НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТИМОШЕНКО ОЛЕНА АНАТОЛІЇВНА

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України "КПІ".

Наукові керівники: -доктор фізико-математичних наук, професор
БУЛДИГІН Валерій Володимирович;

- доктор фізико-математичних наук, професор
КЛЕСОВ Олег Іванович;
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут",
завідувач кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей.

Офіційні опоненти: - доктор фізико-математичних наук,
Погоруй Анатолій Олександрович,
Житомирський державний університет
імені Івана Франка, доцент кафедри
математичного аналізу;

- кандидат фізико-математичних наук,
Руденко Олексій Володимирович,
Інститут математики НАН України,
науковий співробітник
відділу випадкових процесів.

Захист відбудеться "13" жовтня 2015 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.
Автореферат розісланий "9" вересня 2015 року

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження асимптотичної поведінки випадкових процесів посідають одне з чільних місць у сучасній теорії ймовірностей. Однією з найбільш ефективних моделей випадкових процесів є стохастичні диференціальні рівняння, які, своєю чергою, є основою для досліджень у багатьох розділах економіки, теорії управління, теорії передачі інформації, статистичної фізики та ін. Дослідженню їхніх властивостей присвячено численні серії наукових публікацій та монографій, в тому числі опубліковані останніми роками.

Одним з важливих завдань при дослідженні стохастичних диференціальних рівнянь є вивчення асимптотичної поведінки розв'язку цього рівняння на нескінченності.

Й.І. Гіхман та А.В. Скороход досліджували еквівалентність розв'язку автономного стохастичного диференціального рівняння до розв'язку звичайного диференціального рівняння. Інший підхід до розв'язання цієї задачі представлено в роботі Г. Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера. Пізніше саме така задача досліджувалася Г. Керстінгом для багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь. Аналогічні задачі, але для дискретного часу та стохастичних різницевих рівнянь, розв'язувалися Ф.С. Клебанером та М. Гонсалесом.

Г.Л. Кулініч досліджував граничну поведінку розв'язків стохастичних однорідних та нестійких дифузійних рівнянь. Ним були досліджені питання про асимптотичну поведінку розподілів функціоналів від дифузійного процесу, про асимптотичну поведінку модуля розв'язку стохастичного диференціального рівняння в одновимірному та багатовимірному просторах, а також для рівнянь із випадковими коефіцієнтами.

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь закономірно привели до застосування широкого спектру підходів, одним з яких є вивчення стохастичного диференціального рівняння за допомогою детермінованого диференціального рівняння. Саме цей метод ефективно застосовувався Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом для визначення асимптотичної поведінки випадкового процесу, що є розв'язком автономного стохастичного диференціального рівняння, за допомогою поведінки розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння.

А.М. Самойленко та О.М. Станжицький вивчали задачу про $\eta(t) - \mu(t) \to 0$ м.н. при $t \to \infty$, де η – це розв'язок стохастичного диференціального рівняння, μ – розв'язок відповідного звичайного диференціального рівняння.

Т. Мітсуі розглядав задачу про $\eta(t) - \eta_n(t) \to 0$ м.н. при $t \to \infty$, де η – це розв'язок стохастичного диференціального рівняння, η_n – це апроксимація

Ейлера розв'язку стохастичного диференціального рівняння.

У цій дисертаційній роботі досліджується асимптотична поведінка розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь за допомогою асимптотичної поведінки розв'язку детермінованого неавтономного диференціального рівняння, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м.н.}$$

Таким чином ми розглядаємо узагальнення задачі для автономних рівнянь, яку вивчали Й.І. Гіхман та А.В. Скороход.

У дослідженнях використовуються псевдорегулярні функції (PRV), загальна теорія яких була розроблена в серії робіт В.В. Булдигіна, О.І. Клесова, Й.Г. Штайнебаха. Функції, які згодом назвали псевдорегулярно змінними, з'явилися в різних математичних дослідженнях досить давно, хоча до останнього часу використовувалися лише ті чи інші властивості таких функцій. Їх вивчали, наприклад, Б.І. Коренблюм, У. Штадтмюллер і Р. Траутнер, А.Л. Якимів.

PRV-функції є природним узагальненням правильно змінних функцій, які мають велике значення для багатьох розділів сучасної математики, таких як теорія ймовірностей, теорія чисел, математична фізика, диференціальні рівняння. Вони застосовуються в математиці в основному завдяки ролі, яку відіграють у теоремах абелевого і тауберового типів. Зважаючи на результати досліджень про асимптотичну еквівалентність для PRV-функцій, природним є завдання отримати умови точного порядку зростання до нескінченності розв'язків автономного та більш загальних стохастичних диференціальних рівнянь і вивчити узагальнену задачу про ψ-асимптотичну еквівалентність, використовуючи теорію псевдорегулярних функцій. До того ж, PRV-теорія дає можливість виписати умови асимптотичної еквівалентності в термінах коефіцієнтів рівняння, що в результаті забезпечує зникнення випадкової компоненти в коефіцієнтах для граничного процесу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" в рамках держбюджетної дослідницької теми № 2500 "Псевдорегулярні та спеціальні функції та їхнє застосування до задач стохастичного аналізу" (ДР № 0112U001588) та теми № 2810 "Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення" (ДР № 0115U00371).

Мета та задачі дослідження. *Метою* роботи є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Об'єктом дослідження є стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t))dt + \sigma(t, \eta(t))dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, b > 0. \qquad (0.1)$$

Також досліджується звичайне диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = a\left(t, \mu(t)\right) dt,\ t \geq 0;\ \mu(0) \equiv b,\ b > 0. \qquad (0.2)$$

Окремо розглядається стохастичне диференціальне рівняння з відокремлювальними змінними, коли $a(t,x) = g(x)\varphi(t)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t)$. А також досліджується автономне рівняння з коефіцієнтами $a(t,x) = g(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$. Саме для таких рівнянь розглядається узагальнена задача про $\psi_{1,2}$-еквівалентність.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка розв'язку η стохастичного диференціального рівняння (0.1). У роботі розглядаються такі задачі:

1) встановлення точного порядку росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із залежними від часу коефіцієнтами зсуву та дифузії;

2) отримання умов асимптотичної еквівалентності розв'язків двох неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь;

3) визначення ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь;

4) отримання умов, при яких розв'язок неавтономного стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності при необмеженому зростанні часу.

Методика дослідження. У роботі використовуються результати теорії стохастичних диференціальних рівнянь, теорії псевдорегулярних функцій, теорії звичайних диференціальних рівнянь. Застосовуються теореми про дуальність асимптотичної поведінки відношення функцій та відношення узагальнених обернених функцій, асимптотичні властивості *псевдорегулярних функцій, функцій з достатньо швидким зростанням та квазіобернених функцій.*

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані у роботі результати є новими. Основні з них такі:

1) отримано умови еквівалентності розв'язків детермінованого неавтономного диференціального рівняння та збуреного за допомогою вінерівського процесу у випадку, коли розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності;

2) запропоновано поняття ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, яке дозволяє порівнювати поведінку розв'язків у випадку, коли обидва розв'язки прямують до нескінченності;

3) отримано умови ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь;

4) для неавтономного стохастичного диференціального рівняння наведено достатні умови, при яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності.

Практичне значення одержаних результатів. Усі отримані у дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер. Теоретична цінність результатів полягає у дослідженні асимптотичної поведінки при $t \to \infty$ розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, коефіцієнти зсуву та дифузії яких залежать від фазової та часової змінних.

Результати дисертації мають практичне застосування у задачах теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, фінансовій математиці тощо. Їх можна застосовувати у дослідженні фізичних, хімічних, економічних, біологічних явищ, що моделюються за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно під керівництвом наукових керівників: доктора фізико-математичних наук, професора В.В. Булдигіна та доктора фізико-математичних наук, професора О.І. Клесова.

За результатами дисертації опубліковано сім статтей, з них чотири у співавторстві з науковим керівником проф. В.В. Булдигіним та дві у співавторстві з науковим керівником проф. О.І. Клесовим, в яких В.В. Булдигіну та О.І. Клесову належить постановка задач та загальне керівництво роботою. Одна робота є авторською.

Апробація результатів. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на

– XI, XII, XIV та XIV Міжнародних наукових конференціях імені академіка М.П. Кравчука (м. Київ, 2006 р., 2008 р., 2012 р., 2014 р.);

– Міжнародній конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications I, III" (м. Київ, 2006 р., 2012 р.);

– Міжнародній конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications I, III " (м. Київ, 2006 р., 2012 р.);

– Міжнародній конференції "Skorohod Space 50 years on" (м. Київ, 2007 р.);

– конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання" (м. Умань, 2008 р.);

– міжуніверситетській науковій конференції з математики та фізики для студентів та молодих учених (м. Київ, 2009 р., 2013 р.);

– Міжнародній конференції "Stochastic analysis and random dynamics" (м. Львів, 2009 р.);

– німецько-українській конференції "Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory” (м. Ульм, (Німеччина), 2013 р., 2014 р.);

– німецько-українській конференції ”Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory” (м. Коктебель, 2013 р.);

– засіданні наукового семінару ”Стохастика та її застосування” при кафедрі дослідження операцій КНУ імені Т.Г. Шевченка, керівник доктор фіз.-мат. наук, проф. О.М. Іксанов (м. Київ, 2014 р.);

– засіданнях наукового семінару з теорії випадкових процесів при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету НТУУ "Київський політехнічний інститут"(м. Київ, 2006 р., 2010 р., 2013 р., 2014 р.);

– засіданнях наукового семінару ”Исчисление Маллявена и его приложения” Інституту математики НАН України, керівник доктор фіз.-мат. наук, проф. А.А. Дороговцев (м. Київ, 2014 р., 2015 р.);

– засіданні наукового семінару ”Стохастичні диференціальні рівняння” при кафедрі загальної математики КНУ імені Т.Г. Шевченка, керівники доктор фіз.-мат. наук, проф. О.М. Станжицький, доктор фіз.-мат. наук, проф. Г.Л. Кулініч (м. Київ, 2014 р.).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 7 статей у фахових виданнях [1-7] (роботу [7] опубліковано у виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus) і 14 тез доповідей на конференціях [8-21].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, огляду літератури, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 168 найменувань. Обсяг дисертації становить 180 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

В огляді літератури **(перший розділ)** розглянуто відомі результати, що стосуються теми цієї роботи та споріднених питань, відомості щодо аналогічних результатів, отриманих іншими авторами.

Другий розділ є допоміжним. У ньому наведені необхідні в наступних розділах означення, поняття, факти щодо теорії стохастичних диференціальних рівнянь, теорії псевдорегулярних функцій, теорії функцій правильної зміни.

Третій розділ присвячено дослідженню *точного порядку зростання розв'язку* стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, які залежать від часу.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right)\varphi(t)dt + \sigma\left(\eta(t)\right)\theta(t)dw(t),\ t \geq 0; \eta(0) \equiv b, b > 0, \qquad (0.3)$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала. Припустимо, що $\varphi = \big(\varphi(t),\ t \in \mathbb{R}^1_+\big)$ та $\theta = \big(\theta(t),\ t \in \mathbb{R}^1_+\big)$ – дійсні неперервні функції, $g = \big(g(x),\ x \in \mathbb{R}^1\big)$ та $\sigma = \big(\sigma(x),\ x \in \mathbb{R}^1\big)$ – неперервні додатні функції такі, що (0.3) має неперервний розв'язок η.

Нехай $\mu = \big(\mu(x), x \in \mathbb{R}^1\big)$ – неперервний розв'язок звичайного диференціального рівняння, яке відповідає рівнянню (0.3) при $\sigma \equiv 0$, тобто

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right)\varphi(t)dt, t \geq 0; \mu(0) = b, b > 0. \tag{0.4}$$

Припустимо, що функції g та φ такі, що існує неперервний розв'язок μ та задовольняє умову $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$.

Для $t \geq 0$ введемо позначення

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(u)du \text{ і } \Phi_+(t) = \int\limits_0^t |\varphi(u)|\, du$$

та припустимо, що

$$\Phi(t) > 0,\ t > 0; \tag{0.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty, \tag{0.6}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} < \infty. \tag{0.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \int\limits_b^x \frac{ds}{g(s)} = \infty. \tag{0.8}$$

Теорема 3.1. *Нехай θ та φ – неперервні функції, g та σ – неперервні додатні функції такі, що (0.3) має неперервний розв'язок η. Нехай виконуються умови (0.5), (0.6), (0.7) та (0.8).*

Припустимо,що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2_+(2^k)} < \infty; \tag{0.9}$$

а також виконуються наступні дві умови:

а) функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

б) функція g є неперервно диференційованою та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t |g'(\eta(s))|\,\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0 \ \ \text{м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty\right\}. \tag{0.10}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G\left(\eta(t)\right)}{\Phi(t)} = 1 \ \ \text{м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty\right\}.$$

Умова (0.10) містить обмеження на розв'язок η рівняння (0.3), яке не зручно перевіряти. Можна запропонувати достатні умови, які не містять процесу η і які є більш зручними для перевірки. Наприклад,

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0 \ \text{ та } \ \limsup_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t \theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} < \infty$$

або

$$\limsup_{x\to\infty} |g'(x)| < \infty \ \text{ та } \ \lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t \theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0.$$

Теорема 3.1 є узагальненням відповідних результатів Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера та відповідних результатів Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода, що були отримані для автономного стохастичного диференціального рівняння.

Наступна теорема описує умови, достатні для асимптотичної еквівалентності розв'язків збуреного за допомогою вінерівського процесу та детермінованого диференціальних рівнянь.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються всі умови теореми 3.1, а також*

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0 \quad \textit{для всіх } c > 1.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \ \textit{м.н. на множині} \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\},$$

де η *– розв'язок рівняння* (0.3) *та* μ *– розв'язок* (0.4).

У підрозділі 3.2 знайдено необхідні та достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох неавтономних детермінованих диференціальних рівнянь.

У підрозділі 3.3 досліджуються умови, при яких розв'язки двох стохастичних диференціальних рівнянь є асимптотично еквівалентними. При отриманні відповідних результатів, застосовуються результати підрозділів 3.1 та 3.2.

Розглянемо два неавтономні стохастичні диференціальні рівняння

$$d\eta_k(t) = g_k(\eta_k(t))\, \varphi_k(t)dt + \sigma_k(\eta_k(t))\, \theta_k(t)dw_k(t), \ t \ge 0; \ \eta_k(0) \equiv b_k, \quad (0.11)$$

де $w_k, \ k = 1,2$ – стандартні вінерівські процеси, визначений на єдиному ймовірнісному просторі; $b_k, \ k = 1,2$ – невипадкові додатні сталі; $\theta_k, \ \varphi_k, \ k = 1,2$ – дійсні неперервні функції; $g_k, \ \sigma_k, \ k = 1,2$ – неперервні додатні функції такі, що для кожного $k = 1,2$ стохастичне диференціальне рівняння (0.11) має єдиний та неперервний розв'язок $\eta_k = (\eta_k(t), \ t \ge 0)$.

Нехай виконуються наступні умови для $k=1,2$:

$$\lim_{x\to\infty} G_k(x)=\infty; \tag{0.12}$$

$$\Phi_k(t)=\int\limits_0^t \varphi_k(u)du>0,\ t\geq 0 \text{ та } \lim_{t\to\infty}\Phi_k(t)=\infty; \tag{0.13}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{du}{g_k(u)G_k(u)}>0 \text{ для всіх } c>1; \tag{0.14}$$

$$\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{du}{g_k(u)G_k(u)}=0; \tag{0.15}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{(\Phi_k)_+(t)}{\Phi_k(t)}<\infty,\ \Phi_+(t)=\int\limits_0^t|\varphi_k(u)|\,du; \tag{0.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2^n}\theta_k^2(s)ds}{(\Phi_k)_+^2(2^n)}<\infty; \tag{0.17}$$

$$\text{функція } \frac{\sigma_k}{g_k} \text{ є обмеженою;} \tag{0.18}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t|g_k'(\eta_k(s))|\,\theta_k^2(s)ds}{(\Phi_k)_+(t)}=0 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta_k(t)=\infty\right\}. \tag{0.19}$$

Теорема 3.3. *Припустимо, що для кожного $k=1,2$ виконуються умови* (0.12), (0.13), (0.16)–(0.19) *та функції Φ_1 і Φ_2 є асимптотично еквівалентними. Тоді*

1) якщо (0.14) *виконується хоча б для одного $k=1,2$ та функції G_1 і G_2 є асимптотично еквівалентними при $t\to\infty$, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \bigcap_{k=1}^{2}\left\{\lim_{t\to\infty}\eta_k(t)=\infty\right\}; \tag{0.20}$$

2) якщо (0.15) *виконується хоча б для одного $k=1,2$ та* (0.20) *виконується з*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{2}\left\{\lim_{t\to\infty}\eta_k(t)=\infty\right\}\right)>0, \tag{0.21}$$

тоді G_1 та G_2 є асимптотично еквівалентними при $t\to\infty$;

3) якщо виконується (0.21) *та* (0.14) *виконується хоча б для одного $k=1,2$, а також* (0.15) *виконується хоча б для одного $k=1,2$, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(t)}{G_2(t)}=1\Leftrightarrow(0.20).$$

Четвертий розділ присвячено дослідженню необхідних та достатніх умов $\psi_{1,2}(\psi)$-асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь та відповідних до них звичайних диференціальних рівнянь. Цей розділ складається з п'яти основних частин.

У підрозділі 4.1 для спрощення, в основному, розглядається розв'язок $\eta = (\eta(t),\ t \geq 0)$ автономного стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right) dt + \sigma\left(\eta(t)\right) dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, b > 0 \tag{0.22}$$

та розв'язок $\mu = (\mu(t),\ t \geq 0)$ детермінованого рівняння

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right) dt, \quad t \geq 0,\ \mu(0) = b > 0. \tag{0.23}$$

Основним питанням цього підрозділу є знаходження умов, за яких

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{0.24}$$

для заданої функції $(\psi(x), x \in \mathbb{R}^1)$.

Не завжди зручно досліджувати асимптотичну поведінку самого розв'язку стохастичного диференціального рівняння або навіть не можливо це зробити. У такому випадку доцільно розглядати так звану ψ-асимптотичну еквівалентність розвя'зків (тобто виконання (0.24)), де ψ – неперервна додатна диференційовна, строго зростаюча до нескінченності функція. До того ж, частковим випадком (0.24) є задача про зближення розв'язків η та μ, а саме

$$\lim_{t\to\infty} \left(\eta(t) - \mu(t)\right) = 0 \text{ м.н.}$$

Будемо вважати, що функції g, σ та ψ задовольняють наступним умовам:

1) функція g неперервна і додатна на $\mathbb{R}^1_+$, функція σ неперервна додатна на $\mathbb{R}^1$, g та σ такі, що (0.22) має єдиний неперервний розв'язок η та (0.23) має єдиний неперервний розв'язок μ;

2) $\psi = (\psi(x), x \in \mathbb{R}^1{}_+)$ при $x \geq x_0 \geq 0$ є додатною неперервно-диференційовною функцією, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$

Одним з основних припущень цього розділу є те, що $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ м.н.

Покладемо

$$G^{(\psi)}(\cdot) = G(\psi^{-1}(\cdot)), \quad g^{(\psi)}(\cdot) = g(\psi^{-1}(\cdot))\psi'(\psi^{-1}(\cdot)),$$

де

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \int_b^\infty \frac{du}{g(u)},$$

функція $\psi^{-1}(u)$, $u \geq \psi(x_0)$, є оберненою до ψ, і ψ' є похідною функції ψ.

Наступна теорема описує умови, за яких розв'язок η рівняння (0.22) та розв'язок μ рівняння (0.23) є ψ-асимптотично еквівалентними, тобто виконується співвідношення (0.24).

Теорема 4.1. *Припустимо, що виконуються* (0.8) *та*

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)}=\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)}\frac{du}{g(u)G(u)}>0 \text{ для всіх } c>1. \quad (0.25)$$

Тоді

а) якщо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t}=1 \text{ м.н.}, \quad (0.26)$$

то має місце (0.24)*;*

б) якщо

$$\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)}=\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)}\frac{du}{g(u)G(u)}=0, \quad (0.27)$$

то (0.24) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується* (0.26)*.*

Зауважимо, що теорема 4.1 узагальнюється на випадок неавтономного стохастичного диференціального рівняння, яке досліджувалось в розділі 3.

Наслідок 4.1. *Нехай g та σ – неперервні додатні функції, φ та θ – неперервні функції такі, що рівняння* (0.3) *має неперервний розв'язок η, ψ є додатною неперервно-диференційованою функцією на* $(0,\infty)$*, яка строго зростає до нескінченності при $x\to\infty$ та виконуються умови* (0.8) *та* (0.25)*. Тоді*

а) з

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)}=\kappa \text{ м.н.} \quad (0.28)$$

випливає

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))}=1 \text{ м.н.}; \quad (0.29)$$

б) якщо виконується (0.27)*, то* (0.29) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується* (0.28)*.*

Теореми 4.1 дає можливість перейти до дослідження обмежень на коефіцієнти рівняння (0.22), за яких має місце ψ-асимптотична еквівалентність.

Умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода:

[ГС1] g – додатна неперервна функція на $\mathbb{R}^1_+$; [ГС2] для всіх $t>0$ існує похідна $g'(t)$, така що $g'(t)\to 0$ при $t\to\infty$; [ГС3] σ – додатна неперервна функція на $\mathbb{R}^1$; [ГС4] рівняння (0.22) має м.н. єдиний неперервний розв'язок η, для якого $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty$ м. н. та диференціальне рівняння (0.23) має єдиний неперервний розв'язок; [ГС5] функція $\frac{g}{\sigma}$ є обмеженою.

Теорема 4.2. *Нехай ψ – додатна неперервно диференційована функція, строго зростаюча до нескінченності при $x \to \infty$, виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода і* (0.8). *Якщо має місце* (0.25), *то виконується співвідношення* (0.24).

Результат теореми 4.2 можна також отримати, використовуючи відповідні умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера замість умов Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

У підрозділі 4.2 досліджуються достатні умови, за яких виконуються (0.25) та (0.27).

У підрозділі 4.3 розглядаються умови, при яких розв'язки μ_1 та μ_2 рівнянь виду (0.23) є $\psi_{1,2}$-асимптотично-еквівалентними, а саме

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1.$$

Розглянемо диференціальні рівняння виду (0.23) та припустимо, що

(B1) функції g_k, $k = 1, 2$, є неперервними додатними, визначеними на $(0, \infty)$ та такими, що рівняння (0.23) для кожного $k = 1, 2$ має єдиний неперервний розв'язок μ_k.

(B2) $\psi_k = (\psi_k(x),\ x > 0)$ додатні неперервно-диференційовані функції, строго зростаючі до нескінченності при $x \to \infty$.

Теорема 4.3. *Нехай функції g_k та ψ_k, $k = 1, 2$ задовольняють (B1), (B2) та* (0.12). *Тоді*

1) якщо

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g_k^{(\psi_k)}(u) G_k^{(\psi_k)}(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1 \tag{0.30}$$

виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1;$$

2) якщо умова

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g_k^{(\psi_k)}(u) G_k^{(\psi_k)}(u)} = \lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int_{\psi_k^{-1}(t)}^{\psi_k^{-1}(ct)} \frac{du}{g_k(u) G_k(u)} = 0 \tag{0.31}$$

виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \ \Leftarrow\ \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1;$$

3) якщо (0.30) *виконується хоча б для одного* $k=1,2$ *і хоча б для одного* $k=1,2$ *виконується* (0.31), *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1. \tag{0.32}$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між $\psi_{1,2}$-асимптотичною еквівалентністю підінтегральних функцій G_1, G_2 та $\psi_{1,2}$-асимптотичною еквівалентністю розв'язків μ_1, μ_2 для RV-функцій.

Теорема 4.4. *Нехай функції* g_k *та* ψ_k, $k=1,2$ *такі, що виконуються умови (B1) і (B2). Якщо* $g_1^{(\psi_1)}$ *та* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функціями з індексами меншими ніж 1, то має місце* (0.32).

У підрозділі 4.4 досліджуються умови, при яких $\psi_1(\eta_1(t))$ є м.н. асимптотично еквівалентною $\psi_2(\mu_2(t))$. Ця задача є більш загальною, ніж задача, що розглядалася в підрозділі 4.1, але її розв'язок випливає з результатів підрозділів 4.1 та 4.2, оскільки

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}\quad\text{м.н.}$$

У підрозділі 4.5 розглядаються два стохастичні диференціальні рівняння виду (0.22) та умови, при яких розв'язки η_1 та η_2 є $\psi_{1,2}$-асимптотично-еквівалентними. Розв'язок цієї задачі випливає з результатів підрозділів 4.1 і 4.3, оскільки

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(\mu_2(t))}{\psi_2(\eta_2(t))}\quad\text{м.н.}$$

Для двох стохастичних диференціальних рівнянь виду (0.22) має місце наступне твердження.

Теорема 4.5. *Нехай для* $g=g_k$ *і* $\sigma=\sigma_k$, $k=1,2$ *виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода,* ψ_k, $k=1,2$ *є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючою до нескінченності та має місце* (0.15).

1. Якщо (0.30) *виконується хоча б для одного* $k=1,2$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))}=1\ \text{м.н.}, \tag{0.33}$$

і, крім того,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))}=1\ \text{м.н.} \tag{0.34}$$

2. Якщо умови (0.30) *і* (0.31) *виконуються для кожного* $k = 1, 2$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{0.35}$$

Аналогічна теорема є справедливою і для RV-функцій.

Теорема 4.6. *Нехай для* $g = g_k$ *і* $\sigma = \sigma_k$, $k = 1, 2$ *виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода,* ψ_k, $k = 1, 2$ *є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючою до нескінченності.*

1. *Якщо хоча б одна з* $g_1^{(\psi_1)}$ *або* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функцією з індексом меншими ніж 1, то виконуються співвідношення* (0.33) *та* (0.34).

2. *Якщо* $g_1^{(\psi_1)}$ *і* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функціями з індексами меншими ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Одним з основних припущень у розділах 3 та 4 було те, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння зі збільшенням часу м.н. прямує до нескінченності, тому в **п'ятому розділі** досліджуються умови, за яких розв'язок неавтономного стохастичного диференціального рівняння м.н. прямує до нескінченності при $t \to \infty$.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = a\,(t, \eta(t))\,dt + \sigma\,(t, \eta(t))\,dw(t),\; t \ge 0; \eta(0) \equiv b > 0 \tag{0.36}$$

де w – стандартний вінерів процес; η – розв'язок рівняння (0.36), a та σ – неперервні функції, визначені при $t \in \mathbb{R}_+^1$ та $x \in \mathbb{R}^1$.

Позначимо $B(t,x) = \int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,y)}$, до того ж нехай $B^{-1}(t,x)$ – це функція, обернена до функції $B(t,x)$ по змінній x при фіксованому t.

Припустимо, що

$$\lim_{x\to\infty} B(t,x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,\, y)} = \infty. \tag{0.37}$$

Розглянемо функцію

$$\tilde{a}(t,x) = -\int_0^{B^{-1}(t,x)} \frac{\sigma_t'(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t, B^{-1}(t,x))}{\sigma(t, B^{-1}(t,x))} - \frac{1}{2}\sigma_x'(t, B^{-1}(t,x)).$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція. Припустимо, що рівняння* (0.36) *має м.н. неперервний розв'язок η. Функція σ є неперервно диференційовною по змінній t та по змінній x та виконується* (0.37). *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} B(t,\eta(t)) = \infty \text{ м.н.}, \tag{0.38}$$

якщо

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int_0^T \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x)dt > 1 \tag{0.39}$$

або

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-2\int_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz} dx = +\infty \text{ та } \int_0^{\infty} e^{-2\int_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz} dx < +\infty. \tag{0.40}$$

Наслідок 5.1. *Припустимо, що виконано всі умови теореми 5.1 стосовно функцій a та σ, $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$ та*

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{B}(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} = \infty \text{ м.н.}$$

Якщо виконано умову (0.39) *та* (0.40), *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\theta(t)} \tilde{B}(\eta(t)) = \infty \text{ м.н.}$$

Розглянемо достатні умови збіжності до нескінченності розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння, що випливають з теореми 5.1.

Наслідок 5.2. *Припустимо, що виконуються всі умови наслідку 5.1 стосовно функцій a та σ. Крім того, припустимо, що $\liminf_{t\to\infty} \theta(t) > 0$. Якщо виконано умову* (0.39) *або умову* (0.40), *то*

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.} \tag{0.41}$$

Наслідок 5.3. *Припустимо, що виконано всі умови наслідку 5.2 стосовно функцій a та σ. Нехай, крім того, $a(t,x) = \varphi(t)g(x)$, а функції θ та σ є монотонно спадними, $\theta(t) > 0$ та $\varphi(t) \ge 0$ при $t \ge 0$. Покладемо $\gamma = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0$.*

Якщо

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int_0^T \frac{\varphi(t)}{\theta(t)} dt > \frac{1}{\gamma}, \tag{0.42}$$

то виконується (0.41)

У підрозділі 5.2 до дослідження умов необмеженості розв'язку неавтономного стохастичного диференціфльного рівняння застосовується теорія PRV-функцій.

Теорема 5.2. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція такі, що стохастичне диференціальне рівняння* (0.36) *має неперервний розв'язок η. Припустимо, що*

1) для функції σ існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x;

2) функція $\alpha(t) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x)$, є RV-функцією з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$.

3) $\liminf\limits_{x\to\infty} \frac{B(t,c_0x)}{B(t,x)} > 1$ для деякого $c_0 > 1$ та для кожного фіксованого t.

Тоді має місце (0.38).

У підрозділі 5.3 доводяться кілька допоміжних результатів, які є корисними, оскільки зводять (0.39) та (0.40) до перевірки більш простих умов, що полегшує побудову конкретних прикладів.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджується асимптотична поведінка розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами зсуву та дифузії, які спеціальним чином залежать від фазової та часової змінних, тобто $a(t,x) = g(x)\varphi(t)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t)$.

За допомогою теорії PRV-функцій знайдено необхідні та достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь. Як наслідок з попередніх двох задач, встановлено умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь.

Значна увага в роботі приділяється задачі про так звану ψ–асимптотичну еквівалентність. Запропоновано поняття ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, яке дозволяє порівнювати поведінку розв'язків у випадку, коли обидва розв'язки прямують до нескінченності, отримано критерій ψ–асимптотичної еквівалентності розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків детермінованих звичайних диференціальних рівнянь. Отримані результати застосовуються до задачі про наближення двох розв'язків. Знайдено необхідні та достатні умови ψ–асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь. Завдяки цим результатам встановлено зв'язок, який існує між асимптотичною еквівалентністю неперервних функцій та асимптотичною еквівалентністю щільностей цих функцій.

Для неавтономного стохастичного диференціального рівняння наведено достатні умови, що гарантують необмеженість розв'язку та узагальнюють відповідні умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Також, знайдено достатні умови, при яких розв'язок неавтономного стохастичного диференціфльного рівняння прямує до безмежності, використовуючи теорію PRV-функцій.

Усі результати роботи є новими.

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] *Булдигін В.В.* Про асимптотичну стійкість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 6. – С. 126-129.

[2] *Булдигін В.В.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 1. – С. 127-132.

[3] *Клесов О.І.* PRV-умови необмеженості розв'язку стохастичного диференціального рівняння/ Клесов О.І., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2013.– № 4.– С. 63-66.

[4] *Тимошенко О.А.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі знакозмінним коефіцієнтом зсуву/ Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 5. – С. 145-152.

[5] *Buldygin V.V.* On the $\varphi-$asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations/ Buldygin V.V., Klesov O. I., Stainebach J.G., and Tymoshenko O.A. // Theory of stochastic processes. – 2008. – № 1. – P. 11-30.

[6] *Buldygin V.V.* On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equastions with time-dependent coefficients/ Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. // Theory of stochastic processes. – 2010. – № 2. – P. 12-22.

[7] *Klesov O.I.* Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients/ Klesov O.I., Tymoshenko O.A. // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2013. – № 41. – P. 25-35.

[8] Булдигін В.В. Про асимптотичну поведінку розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Матеріали Одинадцятої міжнародної наукової конференції імені акад. М.П. Кравчука. – К., 2006. – С. 683.

[9] Булдигін В.В. Про асимптотичну поведінку розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Матеріали міжнародної конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications I" — К., 2006. – С. 19.

[10] Tymoshenko O.A. On asymptotic equivalence of solutions of stochastic differential equations/ Tymoshenko O.A. // Abstracts of international conference "Skorohod Space 50 years on". – К., 2007. – P. 147.

[11] Buldugin V.V. The asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations/ Buldugin V.V., Tymoshenko O.A. // Матеріали Два-

надцятої міжнародної наукової конференції імені акад. М.П. Кравчука. –К., 2008. – Ч.2. – С. 35.

[12] Булдигін В.В. Про точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Матеріали конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання". – Умань, 2008. – С. 15.

[13] Тимошенко О.А. Про точний порядок зростання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Тимошенко О.А. // Тези доп. Міжуніверситетської наукової конференції з математики та фізики для студентів та молодих вчених. – К., 2009. – С. 54.

[14] Buldygin V.V. On exact order of growth of solutions of ordinary stochastic differential equations/ Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. // Abstracts of int. conf. "Stochastic analysis and random dynamics". – Lviv, 2009. – P. 42.

[15] Тимошенко О.А. Необмеженість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від часу/ Тимошенко О.А. // Матеріали XIV Міжнародної наукової конференції імені ак. М.П. Кравчука. – К., 2012. – С. 129.

[16] Tymoshenko O.A. Unboundedness of solutions of SDE with time-dependent coefficients/ Tymoshenko O.A. // Abstracts of int. conf. "Modern Stochastics: Theory and Applications III". – Kyiv, 2012. – P. 30.

[17] Тимошенко О.А. Необмеженість розв'язків неавтономних СДР з ростом часу/ Тимошенко О.А. // Тези доп. Міжуніверситетської наукової конференції з математики та фізики для студентів та молодих учених. – К., 2013. – С. 75.

[18] Klesov O.I. Unbounded solutions of SDE/ Klesov O.I., Tymoshenko O.A. // Матеріали конф. Боголюбівські читання DIF-2013 "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – Севастополь, 2013. – С. 329.

[19] Tymoshenko O.A. PRV conditions for the unboundedness of solutions of SDE/ Tymoshenko O.A. // German-Ukrainian Workshop on Empirical Complete Convergence and ather Limit Theory and Probability Theory. – Ulm, 2013. – P. 16.

[20] Tymoshenko O.A. Conditions for the unboundedness of solutions of SDE in term of PRV functions/ Tymoshenko O.A. // Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and ather Limit Theory and Probability Theory. – Koktebel, 2013. – P. 13.

[21] Tymoshenko O.A. ψ-asymptotic behaviour of solutions of nonautonomous SDE/ Tymoshenko O.A. // German-Ukrainian Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory. – Ulm, 2014. – P. 14.

АНОТАЦІЯ

Тимошенко О.А. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. – Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Дисертаційна робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

У цій роботі встановлюються умови точного порядку росту розв'язку рівняння, збуреного за допомогою вінерівського процесу, з коефіцієнтами зсуву та дифузії, які спеціальним чином залежать від фазової та часової змінних, у випадку, коли розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності. Зокрема, отримано твердження, які доповнюють і узагальнюють відповідні результати Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода для автономного стохастичного диференціального рівняння. За допомогою теорії PRV-функцій встановлено умови асимптотичної еквівалентності в термінах коефіцієнтів рівняння, які забезпечують домінування в асимптотичному розумінні невипадкової складової розв'язку.

Для автономних стохастичних диференціальних рівнянь запропоновано поняття ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, яке дозволяє порівнювати поведінку розв'язків у випадку, коли обидва розв'язки прямують до нескінченності. Отримано необхідні та достатні умови ψ–асимптотичної еквівалентності розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь і розв'язків детермінованих звичайних диференціальних рівнянь. Знайдено критерій $\psi_{1,2}(\psi)$-асиптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь та $\psi_{1,2}(\psi)$-асиптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь.

Окрім того, наведено достатні умови необмеженості м.н. розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння, що узагальнюють відповідні умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, ψ-асимптотична еквівалентність, правильно змінна функція, точний порядок росту, необмеженість розв'язку.

АННОТАЦИЯ

Тимошенко Е.А. Асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных уравнений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. – Институт математики, НАН Украины, Киев, 2015.

Диссертация посвящена исследованию асимптотического поведения решения η неавтономного стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta(t) = a(t,\eta(t))dt + \sigma(t,\eta(t))dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, b > 0.$$

В первой части работы устанавливаются условия точного порядка роста решения уравнения, возмущенного с помощью винеровского процесса, с коэффициентами смещения и диффузии, которые специальным образом зависят от фазовой и временной переменных, а именно $a(t,x) = g(x)\varphi(t)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)\ \theta(t)$, где g, σ – непрерывные положительные функции, φ, θ – непрерывные функции. Рассматривается только та ситуация, когда решение стохастического дифференциального уравнения стремится к бесконечности почти наверно. В работе найдены условия, при которых решение стохастического уравнения асимптотически эквивалентно решению обыкновенного дифференциального уравнения $d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt,\ t \geq 0;\ \mu(0) \equiv b, b > 0$, т.е.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ п.н.}$$

Полученные утверждения дополняют и обобщают соответствующие результаты И.И. Гихмана и А.В. Скорохода для автономного случая.

Во второй части работы для автономных стохастических дифференциальных уравнений с коэффициентами $a(t,x) = g(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ предложено понятие ψ-асимптотической эквивалентности решений одномерных автономных стохастических дифференциальных уравнений и решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которое позволяет сравнивать поведение решений в случае, когда оба решения стремятся к бесконечности. Получены необходимые и достаточные условия ψ-асимптотической эквивалентности решений автономных стохастических дифференциальных уравнений и решений детерминированных обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдено критерий $\psi_{1,2}(\psi)$-асиптотической эквивалентности решений двух обыкновенных дифференциальных уравнений и $\psi_{1,2}(\psi)$-асиптотической эквивалентности решений двух стохастических дифференциальных уравнений.

В третьей части найдены достаточные условия того, что решение неавтономного стохастического дифференциального уравения почти наверное стремится к бесконечности.

Ключевые слова: ψ-асимптотическая эквивалентность решений, правильно меняющаяся функция, точный порядок роста, неограниченность решения.

ANNOTATION

Tymoshenko O.A. The asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. – Manuscript.

The thesis is for obtaining a scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Science in specialty 01.01.05 – Probability Theory and Mathematical Statistics. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The thesis is devoted to the study of asymptotic behaviour of stochastic differential equation solution.

Exact order of growth of solution of equation perturbed by Wiener process with time depended coefficient of drift and diffusion are presented in the work. Solution of equation is supposed to tend to infinity as time growth unboundedly to infinity. Results that extend and generalize corresponding results of I.I. Gihman and A.V. Skorohod for autonomous stochastic differential equation are obtained, in particular. Theory of PRV-functions are used to state sufficient conditions of asymptotic equivalence in terms of equation coefficients. It ensures domination role of non random component of solution in some asymptotic sense.

Notion of ψ-asymptotic equivalence of one-dimensional autonomous stochastic differential equation solution and ordinary differential equation solution are proposed. It helps to compare behaviour of solutions when both of them tend to infinity. Necessary and sufficient conditions of ψ-asymptotic equivalence of autonomous stochastic differential equation solutions and ordinary differential equation solutions are obtained. The criterion of $\psi_{1,2}$-asymptotic equivalence of two ordinary differential equation solutions and $\psi_{1,2}$-asymptotic equivalence of two stochastic differential equation solutions are found.

Moreover, sufficient conditions of unboundedness of nonautonomous stochastic differential equation solution are stated. They generalize corresponding conditions of I.I. Gihman and A.V. Skorohod

Key words: stochastic differential equation, ψ-asymptotic equivalent solutions, pseudo-regularly varying function, exact order of growth.