c_k)$ – фіксований упорядкований набір, де $c_j \in I_j$

$(j=\overline{1,k})$. Циліндром рангу k з основою $c_1\dots c_k$ називається множина

$$S_{c_1\dots c_k}=\{x=\sum_{m=1}^{\infty} z_{i_m m}:\ i_m=c_m\ (m=1,\dots,k),\ z_{i_m m}\in Z_m\}.$$

Теорема 3.1. *Якщо для всіх натуральних* k *виконується нерівність* $l(Z_k)>\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{m=k+1}^{\infty}d(Z_m)$ *(або* $l(Z_k)>\sum\limits_{m=k+1}^{\infty}d(Z_m)$ *у випадку, коли всі циліндри є центрально-симетричними), то множина* S *є: 1) цілком незв'язною; 2) континуальною.*

Теорема 3.2. *Кожна* Σ*-множина* $S=\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty}Z_k$ *є досконалою множиною потужності континууму.*

Теорема 3.3. *Нехай задано сім'ю компактних множин* $\{B_{i_1\dots i_k}\}$ $(i_k\in I_k,\ k\in\mathbb{N})$*, які мають властивості:*

1) $B_{i_1\dots i_k}\supset S_{i_1\dots i_k}$*;*

2) $B_{i_1\dots i_k i_{k+1}}\subset B_{i_1\dots i_k}$*;*

3) $\lim\limits_{k\to\infty}d(B_{i_1\dots i_k})=0$*.*

Тоді множина S *може бути подана наступним чином:*

$$S=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{(i_1,\dots,i_k)}B_{i_1\dots i_k}.$$

Підрозділ 3.2 присвячений метричним властивостям Σ-множин.

Теорема 3.4. *Для двовимірної міри Лебега* λ Σ*-множини* S *виконується рівність* $\lambda(S)=\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(\bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)}B_{i_1\dots i_k})$*, де множини* $B_{i_1\dots i_k}$ *задовольняють умови попередньої теореми.*

Наслідок 3.1.*Якщо для* Σ*-множини* $S=\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty}Z_k$ *виконується рівність*

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}m_j\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}d(Z_n)\right)^2=0,$$

де m_j *– кількість елементів множини* Z_j*,* $d(Z_n)$ *– діаметр множини* Z_n $(j,n=1,2,\dots)$*, то множина* S *має нульову двовимірну міру Лебега.*

У підрозділі 3.3 вивчаються фрактальні властивості Σ-множин.

Теорема 3.6. *Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ виконується нерівність*

$$\dim_H S \leqslant \underline{\dim}_B S \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(\prod\limits_{j=1}^{k} m_j)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))},$$

де m_j, $d(Z_j)$ – відповідно кількість елементів та діаметр множини Z_j $(j \in \mathbb{N})$.

У підрозділі 3.4 вивчаються тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами.

Множиною неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ називається наступна множина:

$$S(c) = \{z : z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k, \varepsilon_k \in \{0, 1\}\}.$$

Очевидно, що множина $S(c)$ є Σ-множиною, оскільки вона може бути представлена у вигляді $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$, де $C_k = \{0, c_k\}$. Звідси безпосередньо випливають такі властивості множини $S(c)$ як континуальність, компактність та досконалість.

Опис властивостей множини $S(c)$ одержуємо з загальних теорем, які отримані для Σ-множин.

Теорема 3.7. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність $|c_k| > \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} |c_m|$, то множина $S(c)$ є цілком незв'язною.*

Теорема 3.8. *Якщо $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k \left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |c_n|\right)^2 = 0$, то множина $S(c)$ має нульову двовимірну міру Лебега.*

Нехай задано дві нескінченні диз'юнктні підмножини $\mathbb{N}$:
$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}, \ldots\}$.

Теорема 3.9. *Якщо множини* $C_{a_{ik}}$ *задовольняють умови:*

1. $C_{a_{ik}} \subset l_i$, *де* $l_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ – *прямі, які мають рівно одну спільну точку – початок координат,*
2. *для всіх* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|c_{a_{ik}}| \leqslant \sum_{p=k+1}^{\infty} |c_{a_{ip}}|, \quad i \in \{1, 2\},$$

то множина $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ *має додатну міру Лебега.*

Теорема 3.10. *Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду виконується нерівність*

$$\dim_H S(c) \leqslant \underline{\dim}_B S(c) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{k \ln(2)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} |c_i|)}.$$

Розділ 4. "Застосування геометрії абсолютно збіжних рядів з комплексними членами" присвячений використанню аналітичного представлення фрактальної кривої для задання на ній розподілів ймовірностей.

У підрозділі 4.1 вводиться у розгляд комплекснозначна випадкова величина $\zeta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \varepsilon_{\eta_k} \equiv \Delta_{\eta_1 \ldots \eta_k \ldots}$, де індекси η_k – незалежні випадкові величини, що набувають значень 0, 1, 2, 3, 4 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}, p_{4k}$ відповідно, $p_{ik} \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{4} p_{ik} = 1 (\forall k \in \mathbb{N})$, $\varepsilon_m = e^{\frac{m\pi i}{2}} = i^m$ $(m = \overline{0, 3})$ – корені 4-го степеня з одиниці, $\varepsilon_4 = 0$.

Лема 4.1. *Випадкова величина* ζ *набуває значень з множини*

$$V = \{z: \ z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \varepsilon_{i_k} \equiv \Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots}\},$$

де послідовності (i_k) *пробігають простір* $L \equiv A_5^{\infty} = A_5 \times A_5 \times \cdots \times A_5 \times \ldots$, *яка є зв'язною самоподібною фрактальною кривою з розмірністю* $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

У підрозділі 4.2 досліджується лебегівська структура розподілу випадкової величини ζ.

Теорема 4.1. *Розподіл випадкової величини ζ є чисто дискретним або чисто неперервним, причому дискретним – тоді і тільки тоді, коли $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant 4}\{p_{jk}\} > 0$.*

У випадку дискретності точковий спектр D_ζ розподілу випадкової величини ζ може бути поданий як об'єднання $D_\zeta = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$, де D_k – множина, яка складається з усіх точок виду $z = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{i_j} + \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{m_j}$, причому індекси (символи) i_j $(j = \overline{1,k})$ набувають всіх можливих значень з множини A_5, а m_n – такий індекс, що $\max\limits_{0 \leqslant l \leqslant 4}\{p_{ln}\} = p_{m_n n}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Наслідок 4.3. *Розподіл випадкової величини ζ є неперервним тоді і тільки тоді, коли $M = 0$.*

У підрозділі 4.3 розглядається випадок неперервності розподілу випадкової величини ζ.

Теорема 4.2. *Спектром S_ζ розподілу випадкової величини ζ є множина $C = \{z : \ z = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}, \ p_{i_j j} > 0 \ \forall j \in N\}$.*

Наслідок 4.4. *Якщо $M = 0$, то розподіл випадкової величини ζ є сингулярно неперервним, тобто ортогональним двовимірній мірі Лебега.*

У підрозділі 4.4 досліджується випадок однакової розподіленості символів η_k.

Лема 4.5. *Якщо випадкові величини η_k однаково розподілені, тобто $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $i = \overline{0,4}$, то математичне сподівання та дисперсія випадкової величини ζ обчислюються за формулами:*

$$\mathrm{M}\zeta = p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3),$$

$$\mathrm{D}\zeta = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - p_0^2 - p_2^2 + 2p_0p_2 - 2p_1p_3 + p_0 - p_1 + p_2 - p_3 -$$

$$-2(p_0 - p_2)(p_1 - p_3)i).$$

Лема 4.6. *Нехай $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $i = \overline{0,4}$. Тоді S_ζ є самоподібною множиною, самоподібна розмірність якої дорівнює $\log_3 m$, де m – кіль-*

кість додатних координат ймовірнісного вектора $\overline{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$, *причому*

1. *якщо* $p_0 = p_2 = 0$ *(або* $p_1 = p_3 = 0$*), а* $p_1p_3p_4 \neq 0$ *(або* $p_0p_2p_4 \neq 0$*), то* S_ζ *є відрізком;*
2. *якщо* $p_4 = 0$ *і* $p_0p_1p_2p_3 \neq 0$*, то* S_ζ *є цілком незв'язною множиною.*

У підрозділі 4.5 розглядається циліндрична щільність розподілу випадкової величини ζ та досліджується суттєвий носій щільності розподілу.

Циліндричною щільністю розподілу випадкової величини ζ в точці z_0 називається границя (якщо вона існує) відношення

$$\frac{\mathrm{P}(\zeta \in \Delta_{i_1(z_0)i_2(z_0)\ldots i_k(z_0)})}{5^{-k}} \quad \text{при } k \to \infty,$$

яка позначається $P'(z_0)$. Суттєвим носієм щільності розподілу випадкової величини ζ називається множина $N_\zeta = \{z : P'(z) \neq 0\}$.

Лема 4.7. *Якщо в точці* $z_0 = \Delta_{i_1(z_0)\ldots i_k(z_0)\ldots}$ *існує циліндрична щільність розподілу випадкової величини* ζ*, то вона може бути обчислена за формулою*

$$P'(z_0) = \prod_{j=1}^{\infty}(5p_{i_j(z_0)j}).$$

Теорема 4.3. *Якщо матриця ймовірностей* $||p_{ik}||$ *має асимптотичні властивості, тобто* $\lim\limits_{k\to\infty} p_{in} = p_i$, $i = \overline{0,4}$, *то* $N_\zeta = S_\zeta$.

Подяка. Автор висловлює вдячність науковому керівнику професору Миколі Вікторовичу Працьовитому за постановку задач, постійну увагу до даної роботи, підтримку та допомогу.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Міра Гаусдорфа

Зафіксуємо довільне дійсне число $k \geqslant 0$. Для довільного $\delta > 0$ та $E \subset X$ покладемо

$$H_\delta^k = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k 2^{-k} (\mathrm{diam} E_i)^k : \; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \; \mathrm{diam} E_i \leqslant \delta \right\}$$

$$H^k(E) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^k(E) = \sup_{\delta \geqslant 0} H_\delta^k(E).$$

$H^k(E)$ називається *k-вимірною мірою Гаусдорфа* множини E. α_k – відповідна нормувальна стала. Якщо k – ціле число, то $\alpha_k = L^k\{x \in \mathbb{R}^k : \; |x| \leqslant 1\}$. Для довільного k маємо $\alpha_k = \Gamma(\frac{1}{2})^k / \Gamma(\frac{k}{2} + 1)$. Конкретне значення α_k для нецілих k не матиме важливе значення.

H^k є регулярною борелівською мірою, проте H^k зазвичай не є скінченною на обмежених множинах. Якщо $X = \mathbb{R}^n$, то $H^n = L^n$. H^0 є зліченною мірою. Якщо відображення $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ належить класу C^1 та є бієктивним,то $H^m(f(A)) = \int_A J(f) dL^m$, де $J(f)$ – якобіан. Таким чином, H^k співпадає зі звичайним поняттям k-вимірного об'єму на "гарних"множинах у випадку, коли k є цілим.

Якщо $F : \; X \to X$ є ліпшицевим, то $H^k(F(A)) \leqslant (\mathrm{Lip} F)^k H^k(A)$. Якщо F є перетворенням подібності, то $H^k(F^{-1}(A)) = (\mathrm{Lip} F)^{-k} H^k(A)$.

Для кожного $E \subset X$ існує єдине дійсне число k, яке називається *розмірністю Гаусдорфа* множини E (позначається $\mathrm{dim} E$) і таке, що $H^\alpha(E) = \infty$ при $\alpha < k$, $H^\alpha(E) = 0$ при $\alpha > k$. $H^k(E)$ може набувати будь-яке значення з $[0, \infty)$ або дорівнювати ∞.

1.2. Ентропійна розмірність

Нехай F – довільна непорожня обмежена підмножина $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $N_\delta(F)$ найменше число множин з діаметром, що не перевищує δ і якими може бути покрита множина F.

Означення 1.1. Нижня та верхня ентропійні розмірності множини F визначаються відповідно рівностями

$$\underline{\dim}_B F = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta},$$

$$\overline{\dim}_B F = \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}.$$

Якщо $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, то їх спільне значення називають ентропійною розмірністю множини F

$$\dim_B F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}. \tag{1.1}$$

Наступні елементарні властивості ентропійної розмірності повторюють аналогічні властивості розмірності Гаусдорфа і можуть бути перевірені багато в чому таким же чином.

1. Гладкий m-вимірний підмноговид $F \subset \mathbb{R}^n$ має $\dim_B F = m$.
2. $\underline{\dim}_B$ та $\overline{\dim}_B$ є монотонними, тобто, якщо $E \subset F$, то

$$\underline{\dim}_B(E) \leqslant \underline{\dim}_B(F),\ \overline{\dim}_B(E) \leqslant \overline{\dim}_B(F).$$

3. $\overline{\dim}_B$ є скінченно стабільною, тобто

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\};$$

   причому для $\underline{\dim}_B$ відповідна тотожність не виконується.
4. $\underline{\dim}_B$ та $\overline{\dim}_B$ є біліпшицевими інваріантами.

Теорема 1.1. *[75] Нехай множина F може бути покрита n_k множинами, діаметри яких не перевищують δ_k, причому $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Тоді

$$\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}. \tag{1.2}$$

Більше того, якщо послідовність $(n_k\delta_k^s)_{k=1}^{\infty}$ *є обмеженою, то* $H^s(F) < \infty$. *Якщо* $\delta_k \to 0$, *але* $\delta_{k+1} \geqslant c\delta_k$ *для деякого* $0 < c < 1$, *то*

$$\overline{\dim}_B F \leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}. \tag{1.3}$$

1.3. Інваріантні множини. Самоподібні множини

Нехай $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ – множина стискуючих відображень повного метричного простору (X, d). $\mathrm{Lip}S_i = r_i$, де $\mathrm{Lip}S_i = \sup\limits_{x\neq y} \frac{d(S_i(x), S_i(y))}{d(x,y)}$ – стала Ліпшіца відображення S_i. $s_{i_1\ldots i_p}$ – нерухома точка відображення $S_{i_1\ldots i_p} \equiv S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p}$.

Для довільної множини $A \subset X$ позначимо $\mathcal{S}(A) = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A)$. Покладемо $\mathcal{S}^0(A) = A$, $\mathcal{S}^1(A) = \mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}^p(A) = \mathcal{S}(\mathcal{S}^{p-1}(A))$ для $p \geqslant 2$. Також будемо використовувати позначення $A_{i_1\ldots i_k} = S_{i_1\ldots i_k}(A)$. Легко бачити, що $\mathcal{S}^p(A) = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_p)} A_{i_1\ldots i_p}$. Відмітимо також, що $\mathrm{diam}(A_{i_1\ldots i_p}) \leqslant r_{i_1} \cdot \cdots \cdot r_{i_p} \mathrm{diam}(A) \to 0$ при $p \to \infty$, за умови, що A обмежена.

Означення 1.2. [83] Множина A називається інваріантною (відносно $\mathcal{S}$), якщо $A = \mathcal{S}(A)$.

Теорема 1.2 (Хатчінсон, 1981, [83]).

1. *Існує єдина замкнена обмежена множина* K, *яка є інваріантною відносно* $\mathcal{S}$. *Отже,* $K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$. *Крім того,* K *є компактом.*
2. $K_{i_1\ldots i_p} = \bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} K_{i_1\ldots i_p i_{p+1}}$.
3. $K \supset K_{i_1} \supset \cdots \supset K_{i_1\ldots i_p} \supset \ldots$, *причому перетин* $\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1\ldots i_p}$ *є одноточковою множиною, елемент якої позначається* $k_{i_1\ldots i_p\ldots}$. K *є об'єднанням цих одноточкових множин.*
4. $k_{\hat{i}_1\ldots\hat{i}_p} = s_{i_1\ldots i_p}$, *і, зокрема,* $s_{i_1\ldots i_p} \in K$ ($\hat{i}_1 \ldots \hat{i}_p$ *є нескінченною послі-*

довністю $i_1 \dots i_p i_1 \dots i_p \dots i_1 \dots i_p \dots$*). Також*

$$k_{i_1 \dots i_p \dots} = \lim_{p \to \infty} s_{i_1 \dots i_p},$$

і, зокрема, ця границя існує.

5. K *є замиканням множини нерухомих точок відображень* $S_{i_1 \dots i_p}$.
6. $S_{j_1 \dots j_q}(K_{i_1 \dots i_p}) = K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}$, $S_{j_1 \dots j_q}(k_{i_1 \dots i_p \dots}) = k_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p \dots}$.
7. *Якщо* A *є непорожньою обмеженою множиною, то* $d(A_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p \dots}) \to 0$ *рівномірно, коли* $p \to \infty$. *Зокрема,* $\mathcal{S}^p(A) \to K$ *у метриці Гаусдорфа.*

Компактну множину інваріантну відносно $\mathcal{S}$ позначають $|\mathcal{S}|$.

Наступне твердження дає цікаву характеристику відрізків.

Лема 1.1. *[83] Компактна зв'язна множина* $A \subset \mathbb{R}^n$ *є відрізком тоді і тільки тоді, коли* $A = \mathcal{S}(A)$, *де* $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$, $N \geqslant 2$, *усі* S_i *є перетвореннями подібності з* $\mathrm{Lip}(S_i) = r_i$ *і* $\sum_{i=1}^{N} r_i = 1$.

Далі в даному пункті ми розглядаємо випадок, коли $\mathcal{S}$ є сім'єю перетворень подібності. (X, d) є $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою. H^k є k-вимірною мірою Гаусдорфа. $\mathrm{Lip}(S_i) = r_i$.

Означення 1.3. [83] Множина K називається самоподібною (відносно $\mathcal{S}$), якщо виконуються наступні умови:

1. K є інваріантною відносно $\mathcal{S}$;
2. $H^k(K) > 0$, $H^k(K_i \cap K_j) = 0$ при $i \neq j$, де $k = \mathrm{dim} K$.

Нехай $\gamma(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i^t$. Тоді $\gamma(0) = N$ і $\gamma(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$. Отже, існує єдине D таке, що $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$.

Означення 1.4. [83] Якщо $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$, то D називається розмірністю подібності $\mathcal{S}$.

Досить часто D дорівнює розмірності Гаусдорфа множини $|\mathcal{S}|$.

Означення 1.5. [83] Кажуть, що $\mathcal{S}$ задовольняє умову відкритої множини, якщо існує така непорожня відкрита множина O, що

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{N} S_i(O) \subset O$,
2. $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Теорема 1.3. *[83] Нехай $\mathcal{S}$ задовольняє умову відкритої множини. Тоді*

1. *існують такі λ_1, λ_2, що*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \theta_*^D(K,k) \leqslant \theta^{*D}(K,k) \leqslant \lambda_2 < \infty \quad (\forall k \in K),$$

2. $0 < H^D(K) < \infty$ *і, значить, K є самоподібною множиною. Зокрема,* $\dim E = D$.

1.4. Геометрія числових рядів

Під геометрією числових рядів ми розуміємо структурні, топологічні, метричні та фрактальні властивості множин неповних сум абсолютно збіжних числових рядів та їх узагальнень. Існує велика кількість праць, присвячених переважно множинам неповних сум абсолютно збіжних рядів з дійсними членами. Наведемо деякі факти та поняття з цієї теорії.

Нехай задано абсолютно збіжний ряд з комплексними членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{1.4}$$

Ряд (1.4) визначає в комплексній площині $\mathbb{C}$ наступну множину:

$$S(c) = \{z : z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k, \varepsilon_k \in \{0,1\}\}, \tag{1.5}$$

яку називають *множиною неповних сум ряду* (1.4).

Мабуть, першою опублікованою роботою, присвяченою множинам неповних сум абсолютно збіжних рядів, можна вважати статтю С. Какея [86], опубліковану в 1914 р. Він показав, що множина неповних сум абсолютно збіжного ряду (з дійсними або комплексними членами) є континуальною досконалою множиною. Крім того, він довів, що у випадку, коли члени ряда (1.4) є додатними дійсними числами, то множина $S(c)$ є: 1) скінченним об'єднанням відрізків тоді і тільки тоді, коли $c_n \leqslant r_n := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k$ для достатньо великих n; 2) відрізком тоді і тільки тоді, коли $c_n \leqslant r_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$; 3) гомеоморфною множині Кантора, якщо $c_n > r_n$ для достатньо великих n.

Ці самі результати були пізніше отримані (незалежно один від одного) Г. Горничем [81] в 1941 р. та П. К. Меноном [92] в 1948 р.

В роботі [79] попередні результати були доповнені новим (з топологічної точки зору) типом множин неповних сум, а саме, було доведено, що множина $S(c)$ неповних сум збіжного знакододатного ряду (1.4) є однією з наступних:

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора;

3) гомеоморфною множині T неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \dots .$$

1.5. Огляд літератури

Одним з найбільш відомих прикладів самоподібної фрактальної множини є крива Коха, розглянута Хельге фон Кохом в 1904 р.[88] Сам Кох задавав її геометрично-конструктивно – як границю послідовності ламаних, що будуються наступним чином: на першому кроці ділимо відрізок AB точками C, D на три рівні відрізки, та замінюємо центральний відрізок CD бічними сторонами правильного трикутника CDE, для якого він є основою. Отримуємо ламану $ACEDB$, яку позначимо L_1. На другому кроці на кожній ланці ламаної L_1 виконуємо такі ж побудови як і на відрізку AB на першому кроці, отриману ламану позначимо L_2, і т.д. На n-му кроці маємо ламану L_n, яка складається з 4^n ланок довжиною $a \cdot 3^{-n}$, де a – довжина відрізка AB. Крива Коха $\mathcal{K}$ визначається, як границя послідовності ламаних $\{L_n\}$.

З побудови кривої Коха випливає що вона є самоподібною множиною. Дійсно, на другому кроці побудови на кожній ланці ламаної L_1 ми виконуємо такі ж побудови, як і на початковому відрізку AB. Отже, крива Коха складається з чотирьох конгруентних частин, які подібні їй з коефіцієнтом подібності $k = \frac{1}{3}$.

Неважко вказати перетворення подібності для яких крива Коха буде інваріантною множиною (зрозуміло, що ця задача має не єдиний розв'язок). Наприклад, якщо в конструкції побудови кривої Коха відрізок AB є відрізком $[0, 1]$ на дійсній вісі в комплексній площині, то перетворення подібності для яких ця крива буде інваріантною множиною мають наступний запис в комплексній формі:

$$f_0(z) = \frac{1}{3}z, \; f_1(z) = \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}z + \frac{1}{3}, \; f_2(z) = \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}, \; f_3(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}. \tag{1.6}$$

Якщо на сторонах правильного трикутника побудувати (в зовнішній бік) криві Коха, то одержимо замкнену криву – сніжинку Коха.

У роботі [27] було запропоноване певне альтернативне задання сніжинки Коха, проте не було отримано явних формул, які можна було б вважати аналітичним заданням. Більш ефективним є підхід запропонований в роботі [43]. В цій роботі було запропоновано аналітичне задання множини, яка містить сніжинку Коха, при цьому було використано шестіркову систему числення для кодування точок множини, які при цьому визначались як суми певних абсолютно збіжних рядів з комплексними членами.

Геометрія числових рядів бурхливо розвивається в останні роки, в першу чергу це стосується рядів з додатними дійсними членами (Т. О. Банах [66], М. В. Працьовитий [42, 48], О. М. Барановський [3], Н. М. Василенко [5], Я. В. Гончаренко [8], Н. О. Корсунь [18], І. О. Савченко [50], Г. М. Торбін

[51], Р. Джонс [85], М. Купер [73], М. Моран [93], Т. Шалат [100], Е. Шимонік [66], Ю. Перес [99], Б. Солом'як [101] та ін.) Переважно ці дослідження стосуються певних класів рядів. Наведемо деякі з важливих загальних результатів.

Теорема 1.4. *[100] Нехай $dim(S(c)) = 0$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує нескінченна кількість натуральних чисел n таких, що $c_{n+1} < \varepsilon c_n$.*

Теорема 1.5. *[100] Нехай $dim(S(c)) = 1$. Тоді для кожного $q \in (0, \frac{1}{2})$, існує нескінченна кількість натуральних чисел n таких, що $c_{n+1} > qc_n$.*

Теорема 1.6. *[44] Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нерівність $a_n \geqslant r_n$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум $S(c)$ дорівнює*

$$dim(S(c)) = \left[\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_2 \left(\frac{c_k}{r_k} + 1 \right) \right) \right]^{-1}.$$

У роботах [68], [102], [104] фактично проводилось дослідження властивостей множини неповних сум абсолютно збіжного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ для часткового випадку: $c_k = \lambda^k,\ \lambda \in \mathbb{C},\ 0 < |\lambda| < 1$. У цьому випадку множина S є атрактором системи ітерованих функцій: $\{\lambda z, \lambda z + \lambda\}$. Оскільки відображення $f_0(z) = \lambda z$ та $f_1(z) = \lambda z + \lambda$ задають перетворення подібності комплексної площини, то множина $S(c)$ в цьому випадку є самоподібною, що і використовувалось авторами вказаних вище робіт. Зокрема, досліджувалась множина M_λ, яка складається з таких λ, що $S(c)$ є зв'язною. Навіть для такого часткового випадку (геометричного ряду) описано лише деякі підмножини M_λ.

Висновки до розділу 1

Цей розділ має вступний характер. У ньому наведено означення відомих ключових понять:

– міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа-Безиковича;

– ентропійної розмірності;

– інваріантної множини, самоподібної множини;

– множини неповних сум числового ряду.

Сформульовано необхідні факти, які будуть використовуватись у наступних розділах, а також проведено огляд літератури з тематики дослідження.

Цей розділ не містить результатів, які виносяться на захист.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІТИЧНЕ ЗАДАННЯ СНІЖИНКИ КОХА ТА ЇЇ МОДИФІКАЦІЙ

У цьому розділі розв'язується задача аналітичного задання класичної фрактальної кривої — сніжинки Коха. Отримано явний вираз параметричного рівняння даної кривої. При цьому було використано систему числення з основою 4 та цифрами, які набувають значень з симетричного надлишкового алфавіту $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. На основі знайденого аналітичного задання сніжинки Коха, отримано явний вираз гомеоморфізма між даною кривою та одиничним колом, а також побудовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих.

2.1. Четвірково-п'ятіркова система числення з симетричним алфавітом, прагматичне зображення дійсних чисел

Нехай $L \equiv A \times A \times \cdots \times A \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту A, $D_0 \equiv [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.

Теорема 2.1. *Для будь-якого* $x \in D_0$ *існує послідовність* $(\alpha_k) \in L$ *така, що*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{4^k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \tag{2.1}$$

Доведення. У роботі [10] доведено, що для будь-якого $u \in \left[0; \dfrac{4}{3}\right]$ існує послідовність (a_n) така, що $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ і

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}.$$

Тоді для числа x, яке належить відрізку D_0, виконується рівність

$$x = -\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - 2}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^k},$$

де $(\alpha_n) \in L$, що й вимагалось довести. □

Представлення числа x рядом (2.1) називатимемо *циліндричним* Δ-*представленням*, а його скорочений запис $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – Δ-*зображенням.* При цьому домовимось далі писати $\bar{2}$ замість -2, $\bar{1}$ – замість -1.

Означення 2.1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$– заданий набір елементів алфавіту A. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, що відповідає Δ-зображенню чисел $x \in D_0$, називається множина

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{4^k},\ \alpha_k = c_k,\ k = \overline{1,m},\ \alpha_{m+j} \in A \right\}. \tag{2.2}$$

Циліндри мають властивості:

1. $\Delta_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=-2}^{2} \Delta_{c_1\ldots c_m i}$;
2. $\inf \Delta_{c_1\ldots c_m i} < \inf \Delta_{c_1\ldots c_m [i+1]}$;
3. циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями $a - \dfrac{2}{3\cdot 4^m}$ і $a + \dfrac{2}{3\cdot 4^m}$, де $a = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{c_k}{4^k}$;
4. $|\Delta_{c_1\ldots c_m}| = \dfrac{1}{3\cdot 4^{m-1}}$;
5. $\dfrac{|\Delta_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_m}|} = \dfrac{1}{4}$;
6. $\Delta_{c_1\ldots c_m i} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m [i+1]} = \Delta_{c_1\ldots c_m i [2]} = \Delta_{c_1\ldots c_m [i+1][-2]}, i = -2, -1, 0, 1;$
7. $\Delta_{c_1\ldots c_m i} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m [i+2]} = \varnothing,\ i = -2, -1, 0.$

Лема 2.1. *Взаємозаміна пар цифр*

$$\bar{2}2 \ \textit{на}\ \bar{1}\bar{2},\ \ \bar{1}2 \ \textit{на}\ 0\bar{2},\ \ 02 \ \textit{на}\ 1\bar{2},\ \ 12 \ \textit{на}\ 2\bar{2}$$

у Δ-зображенні числа не змінює його.

Доведення. Дане твердження є наслідком рівностей:

$$\frac{-2}{4^k} + \frac{2}{4^{k+1}} = \frac{-1}{4^k} + \frac{-2}{4^{k+1}}, \quad \frac{-1}{4^k} + \frac{2}{4^{k+1}} = \frac{0}{4^k} + \frac{-2}{4^{k+1}},$$

$$\frac{0}{4^k} + \frac{2}{4^{k+1}} = \frac{1}{4^k} + \frac{-2}{4^{k+1}}, \quad \frac{1}{4^k} + \frac{2}{4^{k+1}} = \frac{2}{4^k} + \frac{-2}{4^{k+1}}.$$

□

Наслідок 2.1. *Циліндри* $\Delta_{c_1 \ldots c_m}$ *і* $\Delta_{a_1 \ldots a_m}$ *співпадають тоді і тільки тоді, коли набір* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *може бути отриманий з набору* $(c_1, \ldots, c_m)$ *ланцюжком замін пар за правилами з леми 2.1.*

Означення 2.2. Число $x \in D_0$ називається Δ-раціональним, якщо воно має Δ-зображення з періодом $(\bar{2})$ або (2); числа відрізка D_0, які не є Δ-раціональними, називаються Δ-ірраціональними.

Лема 2.2. *Δ-раціональні числа, що мають Δ-зображення з періодом* $(\bar{2})$*, мають зображення і з періодом* (1)*, а ті, що зображаються з періодом* (2)*, мають зображення і з періодом* $(\bar{1})$*.*

Доведення. Нехай $x = \Delta_{c_1 \ldots c_m (2)}$, де $c_m \neq 2$. Тоді згідно з попередньою лемою

$$x = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (2)} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m + 1] \bar{2} (2)} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m + 1] \bar{1} \bar{2} (2)} =$$
$$= \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m + 1] \bar{1} \bar{1} \bar{2} (2)} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m + 1] \bar{1} \ldots \bar{1} \bar{2} (2)} = \cdots = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m + 1] (\bar{1})}.$$

Аналогічно, якщо $x = \Delta_{c_1 \ldots c_m (\bar{2})}$, де $c_m \neq \bar{2}$, то

$$x = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (\bar{2})} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] 2 (\bar{2})} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] 1 2 (\bar{2})} =$$
$$= \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] 1 1 2 (\bar{2})} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] 1 \ldots 1 2 (\bar{2})} = \cdots = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] (1)}.$$

□

Лема 2.3. *Число* $x \in D_0$ *має різних Δ-зображень*

1. *скінченну множину, якщо одне з його зображень має період* (0)*,*
2. *зліченну множину, якщо одне з його зображень має простий період* (a)*, де* $a \in \{\bar{2}, \bar{1}, 1, 2\}$*.*

Якщо ж у Δ-зображенні числа $x \in D_0$ *міститься нескінченне число пар послідовних цифр з набору* $\{\bar{2}2, \bar{1}2, 02, 12, \bar{1}\bar{2}, 0\bar{2}, 1\bar{2}, 2\bar{2}\}$*, то воно має континуальну множину різних Δ-зображень.*

Доведення. Число $x = 0 = \Delta_{(0)}$ має єдине Δ-зображення, оскільки воно належить єдиному циліндру 1-го рангу, а саме: Δ_0. І взагалі, належить єдиному відрізку n-го рангу ($\forall n \in \mathbb{N}$): $\Delta_{\underbrace{0\ldots0}_{n}}$.

Нехай тепер $x = \Delta_{c_1\ldots c_n(0)}$, де $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Тоді x може мати декілька (але тільки скінченне число) Δ-зображень:

$$x = \Delta_{c_1\ldots c_n(0)} = \Delta_{a_1\ldots a_n(0)} = \cdots = \Delta_{b_1\ldots b_n(0)},$$

де набори $(a_1, \ldots, a_n)$,..., $(b_1, \ldots, b_n)$ одержуються з $(c_1, \ldots, c_n)$ замінами пар послідовних цифр згідно з лемою 2.1.

Розглянемо випадок, коли x має період (a), де $a \in \{\bar{2}, \bar{1}, 1, 2\}$. Нехай, наприклад, $x = \Delta_{c_1\ldots c_m(\bar{2})}$, причому $c_m \neq \bar{2}$. Тоді $c_m \in \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$.

Якщо $c_m = \bar{1}$, то згідно з лемою 2.1

$$x = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}\bar{1}(\bar{2})} = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}\bar{2}2(\bar{2})} = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}\bar{2}12(\bar{2})} = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}\bar{2}112(\bar{2})} =$$

$$= \cdots = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}\bar{2}1\ldots12(\bar{2})} = \cdots = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}\bar{2}(1)}.$$

Отже, число x має принаймні зліченну множину різних Δ-зображень, причому одне з них з періодом (1).

Зауважимо, що число x не має Δ-зображення, яке з m-ою цифрою відмінною від $\bar{1}$ і $\bar{2}$, оскільки змінити m-у цифру x за рахунок попередніх цифр неможливо (попередня лема описує всі альтернативні заміни). Саме це дає підставу стверджувати зліченність зображень.

Аналогічними міркуваннями доводиться твердження для інших значень c_m та періодів.

Якщо у Δ-зображенні числа $x \in D_0$ міститься нескінченне число пар послідовних цифр з набору $\{\bar{2}2, \bar{1}2, 02, 12, \bar{1}\bar{2}, 0\bar{2}, 1\bar{2}, 2\bar{2}\}$, то згідно з лемою 1 у зображенні числа існує зліченна кількість місць з двома альтернативами. А така множина, як відомо, є континуальною. □

Суттєва надлишковість Δ-зображення чисел в окремих задачах є його недоліком. Це змушує "оптимізувати"систему, щоб домогтись її нульової надлишковості. Цього можна досягти різними способами. Один з них ґрунтується на використанні так званого канонічного зображення.

Означення 2.3. Δ-зображення $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ числа $x \in D_0$, кожна пара послідовних цифр якого відмінна від $\bar{1}\bar{2}, \bar{1}2, 1\bar{2}$ і 12, тобто

$$(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \notin \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, 2), (1, \bar{2}), (1, 2)\},$$

називатимемо *канонічним* Δ-зображенням або $\bar{\Delta}$-зображенням.

Зауваження 2.1. У канонічному Δ-зображенні числа після цифр $\bar{1}$ та 1 не може стояти цифра $\bar{2}$ або 2, а після цифр $\bar{2}$, 0, 2 може стояти будь-яка цифра алфавіту. Серія з цифр $\bar{1}$ (або 1) є нескінченною або переривається цифрою 1 ($\bar{1}$) або 0, після останньої може знову стояти будь-яка з цифр алфавіту.

Лема 2.4. *Існує злічена множина чисел, які мають два $\bar{\Delta}$-зображення:*

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m\bar{2}(2)} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m(\bar{1})}, \ \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 0(\bar{2})} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m\bar{1}(1)},$$

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 0(2)} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 1(\bar{1})}, \ \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 2(\bar{2})} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m(1)}.$$

Доведення. Дійсно, для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ і набору цифр $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ такого, що $(c_k, c_{k+1}) \notin \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, 2), (1, \bar{2}), (1, 2)\} \equiv B$, $(c_m, \bar{2}) \notin B$, $(c_m, 2) \notin B$, мають місце рівності:

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m\bar{2}(2)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{4^i} - \frac{1}{3 \cdot 4^m} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m(\bar{1})},$$

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 0(\bar{2})} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{4^i} - \frac{1}{6 \cdot 4^m} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m\bar{1}(1)},$$

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 0(2)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{4^i} + \frac{1}{6 \cdot 4^m} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 1(\bar{1})},$$

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m 2(\bar{2})} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{4^i} + \frac{1}{3 \cdot 4^m} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_m(1)}.$$

□

Означення 2.4. Число $x \in D_0$ називається $\bar{\Delta}$-*раціональним*, якщо воно має більше одного $\bar{\Delta}$-зображення і $\bar{\Delta}$-*ірраціональним*, якщо воно має єдине $\bar{\Delta}$-зображення.

Теорема 2.2. *Будь-яке число $x \in D_0$ має не більше двох канонічних $\bar{\Delta}$-зображень.*

Доведення. Нехай x – довільно вибране число з відрізка D_0. Згідно з теоремою 2.1 воно має Δ-зображення. Заміною пар послідовних цифр, згідно з попередньою лемою, можна досягти, що Δ-зображення числа x не міститиме жодної з пар послідовних цифр, що співпадають з однією з $\bar{1}\bar{2}, \bar{1}2, 1\bar{2}$, 12.

Покажемо, що циліндри $\bar{\Delta}$-зображення не перекриваються. Справді, для $\bar{\Delta}$-циліндрів 1-го рангу маємо

$$\max \bar{\Delta}_{\bar{2}} = \Delta_{\bar{2}(2)} = -\frac{1}{3} = \Delta_{(\bar{1})} = \min \bar{\Delta}_{\bar{1}},$$

$$\max \bar{\Delta}_{\bar{1}} = \Delta_{\bar{1}(1)} = -\frac{1}{6} = \Delta_{0(2)} = \min \bar{\Delta}_{0},$$

$$\max \bar{\Delta}_{0} = \Delta_{0(2)} = \frac{1}{6} = \Delta_{1(\bar{1})} = \min \bar{\Delta}_{1},$$

$$\max \bar{\Delta}_{1} = \Delta_{(1)} = \frac{1}{3} = \Delta_{2(\bar{2})} = \min \bar{\Delta}_{2}.$$

Розглянемо тепер циліндри 2-го рангу.

Якщо $i \in \{-2, 0, 2\}$, то $\bar{\Delta}_i = \bar{\Delta}_{i\bar{2}} \cup \bar{\Delta}_{i\bar{1}} \cup \bar{\Delta}_{i0} \cup \bar{\Delta}_{i1} \cup \bar{\Delta}_{i2}$, причому

$$\max \bar{\Delta}_{i\bar{2}} = \Delta_{i\bar{2}(2)} = \frac{3i-1}{12} = \Delta_{i(\bar{1})} = \min \bar{\Delta}_{i\bar{1}},$$

$$\max \bar{\Delta}_{i\bar{1}} = \Delta_{i\bar{1}(1)} = \frac{6i-1}{24} = \Delta_{i0(\bar{2})} = \min \bar{\Delta}_{i0},$$

$$\max \bar{\Delta}_{i0} = \Delta_{i0(2)} = \frac{6i+1}{24} = \Delta_{i1(\bar{1})} = \min \bar{\Delta}_{i1},$$

$$\max \bar{\Delta}_{i1} = \Delta_{i(1)} = \frac{3i+1}{12} = \Delta_{i2(\bar{2})} = \min \bar{\Delta}_{i2}.$$

Якщо $j \in \{-1, 1\}$, то $\bar{\Delta}_j = \bar{\Delta}_{j\bar{1}} \cup \bar{\Delta}_{j0} \cup \bar{\Delta}_{j1}$, де $\max \bar{\Delta}_{j\bar{1}} = \min \bar{\Delta}_{j0}$, $\max \bar{\Delta}_{j0} = \min \bar{\Delta}_{j1}$.

Аналогічно, для циліндрів m-го рангу отримаємо наступне.

Якщо $i \in \{-2, 0, 2\}$, то

$$\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i} = \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i\bar{2}} \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i\bar{1}} \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i0} \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i1} \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i2},$$

причому

$$\max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i\bar{2}} = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i\bar{1}}, \ \max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i\bar{1}} = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i0},$$

$$\max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i0} = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i1}, \ \max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i1} = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i2}.$$

Якщо $j \in \{-1, 1\}$, то $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} j} = \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} j\bar{1}} \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} j0} \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} j1}$, причому

$$\max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i\bar{1}} = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i0}, \ \max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i0} = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{m-1} i1}.$$

Оскільки кожна точка відрізка D_0 належить не більше ніж двом циліндрам кожного рангу, то більше двох зображень вона мати не може. Теорему доведено. □

Альтернативою канонічному зображенню у вказаному аспекті є так зване *прагматичне* Δ-зображення, яке далі є основним у дослідженні.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}_0$ позначимо

$$B_k = \{(-2, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}, -2), (-2, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}, -1), (2, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}, 1), (2, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}, 2)\}.$$

Теорема 2.3. *Будь-яке число* $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \equiv I_0$ *може бути представлене у вигляді*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta^{\Pi}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}, \tag{2.3}$$

де послідовність (α_n) *задовольняє умови: для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

1. $\alpha_n \in A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$*;*

2. $(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k+1}) \notin B_k \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_0)$.

Доведення. Для доведення даного твердження досить показати, що множина E всіх чисел вигляду (2.3) з обмеженнями 1–2 на вживання цифр алфавіту A співпадає з відрізком I_0.

Очевидно, що

$$\sup E = \max E = \Delta_{2(0)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \inf E = \min E = \Delta_{\bar{2}(0)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $E \subset I_0$. Тепер покажемо, що $I_0 \subset E$.

Означимо множини (циліндри першого рангу) рівностями

$$\tilde{\Delta}_{\bar{2}} \equiv \Delta_{\bar{2}} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[(\Delta_{\bar{2}\underbrace{0\ldots0}_{k}\bar{2}} \cup \Delta_{\bar{2}\underbrace{0\ldots0}_{k}\bar{1}}) \cup (\Delta_{2\underbrace{0\ldots0}_{k}1} \cup \Delta_{2\underbrace{0\ldots0}_{k}2}) \right],$$

$$\tilde{\Delta}_{2} \equiv \Delta_{2} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[(\Delta_{2\underbrace{0\ldots0}_{k}\bar{2}} \cup \Delta_{2\underbrace{0\ldots0}_{k}\bar{1}}) \cup (\Delta_{2\underbrace{0\ldots0}_{k}1} \cup \Delta_{2\underbrace{0\ldots0}_{k}2}) \right],$$

$$\tilde{\Delta}_{j} \equiv \Delta_{j} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[(\Delta_{j\bar{2}\underbrace{0\ldots0}_{k}\bar{2}} \cup \Delta_{j\bar{2}\underbrace{0\ldots0}_{k}\bar{1}}) \cup (\Delta_{j2\underbrace{0\ldots0}_{k}1}) \cup \Delta_{j2\underbrace{0\ldots0}_{k}2}) \right],$$

$j = \bar{1}, 0, 1$.

Легко бачити, що

$$\inf \tilde{\Delta}_{\bar{2}} = \min \tilde{\Delta}_{\bar{2}} = \Delta_{\bar{2}(0)} = -\frac{1}{2}, \quad \sup \tilde{\Delta}_{\bar{2}} = \max \tilde{\Delta}_{\bar{2}} = \Delta_{\bar{2}2(0)} = -\frac{3}{8};$$

$$\inf \tilde{\Delta}_{2} = \min \tilde{\Delta}_{2} = \Delta_{2\bar{2}(0)} = \frac{3}{8}, \quad \sup \tilde{\Delta}_{2} = \max \tilde{\Delta}_{2} = \Delta_{2(0)} = \frac{1}{2};$$

для $j = \bar{1}, 0, 1$ маємо

$$\inf \tilde{\Delta}_{j} = \min \tilde{\Delta}_{j} = \Delta_{j\bar{2}(0)} = \frac{2j-1}{8}, \quad \sup \tilde{\Delta}_{j} = \max \tilde{\Delta}_{j} = \Delta_{j2(0)} = \frac{2j+1}{8}.$$

Більше того,

$$\tilde{\Delta}_{\bar{2}} \cap \tilde{\Delta}_{\bar{1}} = \Delta_{\bar{2}2(0)} = \Delta_{\bar{1}\bar{2}(0)} = -\frac{3}{8}, \ \tilde{\Delta}_{\bar{1}} \cap \tilde{\Delta}_{0} = \Delta_{\bar{1}2(0)} = \Delta_{0\bar{2}(0)} = -\frac{1}{8},$$

$$\tilde{\Delta}_0 \cap \tilde{\Delta}_1 = \Delta_{02(2)} = \Delta_{1\bar{2}(0)} = \frac{1}{8},\ \tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}_2 = \Delta_{12(0)} = \Delta_{2\bar{2}(0)} = \frac{3}{8}.$$

З цього бачимо, що "сусідні"циліндри 1-го рангу не перекриваються, але мають спільний кінець, тобто існують числа з інтервалу $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, які мають принаймні два Δ-зображення з обмеженнями 1–2, причому обидва з періодом (0).

Зауважимо, що для діаметрів циліндрів 1-го рангу мають місце рівності:

$$d(\tilde{\Delta}_{\bar{2}}) = d(\tilde{\Delta}_2) = \frac{1}{2 \cdot 4},\ d(\tilde{\Delta}_{\bar{1}}) = d(\tilde{\Delta}_0) = d(\tilde{\Delta}_1) = \frac{1}{4}.$$

Аналогічно означуються циліндри n-го рангу (за індукцією).

Якщо $(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)$ – заданий набір, який задовольняє умови 1–2, то означимо циліндри рівностями

$$\tilde{\Delta}_{c_1 \ldots c_{n-1} \bar{2}} \equiv \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} \bar{2}} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[(\Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} \bar{2} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \bar{2}} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} \bar{2} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \bar{1}}) \cup \right.$$
$$\left. \cup (\Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 2 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} 2} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 2 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} 1}) \right],$$

$$\tilde{\Delta}_{c_1 \ldots c_{n-1} 2} \equiv \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 2} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[(\Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} \bar{2} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \bar{2}} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} \bar{2} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \bar{1}}) \cup \right.$$
$$\left. \cup (\Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 2 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} 1} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} 2 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} 2}) \right],$$

$$\tilde{\Delta}_{c_1 \ldots c_{n-1} j} \equiv \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} j} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[(\Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} j \bar{2} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \bar{2}} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} j \bar{2} \underbrace{0 \ldots 0}_{k} \bar{1}}) \cup \right.$$
$$\left. \cup (\Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} j 2 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} 1} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} j 2 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} 2}) \right],$$

$j = \bar{1}, 0, 1.$

При цьому

$$\inf \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}} = \min \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} - \frac{2}{4^n},$$

$$\sup \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}} = \max \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}2(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} - \frac{3}{2\cdot 4^n},$$

$$\inf \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}2} = \min \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}2} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}2\bar{2}(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} + \frac{3}{2\cdot 4^n},$$

$$\sup \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}2} = \max \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}2} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}2(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} + \frac{2}{4^n},$$

для $j = \bar{1}, 0, 1$ маємо

$$\inf \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}j} = \min \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}j} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}j\bar{2}(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} + \frac{2j-1}{2\cdot 4^n},$$

$$\sup \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}j} = \max \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}j} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}j2(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} + \frac{2j+1}{2\cdot 4^n}.$$

Крім того,

$$\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}} \cap \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{1}} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{2}2(0)} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{1}\bar{2}(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} - \frac{3}{2\cdot 4^n},$$

$$\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{1}} \cap \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}0} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}\bar{1}2(0)} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0\bar{2}(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} - \frac{1}{2\cdot 4^n},$$

$$\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cap \tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}1} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}02(0)} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1\bar{2}(0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{4^j} + \frac{1}{2\cdot 4^n},$$

$$\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}1}\cap\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_{n-1}2}=\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}12(0)}=\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}2\bar{2}(0)}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{c_j}{4^j}+\frac{3}{2\cdot 4^n}.$$

З даних рівностей випливає, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ виконується рівність $\bigcup\limits_{(c_1,\ldots,c_n)\in\Omega_n}\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_n}=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, де Ω_n – простір всіх можливих наборів $(i_1,\ldots,i_n)\in A^n$ з обмеженнями 1-2 на послідовні елементи.

Тоді $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{(c_1,\ldots,c_n)\in\Omega_n}\tilde{\Delta}_{c_1\ldots c_n}=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Що і треба було довести.

□

Означення 2.5. Δ-зображення числа $x\in I_0$ з обмеженнями 1-2 називатимемо *прагматичним* або П-зображенням.

Існують числа (їх зліченна множина), які мають два П-зображення. Це числа виду

$$x=\Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2(0)}=\Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]\bar{2}(0)}. \tag{2.4}$$

Справді,

$$\Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2(0)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{4^j}+\frac{2}{4^{n+1}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{4^j}+\frac{1}{4^n}-\frac{2}{4^{n+1}}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\alpha_j}{4^j}+\frac{\alpha_n+1}{4^n}-\frac{2}{4^{n+1}}\equiv\Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]\bar{2}(0)}.$$

Такі числа називатимемо П-раціональними. Всі інші числа будуть мати єдине П-зображення, їх будемо називати П-ірраціональними.

Зауваження 2.2. Очевидно, що будь-яке дійсне число t можна єдиним чином подати у вигляді $t=\alpha_0(t)+r(t)$, де $\alpha_0(t)$ – ціле, $r(t)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Нехай $r(t)=\Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_k(t)\ldots}$, тоді

$$t=\alpha_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{4^k}. \tag{2.5}$$

Легко бачити, що $\alpha_0(t)=[t+\frac{1}{2}]$, де $[t+\frac{1}{2}]$ – ціла частина числа $t+\frac{1}{2}$. Таким чином, будь-яке дійсне число можна подати у вигляді (2.5), де $\alpha_0(t)=[t+\frac{1}{2}]$, а $\alpha_k(t)$ – k-ий символ П-зображення числа $t-\alpha_0(t)$.

Означення 2.6. Будемо казати, що циліндр $\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_n}$ належить до типу T, якщо виконується одна з наступних умов: 1) $c_n \in \{-2, 2\}$, 2) існує такий номер $m < n$, що $c_m \in \{-2, 2\}$ і $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$. У протилежному випадку будемо казати, що циліндр належить до типу P.

Позначимо через T_k та P_k кількість усіх циліндрів k-го рангу, що належать до типів T та P відповідно.

Лема 2.5. *Для будь-якого натурального k виконуються рівності*

$$P_k = \frac{2 \cdot 4^k + 1}{3}, \quad T_k = \frac{2 \cdot 4^k - 2}{3}. \tag{2.6}$$

Доведення. Нехай $\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k}$ – довільний циліндр k-го рангу, що належить до типу T. Тоді, згідно з означенням, для набору $(c_1, \ldots, c_k)$ виконується одна з чотирьох умов: 1) $c_n = 2$; 2) існує такий номер $m < n$, що $c_m = 2$ і $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$; 3) $c_n = -2$; 4) існує такий номер $m < n$, що $c_m = -2$ і $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$. У випадку виконання умови 1) або 2) циліндр $\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k}$ є об'єднанням трьох циліндрів $k+1$-го рангу:

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k\bar{2}} \cup \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k\bar{1}} \cup \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k 0}. \tag{2.7}$$

Якщо виконується одна з умов 3) або 4), то

$$\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k} = \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k 0} \cup \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k 1} \cup \bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k 2}. \tag{2.8}$$

Як бачимо з (2.7), (2.8), у будь-якому випадку циліндр $\bar{\Delta}_{c_1\ldots c_k}$, що належить до типу T, є об'єднанням трьох циліндрів $(k+1)$-го рангу, два з яких належать до типу T, а один – до типу P.

Нехай $\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k}$ – довільний циліндр k-го рангу, що належить до типу P. Тоді

$$\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k} = \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k\bar{2}} \cup \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k\bar{1}} \cup \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k 0} \cup \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k 1} \cup \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_k 2}. \tag{2.9}$$

Отже, довільний циліндр k-го рангу, що належить до типу P, є об'єднанням п'яти циліндрів $(k+1)$-го рангу, два з яких належать до типу T, а три – до типу P.

Таким чином, послідовності (T_k), (P_k) задовольняють наступній системі лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} T_{k+1} = & 2P_k + 2T_k, \\ P_{k+1} = & 3P_k + T_k. \end{cases} \tag{2.10}$$

Помножимо друге рівняння системи (2.10) на 2 та віднімемо від першого рівняння. Отримаємо

$$T_{k+1} - 2P_{k+1} = -4P_k.$$

Звідси

$$T_{k+1} = 2P_{k+1} - 4P_k. \tag{2.11}$$

Використовуючи друге рівняння системи (2.10) та враховуючи (2.11), виразимо P_{k+2}:

$$P_{k+2} = 3P_{k+1} + T_{k+1} = 5P_{k+1} - 4P_k,$$

тобто

$$P_{k+2} = 5P_{k+1} - 4P_k. \tag{2.12}$$

Отже, послідовність (P_k) є розв'язком лінійного однорідного різницевого рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами та початковими умовами $P_1 = 3$, $P_2 = 11$. Як відомо [29], загальний розв'язок рівняння (2.12) має вигляд $P_k = C_1\lambda_1^{k-1} + C_2\lambda_2^{k-1}$, де C_1, C_2 – довільні сталі, а λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння $\lambda^2 = 5\lambda - 4$. Оскільки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, то $P_k = C_1 + C_2 4^{k-1}$.

Знайдемо тепер частинний розв'язок рівняння (2.12) при початкових умовах $P_1 = 3$, $P_2 = 11$. Для знаходження коефіцієнтів C_1, C_2 маємо систему

$$\begin{cases} P_1 = & 3 = & C_1 + C_2, \\ P_2 = & 11 = & C_1 + 4C_2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Розв'язуючи дану систему, отримуємо: $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{8}{3}$. Підставляючи ці значення в загальний розв'язок рівняння (2.12), одержуємо шуканий частинний розв'язок:

$$P_k = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \cdot 4^{k-1} = \frac{2 \cdot 4^k + 1}{3}. \tag{2.14}$$

Аналогічними міркуваннями можна отримати явний вираз для T_k, проте простіше скористатись формулою (2.14) та другим рівнянням системи (2.10):

$$T_k = P_{k+1} - 3P_k = \frac{2 \cdot 4^{k+1} + 1}{3} - 2 \cdot 4^k - 1 = \frac{2 \cdot 4^k - 2}{3}. \tag{2.15}$$

Лему доведено. □

Наслідок 2.2. *Для будь-якого натурального k кількість всіх циліндрів k-го рангу дорівнює*

$$S_k = T_k + P_k = \frac{4^{k+1} - 1}{3}. \tag{2.16}$$

2.2. Функції $f(t)$, $F(t)$ та їх властивості

Розглянемо функцію, визначену на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ рівністю

$$f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)}, \tag{2.17}$$

де $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Обгрунтуємо коректність означення даної функції, а саме: покажемо, що значення функції $f(t)$ співпадають для двох різних зображень довільного П-раціонального числа. Нехай t_0 – довільне П-раціональне число, яке має наступні П-зображення:

$$t_0 = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n+1)\bar{2}(0)} = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n 2(0)}.$$

Тоді

$$f(\Delta^{\Pi}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n+1)\bar{2}(0)}) - f(\Delta^{\Pi}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n 2(0)}) = \sum_{k=2}^{n} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m} +$$

$$+3^{-(n+1)}e^{\frac{i\pi}{3}(1+\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m)} + 3^{-(n+2)}e^{\frac{i\pi}{3}(-1+\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m)} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} 3^{-p} -$$

$$-\left(\sum_{k=2}^{n} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m} + 3^{-(n+1)}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m} + 3^{-(n+2)}e^{\frac{i\pi}{3}(2+\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m)} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} 3^{-p}\right) =$$

$$= 3^{-(n+1)}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}} - -1 - \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = 3^{-(n+1)}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m} \cdot 0 = 0.$$

Теорема 2.4. *Функція $f(t)$ неперервна на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.*

Доведення. Доведемо неперервність функції $f(t)$ в П-ірраціональній точці $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Якщо $t' \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ і $t \neq t'$, то існує таке s, що $\alpha_s(t) \neq \alpha_s(t')$, але $\alpha_j(t) = \alpha_j(t')$ при $j < s$. Причому умова $t' \to t$ рівносильна тому, що $s \to \infty$.

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &= \left|\sum_{k=s}^{\infty} 3^{-k}\big(e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} - e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t')}\big)\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=s}^{\infty} 3^{-k}\left|e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} - e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t')}\right| \leqslant 2\sum_{k=s}^{\infty} 3^{-k} = 3^{-(s-1)}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Звідси випливає, що $|f(t) - f(t')| \to 0$ при $t' \to t$ $(s \to \infty)$. Отже, згідно з означенням, функція $f(t)$ неперервна в точці t.

Нехай тепер t – довільна П-раціональна точка відрізка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Причому

$$t = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)\alpha_k(t)2(0)} = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)[\alpha_k(t)+1]\bar{2}(0)}. \tag{2.19}$$

Знайдемо лівосторонню границю функції $f(t)$ в точці t. У цьому випадку використовуємо наступне П-зображення: $t = t_- = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)\alpha_k(t)2(0)}$. Тоді, провівши такі самі міркування, як і у випадку П-ірраціональної точки, отримаємо

$$\lim_{t' \to t-0} z_0(t') = f(t_-) = f(t).$$

Тобто, $f(t)$ є неперервною зліва в точці t.

Аналогічно, використовуючи зображення

$$t = t_+ = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)[\alpha_k(t)+1]\bar{2}(0)},$$

доводиться, що $f(t)$ є неперервною справа в точці t. Отже, $f(t)$ є неперервною в точці t. Теорему доведено. □

Наслідок 2.3. *Множина значень функції* $f(t)$, $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *є компактною зв'язною множиною.*

Лема 2.6. *Для довільного циліндра n-го рангу* $\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}$ *множина* $f(\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n})$ *міститься у крузі* $\omega_{b_1\ldots b_n}$ *з центром у точці*

$$C_{b_1\ldots b_n} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{n+1} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1} b_m}$$

та радіусом $R_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{-(n+1)}$.

Доведення. Нехай $t = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_k(t)\ldots}$ – довільна точка циліндра $\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}$. Тоді $\alpha_j(t) = b_j$ для всіх $j = \overline{1,n}$. Маємо

$$\begin{gathered} |f(t) - C_{b_1\ldots b_n}| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} - \sum_{k=2}^{n+1} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1} b_m} \right| = \\ = \left| \sum_{k=n+2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} \right| \leqslant \sum_{k=n+2}^{\infty} 3^{-k} \left| e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} \right| = \sum_{k=n+2}^{\infty} 3^{-k} = \\ = \frac{3}{2} \cdot 3^{-(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-(n+1)}. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Отже, $f(t) \in \omega_{b_1\ldots b_n}$. З довільності вибору точки $t \in \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}$ випливає включення $f(\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}) \subset \omega_{b_1\ldots b_n}$. Лему доведено. □

Лема 2.7. *Функція* $f(t)$ *взаємно однозначно відображає відрізок* I_0 *на множину* $P_0 = f(I_0)$.

Доведення. Очевидно, що $f(t)$ є сюр'єкцією, тому залишається показати, що $f(t)$ є ін'єкцією. Розглянемо два різних числа $t_1, t_2 \in I_0$. Покажемо, що $f(t_1) \neq f(t_2)$. Нехай числа t_1, t_2 мають наступні П-зображення:

$t_1 = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$, $t_2 = \Delta^{\Pi}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}$. Оскільки $t_1 \neq t_2$, то існує таке m, що $\alpha_m \neq \beta_m$, $\alpha_j = \beta_j$ при $j < m$. Таким чином, числа t_1, t_2 належать двом різним циліндрам m-го рангу $\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ та $\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m}$ відповідно. За лемою 2.12 множини $f(\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m})$ та $f(\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m})$ містяться відповідно у кругах $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ та $\omega_{\beta_1\ldots\beta_m}$ з центрами у точках $C_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \frac{1}{3}+\sum\limits_{k=2}^{m+1} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\alpha_p}$, $C_{\beta_1\ldots\beta_m} = \frac{1}{3}+\sum\limits_{k=2}^{m+1} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\beta_p}$ та радіусом $R_m = \frac{1}{2}\cdot 3^{-(m+1)}$.

Якщо $|\alpha_m - \beta_m| \geqslant 2$, то круги $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ та $\omega_{\beta_1\ldots\beta_m}$ не мають спільних точок, оскільки

$$|C_{\alpha_1\ldots\alpha_m} - C_{\beta_1\ldots\beta_m}| = \left| 3^{-(m+1)} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p} - 3^{-(m+1)} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p} \right| =$$

$$= 3^{-(m+1)} \cdot \left| e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m-1}\alpha_p} \right| \cdot \left| e^{\frac{i\pi\alpha_m}{3}} - e^{\frac{i\pi\beta_m}{3}} \right| = 3^{-(m+1)}\sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi(\alpha_m - \beta_m)}{3}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{3}\cdot 3^{-(m+1)} > 3^{-(m+1)} = 2R_m.$$

Отже, точки $f(t_1)$, $f(t_2)$ належать двом різним кругам без спільних точок, тобто $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Якщо $|\alpha_m - \beta_m| = 1$, то круги $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ та $\omega_{\beta_1\ldots\beta_m}$ мають одну спільну точку, оскільки

$$|C_{\alpha_1\ldots\alpha_m} - C_{\beta_1\ldots\beta_m}| = 3^{-(m+1)}\sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi(\alpha_m - \beta_m)}{3}} = 3^{-(m+1)} = 2R_m.$$

Без втрати загальності можна вважати, що $\alpha_m - \beta_m = -1$ (це рівносильне тому, що $t_2 > t_1$). Розглянемо циліндри $(m+1)$-го рангу $\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ та $\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}$, які містять точки t_1 та t_2 відповідно. Множини $z_0(\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}})$ та $z_0(\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}})$ містяться у кругах $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ та $\omega_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}$ з центрами у точках $C_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}} = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=2}^{m+2} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\alpha_p}$, $C_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}} = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=2}^{m+2} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\beta_p}$ та радіусом $R_{m+1} = \frac{1}{2}\cdot 3^{-(m+2)}$. Оскільки $\beta_m = \alpha_m + 1$ і $\alpha_j = \beta_j$ при $j < m$, то $\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p = \sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p + 1$. Тоді відстань між центрами кругів $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ та

$\omega_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}$ дорівнює

$$\left|C_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}} - C_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{m+2} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\alpha_p} - \sum_{k=m+1}^{m+2} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\beta_p}\right| =$$
$$= 3^{-(m+1)} \cdot \left|e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p}\right| \cdot \left|1 + \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_{m+1}} - e^{\frac{i\pi}{3}} - \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}(1+\beta_{m+1})}\right| =$$
$$= 3^{-(m+1)} \cdot \left|e^{\frac{5\pi i}{3}} + \frac{1}{3}\left(e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_{m+1}} - e^{\frac{i\pi}{3}(1+\beta_{m+1})}\right)\right|. \tag{2.21}$$

Останній множник в правій частині рівності (2.21) залежить від α_{m+1}, β_{m+1}, позначимо його $K(\alpha_{m+1}, \beta_{m+1})$. Введемо позначення: $A^2 = \{(a,b) : a, b \in A\}$, $Q_0 = A^2 \setminus \{(2,-2)\}$. Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що

$$\min_{(i,j)\in Q_0} K(i,j) = K(1,-2) = K(2,-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2.22}$$

Таким чином, якщо $(\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}) \in Q_0$, то

$$\left|C_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}} - C_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}\right| \geqslant 3^{-(m+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \cdot 3^{-(m+2)} > 3^{-(m+2)} = 2R_{m+1}. \tag{2.23}$$

Отже, $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}} \cap \omega_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}} = \varnothing$. Звідси випливає, що $z_0(\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}) \cap z_0(\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}) = \varnothing$, тобто $z_0(t_1) \neq z_0(t_2)$.

Якщо $(\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}) = (2, -2)$, то

$$\left|C_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}} - C_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}\right| = 3^{-(m+1)} \cdot \frac{1}{3} = 3^{-(m+2)} = 2R_{m+1}. \tag{2.24}$$

Тобто круги $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ та $\omega_{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}}$ мають спільну точку. Покажемо, що і в цьому випадку існують циліндри, які містять точки t_1, t_2, а їх образи при відображенні $z_0(t)$ не перетинаються. Нехай q – найменше з таких чисел $j \in \mathbb{N}$, що $(\alpha_{m+1+j}, \beta_{m+1+j}) \neq (0,0)$. Такі числа існують, оскільки в протилежному випадку для всіх $k \geqslant m+2$ виконувалась би рівність $(\alpha_k, \beta_k) = (0,0)$. Звідси, враховуючи, що $\beta_m = \alpha_m + 1$, $\alpha_j = \beta_j$, $j = \overline{1,m}$, матимемо

$$t_1 = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1\ldots\alpha_m 2(0)} = \Delta^{\Pi}_{\beta_1\ldots\beta_m \bar{2}(0)} = t_2,$$

що суперечить припущенню про те, що числа t_1 і t_2 різні.

Розглянемо циліндри $\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m 20\ldots0\alpha_{m+q+1}}$, $\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m \bar{2}0\ldots0\beta_{m+q+1}}$. Згідно леми 2.12 їх образи $z_0(\bar{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m 20\ldots0\alpha_{m+q+1}})$, $z_0(\bar{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_m \bar{2}0\ldots0\beta_{m+q+1}})$ містяться у кругах $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m 20\ldots0\alpha_{m+q+1}}$, $\omega_{\beta_1\ldots\beta_m \bar{2}0\ldots0\beta_{m+q+1}}$ з центрами у точках

$$C_{\alpha_1\ldots\alpha_m 20\ldots0\alpha_{m+q+1}} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{m+1} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\alpha_p} + e^{\frac{i\pi}{3}(2+\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p)} \sum_{k=m+2}^{m+q+1} 3^{-k} +$$
$$+ 3^{-(m+q+2)} e^{\frac{i\pi}{3}(\alpha_{m+q+1}+2+\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p)} \equiv C',$$

$$C_{\beta_1\ldots\beta_m \bar{2}0\ldots0\beta_{m+q+1}} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{m+1} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\beta_p} + e^{\frac{i\pi}{3}(-2+\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p)} \sum_{k=m+2}^{m+q+1} 3^{-k} +$$
$$+ 3^{-(m+q+2)} e^{\frac{i\pi}{3}(\beta_{m+q+1}-2+\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p)} \equiv C''$$

та радіусами $R_{m+q+1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-(m+q+2)}$. Відстань між центрами цих кругів дорівнює

$$|C' - C''| = \Bigg| 3^{-(m+1)} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p} + e^{\frac{i\pi}{3}(-2+\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p)} \sum_{k=m+2}^{m+q+1} 3^{-k} +$$
$$+ 3^{-(m+q+2)} e^{\frac{i\pi}{3}(\beta_{m+q+1}-2+\sum\limits_{p=1}^{m}\beta_p)} - 3^{-(m+1)} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p} - e^{\frac{i\pi}{3}(2+\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p)} \sum_{k=m+2}^{m+q+1} 3^{-k} -$$
$$- 3^{-(m+q+2)} e^{\frac{i\pi}{3}(\alpha_{m+q+1}+2+\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p)} \Bigg| = 3^{-(m+1)} \cdot \Bigg| e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p} \Bigg| \cdot \Bigg| e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{-\frac{i\pi}{3}} \sum_{k=1}^{q} 3^{-k} +$$
$$+ 3^{-(q+1)} e^{\frac{i\pi}{3}(\beta_{m+q+1}-1)} - 1 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{k=1}^{q} 3^{-k} - 3^{-(q+1)} e^{\frac{i\pi}{3}(\alpha_{m+q+1}+2)} \Bigg| =$$
$$= 3^{-(m+1)} \Bigg| e^{\frac{2\pi i}{3}} - 2e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{k=1}^{q} 3^{-k} + 3^{-(q+1)} \left(e^{\frac{i\pi}{3}(\beta_{m+q+1}-1)} - e^{\frac{i\pi}{3}(\alpha_{m+q+1}+2)} \right) \Bigg| =$$
$$= 3^{-(m+1)} \left| e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{2\pi i}{3}} \left(3^{-q} - 1\right) + 3^{-(q+1)} \left(e^{\frac{i\pi}{3}(\beta_{m+q+1}-1)} - e^{\frac{i\pi}{3}(\alpha_{m+q+1}+2)} \right) \right| =$$
$$= 3^{-(m+q+2)} \cdot \left| 3 - e^{\frac{i\pi}{3}\beta_{m+q+1}} - e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_{m+q+1}} \right|.$$

Відмітимо, що в розглядуваному зараз випадку всі можливі значення набору $(\alpha_{m+q+1}, \beta_{m+q+1})$ належать множині

$$W = \{(0,1), (-1,1), (-2,1), (0,2), (-1,2), (-2,2), (-1,0), (-2,0)\}.$$

Розглянемо функцію $J(u,v) = \left|3 - e^{\frac{i\pi}{3}u} - e^{\frac{i\pi}{3}v}\right|$. Обчислюючи її значення на множині W, отримаємо, що $\min\limits_{(u,v)\in W} J(u,v) = J(-1,0) = J(0,1) = \sqrt{3}$. Тоді

$$\left|C_{\alpha_1\ldots\alpha_m 20\ldots0\alpha_{m+q+1}} - C_{\beta_1\ldots\beta_m\bar{2}0\ldots0\beta_{m+q+1}}\right| \geqslant 3^{-(m+q+2)}\cdot\sqrt{3} > 3^{-(m+q+2)} = 2R_{m+q+1}.$$

Таким чином, $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_m 20\ldots0\alpha_{m+q+1}} \cap \omega_{\beta_1\ldots\beta_m\bar{2}0\ldots0\beta_{m+q+1}} = \varnothing$. Звідки випливає, що і в цьому випадку $f(t_1) \neq f(t_2)$.

□

Лема 2.8. *Відображення* $f: I_0 \to P_0$ *є гомеоморфізмом.*

Доведення. Як відомо [1], взаємно однозначне та неперервне відображення компакта є гомеоморфізмом. Оскільки I_0 є компактом, то твердження випливає з теореми 2.9 та леми 2.7. □

Наслідок 2.4. *Множина* $P_0 = f(I_0)$ *є простою дугою.*

Розглянемо відрізок $I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$. Очевидно, що будь-яке число $t \in I$ можна подати у вигляді

На відрізку $I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$ означимо функцію $F(t)$ рівністю

$$F(t) = e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} f(t - \alpha_0(t)) = e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)}, \tag{2.25}$$

де $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}]$, а $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t - \alpha_0(t)$.

Теорема 2.5. *Функція* $F(t)$ *є неперервною на відрізку* I.

Доведення. Доведемо спочатку, що $F(t)$ неперервна на піввідрізку $I' = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$. Введемо позначення: $I'_j = \left[j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$, $j = \overline{0,5}$. Очевидно, що $I' = \bigcup\limits_{j=0}^{5} I'_j$, причому $I'_k \cap I'_m = \varnothing$ при $k \neq m$. Для будь-якого $t \in I'_j$ $(j \in$

$\{0,1,2,3,4,5\}$) виконується рівність $\alpha_0(t) = j$. Таким чином, на піввідрізку I'_j функція $h(t) = t - \alpha_0(t)$ співпадає з лінійною функцією $h_j(t) = t - j$. Функція $h_j(t)$ неперервно та взаємно однозначно відображає піввідрізок I'_j на піввідрізок $I'_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тому для всіх $t \in I'_j$ визначена складна функція $f(t - \alpha_0(t)) \equiv f(h_j(t)) = f(t - j)$, яка є неперервною на даному проміжку внаслідок неперервності функцій f та h_j. Отже, на проміжку I'_j маємо: $F(t) = e^{\frac{i\pi j}{3}} f(t-j)$. Таким чином, функція $F(t)$ є неперервною на кожному з проміжків I'_j ($j \in \{0,1,2,3,4,5\}$) як добуток сталої та неперервної функції.

Покажемо тепер, що $F(t)$ є неперервною в кінцях проміжків I'_j, а саме, в точках $t_j = j + \frac{1}{2}$, $j = \overline{0,4}$. Причому, враховуючи, що $F(t)$ є неперервною справа в даних точках, нам залишається довести, що вона є неперервною зліва в них. Тобто, треба довести, що для кожного $j \in \{0,1,2,3,4\}$ виконується рівність

$$\lim_{t \to t_j - 0} F(t) = F(t_j). \tag{2.26}$$

Оскільки $\alpha_0(t_j) = [t_j + \frac{1}{2}] = [j+1] = j+1$, $t_j - \alpha_0(t_j) = j + \frac{1}{2} - j - 1 = -\frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(t_j) &= e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t_j)} z_0(t_j - \alpha_0(t_j)) = e^{\frac{i\pi(j+1)}{3}} f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{i\pi(j+1)}{3}} f\left(\Delta^{\Pi}_{2(0)}\right) = \\ &= e^{\frac{i\pi(j+1)}{3}} \left(\frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = e^{\frac{i\pi(j+1)}{3}} \left(\frac{1}{3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot \frac{3^{-2}}{1 - \frac{1}{3}}\right) = \\ &= e^{\frac{i\pi j}{3}} \left(\frac{1}{3} e^{\frac{i\pi}{3}} + \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi i}{3}}\right) = e^{\frac{i\pi j}{3}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} i\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Обчислимо границю в лівій частині рівності (2.26). При цьому можна вважати, що t, прямуючи до t_j зліва, завжди належить I'_j. Тоді, враховуючи, що $\alpha_0(t) = j$ для всіх $t \in I'_j$, маємо

$$\lim_{t \to t_j - 0} F(t) = \lim_{t \to t_j - 0} e^{\frac{i\pi}{3}\alpha_0(t)} f(t - \alpha_0(t)) = \lim_{t \to t_j - 0} e^{\frac{i\pi j}{3}} f(t-j) = e^{\frac{i\pi j}{3}} \lim_{t \to t_j - 0} f(t-j). \tag{2.28}$$

Виконаємо в останній границі заміну $t' = t - j$. При цьому умова $t \to t_j - 0$ буде рівносильна умові $t' \to \frac{1}{2} - 0$. Враховуючи неперервність функції $f(t)$

на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, отримаємо

$$e^{\frac{i\pi j}{3}} \lim_{t\to t_j-0} f(t-j) = e^{\frac{i\pi j}{3}} \lim_{t'\to\frac{1}{2}-0} f(t') = e^{\frac{i\pi j}{3}} f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{i\pi j}{3}} f\left(\Delta^{\Pi}_{2(0)}\right) = \\ = e^{\frac{i\pi j}{3}} \left(\frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = e^{\frac{i\pi j}{3}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = e^{\frac{i\pi j}{3}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} i\right). \tag{2.29}$$

З (2.27), (2.28), (2.29) випливає (2.26). Отже, функція $F(t)$ є неперервною на піввідрізку $I' = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$. Якщо покласти $t_5 = 5\frac{1}{2}$ та провести всі обчислення в (2.27), (2.28), (2.29) при $j = 5$, то буде показано, що функція $F(t)$ є неперервною зліва в точці $t_5 = 5\frac{1}{2}$. Тобто $F(t)$ є неперервною на відрізку $I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$. Теорему доведено. □

Позначимо $J' = [0, 2)$, $J'_p = [\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2})$, $p \in P = \{0, 1, 2, 3\}$. Очевидно, що $J' = \bigcup\limits_{p=0}^{3} J'_p$. Розглянемо функції $\varphi_p(t) = 4t - 2p,\ p \in P$. Легко бачити, що $\varphi_p(J'_p) = J'$ для кожного $p \in P$.

Лема 2.9. *Для будь-якого $t \in J'_p,\ p \in P$ виконується рівність*

$$F(\varphi_p(t)) = \Phi_p(F(t)), \tag{2.30}$$

де $\Phi_0(z) = 3(z - \frac{1}{3})$, $\Phi_1(z) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}(z - \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}})$, $\Phi_2(z) = 3e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}})$, $\Phi_3(z) = 3(z - \frac{1}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}})$.

Доведення. Нехай $t \in J'_0 = [0, \frac{1}{2})$. Тоді t можна подати у вигляді $t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{4^k}$, де $\alpha_k(t)$ – k-ий символ П-зображення числа t. Маємо

$$\varphi_0(t) = 4t = \alpha_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k+1}(t)}{4^k}. \tag{2.31}$$

На розглядуваному проміжку функція $F(t)$ задається наступним виразом

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3} \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha_j(t)} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3} \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha_j(t)}. \tag{2.32}$$

Враховуючи (2.57), (2.32) маємо

$$\begin{aligned} F(\varphi_0(t)) &= e^{\frac{i\pi\alpha_1(t)}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_{j+1}(t)} = \sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}(\alpha_1(t)+\sum\limits_{j=2}^{k}\alpha_j(t))} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j(t)} = \sum_{k=2}^{\infty}3^{-(k-1)}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)} = \\ &= 3\sum_{k=2}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)} = 3(F(t)-\frac{1}{3}) = \Phi_0(F(t)), \end{aligned} \tag{2.33}$$

де $\Phi_0(z) = 3(z-\frac{1}{3})$.

Розглянемо тепер проміжок $J_1' = [\frac{1}{2}, 1)$. Для кожного $t \in J_1'$ виконується рівність $\alpha_0(t) = 1$. Тобто t можна подати у вигляді $t = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{4^k}$, де $\alpha_k(t)$ – k-ий символ П-зображення числа $t-1$. Тоді для кожного $t \in J_1'$ виконуються наступні рівності:

$$F(t) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(\frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)}\right), \tag{2.34}$$

$$\varphi_1(t) = 4t-2 = 4\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{4^k}\right) - 2 = 2 + \alpha_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{k+1}(t)}{4^k}. \tag{2.35}$$

Звідси, враховуючи (2.25), маємо

$$\begin{aligned} F(\varphi_1(t)) &= e^{\frac{i\pi}{3}(2+\alpha_1(t))}\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_{j+1}(t)} = e^{\frac{2i\pi}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\left(\alpha_1(t)+\sum\limits_{j=2}^{k}\alpha_j(t)\right)} = \\ &= e^{\frac{2i\pi}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j(t)} = e^{\frac{2i\pi}{3}}\sum_{k=2}^{\infty}3^{-(k-1)}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)} = \\ &= 3e^{\frac{2i\pi}{3}}\sum_{k=2}^{\infty}3^{-k}e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)} = 3e^{\frac{2i\pi}{3}}\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}F(t)-\frac{1}{3}\right) = \\ &= 3e^{\frac{i\pi}{3}}\left(F(t)-\frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \Phi_1(F(t)), \end{aligned} \tag{2.36}$$

де $\Phi_1(z) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}\left(z - \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}\right)$.

Аналогічними міркуваннями отримаємо тотожності (2.56) при $p \in \{2, 3\}$.

$\square$

Лема 2.10. *Для будь-яких* $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *виконується рівність*

$$F(\nu_p(t)) = R_p(F(t)), \tag{2.37}$$

де $\nu_p(t) = t + p$, $R_p(z) = e^{\frac{\pi p i}{3}} z$.

Доведення. Для довільного $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ маємо рівності:

$$\alpha_0(t) = 0, \ \alpha_0(t + p) = p.$$

Тоді $F(t) \equiv f(t)$ і

$$\begin{aligned} F(\nu_p(t)) \equiv F(t + p) \equiv e^{\frac{\pi i}{3}\alpha_0(t+p)} f(t + p - \alpha_0(t + p)) = e^{\frac{\pi p i}{3}} f(t) = \\ = e^{\frac{\pi p i}{3}} F(t) \equiv R_p(F(t)). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Легко перевірити, що рівність (2.37) виконується і при $t = \frac{1}{2}$. Лему доведено. $\square$

Використовуючи рівність (2.37), можна показати, що $F(-\frac{1}{2}) = F(5\frac{1}{2})$, не обчислюючи цих значень. Дійсно,

$$F\left(5\frac{1}{2}\right) = F\left(5 + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{5\pi i}{3}} F\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{5\pi i}{3}} F\left(-\frac{1}{2} + 1\right) =$$

$$= e^{2\pi i} F\left(-\frac{1}{2}\right) = F\left(-\frac{1}{2}\right).$$

2.3. Параметричне рівняння сніжинки Коха

Позначимо $J = \overline{J'} = [0, 2]$.

Лема 2.11. *Множина* $F(J)$ *є кривою Коха.*

Доведення. Оскільки $J' = \bigcup\limits_{p=0}^{3} J'_p$, то $F(J') = \bigcup\limits_{p=0}^{3} F(J'_p)$. Функції $\Phi_p(z)$ є лінійними, а отже, задають гомеоморфне відображення комплексної площини на себе. Тоді з (2.56) випливає рівність

$$F(t) = \Phi_p^{-1}(F(\varphi_p(t))), \;\; t \in J'_p, \; p \in P. \tag{2.39}$$

Звідси маємо:

$$F(J'_p) = \Phi_p^{-1}(F(\varphi_p(J'_p))) = \Phi_p^{-1}(F(J')). \tag{2.40}$$

Отже,

$$F(J') = \bigcup_{p=0}^{3} F(J'_p) = \bigcup_{p=0}^{3} \Phi_p^{-1}(F(J')). \tag{2.41}$$

Функція $F(t)$ гомеоморфно відображає відрізок $J = [0, 2] = \overline{J'}$ на множину $F(J) \subset \mathbb{C}$, а функції $\Psi_p(z) \equiv \Phi_p^{-1}(z)$ $(p \in P)$ гомеоморфно відображають комплексну площину $\mathbb{C}$ на себе. Тоді, враховуючи (2.41), властивості операції замикання та гомеоморфізмів, маємо

$$F(J) = F(\overline{J'}) = \overline{F(J')} = \bigcup_{p=0}^{3} \overline{\Psi_p(F(J'))} = \bigcup_{p=0}^{3} \Psi_p(F(\overline{J'})) = \bigcup_{p=0}^{3} \Psi_p(F(J)). \tag{2.42}$$

Оскільки лінійні функції $\Psi_p(z)$ $(p \in P)$ задають стискуючі перетворення подібності площини, то з (2.42) випливає, що множина $F(J)$ є самоподібною.

Покажемо, що система $\Psi = \{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ визначає криву Коха.

Нехай $\mathcal{K}$ – крива Коха, побудована на відрізку $[0, 1]$ дійсної вісі. Тоді $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{i=0}^{3} f_i(\mathcal{K})$, де функції f_i визначаються рівностями (1.6).

Розглянемо лінійну функцію $G(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$. Вона задає перетворення подібності комплексної площини. Позначимо $\mathcal{K}' = G(\mathcal{K})$. Зрозуміло, що $\mathcal{K}'$ є кривою Коха, побудованою на комплексній площині на початковому відрізку з кінцями в точках $z_1 = \beta$ та $z_2 = \alpha + \beta$. Оскільки

$$\mathcal{K}' = G(\mathcal{K}) = G\left(\bigcup_{i=0}^{3} f_i(\mathcal{K})\right) = \bigcup_{i=0}^{3} G(f_i(\mathcal{K})) = \bigcup_{i=0}^{3} G(f_i(G^{-1}(G(\mathcal{K})))) =$$
$$= \bigcup_{i=0}^{3} G(f_i(G^{-1}(\mathcal{K}'))),$$

то множина $\mathcal{K}'$ є інваріантною відносно системи $f' = \{f_0', f_1', f_2', f_3'\}$, де функції f_i' визначаються рівностями $f_i'(z) = G(f_i(G^{-1}(z)))$, $i = \overline{0,3}$.

Запишемо явні вирази для функцій f_i':

$$\begin{aligned} &f_0'(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\beta,\ f_1'(z) = \frac{1}{3}e^{\frac{\pi i}{3}}z + \frac{2\alpha + 5\beta}{6} - \frac{\beta\sqrt{3}}{6}i, \\ &f_2'(z) = \frac{1}{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}z + \frac{3\alpha + 5\beta}{6} + \frac{\sqrt{3}(\alpha+\beta)}{6}i,\ f_3'(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2(\alpha+\beta)}{3}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Функції Ψ_i мають наступні явні вирази:

$$\begin{aligned} &\Psi_0(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3},\ \Psi_1(z) = \frac{1}{3}e^{-\frac{\pi i}{3}} + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i,\ \Psi_2(z) = \frac{1}{3}e^{\frac{\pi i}{3}}z + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \\ &\Psi_3(z) = \frac{1}{3}z - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i. \end{aligned} \tag{2.44}$$

З (2.43), (2.44) випливає, що множини функцій f' та Ψ є рівними тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$, $\beta = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$. При цьому $f_i'(z) \equiv \Psi_{3-i}(z)$, $i = \overline{0,3}$.

Таким чином, $F(J) = G(\mathcal{K})$, де $G(z) = (\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i)z - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$. Отже, $F(J)$ є кривою Коха, побудованою на початковому відрізку з кінцями в точках $z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ та $z_2 = \frac{1}{2}$.

□

Теорема 2.6. *Множиною значень функції*

$$F(t) = e^{\frac{i\pi\alpha_0(t)}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} e^{\frac{i\pi}{3}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j(t)}, \quad t \in I$$

є сніжинка Коха.

Доведення. Позначимо $J^{(1)} = [2, 4]$, $J^{(2)} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[4, 5\frac{1}{2}\right]$.

Оскільки $I = J \cup J^{(1)} \cup J^{(2)}$, то $F(I) = F(J) \cup F(J^{(1)}) \cup F(J^{(2)})$.

Очевидно, що $\nu_2(J) = J^{(1)}$. Враховуючи лему 2.10, маємо

$$F(J^{(1)}) = F(\nu_2(J)) = R_2(F(J)). \tag{2.45}$$

Функція $R_2(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z$ задає поворот комплексної площини на кут $\frac{2\pi}{3}$ навколо початку координат (проти годинникової стрілки). Отже, дуга $F(J^{(1)})$ є кривою Коха.

Оскільки $F(J^{(2)}) = F(J_0^{(2)}) \cup F(J_1^{(2)})$, де $J_0^{(2)} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $J_1^{(2)} = \left[4, 5\frac{1}{2}\right]$, то множина $F(J^{(2)})$ є зв'язною як об'єднання двох зв'язних множин $F(J_0^{(2)})$ та $F(J_1^{(2)})$, які мають спільну точку $w = z(-\frac{1}{2}) = z(5\frac{1}{2})$. Покажемо, що $F(J^{(2)})$ також є кривою Коха.

Нехай $L_0 = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $L_1 = \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Оскільки $\nu_2(J_0^{(2)}) = L_0$, то за лемою 2.10 маємо

$$F(L_0) = F(\nu_2(J_0^{(2)})) = R_2(F(J_0^{(2)})).$$

Враховуючи, що $R_2(z)$ є бієкцією і $R_2^{-1} \equiv R_4$, одержуємо рівність

$$F(J_0^{(2)}) = R_2^{-1}(F(L_0)) = R_4(F(L_0)).$$

Аналогічно, з рівності $\nu_4(L_1) = J_1^{(2)}$, враховуючи лему 2.10, випливає рівність

$$F(J_1^{(2)}) = F(\nu_4(L_1)) = R_4(F(L_1)).$$

Тоді

$$\begin{aligned} F(J^{(2)}) &= F(J_0^{(2)}) \cup F(J_1^{(2)}) = R_4(F(L_0)) \cup R_4(F(L_1)) = \\ &= R_4(F(L_0) \cup F(L_1)) = R_4(F(L_0 \cup L_1)) = R_4(F(J)). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Тобто $F(J^{(2)})$ є образом $F(J)$ при повороті на кут $\frac{4\pi}{3}$ навколо початку координат (проти годинникової стрілки). Таким чином, $F(J^{(2)})$ також є кривою Коха.

Отже, $F(I)$ є об'єднанням трьох кривих Коха: $F(J)$, $F(J^{(1)})$, $F(J^{(2)})$, причому

$$F(J) \cap F(J^{(1)}) = F(2) = \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{3}},\ Z(J^{(1)}) \cap F(J^{(2)}) = F(4) = \frac{1}{2}e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

$$F(J^{(2)}) \cap F(J) = F(0) = \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що $F(I)$ є сніжинкою Коха, побудованою в комплексній площині на трикутнику з вершинами $w_0 = \frac{1}{2}$, $w_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $w_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{4\pi i}{3}}$. □

З властивостей функції $F(t)$ та попередньої теореми випливає наступне твердження.

Теорема 2.7. *Відповідність* $h :\ e^{\frac{\pi i t}{3}} \to F(t)$ *є гомеоморфізмом одиничного кола* $\omega = \{z = e^{\frac{\pi i t}{3}}\ :\ t \in I\}$ *на сніжинку Коха.*

Доведення. Очевидно, що відповідність h є відображенням. Його неперервність випливає з неперервності функції $F(t)$ і того, що $F(-\frac{1}{2}) = z(5\frac{1}{2})$. З останньої рівності, рівності $e^{\frac{\pi i t}{3}}|_{t=-\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi i t}{3}}|_{t=5\frac{1}{2}}$ та властивостей функцій $F(t)$, $e^{\frac{\pi i t}{3}}$ випливає, що h є бієкцією. Отже, h є неперервним та бієктивним відображенням компакта (кола). Звідси випливає, що h – гомеоморфізм. □

2.4. Узагальнене прагматичне зображення дійсних чисел

Нехай p – фіксоване натуральне число. Для довільного $k \in \mathbb{Z}_0$ позначимо

$$B_k^{(p)} = \bigcup_{j=1}^{p} \{(-p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, -j), (p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, j)\}.$$

Теорема 2.8. *Будь-яке число* $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \equiv I_0$ *може бути представлене у вигляді*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(2p)^n} \equiv \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{2.47}$$

де послідовність (α_n) *задовольняє умови: для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

1. $\alpha_n \in A_p = \{-p, -p+1, \ldots, 0, \ldots, p-1, p\}$;
2. $(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k+1}) \notin B_k^{(p)} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_0)$.

Доведення цієї теореми повністю повторює всі міркування теореми 2.3, тому ми його не наводимо.

Представлення числа $x \in I_0$ рядом (2.47) з обмеженнями 1-2 називатимемо *узагальненим прагматичним* або Π_p-представленням числа x, а символічний запис $x = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – Π_p-зображенням числа x. При цьому число α_n $(n \in \mathbb{N})$ будемо називати n-ою Π_p-цифрою (-символом, -знаком) числа x.

Існують числа (їх зліченна множина), які мають два Π_p-зображення. Це числа виду

$$x = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n p(0)} = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]\bar{p}(0)}.$$

Дійсно,

$$\Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n p(0)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(2p)^j} + \frac{p}{(2p)^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(2p)^j} + \frac{1}{(2p)^n} - \frac{p}{(2p)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{(2p)^j} + \frac{\alpha_n + 1}{(2p)^n} - \frac{p}{(2p)^{n+1}} \equiv \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]\bar{p}(0)}.$$

Такі числа називатимемо Π_p-раціональними. Всі інші числа будуть мати єдине Π_p-зображення, їх будемо називати Π_p-ірраціональними.

Будь-яке дійсне число t можна єдиним чином подати у вигляді $t = \alpha_0(t) + r(t)$, де $\alpha_0(t)$ – ціле, $r(t) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Нехай $r(t) = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_k(t)\ldots}$, тоді

$$t = \alpha_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{(2p)^k}. \tag{2.48}$$

Очевидно, що $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}]$, де $[t + \frac{1}{2}]$ – ціла частина числа $t + \frac{1}{2}$. Таким чином, будь-яке дійсне число можна подати у вигляді (2.48), де $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}]$, а $\alpha_k(t)$ – k-ий символ Π_p-зображення числа $t - \alpha_0(t)$.

2.5. Функції $f_q(t)$, $F_q(t)$ та їх властивості. Параметричні рівняння однопараметричної сім'ї фрактальних кривих

На відрізку $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ розглянемо сім'ю функцій

$$f_q(t) = \lambda(q) + \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda(q))^k e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)}, \tag{2.49}$$

де $\lambda(q) = \sin\frac{\pi}{q} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{q} + \sin\frac{\pi(2p(q)-1)}{q}\right)^{-1}$, параметр q набуває натуральні значення більші або рівні 5, $p(q) = [\frac{q+3}{4}]$ – ціла частина числа $\frac{q+3}{4}$, $\alpha_m(t)$ – m-ий символ $\Pi_{p(q)}$-зображення числа $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Очевидно, що $\lambda(q) \in (0, 1)$ для всіх $q \geqslant 5$. Таким чином, при будь-якому $t \in I_0$ ряд в правій частині рівності (2.49) є абсолютно збіжним.

Далі в цьому розділі під p та λ маємо на увазі функції $p(q)$, $\lambda(q)$.

Покажемо, що значення функції $f_q(t)$ співпадають для двох різних зображень довільного $\Pi_{p(q)}$-раціонального числа, тобто ця функція коректно визначена в усіх $\Pi_{p(q)}$-раціональних точках (для $\Pi_{p(q)}$-ірраціональних точок це очевидно). Нехай t_0 – довільне $\Pi_{p(q)}$-раціональне число, яке має наступні $\Pi_{p(q)}$-зображення:

$$t_0 = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n+1)\bar{p}(0)} = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n p(0)}.$$

Тоді

$$f_q(\Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n p(0)}) - f_q(\Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n+1)\bar{p}(0)}) = \lambda + \sum_{k=2}^{n} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m} +$$

$$+ \lambda^{n+1} e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m} + e^{\frac{2\pi i}{q}(p + \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m)} \cdot \sum_{k=n+2}^{\infty} \lambda^k - \left(\lambda + \sum_{k=2}^{n} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m} + \right.$$

$$\left. + \lambda^{n+1} e^{\frac{2\pi i}{q}(1 + \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m)} + e^{\frac{2\pi i}{q}(1 - p + \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m)} \cdot \sum_{k=n+2}^{\infty} \lambda^k \right) =$$

$$= \lambda^{n+1} e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{q}} + \frac{\lambda}{1-\lambda} e^{\frac{2\pi p i}{q}} - \frac{\lambda}{1-\lambda} e^{\frac{2\pi(1-p)i}{q}}\right).$$

Позначимо вираз у дужках через E. Враховуючи, що $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi(2p-1)}{q}}$ та переходячи до тригонометричної форми запису комплексних чисел, маємо

$$E = 1 - \cos\frac{2\pi}{q} + \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi(2p-1)}{q}}\left(\cos\frac{2\pi p}{q} - \cos\frac{2\pi(1-p)}{q}\right) +$$

$$+\left(-\sin\frac{2\pi}{q} + \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi(2p-1)}{s}}\left(\sin\frac{2\pi p}{q} - \sin\frac{2\pi(1-p)}{q}\right)\right)i =$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi}{q} - \frac{2\sin^2\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi(2p-1)}{q}}{\sin\frac{\pi(2p-1)}{q}} + \left(-\sin\frac{2\pi}{q} + \frac{2\sin\frac{\pi(2p-1)}{q}\cos\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\sin\pi(2p-1)}{q}}\right)i = 0.$$

Теорема 2.9. *Функція $f_q(t)$ неперервна на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.*

Доведення. Доведемо неперервність функції $f_q(t)$ в Π_p-ірраціональній точці $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Якщо $t' \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ і $t \neq t'$, то існує таке d, що $\alpha_d(t) \neq \alpha_d(t')$, але $\alpha_j(t) = \alpha_j(t')$ при $j < d$. Причому умова $t' \to t$ рівносильна тому, що $d \to \infty$.

Розглянемо різницю

$$\begin{gathered} |f_q(t) - f_q(t')| = |\sum_{k=d}^{\infty}\lambda^k(e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} - e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t')})| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=d}^{\infty}\lambda^k|e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} - e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t')}| \leqslant 2\sum_{k=d}^{\infty}\lambda^k = \frac{2\lambda^q}{1-\lambda}. \end{gathered} \tag{2.50}$$

Звідси випливає, що $|f_q(t) - f_q(t')| \to 0$ при $t' \to t$ $(d \to \infty)$. Отже, функція $f_q(t)$ неперервна в точці t.

Нехай тепер t – довільна Π_p-раціональна точка відрізка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, причому

$$t = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)\alpha_k(t)p(0)} = \Delta^{\Pi}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)(\alpha_k(t)+1)\bar{p}(0)}. \tag{2.51}$$

Знайдемо лівосторонню границю функції $f_q(t)$ в точці t. У цьому випадку використовуємо наступне Π_p-зображення: $t = t_- = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)\alpha_k(t)p(0)}$. Тоді, провівши такі самі міркування, як і у випадку Π_p-ірраціональної точки, отримаємо

$$\lim_{t'\to t-0} f_q(t') = f_q(t_-) = f_q(t).$$

Тобто, $f_q(t)$ є неперервною зліва в точці t.

Аналогічно, використовуючи зображення

$$t = t_+ = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_{k-1}(t)(\alpha_k(t)+1)\bar{p}(0)},$$

доводиться, що $f_q(t)$ є неперервною справа в точці t. Отже, $f_q(t)$ є неперервною в точці t. Теорему доведено. □

Наслідок 2.5. *Множина значень функції $f_q(t)$, $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ є компактною, зв'язною множиною.*

Лема 2.12. *Для довільного циліндра n-го рангу $\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}$ множина $f_q(\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n})$ міститься у крузі $\omega_{b_1\ldots b_n}$ з центром у точці*

$$C_{b_1\ldots b_n} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1} b_m}$$

та радіусом $R_n = \frac{\lambda^{n+2}}{1-\lambda}$.

Доведення. Нехай $t = \Delta^{\Pi_p}_{\alpha_1(t)\ldots\alpha_k(t)\ldots}$ – довільна точка циліндра $\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}$. Тоді $\alpha_j(t) = b_j$ для всіх $j = \overline{1,n}$. Маємо

$$\begin{aligned} |f_q(t) - C_{b_1\ldots b_n}| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)} - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1} b_m} \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+2}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)} \right| \leqslant \sum_{k=n+2}^{\infty} \lambda^k \left| e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{k-1} \alpha_m(t)} \right| = \sum_{k=n+2}^{\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^{n+2}}{1-\lambda}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Отже, $f_q(t) \in \omega_{b_1\ldots b_n}$. З довільності вибору точки $t \in \bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}$ випливає включення $f_q(\bar{\Delta}_{b_1\ldots b_n}) \subset \omega_{b_1\ldots b_n}$. Лему доведено. □

Лема 2.13. *Множина $f_q(\Delta^{\Pi_{p(q)}}_{c_1\ldots c_k})$ міститься в правильному q-кутнику з вершинами в точках*

$$v_n = \sum_{j=1}^{k+1} (\lambda(q))^j e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{j-1} c_m} + e^{\frac{2\pi n i}{q}} \frac{(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)}, \; n = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Доведення. Нехай w – довільна точка множини $f_q(\Delta^{\Pi_{p(q)}}_{c_1\ldots c_k})$. Тоді існує така точка $t_0 \in \Delta^{\Pi_{p(q)}}_{c_1\ldots c_k}$, що $w = f_q(t_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda(q))^n e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\alpha_m(t_0)}$. Для будь-якого натурального n суми $\sum\limits_{m=1}^{n-1}\alpha_m(t_0)$ можуть набувати довільних цілих значень, тому $e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\alpha_m(t_0)} \in \{1, e^{\frac{2\pi i}{q}}, \ldots, e^{\frac{2\pi(q-1)i}{q}}\}$. Враховуючи, що $\alpha_m(t_0) = c_m$ при $1 \leqslant m \leqslant k$, маємо

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{k+1}(\lambda(q))^j e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{j-1}c_m} + \sum_{j=k+2}^{\infty}(\lambda(q))^j e^{\frac{2\pi i}{q}(\sum\limits_{m=1}^{k}c_m + \sum\limits_{m=k+1}^{j-1}\alpha_m(t_0))} = \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}(\lambda(q))^j e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{j-1}c_m} + \omega_{0,q}\sum_{j\in M_0}(\lambda(q))^j + \omega_{1,q}\sum_{j\in M_1}(\lambda(q))^j + \cdots + \\ &+ \omega_{q-1,q}\sum_{j\in M_{q-1}}(\lambda(q))^j, \end{aligned}$$

де

$$M_l = \{p \in \mathbb{N}:\ p \geqslant k+2,\ \sum_{m=1}^{k}c_m + \sum_{j=k+1}^{p-1}\alpha_j(t_0) \equiv l \pmod q\},\ l = \overline{0, q-1}.$$

Введемо позначення: $a = \sum\limits_{j=1}^{k+1}(\lambda(q))^j e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{j-1}c_m}$, $C_l = \frac{1-\lambda(q)}{(\lambda(q))^{k+2}}\sum\limits_{j\in M_l}(\lambda(q))^j$, $l = \overline{0, q-1}$. Очевидно, що

$$C_l \geqslant 0,\ l = \overline{0, q-1}. \tag{2.53}$$

Крім того,

$$\sum_{l=0}^{q-1}C_l = \frac{1-\lambda(q)}{(\lambda(q))^{k+2}}\sum_{j=k+2}^{\infty}(\lambda(q))^j = 1. \tag{2.54}$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
w &= a + \frac{\omega_{0,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)} C_0 + \frac{\omega_{1,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)} C_1 + \cdots + \frac{\omega_{q-1,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)} C_{q-1} = \\
&= \left(a + \frac{\omega_{0,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)}\right) C_0 + \left(a + \frac{\omega_{1,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)}\right) C_1 + \cdots + \\
&+ \left(a + \frac{\omega_{q-1,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)}\right) C_{q-1}.
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

З (2.53), (2.54), (2.55) випливає, що w належить опуклій оболонці множини $S = \{v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}\}$, де $v_l = a + \frac{\omega_{l,q}(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)}$, $l = \overline{0, q-1}$. З довільності вибору точки $w \in f_q(\Delta^{\Pi_{p(q)}}_{c_1 \ldots c_k})$ випливає, що $f_q(\Delta^{\Pi_{p(q)}}_{c_1 \ldots c_k}) \subset \mathrm{conv} S$.

Легко бачити, що точки множини S утворюють на комплексній площині вершини правильного q-кутника, вписаного в коло з центром у точці a і радіусом $r = \frac{(\lambda(q))^{k+2}}{1-\lambda(q)}$. Тобто conv$S$ є правильним q-кутником. □

Нехай $\Delta^{\Pi_{p(q)}}_{c_1 \ldots c_n}$ – довільний циліндр n-го рангу ($n \in \mathbb{N}$). Введемо позначення:

$$\square^q_{c_1 \ldots c_n} = \mathrm{conv}\{a_{c_1 \ldots c_n} + \omega_{0,q} R_n, \ldots, a_{c_1 \ldots c_n} + \omega_{q-1,q} R_n\},$$

де $a_{c_1 \ldots c_n} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} (\lambda(q))^j e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_{m=1}^{j-1} c_m}$, $R_n = (\lambda(q))^{n+2}(1-\lambda(q))^{-1}$.

Лема 2.14. *Многокутник $\square^q_{c_1 \ldots c_n}$ переводиться в $\square^q_{c_1 \ldots c_n c_{n+1}}$ гомотетією з центром в їх спільній вершині $v =$ та коефіцієнтом $k = \lambda(q)$.*

Доведення. Розглянемо наступну лінійну функцію комплексного аргументу: $H(z) = \lambda(q)(z - a_{c_1 \ldots c_n}) + a_{c_1 \ldots c_n c_{n+1}}$. Вона задає перетворення подібності комплексної площини. Більше того, оскільки $\lambda(q) \in \mathbb{R}$, то $H(z)$ задає гомотетію. Коефіцієнт цієї гомотетії дорівнює $\lambda(q)$, а її центр z^* можна знайти як розв'язок рівняння $H(z) = z$:

$$\lambda(q)(z - a_{c_1 \ldots c_n}) + a_{c_1 \ldots c_n c_{n+1}} = z,$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda(q)}(a_{c_1 \ldots c_n c_{n+1}} - \lambda(q) a_{c_1 \ldots c_n}).$$

Враховуючи, що $a_{c_1\ldots c_n c_{n+1}} = a_{c_1\ldots c_n} + (\lambda(q))^{n+2} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{n+1} c_m}$, маємо

$$z^* = a_{c_1\ldots c_n} + \frac{(\lambda(q))^{n+2}}{1-\lambda(q)} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{m=1}^{n+1} c_m} = a_{c_1\ldots c_n} + \omega_{N,q} R_n,$$

де $N \equiv \sum\limits_{m=1}^{n+1} c_m \pmod q$, $N \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Тобто z^* є однією з вершин q-кутника $\square^q_{c_1\ldots c_n}$.

Крім того, оскільки

$$H(a_{c_1\ldots c_n} + \omega_{l,q} R_n) = a_{c_1\ldots c_n c_{n+1}} + \omega_{l,q} R_{n+1},\ l = \overline{0, q-1},$$

то $H(\square^q_{c_1\ldots c_n}) = \square^q_{c_1\ldots c_n c_{n+1}}$. □

Нехай q – довільне натуральне число, більше або рівне 5. Визначимо на відрізку $W_q = \left[-\frac{1}{2}, q - \frac{1}{2}\right]$ функцію F_q рівністю

$$F_q(t) = e^{\frac{2\pi i}{q}\alpha_0(t)} f_q(t - \alpha_0(t)),$$

де $\alpha_0(t) = \left[t + \frac{1}{2}\right]$.

Доведення наступних тверджень майже ідентичне доведенню відповідних тверджень для функції $F(t)$, тому ми їх пропускаємо.

Теорема 2.10. *Функція $F_q(t)$ є неперервною на відрізку W_q.*

Лема 2.15. *Множини $\mathcal{S}_q = F_q(W_q)$ є неперервними замкненими кривими.*

Позначимо $J' = [0, p)$, $J'_k = [\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})$, $k = \overline{0, 2p-1}$. Очевидно, що $J' = \bigcup\limits_{k=0}^{2p-1} J'_k$. Розглянемо функції $\varphi_{k,p}(t) = 2pt - pk$, $k = \overline{0, 2p-1}$. Легко бачити, що $\varphi_{k,p}(J'_k) = J'$ для кожного $k = \overline{0, 2p-1}$.

Лема 2.16. *Для будь-якого $t \in J'_k$, $k = \overline{0, 2p-1}$ виконується рівність*

$$F_s(\varphi_{k,p}(t)) = S_{k,p}(F_s(t)), \tag{2.56}$$

де $S_{2n-2,p}(z) = \lambda^{-1} e^{-\frac{2\pi(n-1)i}{s}}(z - \lambda e^{\frac{2\pi(n-1)i}{s}})$, $S_{2n-1,p}(z) = \lambda^{-1} e^{\frac{2\pi(p-n)i}{s}}(z - \lambda e^{\frac{2\pi n i}{s}})$, $n = \overline{1, p}$.

Доведення. Нехай $t \in J'_{2n-2,p} = [n-1, n-\frac{1}{2})$, $n \in \{1, \dots, p\}$. Оскільки $n - \frac{1}{2} \leqslant t + \frac{1}{2} < n$, то $\alpha_0(t) = [t + \frac{1}{2}] = n - 1$. Тоді t можна подати у вигляді $t = n - 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m(t)}{(2p)^m}$, де $\alpha_m(t)$ – m-ий символ П-зображення числа $t - n + 1$. Маємо

$$\begin{aligned}\varphi_{2n-2,p}(t) = 2pt - (2n-2)p = 2p(n-1) + \alpha_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m+1}(t)}{(2p)^m} - \\ - (2n-2)p = \alpha_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m+1}(t)}{(2p)^m}.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Крім того, на розглядуваному проміжку для функції $F_s(t)$ виконується

$$F_s(t) \equiv e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_0(t)} f_s(t - \alpha_0(t)) = e^{\frac{2\pi(n-1)i}{s}} f_s(t - n + 1), \tag{2.58}$$

звідки одержуємо

$$f_s(t - n + 1) = e^{-\frac{2\pi(n-1)i}{s}} F_s(t). \tag{2.59}$$

З властивостей символів П-зображення випливає, що значення функції $\sigma_1(t) \equiv \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m+1}(t)}{(2p)^m}$ належать відрізку $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Розглянемо два можливих випадки: 1) $\sigma_1(t) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; 2) $\sigma_1(t) = \frac{1}{2}$.

У першому випадку маємо:

$$\alpha_0(\varphi_{2n-2,p}(t)) = \alpha_1(t), \tag{2.60}$$

звідки випливає рівність

$$\varphi_{2n-2,p}(t) - \alpha_0(\varphi_{2n-2,p}(t)) = \sigma_1(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m+1}(t)}{(2p)^m}. \tag{2.61}$$

Враховуючи означення функції $F_s(t)$ та рівності (2.59), (2.61), маємо:

$$F_s(\varphi_{2n-2,p}(t)) \equiv e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_0(\varphi_{2n-2,p}(t))} f_s(\varphi_{2n-2,p}(t) - \alpha_0(\varphi_{2n-2,p}(t))) =$$
$$= e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_1(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{s}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_{m+1}(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{s}\sum\limits_{m=0}^{k-1}\alpha_{m+1}(t)} =$$
$$= \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} e^{\frac{2\pi i}{s}\sum\limits_{m=1}^{k}\alpha_m(t)} = \lambda^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{s}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} =$$
$$= \lambda^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{s}\sum\limits_{m=1}^{k-1}\alpha_m(t)} - \lambda\right) = \lambda^{-1}\left(f_s(t-n+1) - \lambda\right) =$$
$$= \lambda^{-1}\left(e^{-\frac{2\pi(n-1)i}{s}} F_s(t) - \lambda\right) = \lambda^{-1} e^{-\frac{2\pi(n-1)i}{s}} F_s(t) - 1 = S_{2n-2,p}(F_s(t)),$$

де $S_{2n-2,p}(z) = \lambda^{-1} e^{-\frac{2\pi(n-1)i}{s}} z - 1$.

Покажемо, що і в другому випадку (коли $\sigma_1(t) = \frac{1}{2}$) буде виконуватись тотожність

$$F_s(\varphi_{2n-2,p}(t)) = S_{2n-2,p}(F_s(t)). \tag{2.62}$$

У даному випадку $\varphi_{2n-2,p}(t) = \alpha_1(t) + \sigma_1(t) = \alpha_1(t) + \frac{1}{2} = \alpha_1(t) + 1 - \frac{1}{2}$, тобто $\alpha_0(\varphi_{2n-2,p}(t)) = \alpha_1(t) + 1$. Тоді

$$F_s(\varphi_{2n-2,p}(t)) = e^{\frac{2\pi i}{s}(\alpha_1(t)+1)} f_s\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{s}(\alpha_1(t)+1)}\left(\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k e^{\frac{2\pi i}{s}(-p)}\right) =$$
$$= e^{\frac{2\pi i}{s}(\alpha_1(t)+1)}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} e^{-\frac{2\pi p i}{s}}\right). \tag{2.63}$$

З іншого боку, рівність $\sigma_1(t) = \frac{1}{2}$ рівносильна одночасному виконанню наступних рівностей: $\alpha_2(t) = p$, $\alpha_j(t) = 0,\ j \geqslant 3$. Тому П-розклад числа t має наступний вигляд: $t = n - 1 + \frac{\alpha_1(t)}{2p} + \frac{p}{4p^2}$, причому

$$\alpha_1(t) \in \{-p, -p+1, \dots, p-1\}, \alpha_0(t) = n - 1.$$

Маємо

$$\begin{aligned} F_s(t) &\equiv e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_0(t)} f_s(t-\alpha_0(t)) = e^{\frac{2\pi(n-1)i}{s}} f_s\left(\frac{\alpha_1(t)}{2p}+\frac{p}{4p^2}\right) = \\ &= e^{\frac{2\pi(n-1)i}{s}}\left(\lambda+\lambda^2 e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_1(t)}+\frac{\lambda^3}{1-\lambda}e^{\frac{2\pi i}{s}(\alpha_1(t)+p)}\right). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Тоді, враховуючи (2.63), (2.64), отримаємо

$$\begin{aligned} &F_s(\varphi_{2n-2,p}(t)) - S_{2n-2,p}(F_s(t)) = e^{\frac{2\pi i}{s}(\alpha_1(t)+1)}\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{1-\lambda}e^{-\frac{2\pi p i}{s}}\right) - \\ &-\lambda^{-1}e^{-\frac{2\pi(n-1)i}{s}} \times e^{\frac{2\pi(n-1)i}{s}}\left(\lambda+\lambda^2 e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_1(t)}+\frac{\lambda^3}{1-\lambda}e^{\frac{2\pi i}{s}(\alpha_1(t)+p)}\right)+1 = \\ &= \lambda e^{\frac{2\pi i}{s}\alpha_1(t)}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\times\left(e^{\frac{2\pi(1-p)i}{s}}-e^{\frac{2\pi p i}{s}}\right)+e^{\frac{2\pi i}{s}}-1\right)=0. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Аналогічними міркуваннями отримаємо рівності (2.56) для $k = 2n-1$, $n = \overline{1,p}$. □

Теорема 2.11. *Криві* $\mathcal{S}_q$ $(q \geqslant 5)$ *є замкненими та кусково-самоподібними. Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича цих кривих виконується нерівність*

$$\dim \mathcal{S}_q \leqslant -\frac{\ln 2p(q)}{\ln \lambda(q)},$$

де $p(q) = \left[\frac{q+3}{4}\right]$, $\lambda(q) = \sin\frac{\pi}{q}\left(\sin\frac{\pi}{q}+\sin\frac{\pi(2p(q)-1)}{q}\right)^{-1}$.

Доведення. Повторюючи міркування доведення леми 2.11 отримаємо, що множина $\mathcal{K}_q := F_q(J_p)$ $(J_p = [0,p])$ задовольняє рівнянню

$$\mathcal{K}_q = \bigcup_{k=0}^{2p-1} \Lambda_{k,q}(\mathcal{K}_q), \tag{2.66}$$

де

$$\Lambda_{2n-1,q}(z) = S^{-1}_{2n-1,q}(z) = \lambda e^{\frac{2\pi(n-p)i}{q}} z + \lambda e^{\frac{2\pi n i}{q}},$$

$$\Lambda_{2n-2,q}(z) = S^{-1}_{2n-2,q}(z) = \lambda e^{\frac{2\pi(n-1)i}{q}} z + \lambda e^{\frac{2\pi(n-1)i}{q}},\ n = \overline{1,p}.$$

Тобто, множина $\mathcal{S}_q$ містить самоподібну підмножину $\mathcal{K}_q$, а отже, є кусково-самоподібною.

Самоподібна розмірність множини $\mathcal{K}_q$ є розв'язком рівняння

$$2p \cdot \lambda^x = 1.$$

Звідки одержуємо рівність $D(\mathcal{K}_q) = -\frac{\ln 2p(q)}{\ln \lambda(q)}$. Маємо

$$\dim \mathcal{S}_q = \dim \mathcal{K}_q \leqslant D(\mathcal{K}_q) = -\frac{\ln 2p(q)}{\ln \lambda(q)}.$$

$\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розв'язується задача аналітичного задання сніжинки Коха S та її узагальнень S_q ($5 \leqslant q$ – натуральний параметр) як множин значень певних комплекснозначних функцій F_q дійсного аргументу $t \in W_q = \left[-\frac{1}{2}, q - \frac{1}{2}\right]$.

При побудові аналітичного виразу комплекснозначної функції F дійсного аргументу $t \in I = \left[-\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$ нами було використано спеціальну систему представлення дійсних чисел – так зване прагматичне представлення. Воно, в свою чергу, введено до розгляду на основі вивченої геометрії s-кового ($s = 2p$) представлення дійсних чисел з надлишковим алфавітом $A_p = \{-p, -p+1, \ldots, 0, \ldots, p-1, p\}$.

У цьому розділі розглядається комплексна функція F дійсного аргументу $t \in I$. Доведено, що F є неперервною на I, а множиною її значень є класична сніжинка Коха. Таким чином, нами побудовано аналітичне задання цієї кривої у вигляді параметричного рівняння (в комплексній формі): $z = F(t),\ t \in I$.

Використовуючи отримане параметричне рівняння, було побудовано аналітичний вираз гомеоморфного відображення кола на сніжинку Коха. Крім того, використовуючи ідеї аналітичного задання сніжинки Коха, вдалось сконструювати однопараметричну сім'ю фрактальних кривих S_q, які задані як множини значень спеціальним чином визначених комплекснозначних функцій F_q дійсного аргументу $t \in W_q$. Доведено, що функції F_q є неперервними на W_q, а множини їх значень $F_q(W_q)$ є замкненими, генетично самоподібними кривими, обчислено самоподібну розмірність цих кривих.

Основні наукові результати цього розділу опубліковано у роботі [5^a] та відображено у тезах доповідей міжнародної конференції [7^a].

РОЗДІЛ 3

ГЕОМЕТРІЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ

У цьому розділі введено до розгляду один клас підмножин $\mathbb{C}$ — так звані Σ-множини, які визначаються як збіжні (в сенсі топологічної границі) нескінченні арифметичні суми скінченних множин. Досліджуються топологічні, метричні та фрактальні властивості цих множин. Розглядається один з важливих прикладів Σ-множин — множини неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами.

3.1. Означення та приклади Σ-множин, їх топологічні властивості

Нехай $\mathbb{C}$ – нормований простір комплексних чисел $z = x + iy$ з нормою $\|z\| = |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Арифметичною сумою n числових множин $A_1, \ldots, A_n$ (симв.: $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} A_k$) називається множина елементів виду $e = a_1 + \cdots + a_n$, де $a_k \in A_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, тобто $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} A_k = \{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k : \ a_k \in A_k, \ k = 1, \ldots, n\}$.

Означення 3.1. Нескінченною арифметичною сумою послідовності числових множин $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ (симв.: $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k$) називатимемо топологічну границю (якщо вона існує) послідовності множин $S_k = \bigoplus\limits_{m=1}^{k} A_m$ при $k \to \infty$, тобто $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k := \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} \bigoplus\limits_{m=1}^{k} A_m$.

Як відомо [57], топологічна границя послідовності множин є замкненою множиною, отже, $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – замкнена.

Арифметична сума скінченного числа скінченних множин є множиною скінченною. Більш цікавою з геометричної точки зору навіть для скінченних множин-доданків є сума зліченного їх числа.

Означення 3.2. Будемо казати, що множина S є Σ-множиною, якщо $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$, де Z_k $(k \in \mathbb{N})$ – скінченні підмножини комплексної площини $\mathbb{C}$, для яких виконуються наступні умови:

1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty, \quad \text{де} \;\; \mu_k = \max\{|z| : \; z \in Z_k\}, \tag{3.1}$$

2) серед множин Z_k існує нескінченна кількість множин, що містять не менше двох елементів.

Очевидно, що елементи множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ визначаються сумами абсолютно збіжних рядів виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, де $z_k \in Z_k$. Таким чином, якщо $Z_k = \{z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{m_k k}\}$ $(m_k, k \in \mathbb{N})$, то

$$S = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Z_k = \{\sum_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} : \; z_{i_k k} \in Z_k\}. \tag{3.2}$$

Позначимо $I_k := \{1, \ldots, m_k\}$, $I := \{(i_1, \ldots, i_k, \ldots) : i_k \in I_k, \; k \in \mathbb{N}\}$. Між множинами I та S можна встановити відповідність σ наступним чином:

$$\sigma : \quad (i_1, \ldots, i_k, \ldots) \to \sum_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}. \tag{3.3}$$

Довільній послідовності $i = (i_1, \ldots, i_k, \ldots) \in I$ відповідає єдине комплексне число, що є сумою ряду $\sigma(i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k} \in S$, тобто відповідність σ є відображенням. Оскільки кожний елемент множини S ставиться у відповідність деякому елементу (послідовності) i з множини I і при цьому різним послідовностям $i, j \in I$ можуть (в загальному випадку) відповідати комплексні числа, які визначаються рядами з рівними сумами, то відповідність σ є сюр'єктивним відображенням (ін'єктивність має місце лише в окремих випадках).

Лема 3.1. *Довільна Σ-множина є компактною.*

Доведення. Оскільки S є підмножиною скінченновимірного евклідового простору, нам достатньо показати, що вона є замкненою та обмеженою. Замкненість S випливає з її означення як топологічної границі послідовності множин. Покажемо, що S обмежена. Нехай z – довільна точка множини S. Тоді існують $z_k \in Z_k$ такі, що $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. Враховуючи нерівність (3.1), маємо $\|z\| = |\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k = M < \infty$. Звідси випливає, що множина S міститься в замкненому крузі скінченного радіуса M з центром в початку координат і, отже, є обмеженою. Лему доведено.

При дослідженні властивостей Σ-множини $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ зручно використовувати так звані циліндри (циліндричні множини).

Означення 3.3. Нехай $(c_1, \ldots, c_k)$ – фіксований упорядкований набір, де $c_j \in I_j$ $(j = \overline{1, k})$. Циліндром рангу k з основою $c_1 \ldots c_k$ називається множина

$$S_{c_1 \ldots c_k} = \{x = \sum_{m=1}^{\infty} z_{i_m m} : \ i_m = c_m \ (m = 1, \ldots, k), \ z_{i_m m} \in Z_m\}. \qquad (3.4)$$

Циліндри є компактними, а також мають наступні властивості:

1) $S_{c_1 \ldots c_k c_{k+1}} \subset S_{c_1 \ldots c_k}$;

2) $S = \bigcup\limits_{(c_1, \ldots, c_k)} S_{c_1 \ldots c_k}$;

3) циліндри одного рангу є конгруентними;

4) $d(S_{c_1 \ldots c_k}) \leqslant \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$;

5) циліндр k-го рангу повністю міститься в замкненому крузі радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ (якщо циліндри є центрально-симетричними, то $R_k = \frac{1}{2} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$);

6) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{c_1 \ldots c_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{c_k k}\}$.

Доведемо, наприклад, четверту властивість. Нехай $S_{c_1 \ldots c_k}$ – довільний циліндр k-го рангу. Оскільки $S_{c_1 \ldots c_k}$ компактна множина, то існують точки $z', z'' \in S_{c_1\dots c_k}$ такі, що $d(S_{c_1\dots c_k}) = |z'' - z'|$. З належності точок z', z'' множині $S_{c_1\dots c_k}$ випливає існування таких послідовностей $(i_1, \dots, i_m, \dots)$ та $(j_1, \dots, j_m, \dots)$, $i_m, j_m \in I_m$, $i_1 = j_1 = c_1, \dots, i_k = j_k = c_k$, що $z' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_{i_m m}$, $z'' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z_{j_m m}$. Тоді

$$d(S_{c_1\dots c_k}) = |z'' - z'| = |\sum_{m=k+1}^{\infty} (z_{j_m m} - z_{i_m m})| \leqslant \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m),$$

що і треба було довести.

Позначимо $l(Z_k) := \min\limits_{\substack{u,v \in Z_k \\ u \neq v}} |u - v|$.

Лема 3.2. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність*

$$l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m) \tag{3.5}$$

(або $l(Z_k) > \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$ у випадку, коли всі циліндри є центрально-симетричними), то циліндри (3.4) *одного рангу попарно не перетинаються.*

Доведення. Нехай r – довільне фіксоване натуральне число, $S_{p_1\dots p_r}$ і $S_{q_1\dots q_r}$ – довільні циліндри r-го рангу. Оскільки $(p_1, \dots, p_r) \neq (q_1, \dots, q_r)$, то існує такий номер $s \in \{1, \dots, r\}$, що $p_j = q_j$ $(j = 1, \dots, s-1)$ і $p_s \neq q_s$. Розглянемо циліндри $S_{p_1\dots p_s}$ і $S_{q_1\dots q_s}$. За властивістю 5 циліндрів множина $S_{p_1\dots p_s}$ може бути покрита замкненим кругом радіуса $R = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m)$. Позначимо цей круг ω_1. Множина $S_{q_1\dots q_s}$ є образом множини $S_{p_1\dots p_s}$ при паралельному перенесенні $t(z) = z + \sum\limits_{m=1}^{s} (z_{q_m m} - z_{p_m m}) = z + z_{q_s s} - z_{p_s s}$ (властивість 3 циліндрів). При цьому круг $\omega_2 = t(\omega_1)$ покриває множину $S_{q_1\dots q_s}$. Відстань L між центрами кругів ω_1, ω_2 дорівнює $|z_{q_s s} - z_{p_s s}|$. Позначимо через $\rho(U, V)$ відстань між множинами $U, V \subset \mathbb{C}$ в тому сенсі, що $\rho(U, V) = \inf\limits_{u \in U, v \in V} |u - v|$. Очевидно, що $\rho(\omega_1, \omega_2) = \max\{0, L - 2R\}$. Якщо $\delta = L - 2R > 0$, то $\rho(\omega_1, \omega_2) = \delta > 0$ і $\omega_1 \bigcap \omega_2 = \varnothing$. Враховуючи умову теореми та значення величин L та R, маємо:

$$\delta = |z_{q_s s} - z_{p_s s}| - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m) \geqslant l(Z_s) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{m=s+1}^{\infty} d(Z_m) > 0.$$

Таким чином, замкнені круги ω_1, ω_2 не мають спільних точок і знаходяться на відстані $\delta > 0$ один від одного. Оскільки

$$S_{p_1 \ldots p_r} \subset S_{p_1 \ldots p_s} \subset \omega_1, S_{q_1 \ldots q_r} \subset S_{q_1 \ldots q_s} \subset \omega_2,$$

то $\rho(S_{p_1 \ldots p_r}, S_{q_1 \ldots q_r}) \geqslant \rho(\omega_1, \omega_2) = \delta > 0$. Звідси випливає, що

$$S_{p_1 \ldots p_r} \bigcap S_{q_1 \ldots q_r} = \varnothing.$$

У свою чергу, з довільності вибору $r \in \mathbb{N}$ та наборів $(p_1, \ldots, p_r)$ і $(q_1, \ldots, q_r)$ випливає, що при виконанні умов теореми циліндри одного рангу попарно не перетинаються. Так само доводиться випадок, коли всі циліндри є центрально-симетричними. Лему доведено. □

Теорема 3.1. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність* (3.5)*, то множина S є: 1) цілком незв'язною; 2) континуальною.*

Доведення. 1. Нагадаємо, що множина називається цілком незв'язною, якщо компонента кожної її точки складається з однієї цієї точки [1]. Нехай z – довільна точка множини S. Позначимо C_z компоненту точки z, тобто найбільшу зв'язну підмножину множини S, що містить точку z. Оскільки $z \in S$, то існує така послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, що $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_{a_n n}$. Тоді $z \in S_{a_1 \ldots a_k}$ для кожного натурального k. Нехай $I^k := \prod\limits_{m=1}^{k} I_m$, $I^k_a := I^k \setminus \{(a_1, \ldots, a_k)\}$. За властивістю 2 циліндрів

$$S = \bigcup_{(i_1, \ldots, i_k) \in I^k} S_{i_1 \ldots i_k}.$$

Оскільки циліндри одного рангу попарно не перетинаються, то

$$S \setminus S_{a_1 \ldots a_k} = \bigcup_{(i_1, \ldots, i_k) \in I^k_a} S_{i_1 \ldots i_k}$$

і, значить, множина $S \setminus S_{a_1 \ldots a_k}$ є замкненою як об'єднання скінченного числа замкнених множин. Крім того

$$S_{a_1 \ldots a_k} \bigcap (S \setminus S_{a_1 \ldots _k}) = \varnothing, \ S_{a_1 \ldots a_k} \bigcup (S \setminus S_{a_1 \ldots _k}) = S.$$

Таким чином, непорожня зв'язна множина C_z міститься в об'єднанні замкнених диз'юнктних множин $S_{a_1 \ldots a_k}$ і $S \setminus S_{a_1 \ldots a_k}$. Як відомо [1], з цього випливає, що вона міститься лише в одній з цих множин. Враховуючи, що $z \in S_{a_1 \ldots a_k} \bigcap C_z$, одержуємо: $C_z \subset S_{a_1 \ldots a_k}$. Останнє включення має місце для довільного натурального k, тому $C_z \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a_1 \ldots a_k}$. За властивістю 6 циліндрів $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a_1 \ldots a_k} = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{a_k k}\} = \{z\}$, тобто $C_z \subset \{z\}$. З іншого боку, $\{z\} \subset C_z$, тому $C_z = \{z\}$, що і треба було довести.

2. Відповідність σ (3.3) є сюр'єктивним відображенням множини I на множину S. Покажемо, що при виконанні нерівності (3.5) відображення σ буде також і ін'єктивним, тобто для довільних $i, j \in I$ з $i \neq j$ випливає $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Дійсно, якщо $i = (i_1, \ldots, i_k, \ldots)$, $j = (j_1, \ldots, j_k, \ldots)$, то нерівність $i \neq j$ означає, що існує такий номер p, що $i_p \neq j_p$. Тоді $\sigma(i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}$ та $\sigma(j) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{j_k k}$ належать різним циліндрам p-го рангу – $S_{i_1 \ldots i_p}$ та $S_{j_1 \ldots j_p}$ відповідно. З умови теореми та твердження леми 3.2 випливає, що $S_{i_1 \ldots i_p} \cap S_{j_1 \ldots j_p} = \varnothing$ і, значить, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Таким чином, при виконанні умови теореми відображення σ є бієктивним. Значить, множини I та S мають однакову потужність. Покажемо, що множина I континуальна. Для цього спочатку відмітимо, що з умови теореми випливає виконання для всіх натуральних k нерівності $d(Z_k) \geqslant l(Z_k) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$, тобто $d(Z_k) > 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Звідси маємо, що кожна з множин Z_k містить принаймні два різних елемента. Тоді для множин індексів I_k маємо включення $\{1, 2\} \subset I_k \subset \mathbb{N}$, з якого, у свою чергу, випливає наступне:

$$\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \subset \prod_{k=1}^{\infty} I_k \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \tag{3.6}$$

Множина $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ складається з усіх можливих послідовностей чисел 1 і 2, а множина $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – з усіх можливих послідовностей натуральних чисел. Множини $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ є континуальними, оскільки, як відомо [21], вони рівнопотужні з множиною Кантора та з множиною всіх ірраціональних чисел інтервала $(0,1)$ відповідно, які, у свою чергу, є відомими прикладами множин потужності континууму. Тоді, враховуючи включення (3.6), з континуальності множин $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ випливає континуальність множини $I=\prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, а з нею і множини S. У випадку, коли циліндри є центрально-симетричними, доведення аналогічне. Теорему доведено. $\square$

З означення Σ-множин та властивостей абсолютно збіжних рядів випливає, що для довільної Σ-множини $S=\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} Z_j$ має місце формула:

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} Z_j = \bigoplus_{\alpha\in A}\left(\bigoplus_{j\in J_\alpha} Z_j\right), \tag{3.7}$$

де $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – довільне розбиття множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ на непорожні диз'юнктні підмножини, тобто $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{\alpha\in A} J_\alpha, \quad J_\alpha\bigcap J_\beta=\varnothing \quad$ для $\quad \alpha\neq\beta$ (множина A скінченна або зліченна і кожна множина J_α зліченна або скінченна).

Теорема 3.2. *Кожна Σ-множина $S=\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ є досконалою множиною потужності континууму.*

Доведення. Спочатку доведемо, що S є континуальною. Оскільки множина S є образом множини $I=\prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ при сюр'єктивному відображенні σ, що задається відповідністю (3.3), то потужність множини S не перевищує потужність множини I. Як було показано в ході доведення другої частини теореми 3.1, множина I є континуальною, тому потужність множини S не перевищує потужність континууму.

Покажемо тепер, що потужність множини S не менше, ніж потужність континууму. Оскільки $0\leqslant d(Z_k)\leqslant 2\mu_k$ і за означенням Σ-множини ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k$ збігається, то збіжним буде і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(Z_k). \tag{3.8}$$

Згідно з означенням Σ-множини, існує така нескінченна множина $A \subset \mathbb{N}$, що при $a \in A$ множина Z_a містить принаймні два елемента. Разом зі скінченністю множин Z_k це означає, що $l(Z_a) > 0$ при $a \in A$. Занумеруємо елементи множини A у порядку їх зростання: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Оскільки додатний ряд (3.8) збіжний, то $r_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, де $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} d(Z_k)$ – n-й залишок ряду (3.8). Тому існує таке натуральне число n_1, що

$$l(Z_{a_1}) > \frac{2}{\sqrt{3}} r_{n_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=n_1+1}^{\infty} d(Z_k).$$

У свою чергу, оскільки A є нескінченною підмножиною множини натуральних чисел, то існує таке натуральне число k_1, що $n_1 \leqslant a_{k_1}$. Очевидно, що $l(Z_{a_1}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_1}+1}^{\infty} d(Z_k)$. Так само існує натуральне число n_2 таке, що $l(Z_{a_{k_1}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=n_2+1}^{\infty} d(Z_k)$ і, відповідно, натуральне число k_2 таке, що $n_2 \leqslant a_{k_2}$. При цьому $l(Z_{a_{k_1}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_2}+1}^{\infty} d(Z_k)$. Продовжуючи цей процес, отримаємо нескінченну, строго зростаючу послідовність натуральних чисел: $a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}, \ldots$ Покладемо для зручності $k_0 = 1$ і розглянемо множину $A_1 = \{a_{k_0}, a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}, \ldots\}$. Враховуючи правило, за яким відбирались елементи множини A_1, для множин Z_k при $k \in A_1$ маємо $l(Z_{a_{k_m}}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_m}+1}^{\infty} d(Z_k) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=a_{k_{m+1}}}^{\infty} d(Z_k) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} d(Z_{a_{k_j}})$, де $m = 0, 1, 2, \ldots$ Таким чином, для послідовності множин $\{Z_k\}_{k \in A_1}$ виконуються умови теореми 3.1 і, значить, множина $S_{A_1} := \bigoplus\limits_{k \in A_1} Z_k = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} Z_{a_{k_m}}$ є континуальною. Якщо $A_1 = \mathbb{N}$, то $S_{A_1} = S$ і, значить, множина S є континуальною. Розглянемо тепер випадок, коли $A_1 \subset \mathbb{N}$, причому $A_1 \neq \mathbb{N}$. Позначимо $A_2 = \mathbb{N} \setminus A_1$ і, відповідно, $S_{A_2} := \bigoplus\limits_{k \in A_2} Z_k$ (сумування здійснюється за непорожньою множиною індексів A_2). Тоді, згідно з формулою (3.7), маємо

$$S = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Z_k = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} Z_k = \bigoplus_{k\in\bigcup\limits_{t=1}^{2} A_t} Z_k = \bigoplus_{t=1}^{2}\left(\bigoplus_{k\in A_t} Z_k\right) = S_{A_1} \oplus S_{A_2}.$$

Звідси, враховуючи геометричний зміст арифметичної суми [22], маємо

$$S = S_{A_1} \oplus S_{A_2} = \bigcup_{c\in A_2} t_c(S_{A_1}),$$

де $t_c(S_{A_1})$ – образ множини S_{A_1} при паралельному перенесенні $t_c(z) = z+c$. Множини $t_c(S_{A_1})$ та S_{A_1} рівнопотужні і, значить, і в цьому випадку множина S є континуальною як об'єднання непорожньої сукупності континуальних множин. Відмітимо також, що аналогічними міркуваннями можна довести континуальність кожного циліндра довільного рангу.

Тепер доведемо, що множина S досконала. Оскільки вона замкнена (теорема 3.1), то нам треба показати, що вона не містить ізольованих точок. Розглянемо довільну точку $p \in S$. Згідно з означенням множини S, існує така послідовність $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots) \in I$, що точка p має представлення виду $p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{i_k k}$, де $z_{i_k k} \in Z_k$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що в ε-околі U точки p (тобто у відкритому крузі радіуса ε з центром в точці p) міститься принаймні одна точка множини S, відмінна від p. Точка p належить циліндру $S_{i_1\ldots i_k}$ при довільному натуральному k. Згідно з властивістю 5 циліндрів, множина $S_{i_1\ldots i_k}$ повністю міститься в замкненому крузі радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$. Оскільки при виконанні умови теореми ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(Z_n)$ є збіжним, то існує такий номер M, що $R_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=M+1}^{\infty} d(Z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для циліндра $S_{i_1\ldots i_M}$ буде мати місце включення $S_{i_1\ldots i_M} \subset U$. Оскільки $S_{i_1\ldots i_M}$ є континуальною підмножиною множини S, то існує принаймні одна точка $p' \in S_{i_1\ldots i_M} \subset S$, яка відмінна від p і належить U (зрозуміло, що таких точок буде навіть континуальна множина). Тобто p не є ізольованою точкою множини S. З довільності вибору точки p випливає, що множина S не містить ізольованих точок. Теорему доведено. $\square$

3.2. Метричні властивості Σ-множин

Спочатку доведемо теорему, яка дає альтернативний спосіб подання Σ-множини S виду (3.2). При доведенні нами буде використана метрика Гаусдорфа, тому нагадаємо її означення та основні властивості [22, 83].

Нехай X, Y – дві непорожні замкнені та обмежені підмножини метричного простору (M, ρ). Тоді відстань за Гаусдорфом $h(X, Y)$, між X і Y, що індукована метрикою ρ, визначається рівністю

$$h(X, Y) := \inf\{\varepsilon \geqslant 0 : \ X \subseteq Y_\varepsilon, \ Y \subseteq X_\varepsilon\},$$

де $X_\varepsilon := \{y : y \in M, \ \rho(y, X) \leqslant \varepsilon\}$, $Y_\varepsilon := \{x : x \in M, \ \rho(x, Y) \leqslant \varepsilon\}$.

Якщо простір M повний і 2^M – множина всіх компактних підмножин M, то гаусдорфова відстань між підмножинами є метрикою в 2^M. Властивості метрики Гаусдорфа:

1) $h(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \leqslant \sup\limits_{i\in I} h(A_i, B_i)$;

2) якщо $A \subset B$, то $h(A, B) \leqslant d(B)$, де $d(B)$ – діаметр множини B;

3) якщо $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, то $h(X, \bigcup\limits_{i\in I} A_i) \leqslant \sup\limits_{i\in I} d(A_i)$.

Теорема 3.3. *Нехай задано сім'ю компактних множин* $\{B_{i_1\ldots i_k}\}$ $(i_k \in I_k, \ k \in \mathbb{N})$, *які мають властивості:*

1) $B_{i_1\ldots i_k} \supset S_{i_1\ldots i_k}$*;*

2) $B_{i_1\ldots i_k i_{k+1}} \subset B_{i_1\ldots i_k}$*;*

3) $\lim\limits_{k\to\infty} d(B_{i_1\ldots i_k}) = 0$.

Тоді множина S може бути подана наступним чином:

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}. \tag{3.9}$$

Доведення. Множини $B^k := \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}$, як це випливає з властивості 2 множин $B_{i_1\ldots i_k}$, утворюють монотонно спадну послідовність:

$$B^1 \supset B^2 \supset \ldots \supset B^k \supset \ldots$$

Тому існує границя послідовності $\{B^k\}$, причому $\mathop{\mathrm{lt}}\limits_{k\to\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B^k$. Покажемо, що ця границя співпадає з множиною S. Відмітимо спочатку, що множини B^k $(k \in \mathbb{N})$ є компактними як скінченні об'єднання компактних множин. Згідно з теоремою (3.1), множина S також є компактною. У просторі всіх компактних підмножин комплексної площини топологічна збіжність послідовності $\{B^k\}$ до границі S рівносильна збіжності в метриці Гаусдорфа. Оскільки

$$h(B^k, S) = h(\bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}, \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} S_{i_1\ldots i_k}) \leqslant \sup_{(i_1,\ldots,i_k)} h(B_{i_1\ldots i_k}, S_{i_1\ldots i_k}) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(i_1,\ldots,i_k)} d(B_{i_1\ldots i_k}) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

то маємо $S = \mathop{\mathrm{lt}}\limits_{k\to\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B^k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}$. Теорему доведено.

□

Зауваження 3.1. У самій теоремі ми не доводили існування для Σ-множини S сім'ї множин $\{B_{i_1\ldots i_k}\}$ з відповідними властивостями. Очевидно, що такими, наприклад, є опуклі оболонки циліндрів $S_{i_1\ldots i_k}$.

Теорема 3.4. *Для двовимірної міри Лебега λ Σ-множини S виконується рівність*

$$\lambda(S) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B^k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(\bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} B_{i_1\ldots i_k}), \tag{3.10}$$

де множини $B_{i_1\ldots i_k}$ задовольняють умови попередньої теореми.

Доведення. Множина S, циліндри $S_{i_1\ldots i_k}$ та множини $B_{i_1\ldots i_k}$ є вимірними за Лебегом як компактні множини. Так само, вимірними є і множини

$B^k = \bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)} B_{i_1\dots i_k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Крім того, множини B^k утворюють спадну послідовність: $B^1 \supset B^2 \supset \dots \supset B^k \supset \dots$, причому, згідно з теоремою 3.3, виконується рівність $S = \operatorname*{lt}\limits_{k\to\infty} B^k$. З даної рівності, вимірності множин B^k та неперервності міри Лебега і випливає рівність (3.10). □

Наслідок 3.1. *Якщо для* Σ*-множини* $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ *виконується рівність*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} m_j \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} d(Z_n) \right)^2 = 0, \tag{3.11}$$

де m_j *– кількість елементів множини* Z_j, $d(Z_n)$ *– діаметр множини* Z_n $(j, n = 1, 2, \dots)$, *то множина* S *має нульову двовимірну міру Лебега.*

Лема 3.3. *Нехай* Σ*-множина* $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ *задовольняє наступним умовам: а) всі множини* Z_k *лежать на одній прямій* $l \subset \mathbb{C}$, *яка проходить через початок координат; б) для всіх натуральних* k *виконується нерівність*

$$d(Z_k) \leqslant \sum_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m). \tag{3.12}$$

Тоді множина S *є відрізком (на прямій* l*).*

Доведення. Без втрати загальності можна вважати, що l є дійсною віссю комплексної площини. Для зручності занумеруємо елементи z_{ik} множин Z_k за першим індексом у порядку зростання: $z_{ik} < z_{i+1,k}$ $(i = 1, \dots, m_k - 1)$. Як випливає з теореми 3.3 та зауваження 3.1, множину S можна подати у вигляді $S = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)} \operatorname{conv} S_{i_1\dots i_k}$. Покажемо, що множина $H_k := \bigcup\limits_{(i_1,\dots,i_k)} \operatorname{conv} S_{i_1\dots i_k}$ при виконанні нерівності (3.12) є відрізком, причому одним і тим же для всіх k. Зафіксуємо набір $(j_1, \dots, j_{k-1}) \in \prod\limits_{p=1}^{k-1} I_p$ (нагадаємо, що $I_p = \{1, \dots, m_p\}$ – множина перших індексів елементів множини Z_p) і розглянемо сукупність опуклих оболонок циліндрів $S_{j_1\dots j_{k-1}1}, \dots,$ $S_{j_1\dots j_{k-1}m_k}$. Оскільки в даному випадку циліндри є компактними підмножинами дійсної осі, то $\operatorname{conv} S_{i_1\dots i_k}$ є відрізком $[\min S_{i_1\dots i_k}, \max S_{i_1\dots i_k}]$. З означення та властивостей циліндрів, а також нашої домовленості про нумерацію елементів множин Z_k випливають рівності

$$\begin{aligned} \min S_{i_1\dots i_k} &= \sum_{p=1}^{k} z_{i_p p} + \sum_{p=k+1}^{\infty} z_{1p}, \\ \max S_{i_1\dots i_k} &= \sum_{p=1}^{k} z_{i_p p} + \sum_{p=k+1}^{\infty} z_{m_p p}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Зафіксуємо довільні $s, t \in I_k$ та розглянемо відрізки $\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}s}$ і $\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}t}$. Якщо виконується нерівність (3.12), то, враховуючи (3.13), одержимо: $\max S_{j_1\dots j_{k-1}s} - \min S_{j_1\dots j_{k-1}t} \geqslant -d(Z_k) + \sum\limits_{p=k+1}^{\infty} d(Z_p) \geqslant 0$.

З останньої нерівності випливає, що $\mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}s} \bigcap \mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}t} \neq \varnothing$. Тоді, у свою чергу, множина $Q_{j_1\dots j_{k-1}} := \bigcup\limits_{j_k=1}^{m_k} \mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}j_k}$ також буде відрізком (як об'єднання скінченного числа відрізків, кожні два з яких мають непорожній переріз). Очевидно, що

$$\min Q_{j_1\dots j_{k-1}} = \min S_{j_1\dots j_{k-1}}, \ \max Q_{j_1\dots j_{k-1}} = \max S_{j_1\dots j_{k-1}}.$$

Тоді $Q_{j_1\dots j_{k-1}} = \mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}}$.

Отже, при виконанні умов леми виконується рівність

$$\bigcup_{j_k=1}^{m_k} \mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}j_k} = \mathrm{conv}S_{j_1\dots j_{k-1}}.$$

Використовуючи дану рівність, отримаємо $H_k = \mathrm{conv}S$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), звідки випливає, що $S = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_k = \mathrm{conv}S$. Оскільки S є компактною підмножиною числової прямої, то $\mathrm{conv}S$ є відрізком. Лему доведено. □

Розглянемо довільну Σ-множину $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$. Нехай також задано дві нескінченні диз'юнктні підмножини множини натуральних чисел $\mathbb{N}$: $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k}, \dots\}$.

Теорема 3.5. *Якщо множини $Z_{a_{ik}}$ задовольняють умови:*

1. $Z_{a_{ik}} \subset l_i$, *де* $l_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ *– прямі, які мають рівно одну спільну точку – початок координат;*

2. *для всіх* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$d(Z_{a_{ik}}) \leqslant \sum_{p=k+1}^{\infty} d(Z_{a_{ip}}), \quad i \in \{1,2\}, \tag{3.14}$$

то множина S *має додатну міру Лебега.*

Доведення. Нехай $A_3 := \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$. Тоді, оскільки $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{3} A_j$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, згідно з (3.7), маємо рівність

$$S = \bigoplus_{j=1}^{3} \left(\bigoplus_{k \in A_j} Z_k \right). \tag{3.15}$$

З умов теореми та леми 3.3 випливає, що множини $S_{A_j} := \bigoplus\limits_{k \in A_j} Z_k$ при $j = 1,2$ є відрізками (розташованими на відповідних прямих l_j $(j = 1,2)$). Оскільки прямі l_1 і l_2 непаралельні та не співпадають, то арифметична сума $S_{A_1} \oplus S_{A_2}$ є невиродженим паралелограмом. З (3.15) та геометричної інтерпретації векторної суми множин випливає рівність

$$S = \bigoplus_{j=1}^{3} S_{A_j} = (S_{A_1} \oplus S_{A_2}) \oplus S_{A_3} = \bigcup_{v \in S_{A_3}} t_v(P),$$

де $P = S_{A_1} \oplus S_{A_2}$, $t_v(z) = z + v$ $(z \in \mathbb{C})$ – трансляція (паралельне перенесення) на вектор v.

Таким чином, множина S є або невиродженим паралелограмом (при $A_3 = \varnothing$), або об'єднанням конгруентних невироджених паралелограмів (при $A_3 \neq \varnothing$). Звідси випливає, що S має внутрішні точки і, відповідно, додатну двовимірну міру Лебега. Теорему доведено. $\square$

3.3. Фрактальні властивості Σ-множин

Під фрактальними властивостями множин метричного простору ми розуміємо властивості, пов'язані з фрактальними метричними розмірностями множин: ентропійною, розмірністю Гаусдорфа-Безиковича, розмірністю Біллінгслі.

Теорема 3.6. *Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича* Σ*-множини* $S = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ *виконується нерівність*

$$\dim_H S \leqslant \underline{\dim}_B S \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(\prod\limits_{j=1}^{k} m_j)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))}, \tag{3.16}$$

де m_j, $d(Z_j)$ *– відповідно кількість елементів та діаметр множини* Z_j $(j \in \mathbb{N})$.

Доведення. Як відомо [75], якщо множина F може бути покрита n_k множинами з діаметрами, що не перебільшують δ_k, причому $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}. \tag{3.17}$$

Як випливає з властивостей циліндрів, для будь-якого натурального k маємо

$$S = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} S_{i_1\ldots i_k} \subset \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} D_{i_1\ldots i_k}, \tag{3.18}$$

де $D_{i_1\ldots i_k}$ – замкнений круг радіуса $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} d(Z_m)$, що містить циліндр $S_{i_1\ldots i_k}$, $i_n \in I_n = \{1,\ldots,m_n\}$, $n = \overline{1,k}$. Таким чином, круги $D_{i_1\ldots i_k}$ утворюють покриття множини S, причому $\delta_k = 2R_k$, $n_k \leqslant \prod\limits_{j=1}^{k} m_j$. Підставляючи останні вирази в (3.17), отримаємо

$$\dim_H S \leqslant \underline{\dim}_B S \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(\prod\limits_{j=1}^{k} m_j)}{-\ln(\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))} =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(\prod\limits_{j=1}^{k} m_j)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln(\frac{2}{\sqrt{3}})}{\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))}} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(\prod\limits_{j=1}^{k} m_j)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} d(Z_i))}.$$

□

3.4. Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами

Очевидно, що множина неповних сум ряду (1.4) є Σ-множиною, оскільки вона може бути представлена у вигляді $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$, де $C_k = \{0, c_k\}$. Звідси безпосередньо випливають такі властивості множини $S(c)$, як континуальність, компактність та досконалість.

Теорема 3.7. *Якщо для всіх натуральних k виконується нерівність*

$$|c_k| > \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m|, \tag{3.19}$$

то множина $S(c)$ є цілком незв'язною.

Доведення. Множина $S(c)$ є центрально-симетричною Σ-множиною, тому, згідно з теоремою 3.1, вона буде цілком незв'язною, якщо для всіх натуральних k буде виконуватись нерівність

$$l(C_k) > \sum_{m=k+1}^{\infty} d(C_m), \tag{3.20}$$

де $l(C_k) := \min\limits_{\substack{u,v \in C_k \\ u \neq v}} |u - v|$, $d(C_k) := \max\limits_{u,v \in C_k} |u - v|$.

Оскільки $l(C_k) = |c_k| = d(C_k)$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, то нерівність (3.20) набуває вигляду (3.19). Теорему доведено. □

Теорема 3.8. *Якщо виконується рівність*

$$\lim_{k\to\infty} 2^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_n| \right)^2 = 0, \tag{3.21}$$

то множина $S(c)$ має нульову двовимірну міру Лебега.

Доведення. Згідно з наслідком з теореми 3.4, достатньою умовою нульмірності множини $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ є виконання рівності

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} m_j \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} d(C_n) \right)^2 = 0, \tag{3.22}$$

де m_j – кількість елементів множини C_j, $d(C_j)$ – діаметр множини C_j $(j = 1, 2, \dots)$ Тоді, враховуючи, що в даному випадку $m_j = 2$, $d(C_j) = |c_j|$ $(\forall j \in \mathbb{N})$, можна записати рівність (3.22) у спрощеному вигляді (3.21). Теорему доведено. □

Нехай задано дві нескінченні диз'юнктні підмножини множини натуральних чисел $\mathbb{N}$: $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k}, \dots\}$. З теореми 3.5 та властивостей множин C_k $(k \in \mathbb{N})$ випливає наступне твердження для множини неповних сум ряду (1.4).

Теорема 3.9. *Якщо множини $C_{a_{ik}}$ задовольняють умови:*

1. $C_{a_{ik}} \subset l_i$, *де* $l_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ – *прямі, які мають рівно одну спільну точку – початок координат,*
2. *для всіх* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|c_{a_{ik}}| \leqslant \sum_{p=k+1}^{\infty} |c_{a_{ip}}|, \quad i \in \{1, 2\},$$

то множина $S(c) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ *має додатну міру Лебега.*

Для розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини $S(c)$ виконується наступне твердження, яке є реалізацією теореми 3.6 для множини неповних сум.

Теорема 3.10. *Для розмірності Гаусдорфа множини неповних сум ряду* (1.4) *виконується нерівність*

$$\dim_H S(c) \leqslant \underline{\dim}_B S(c) \leqslant \varliminf_{k \to \infty} \frac{k \ln(2)}{-\ln(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} |c_i|)}. \tag{3.23}$$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі введено в розгляд клас компактних множин – так званих Σ-множин, які є збіжними (в сенсі топологічної границі) нескінченними арифметичними сумами скінченних підмножин $\mathbb{C}$. Ці множини є природнім узагальненням (на комплексній площині) множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами, однорідних самоподібних та самоафінних множин та арифметичних сум скінченного числа таких множин. Спектри розподілів деяких класів комплекснозначних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера також є прикладами Σ-множин. Основна увага приділяється вивченню тополого-метричних та фрактальних властивостей Σ-множин.

Основними результатами даного розділу є доведення наступних властивостей Σ-множин:

– континуальність, досконалість та компактність (лема 3.1 та теорема 3.2);

– достатні умови цілком незв'язності (теорема 3.1);

– достатні умови нульмірності (відносно двовимірної міри Лебега) (наслідок 3.1);

– достатні умови існування внутрішніх точок (і відповідно додатності двовимірної міри Лебега) (теорема 3.5).

Знайдено верхню оцінку для розмірності Гаусдорфа-Безиковича довільної Σ-множини.

Результати цього розділу опубліковані у роботі [4^a] та доповідались на міжнародній конференції [12^a].

РОЗДІЛ 4

ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРІЇ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ

4.1. Множина можливих значень випадкової величини ζ

Розглядається комплекснозначна випадкова величина

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \varepsilon_{\eta_k} \equiv \Delta_{\eta_1 \ldots \eta_k \ldots}, \tag{4.1}$$

де індекси η_k – незалежні випадкові величини, що набувають значень 0, 1, 2, 3, 4 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}, p_{4k}$ відповідно, $p_{ik} \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{4} p_{ik} = 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $\varepsilon_m = e^{\frac{m\pi i}{2}} = i^m \ \ (m = 0, 1, 2, 3)$ – корені 4-го степеня з одиниці, $\varepsilon_4 = 0$.

Оскільки $\varepsilon_m = \cos\frac{m\pi}{2} + i \sin\frac{m\pi}{2}$ $(m = \overline{0, 3})$, $\varepsilon_4 = 0$, то

$$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \mu_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \nu_k, \tag{4.2}$$

$$\mu_k = \begin{cases} \cos\frac{\pi\eta_k}{2}, \eta_k \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ 0, \eta_k = 4, \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} \sin\frac{\pi\eta_k}{2}, \eta_k \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ 0, \eta_k = 4, \end{cases}$$

де ζ_1, ζ_2 – дійснозначні випадкові величини типу Джессена-Вінтнера, які, взагалі кажучи, не є незалежними.

У даній роботі ми цікавимось лебегівською структурою розподілу випадкової величини ζ, точковим спектром (множиною атомів), топологометричними і фрактальними властивостями її спектра (мінімального замкненого носія) та суттєвого носія щільності.

Лема 4.1. *Випадкова величина ζ набуває значень з множини*

$$V=\{z:\ z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\varepsilon_{i_k}\equiv\Delta_{i_1\ldots i_k\ldots}\},\tag{4.3}$$

де послідовності (i_k) пробігають простір $L\equiv A_5^\infty=A_5\times A_5\times\cdots\times A_5\times\ldots$, яка є зв'язною самоподібною фрактальною кривою з розмірністю $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Доведення. Перша частина твердження є очевидною, доведемо другу частину твердження.

Множина V є самоподібною, оскільки її можна подати у вигляді об'єднання

$$V=\bigcup_{j=0}^{4}V_j,\quad \text{де}\quad V_j=\{z:\ z=\frac{2}{3}\varepsilon_j+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\varepsilon_{i_k}\}.$$

При цьому $V_j=f_j(V)$, де $f_j(z)=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}\varepsilon_j$ – перетворення подібності комплексної площини з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{3}$. Тому її самоподібна розмірність дорівнює $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ як розв'язок рівняння $5(\frac{1}{3})^x=1$.

З нерівності

$$|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\varepsilon_{i_k}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\frac{2}{3^k}\varepsilon_{i_k}|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=1$$

випливає, що множина V міститься в крузі одиничного радіуса з центром в точці 0. Тоді множина V_j міститься в крузі C_j з радіусом $\frac{1}{3}$ та центром $z_j=\frac{2}{3}\varepsilon_j$. Звідси видно, що $V_k\cap V_m=\varnothing$ при $k\neq 4\neq m$. Разом з цим

$$V_4\cap V_0=\Delta_{4(0)}=\Delta_{0(2)},\ V_4\cap V_1=\Delta_{4(1)}=\Delta_{1(3)},$$

$$V_4\cap V_2=\Delta_{2(0)}=\Delta_{4(2)},\ V_4\cap V_3=\Delta_{4(3)}=\Delta_{3(1)},$$

тобто $V_4\cap V_j=\Delta_{4(j)}=\frac{1}{3}\varepsilon_j$. З цього і з самоподібності множини V випливає її зв'язність. А із значення самоподібної розмірності $\frac{\ln 5}{\ln 3}<2$ – те, що вона є лінією. □

Зауваження 4.1. З виразів перетворень подібності, які визначають множину V, легко побачити, що вона є відомою фрактальною кривою – фракталом Вичека [56].

Наслідок 4.1. *При виконанні умов леми фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини можливих значень випадкової величини* ζ *дорівнює* $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Наслідок 4.2. *Якщо в матриці* $\|p_{ik}\|$ *відсутні нулі, то спектр* S_ζ *(мінімальний замкнений носій) розподілу випадкової величини* ζ *співпадає з множиною* V.

Означення 4.1. Скорочене (символічне) зображення $\Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots}$ ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}\varepsilon_{i_k} = z$ і його суми z називатимемо циліндричним.

Очевидно, що циліндричне зображення є п'ятисимвольним кодуванням точок множини V, оскільки $i_k \in A_5 \equiv \{0,1,2,3,4\}$ $(\forall k \in N)$. З доведення попередньої леми випливає, що точки зліченної множини мають по два зображення, оскільки

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m 4(j)} = \Delta_{c_1 \ldots c_m j(i)}, \quad \text{де} \quad |i-j| = 2, \; 0 \leqslant i \leqslant 3.$$

Зауваження 4.2. Неважко довести, що точки множини V, циліндричне зображення яких не містить простого періоду (тобто періоду з однієї цифри), мають єдине зображення.

Означення 4.2. Нехай $(c_1, \ldots, c_k)$ – фіксований набір символів (цифр) з алфавіту $A_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Циліндром рангу k з основою $c_1 \ldots c_k$ називається множина всіх точок площини, які мають циліндричне зображення з першими символами $c_1, c_2, \ldots, c_k$ відповідно, тобто

$$\Delta_{c_1 \ldots c_k} = \{z : \; z = \sum_{m=1}^{k} \frac{2}{3^m}\varepsilon_{c_m} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^m}\varepsilon_{i_m}, \; i_{k+n} \in A_5 \; (\forall n \in N)\}. \qquad (4.4)$$

Лема 4.2. *Циліндри мають наступні властивості:*

1. $\Delta_{c_1\ldots c_k} = \bigcup\limits_{c=0}^{4} \Delta_{c_1\ldots c_k c}$;
2. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_k} = \Delta_{c_1\ldots c_k\ldots}$;
3. *мінімальним замкненим кругом, який містить циліндр* $\Delta_{c_1\ldots c_k}$ *є круг з радіусом* $\frac{1}{3^k}$ *та центром в точці* $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{2}{3^k}\varepsilon_{c_j}$ *(позначатимемо такий круг* $\omega_{c_1\ldots c_k}$*);*
4. $\omega_{c_1\ldots c_k} \supset \bigcup\limits_{c=0}^{4} \omega_{c_1\ldots c_k c}$;
5. *для довільної послідовності* $(c_k), c_k \in A_5$ *мають місце рівністі:*
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \omega_{c_1\ldots c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_k\ldots} = \Delta_{c_1\ldots c_k\ldots};$$
6. $\partial\omega_{c_1\ldots c_k} \cap \Delta_{c_1\ldots c_k} = \{\Delta_{c_1\ldots c_k(j)}, j = \overline{0,3}\}$, *де* $\partial\omega_{c_1\ldots c_k}$ *– коло, що є межею круга* $\omega_{c_1\ldots c_k}$.

Доведення. Перша властивість безпосередньо випливає з означення циліндра. Доведемо другу властивість. Для діаметра циліндричної множини маємо

$$d(\Delta_{c_1\ldots c_k}) = \sup_{z',z''\in\Delta_{c_1\ldots c_k}} |z' - z''| = \sup_{z',z''\in\Delta_{c_1\ldots c_k}} |\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j}(\varepsilon_{i_j(z')j} - \varepsilon_{i_j(z'')j})| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{z',z''\in\Delta_{c_1\ldots c_k}} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j}|\varepsilon_{i_j(z')j} - \varepsilon_{i_j(z'')j}| \leqslant 2\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{2}{3^k}, \tag{4.5}$$

причому у точках $z_1 = \Delta_{c_1\ldots c_k(0)}$ і $z_2 = \Delta_{c_1\ldots c_k(2)}$ досягається рівність $|z_1 - z_2| = \frac{2}{3^k}$. Отже, $d(\Delta_{c_1\ldots c_k}) = \frac{2}{3^k}$.

Таким чином, циліндри утворюють спадну послідовність замкнених множин:

$$\Delta_{c_1} \supset \Delta_{c_1c_2} \supset \cdots \supset \Delta_{c_1\ldots c_k} \supset \ldots,$$

причому $d(\Delta_{c_1\ldots c_k}) \to 0$ $(k \to \infty)$. Тоді переріз $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_k}$ існує і містить одну точку z^*. Оскільки $\Delta_{c_1\ldots c_k\ldots} \in \Delta_{c_1\ldots c_k}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, то $z^* = \Delta_{c_1\ldots c_k\ldots}$. Властивість доведено.

Для доведення властивості 3 розглянемо довільну точку $z \in \Delta_{c_1\ldots c_k}$. З означення циліндра випливає, що $z = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{c_j} + \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{i_j}$. Тоді

$$|z - \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{c_j}| \leqslant \frac{1}{3^k}.$$

Отже, z міститься в крузі радіуса $\frac{1}{3^k}$ з центром в точці $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{2}{3^j}\varepsilon_{c_j}$. Позначимо цей круг $\omega_{c_1\ldots c_k}$. З довільності вибору z випливає, що $\Delta_{c_1\ldots c_k} \subset \omega_{c_1\ldots c_k}$. Діаметр круга не може бути зменшений, оскільки для точок $z_1 = \Delta_{c_1\ldots c_k(0)}$ і $z_2 = \Delta_{c_1\ldots c_k(2)}$ виконується рівність $|z_1 - z_2| = \frac{2}{3^k}$.

Доведемо четверту властивість. Вона рівносильна тому, що для всіх $c \in A_5$ виконується включення $\omega_{c_1\ldots c_k} \supset \omega_{c_1\ldots c_k c}$. Радіуси кругів $\omega_{c_1\ldots c_k}$ та $\omega_{c_1\ldots c_k c}$ $(c \in A_5)$ дорівнюють $\frac{1}{3^k}$ та $\frac{1}{3^{k+1}}$ відповідно. А відстань між центрами цих кругів дорівнює $|\frac{2}{3^{k+1}}\varepsilon_c| \leqslant \frac{2}{3^{k+1}}$. Отже, $\omega_{c_1\ldots c_k} \supset \omega_{c_1\ldots c_k c}$ $(\forall c \in A_5)$. А, значить, $\omega_{c_1\ldots c_k} \supset \bigcup\limits_{c=0}^{4} \omega_{c_1\ldots c_k c}$.

П'ята властивість випливає з властивостей 2-4 циліндрів. □

4.2. Критерій дискретності, точковий спектр розподілу ζ

Лема 4.3. *1) Якщо точка* $z = \Delta_{i_1(z)i_2(z)\ldots i_k(z)\ldots}$ *має єдине циліндричне зображення, то*

$$\mathbb{P}\{\zeta = z\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k(z)k}.$$

2) Якщо точка z *має два циліндричних зображення* $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_m 4(j)}$ *і* $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_m j(i)}$*, то*

$$\mathbb{P}\{\zeta = z\} = \left(p_{4,m+1} \cdot \prod_{k=m+2}^{\infty} p_{jk} + p_{j,m+1} \cdot \prod_{k=m+2}^{\infty} p_{ik}\right) \cdot \prod_{k=1}^{m} p_{i_k k}, \qquad (4.6)$$

причому принаймні один з нескінченних добутків в правій частині дорівнює 0.

Доведення. 1) З єдиності циліндричного зображення точки z маємо

$$\{\zeta = z\} = \{\eta_1 = i_1, \eta_2 = i_2, \dots, \eta_k = i_k, \dots\}.$$

Оскільки події $\{\eta_k = i_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ незалежні, то

$$\mathbb{P}\{\zeta = z\} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\eta_k = i_k\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k k}. \tag{4.7}$$

2) Оскільки z має два циліндричні зображення, то

$$\{\zeta = z\} = \{\zeta = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_m 4(j)}\} + \{\zeta = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_m j(i)}\},$$

причому обидві події останньої суми є несумісними. Тому має місце (4.6). Оскільки $i \neq j$, то лише один з нескінченних добутків може збігатись. □

Нагадаємо, що точка x_0 називається атомом розподілу випадкової величини ξ, якщо $\mathrm{P}\{\xi = x_0\} > 0$. Сукупність всіх атомів розподілу випадкової величини ξ називається її точковим спектром і позначається D_ξ.

Теорема 4.1. *Розподіл випадкової величини ζ є чисто дискретним або чисто неперервним, причому дискретним – тоді і тільки тоді, коли*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leqslant j \leqslant 4} \{p_{jk}\} > 0; \tag{4.8}$$

У випадку дискретності точковий спектр D_ζ розподілу випадкової величини ζ може бути поданий як об'єднання

$$D_\zeta = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k,$$

де D_k – множина, яка складається з усіх точок виду

$$z = \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{3^j} \varepsilon_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \varepsilon_{m_j},$$

причому індекси (символи) i_j $(j = \overline{1, k})$ набувають всіх можливих значень з множини A_5, а m_n – такий індекс, що $\max\limits_{0 \leqslant l \leqslant 4} \{p_{ln}\} = p_{m_n n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Доведення. Необхідність. Нехай випадкова величина ζ має дискретний розподіл і $z_0 = \Delta_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$ – один з його атомів. Припустимо, що $M = 0$. Тоді

$$P\{\zeta = \Delta_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_kk} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \max_{0\leqslant j\leqslant 4}\{p_{jk}\} = 0 \tag{4.9}$$

для обох зображень (якщо z такі має), але це суперечить припущенню про те, що z_0 – атом. Отже, повинна виконуватись нерівність $M > 0$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконується (4.8). Тоді очевидно, що $z' = \Delta_{m_1\ldots m_k\ldots}$ і всі точки виду $z'' = \Delta_{i_1\ldots i_km_{k+1}m_{k+2}\ldots}$, де $p_{i_jj} > 0$ $(j = \overline{1,k})$ є атомами розподілу ζ. Покажемо, що ζ має дискретний розподіл.

Нехай $D_k = \{z: \ z = \Delta_{i_1\ldots i_km_{k+1}m_{k+2}\ldots}\}$, де індекси i_j $(j = \overline{1,k})$ набувають всіх можливих значень з множини A_5. Тоді

$$\begin{aligned} P\{\zeta \in D_k\} &= \sum_{i_1=0}^{4}\cdots\sum_{i_k=0}^{4}\left(\prod_{j=1}^{k} p_{i_jj}\cdot\prod_{j=k+1}^{\infty} p_{m_jj}\right) = \\ &= \prod_{j=1}^{k}\sum_{i_j=0}^{4} p_{i_jj}\cdot\prod_{j=k+1}^{\infty} p_{m_jj} = \prod_{j=k+1}^{\infty} p_{m_jj}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Розглянемо множину $D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$. Вона є зліченною як об'єднання зліченного числа скінченних множин. Множини D_k утворюють зростаючу послідовність:

$$\{z_0\} = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_k \subset \ldots, \tag{4.11}$$

тому, враховуючи неперервність ймовірності, маємо

$$P\{\zeta \in D\} = \lim_{k\to\infty} P\{\zeta \in D_k\} = \lim_{k\to\infty}\prod_{j=k+1}^{\infty} p_{m_jj}. \tag{4.12}$$

Оскільки нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_{m_kk}$ збігається, то

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=k+1}^{\infty} p_{m_jj} = 1.$$

Отже, $\mathrm{P}\{\zeta \in D\} = 1$. Таким чином, розподіл випадкової величини ζ зосереджений на зліченній множині D, тобто є дискретним. При цьому $S_\zeta = D_\zeta = D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$. Достатність доведено. □

Наслідок 4.3. *Розподіл випадкової величини ζ є неперервним тоді і тільки тоді, коли $M = 0$.*

4.3. Випадок неперервності розподілу випадкової величини ζ

Далі зосередимо свою увагу на випадку неперервності розподілу ζ, тобто, коли $P\{\zeta = z\} = 0$ для довільного $z \in V$, а це, згідно з попередньою теоремою, рівносильно рівності $M = 0$.

Лема 4.4. *Для довільного циліндра $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ і відповідного круга $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ виконується рівність:*

$$P\{\zeta \in \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}\} = P\{\zeta \in \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}\} = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j j}. \tag{4.13}$$

Доведення. Оскільки виконуються рівності $\Delta_{i_1 \ldots i_k} = V \cap \Delta_{i_1 \ldots i_k} = \omega_{i_1 \ldots i_k} \cap \Delta_{i_1 \ldots i_k}$ і $P\{\zeta \in (V \cap \omega_{i_1 \ldots i_k}) \setminus \Delta_{i_1 \ldots i_k}\} = 0$, то має місце рівність

$$P\{\zeta \in \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}\} = P\{\zeta \in \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}.$$

Враховуючи неперервність розподілу ζ і незалежність η_k, маємо

$$P\{\zeta \in \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}\} = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j j}.$$

Лему доведено. □

Теорема 4.2. *Спектром S_ζ розподілу випадкової величини ζ є множина*

$$C = \{z : \; z = \Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots}, \; p_{i_j j} > 0 \; \forall j \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $C \subset S_\zeta$. Нехай $z = \Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots} \in C$. Тоді

$$\mathrm{P}\{\zeta \in \Delta_{i_1 \ldots i_k}\} = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j j} > 0$$

для довільного натурального k. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки діаметр множини $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ дорівнює $\frac{1}{3^k}$, то можна вказати такий номер $k = k^*$, що циліндр $\Delta_{i_1 \ldots i_{k^*}}$ рангу k^* буде повністю міститись в ε-околі точки z (позначимо його $O_\varepsilon(z)$). Тоді

$$\mathrm{P}\{\zeta \in O_\varepsilon(z)\} \geqslant \mathrm{P}\{\zeta \in \Delta_{i_1 \ldots i_{k^*}}\} = \prod_{j=1}^{k^*} p_{i_j j} > 0.$$

Тобто $z \in S_\zeta$. А, значить, $C \subset S_\zeta$.

2. Покажемо, що $S_\zeta \subset C$. Нехай $z \in S_\zeta$, тобто

$$\mathrm{P}\{\zeta \in O_\varepsilon(z)\} > 0 \quad \forall \varepsilon. \tag{4.14}$$

Доведемо методом математичної індукції, що для будь-якого натурального j виконується нерівність $P_{i_j(z) j} > 0$.

1) Якщо припустити, що $p_{i_1(z)1} > 0$, то згідно зауваження

$$P\{\zeta \in \triangle_{i_1(z)}\} = P\{\zeta \in O_{1/3}(z)\} = 0,$$

що суперечить нерівності (4.14). Отримане протиріччя доводить, що $p_{i_1(z)1} > 0$.

2) Припустимо тепер, що $p_{i_j j} > 0$ для всіх $j \leqslant k$, тобто

$$P\{\zeta \in \triangle_{i_1(z) \ldots i_k(z)}\} = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j j} > 0.$$

3) Розглянемо $j = k + 1$. Якщо припустити, що $p_{i_{k+1}(z), k+1} = 0$, то отримаємо

$$P\{\zeta \triangle_{i_1(z) \ldots i_k(z) i_{k+1}(z)}\} = P\{\zeta \in O_{1/3^{k+1}(z)}\} = p_{i_{k+1}(z), k+1} \prod_{j=1}^{k} p_{i_j j} = 0,$$

що суперечить (4.14).

Отже, згідно з принципом математичної індукції $p_{i_j j} > 0 \ \ \forall j \in N$.

Тому $z \in C$, звідки $S_\zeta \subset C$ і рівність $S_\zeta = C$ доведено. □

Наслідок 4.4. *Якщо $M = 0$, то розподіл випадкової величини ζ є сингулярно неперервним, тобто ортогональним двовимірній мірі Лебега.*

Доведення. Оскільки дискретність розподілу в.в. ζ рівносильна виконанню умови (4.8), то розподіл буде неперервним тоді і тільки тоді, коли $M = 0$. При цьому він може бути лише сингулярним, оскільки для двовимірної міри Лебега його спектра виконується $\lambda(S_\zeta) \leqslant \lambda(V) = 0$. Твердження доведено. □

4.4. Випадок однакової розподіленості символів

Лема 4.5. *Якщо випадкові величини η_k однаково розподілені, тобто $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $i = \overline{0,4}$, то математичне сподівання та дисперсія випадкової величини ζ обчислюються за формулами:*

$$\mathrm{M}\zeta = p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3),$$

$$\mathrm{D}\zeta = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - p_0^2 - p_2^2 + 2p_0p_2 - 2p_1p_3 + p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - 2(p_0 - p_2)(p_1 - p_3)i).$$

Доведення. З означення випадкової величини ζ отримуємо

$$\zeta = \frac{2}{3}\varepsilon_{\eta_1} + \frac{1}{3}\hat{\zeta},$$

де доданки є незалежними випадковими величинами, причому ζ і $\hat{\zeta}$ мають однакові розподіли (а отже, $\mathrm{M}\zeta = \mathrm{M}\hat{\zeta}$ і $\mathrm{D}\zeta = \mathrm{D}\hat{\zeta}$). Тому, враховуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, маємо

$$\mathrm{M}\zeta = \mathrm{M}[\frac{2}{3}\varepsilon_{\eta_1}] + \frac{1}{3}\mathrm{M}\hat{\zeta} = \frac{2}{3}\mathrm{M}[\varepsilon_{\eta_1}] + \frac{1}{3}\mathrm{M}\zeta,$$

$$\mathrm{D}\zeta = \frac{4}{9}\mathrm{D}[\varepsilon_{\eta_1}] + \frac{1}{9}\mathrm{D}\hat{\zeta} = \frac{4}{9}\mathrm{D}[\varepsilon_{\eta_1}] + \frac{1}{9}\mathrm{D}\zeta.$$

Звідси

$$\mathrm{M}\zeta = \mathrm{M}[\varepsilon_{\eta_1}] = \sum_{k=0}^{4} \varepsilon_k p_k = \sum_{k=0}^{3} \varepsilon_k p_k = p_0 + ip_1 - p_2 - ip_3.$$

А отже,

$$\mathrm{M}\zeta = p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3).$$

Відповідно для дисперсії маємо

$$\frac{8}{9}\mathrm{D}\zeta = \frac{4}{9}(\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\eta_1}] - \mathrm{M}^2[\varepsilon_{\eta_1}]).$$

А отже,

$$\mathrm{D}\zeta = \frac{1}{2}(p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - ((p_0 - p_2) + i(p_1 - p_3))^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - p_0^2 - p_2^2 + 2p_0p_2 - 2p_1p_3 + p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - 2(p_0 - p_2)(p_1 - p_3)i)$$

□

Лема 4.6. *Нехай* $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, $i = \overline{0,4}$. *Тоді* S_ζ *є самоподібною множиною, самоподібна розмірність якої дорівнює* $\log_3 m$, *де* m *– кількість додатних координат ймовірнісного вектора* $\overline{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$, *причому*

1. *якщо* $p_0 = p_2 = 0$ *(або* $p_1 = p_3 = 0$*), а* $p_1p_3p_4 \neq 0$ *(або* $p_0p_2p_4 \neq 0$*), то* S_ζ *є відрізком;*
2. *якщо* $p_4 = 0$ *і* $p_0p_1p_2p_3 \neq 0$, *то* S_ζ *є цілком незв'язною множиною.*

Доведення. Нехай $p_i = 0$ при $i \in J \subset A_5$. Тоді спектр розподілу випадкової величини ζ співпадає з наступною множиною:

$$V_I = \{z : \ z = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}\}, \tag{4.15}$$

де i_k $(k \in \mathbb{N})$ набувають всіх можливих значень з множини $I = A_5 \setminus J$.

Множина V_I є самоподібною, оскільки її можна подати у вигляді об'єднання $V_I = \bigcup_{i \in I} V_i$, де множини V_i визначаються так само, як у доведенні леми 1. Якщо m – кількість елементів множини I, то самоподібна розмірність множини V_I є розв'язком рівняння $m\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$, тобто дорівнює $\log_3 m$.

1. У цьому випадку спектр розподілу випадкової величини ζ співпадає з множиною V_I, де $I = \{1, 3, 4\}$ (або $I = \{0, 2, 4\}$). Нехай для визначеності $I = \{1, 3, 4\}$. Тоді $V_I = V_1 \cup V_3 \cup V_4$, де $V_i = f_i(V)$ $(i \in \{1, 3, 4\})$, $f_1(z) = $ $= \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i$, $f_1(z) = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}i$, $f_4(z) = \frac{1}{3}z$. Оскільки точки $\frac{2}{3}i, 0, -\frac{2}{3}i$ лежать на одній прямій – уявній вісі, то на ній буде розташована і вся множина V_I. З іншого боку, множина V_I є зв'язною. Це випливає з рівностей

$$V_1 \cap V_4 = \Delta_{1(3)} = \Delta_{4(1)}, V_4 \cap V_3 = \Delta_{4(3)} = \Delta_{3(1)}$$

та самоподібності множини V_I. Отже, в даному випадку S_ζ співпадає з множиною V_I, яка є зв'язною замкненою підмножиною прямої, тобто є відрізком. Легко бачити, що кінцями цього відрізка є точки i та $-i$.

Аналогічно, у випадку, коли $I = \{0, 2, 4\}$, можна показати, що S_ζ є відрізком на дійсній осі (з кінцями в точках 1 та -1).

2. У цьому випадку $I = \{0, 1, 2, 3\}$, $S_\zeta = V_I = \bigcup\limits_{j \in I} V_j$, причому $V_k \cap V_j = \varnothing$ при $k \neq j$. Звідси та з самоподібності множини V_I випливає, що вона (а отже, і S_ζ) є цілком незв'язною. □

4.5. Суттєвий носій щільності розподілу випадкової величини

Означення 4.3. Циліндричною щільністю розподілу випадкової величини ζ в точці z_0 називається границя (якщо вона існує) відношення

$$\frac{\mathrm{P}(\zeta \in \Delta_{i_1(z_0) i_2(z_0) \ldots i_k(z_0)})}{5^{-k}} \quad \text{при } k \to \infty, \tag{4.16}$$

яка позначається $P'(z_0)$. Суттєвим носієм щільності розподілу випадкової величини ζ називається множина $N_\zeta = \{z : P'(z) \neq 0\}$.

Лема 4.7. *Якщо в точці* $z_0 = \Delta_{i_1(z_0) \ldots i_k(z_0) \ldots}$ *існує циліндрична щільність розподілу випадкової величини* ζ, *то вона може бути обчислена за* *формулою*

$$P'(z_0) = \prod_{j=1}^{\infty}(5p_{i_j(z_0)j}). \tag{4.17}$$

Доведення. Враховуючи лему 4.4 у випадку існування циліндричної щільності розподілу ζ в точці z_0, маємо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{P}(\zeta\in\Delta_{i_1(z_0)i_2(z_0)\ldots i_k(z_0)})}{5^{-k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}p_{i_j(z_0)j}}{5^{-k}} = \lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}(5p_{i_j(z_0)j}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty}(5p_{i_j(z_0)j}).$$

□

Теорема 4.3. *Якщо матриця ймовірностей* $||p_{ik}||$ *має асимтотичні властивості, тобто* $\lim\limits_{k\to\infty}p_{in}=p_i$, $i=0,1,2,3,4$, *то* $N_\zeta = S_\zeta$.

Доведення. Очевидно, що завжди $N_\zeta \subset S_\zeta$. Якщо матриця ймовірностей має асимптотичні властивості, то для довільної точки $z\in S_\zeta$ буде виконуватись нерівність $P'(z) > 0$, тобто $z\in N_\zeta$. Звідси випливає, що $S_\zeta\subset N_\zeta$. А отже, $N_\zeta = S_\zeta$. □

Висновки до розділу 4

У розділі вивчаються властивості комплекснозначної випадкової величини ζ, яка є нескінченною сумою незалежних дискретних випадкових величин спеціального виду.

Доведено, що розподіл ζ зосереджений на фракталі Вічека — самоподібній кривій, кожна точка якої має розгалуження 2 або 4, при цьому розподіл є чисто дискретним або сингулярно неперервним (відносно двовимірної міри Лебега), вказано умови належності до кожного з типів. Описано точковий спектр розподілу у випадку дискретності, а у випадку сингулярності — тополого-метричні та фрактальні властивості мінімального замкненого носія (спектра). Детально вивчений випадок однакової розподіленості індексів, зокрема, знайдено числові характеристики розподілу.

Основні наукові результати цього розділу опубліковано у роботі [6^a] та відображено у тезах доповідей міжнародної конференції [13^a].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню структурних, топологічних, метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та фрактальних кривих на комплексній площині. Її основними об'єктами дослідження є криві типу Коха, множини неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами та їх узагальнення.

У дисертаційній роботі отримано такі результати.

- Введено до розгляду систему числення з основою $2p$ ($p \in \mathbb{N}$) та надлишковим алфавітом $A_p = \{-p, \dots, 0, \dots, p\}$ – прагматичне представлення чисел. Нульова надлишковість даної системи числення забезпечується певними обмеженнями на послідовні цифри алфавіту. Вивчено геометрію цього представлення чисел.
- Знайдено аналітичне задання відомої фрактальної кривої – сніжинки Коха як множини значень побудованої неперервної комплексної функції $F(t)$ дійсного аргументу t. Аналітичний вираз даної функції використовує символи прагматичного зображення аргументу t. Описано властивості функції F.
- Побудовано аналітичний вираз гомеоморфного відображення одиничного кола на сніжинку Коха.
- Сконструйовано однопараметричну сім'ю фрактальних кривих, яка містить сніжинку Коха. Описано топологічні, метричні та самоподібні властивості кривих цієї сім'ї.
- Описано клас підмножин комплексної площини, які є узагальненням множин неповних сум абсолютно збіжних рядів з комплексними членами. Вивчено структурні, топологічні, метричні та фрактальні

властивості цих множин.

- Вивчено структурні, тополого-метричні та фрактальні властивості розподілу ймовірностей на фракталі Вічека– фрактальній кривій павутинного типу, індукованого дискретними розподілами символів кодування точок кривої засобами п'ятисимвольного алфавіту.

Отримані в роботі результати можуть бути використані в дослідженнях з фрактальної геометрії та фрактального аналізу, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / М.В. Балашов, Е.С. Половинкин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.
3. Барановський О. М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їх застосування / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий , Г. М. Торбін. – Київ: Наук. думка, 2013. — 288 с.
4. Вайнштейн А. Д. О строении множества $\overline{\alpha}$-представимых чисел / А.Д. Вайнштейн, Б.З. Шапиро // Изв. вузов. Матем. — 1980. — № 5. — С. 8–11.
5. Василенко Н. М. Фібоначчієві подання дійсних чисел / Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2005. —6. — С. 261-271.
6. Гетьман Б.І. Ряди Енгеля та їх застосування / Б.І. Гетьман, М.В. Працьовитий // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — №7. — С. 105–116.
7. Гончаренко Я. В. Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду / Я.В. Гончаренко // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2003. — № 4. — С. 216–232.
8. Гончаренко Я. В. Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній / Я.В. Гончаренко, М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005. — № 6. — С. 210–224.

9. Гончаренко Я. В. Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі / Я.В. Гончаренко, М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2008. — **79**. — С. 34–49.
10. Гончаренко Я. В. Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання / Я.В. Гончаренко, І.О. Микитюк // Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 242–254.
11. Грубер П. М. Геометрия чисел / П. М. Грубер, К. Г. Леккеркеркер. — М.: Наука, 2008. — 727 с.
12. Гуревич Б. А. Интеграл, мера и производная / Б. А. Гуревич, Г. Е. Шилов. — Москва: Наука, 1967. — 220 с.
13. Ефимов Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
14. Карацуба А. Л. Основы аналитической теории чисел / А. Л. Карацуба. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 240 с.
15. Кейперс Л. Равномерное распределение последовательностей: Пер. с англ.; под ред. С.М. Ермакова / Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 408 с.
16. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. — 496 с.
17. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения / Н. М. Коробов. — М.: Наука, 1989. — 240 с.
18. Корсунь Н. О. Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел / Н.О. Корсунь, М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009. — № 10. — С. 28–39.
19. Крейн С.Г. Функциональный анализ / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

20. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. Кроновер. — Москва: Техносфера, 2006. — 488 с.
21. Куратовский К. Топология / К. Куратовский. — М.: Мир, 1966. — т.1. — 594 с.
22. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.
23. Литвинюк А.А. Розподіл випадкових величин, представлених s-адичним дробом з надлишковим набором цифр / А.А. Литвинюк, М.В. Працьовитий // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. — Київ: НПУ. — 1998.—№ 3. — С. 86-190.
24. Литвинюк А.А. Розподіли сум деякого класу випадкових рядів з незалежними розподіленими коефіцієнтами / А.А. Литвинюк // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 2. — С. 122–128.
25. Литвинюк А. А. Розподіли випадкових величин, представлених s-адичним дробом з надлишковим набором цифр / А.А. Литвинюк, М.В. Працьовитий // Наукові записки НПУ ім. Драгоманова. Фіз.–мат. науки. — 1999. — № 1. — С. 136–141.
26. Лукач Е. Характеристические функции / Е. Лукач. — М.: Наука, 1979. — 424 с.
27. Маляренко А. А. Сніжинка Коха та її аналітичне означення / А.А. Маляренко // У світі математики. —– 2000. —– т. 6, № 4. —– С. 7-15.
28. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. — М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
29. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности / А.И. Маркушевич. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 52 с.
30. Микитюк І. О. Двійково-десяткова система числення і фрактальні розподіли з нею пов'язані / І.О. Микитюк // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2002. — №3. — С. 412-419

31. Микитюк І. О. Геометрія двійково-п’ятіркового зображення числа / І.О. Микитюк // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2005. — №6. — С.301-310
32. Натансон И.П. Теории функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М.: Наука, 1971. — 480 с.
33. Окстоби Дж. Мера и категория / Дж. Окстоби. — М.: Мир, 1974. — 156 с.
34. Постников А. Г. Вероятностная теория чисел / А. Г. Постников. — М.: Знание, 1974. — 62 с.
35. Працьовита І.М. Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум / І.М. Працьовита // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — №7. — С. 174-189.
36. Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения / Н.В, Працевитый, А.Ф. Турбин. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.
37. Працьовитий М.В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів / М.В. Працьовитий // Доп. НАН України.– 1996.– №5.– С. 32–37.
38. Працьовитий М.В. Один клас сингулярних комплекснозначних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера / Працьовитий М.В., Школьний О.В. //Укр. мат. журн. — 1997. — т.49, № 12. — С.1653-1660.
39. Працьовитий М.В. Згортки сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий // Доп. НАН України. — 1997. — №9. — С. 36–42.
40. Працьовитий М.В. Геометрія чисел, представлених знакозмінними рядами / М.В. Працьовитий // Наук. записки НПУ імені М.П. Драгоманова. — 1998. — 2. — С. 159–164.
41. Працьовитий М. В. Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера / М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48–54.

42. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
43. Працьовитий М. В. Фрактальність і канторовість розподілу однієї комплекснозначної випадкової величини типу Джессена-Вінтнера / М. В. Працьовитий, М. Є. Чумак // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 1999. — 1. – С. 244-250.
44. Працьовитий М.В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції / М.В. Працьовитий // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. —2002. — №3. — С. 327-338.
45. Працьовитий М.В. Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень $\mathbb{R}^1$, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича / М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003. – 4. – С. 207-215.
46. Працьовитий М.В. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича / М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін // Динамічні системи: Пр. Укр. мат. конгр. - 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2003. – С. 77-93.
47. Працьовитий М. В. Структура досконалих множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n / М.В. Працьовитий // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2009. — №10. — С. 179–189.
48. Працьовитий М. В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній / М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — №10.—С.14–28.
49. Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М.В. Працьовитий. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова.

— 2012. — 68с.

50. Працьовитий М. В. Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності / М. В. Працьовитий, І. О. Савченко // Теор. ймовірност. матем. статист.—2014.— 91.— С. 133–142.
51. Торбін Г. М. Топологічні властивості спектра випадкової величини, заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду / Г.М. Торбін // Фрактальний аналіз та суміжні питання. Київ: ІМ НАН України — НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 1998, № 1. — С. 45–52.
52. Торбін Г.М. Узагальнені множини канторівського типу та один спосіб знаходження їх розмірності Хаусдорфа–Безиковича / Г.М. Торбін // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — №2. — С. 115–121.
53. Торбін Г. М. Фрактальні розподіли ймовірностей і перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича: дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 “теорія ймовірностей і математична статистика” / Г. М. Торбін. — Київ, 2008. — 404 с.
54. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. — Москва: Мир, 1991. — 260с .
55. Федерер Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер. — Москва: Наука, 1987. — 760 с.
56. Фракталы в физике: Тр. VI Междунар. симпоз. по фракталам в физике, Триест, 9–12 июля 1985. – М.: Мир, 1988. – 672 с.
57. Хаусдорф Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф. — М.:ОНТИ, 1937. — 305 с.
58. Шалат Т. О мере Хаусдорфа линейных множеств / Т. Шалат // Чехословацкий математический журнал, Прага.— 1961.— **11 (86)**— С. 24-56.
59. Шварц Л. Анализ / Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — т.1. — 838 с.
60. Школьний О.В. Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, уявно-t-адичні цифри якої утворюють однорідний

ланцюг Маркова / О.В. Школьний // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки.– 1999.–1.– С.250-255.

61. Albeverio S. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Ergod. Th. and Dynam. Sys.– 2004.– 24.– P. 1-16.
62. Albeverio S. Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions / S. Albeverio, Ya. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Mathematische Nachrichten. — 2006. — 279, №15. — P. 1619-1633.
63. Albeverio S. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits / S. Albeverio, Ya. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Random Operator and Stochastic Equation. — 2007. — 15, №1. — P. 89-97.
64. Albeverio S. On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures / S. Albeverio, V. Koval, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Random Operator and Stochastic Equation. — 2008. — 16, №2. — P. 181-211.
65. Albeverio S. The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it / S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.— 2009. — 54, №2. — P. 85-115.
66. Banakh T. Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 / T. Banakh, A. Bartoszewitcz, S. Głąb, E. Szymonik // Colloq. Math. — 2012. — **129**. — P. 75–85.
67. Banerjee C. R. On subseries of divergent series / C.R. Banerjee, B.K. Lahiri // Amer. Math. Monthly.— 1964. — **71**. — P. 767–768.
68. Bandt C. On the Mandelbrot set for pairs of linear maps / C. Bandt // Nonlinearity. — 2002. — 15. — P. 1127-1147.

69. Barnsley M. F. Iterated function system and the global construction of fractals / M. F. Barnsley, S. Demko // Proc. R. Soc. London. — 1985. — 399. — P. 243–275.
70. Barnsley M. F. Fractals Everywhere / M. F. Barnsley. — San Diego, CA: Academic Press Inc., 1988. — 12. —394 p.
71. Besicovitch A. On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure / A. Besicovitch // Indag. Math. — 1952. — 14. — P. 339-334.
72. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory / P. Billingsley // Illinois J. Math. — 1960. — 4. — P. 187-209.
73. Cooper M. Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions / M. Cooper // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.—1998. — 124. — P. 135–149.
74. Dubuc S. Courbes de von Koch et courbes d'Osgood / S. Dubuc // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. — 1983. — 4. — P. 173–178.
75. Falconer K.J. Fractal geometry: Mathematical foundations and applications / K.J. Falkoner. — John Wiley & Sons Inc., 2003. — 367 p.
76. Falconer K. J. The geometry of fractal sets / K.J. Falconer. — Cambridge University Press, 2002. — 162 p.
77. Ferens C. On the range of purely atomic probability measures / C. Ferens // Studia Math. — 1984. — **77**. — P. 261–263.
78. Feshchenko O. Yu. Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series / O. Yu. Feshchenko, M. V. Pratsiovytyi // Theory of Stochastic Processes.— 2007.— 13(29), №1-2.— P. 205-224.
79. Guthrie J. A. The topological structure of the set of subsums of an infinite series / J. A. Guthrie, J. E. Nymann // Colloq. Math. – 1988. – **55**. – P. 323–327.
80. Hanani H. On sums of series of complex numbers / H. Hanani // Pacific J. Math. — 1953. — 3. — P. 695-709.

81. Hornich H. Uber beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reithen / H. Hornich // Monatsh. Math. Phys. — 1941. — 49. — P. 316-320.

82. Hausdorff F. Dimension und ausseres Mass / F. Hausdorff // Math. Ann. — 1918. — 79. — P.157-179.

83. Hutchinson J.E. Fractals and self-similarity / J.E. Hutchinson // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — 30. — P. 713-747.

84. Jessen B. Distribution function and the Riemann zeta function / B. Jessen, A. Wintner // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — **38**, no. 1. — P. 48–88.

85. Jones R. Achievement Sets of Sequences / R. Jones // Amer. Math. Monthly. — 2011. — **118**. — P. 508–521.

86. Kakeya S. On the partial sums of an infinite series / S. Kakeya // Science Reports Tôhoku Imp. Univ. – 1914. – **1**, № 3. – P. 159-163.

Kawamura K. On the classification of self-similar sets determined by two contractions on the plane / K. Kawamura // J. Math. Kyoto Univ. — 2002. — **42**, 2. — P. 255–286.

87. Kimberling C. Numeration systems and fractal sequences / C. Kimberling // Acta Arith. — 1995. — 73. — P. 103-117.

88. Koch H. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire / H. Koch // Arkiv for Matematik. —– 1904. —– 1. —– P. 681-704.

89. Koch H. Une methode geometrique elementaire pour l'etude de certaines questions de la theorie des courbes planes / H. Koch // Acta Mathematica. —– 1906. —– 30. — –P. 145-174.

90. Koshi S. The ranges of set functions / S. Koshi, H. C. Lai // Hokkaido Math. J. — 1981. — 10. — P. 348-360.

91. Mendes P. On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets / P Mendes, F. Oliveira // Nonlinearity. — 1994. — **7**. — P. 329-343.

92. Menon P. K. On a class of perfect sets / P. K. Menon // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — **54**. — P. 706-711.
93. Morán M. Fractal series / M. Morán // Mathematica. — 1989. — **36**. — P. 334–348.
94. Nymann J. E., Sáenz R. A. The topological structure of the set of P-sums of a sequence / J. E. Nymann, R. A. Sáenz // Publ. Math. Derecen.— 1997.— **50**.— P. 305-316.
95. Nymann J. E. On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series / J. E. Nymann, R. A. Sáenz // Colloq. Math. — 2000. —**83**. — P. 323-327.
96. Nymann J. E. Linear combination of Cantor sets / J. E. Nymann // Colloq. Math.— 1995.— **68**.— P. 259-264.
97. Nymann J. E. The sum of the Cantor set with itself / J. E. Nymann // Enseign. Math. — 1993. — 39. — P. 177-178.
98. Pavone M. The Cantor set and geometric construction / M. Pavone // Enseign. Math. — 1989. — 35. — P. 41-49.
99. Peres Y. Self-similar measures and intersections of Cantor sets / Y. Peres, B. Solomyak // Trans. Amer. Math. Soc.— 1998.— **350**, 10. — P. 4065-4087.
100. Šalát T. On subseries / T. Šalát // Math. Z.— 1964.— **85**.— P. 209-225.
101. Solomyak B. Measure and dimension for some fractal families / B. Solomyak // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1998.— **124**.— P. 531-548.
102. Solomyak B. On the measure of arithmetic sums of Cantor sets / B. Solomyak // Indagationes Math., N.S. — 1997. — 8. — P. 133-141.
103. Solomyak B. On the "Mandelbrot set"for pairs of linear maps: asymptotic self-similarity / B. Solomyak // Nonlinearity. — 2005. — **18**, 5. — P. 1927-1943.
104. Solomyak B. and Xu H. On the "Mandelbrot set"for a pair of linear maps and complex Bernoulli convolutions/B. Solomyak, H. Xu.– Preprint.–2002.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

1^a. *Коваленко В.М.* Про одну комплекснозначну функцію дійсного аргументу / В.М. Коваленко // Наук. записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. – №4. – С. 250-260.

2^a. *Коваленко В.М.* Тополого-метричні властивості однієї сім'ї комплекснозначних випадкових величин / В.М. Коваленко // Наук. записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – №2. – С. 162-171.

3^a. *Коваленко В.М.* Множина неповних сум абсолютно збіжного комплексного ряду / В.М. Коваленко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – №10. – С. 150-162.

4^a. *Коваленко В.М.* Скінченні та нескінченні арифметичні суми множин комплексних чисел / В.М. Коваленко // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2014. – Т.11, № 1. – С. 241-256.

5^a. *Коваленко В.М.* Сніжинка Коха як параметрично задана плоска крива / В.М. Коваленко, М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – №16(2). - С. 61-80.

6^a. *Kovalenko V.M.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on the Vicsek fractal) / M.V. Pratsiovytyi, V.M. Kovalenko // Random Oper. Stoch. Equ. 2015; 23(3), P. 161-168

7^a. *Коваленко В.М.* Аналітичне задання однієї сім'ї фрактальних кривих / В.М. Коваленко // Міжнародна конференція пам'яті В.Я. Буняковського (1804-1889): Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 16-21 серпня, 2004. – С.74.

8^a. *Kovalenko V.* Fractal properties of one class complex-valued random variables / V. Kovalenko // International conference ”Modern problems and new trends in probability theory”: Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, June 19-26, 2005. – P. 112.

9^a. *Коваленко В.М.* Тополого-метричні властивості однієї сім'ї комплексно-значних випадкових величин / В.М. Коваленко // Міжнародна конференція ”Сучасна стохастика: теорія і застосування”, Київ, Національний університет імені Тараса Шевченка, 19-23 червня, 2006 р.: Тези допов. – Київ, 2006. – С.41-42.

10^a. *Коваленко В.М.* Множина неповних сум одного абсолютно збіжного ряду з комплексними членами / В.М. Коваленко // Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Матеріали конф. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — С. 70-71.

11^a. *Коваленко В.М.* Тополого-метричні властивості множини неповних сум абсолютно збіжного ряду з комплексними членами / В.М. Коваленко // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: зб. тез (Національний університет ”Києво-Могилянська академія”, 25-27 квітня 2013 р., м. Київ). – Київ, 2013. – С. 105-106.

12^a. *Коваленко В.М.* Нескінченні арифметичні суми скінченних підмножин комплексної площини / В.М. Коваленко // П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк: тези доповідей (16-20 вересня, Київ, Україна). – Київ: Інститут математики НАН України та Фізико-математичний інститут НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – С. 45-46.

13^a. *Kovalenko V.* Probability measures on the one fractal curves / V. Kovalenko // International scientific and methodical conference«Modern scientific and methodical issues of Mathematics in higher school», June 25-26, 2015. – P 85-87.