Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

На правах рукопису

Тимошенко Олена Анатоліївна

УДК 519.21

Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Наукові керівники:
доктор фіз.-мат. наук, проф. $\boxed{\text{В.В. Булдигін}}$
доктор фіз.-мат. наук, проф. О.І. Клесов

Київ – 2015

ЗМІСТ

ПОЗНАЧЕННЯ **5**

ВСТУП **7**

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ 34

РОЗДІЛ 2. Допоміжні результати. **41**

2.1. Стохастичні диференціальні рівняння 41

2.1.1. Існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння першого порядку 41

2.1.2. Необмеженість розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь 42

2.1.3. Точний порядок росту автономного стохастичного диференціального рівняння 44

2.1.4. Формула Іто 46

2.1.5. Властивість стохастичного інтегралу 47

2.2. Правильно змінні функції 48

2.2.1. RV та ORV-функції 48

2.2.2. PRV-функції 50

2.2.3. SQI-функції 53

2.2.4. Квазіобернені функції 54

2.2.5. Квазіобернені функції, які зберігають еквівалентність функцій 55

РОЗДІЛ 3. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтом зсуву та дифузії, що залежать від часу. **56**

3.1. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від часу. 60

3.1.1. Умови та формулювання основного результату 60

3.1.2. Достатні умови асимптотичної еквівалентності $G \circ \eta$ та Φ м.н 65

3.1.3. Достатні умови м.н. асимптотичної еквівалентності розв'язку η та розв'язку μ 69

3.1.4. Допоміжні твердження 73

3.1.5. Доведення теореми 3.1 79

3.1.6. Доведення теореми 3.2 79

3.2. Асимптотична еквівалентність розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь. 81

3.2.1. Умови та формулювання основного результату 81

3.2.2. Випадок $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1$ 83

3.2.3. Випадок $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1$ 88

3.2.4. Випадок суперпозиції функцій $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))} = 1$ 90

3.3. Асимптотична еквівалентність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами виду $g(t,x) = g(x)\varphi(t),\ \sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t)$. 94

3.4. Висновки 97

РОЗДІЛ 4. ψ-асимптотична стійкість розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь. **98**

4.1. Граничні співвідношення між розв'язками стохастичних та звичайних автономних диференціальних рівнянь. 101

4.1.1. Умови та формулювання основного результату 101

4.2. Достатні умови для (4.11) та (4.12) 110

4.2.1. Умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода 115

4.2.2. Умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера 117

4.3. ψ-асимптотична стійкість розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними. 119

4.3.1. Умови та формулювання основного результату 119

4.4. Гранична поведінка відношення розв'язку стохастичного диференціального рівняння та розв'язку іншого звичайного диференціального рівняння 129

4.5. ψ-асимптотична еквівалентність розв'язків двох стохастичних автономних диференціальних рівнянь. 134

4.6. Висновки 137

РОЗДІЛ 5. Необмеженість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь 138

5.1. Необмеженість розв'язку стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часу. 139

5.2. Дослідження поведінки розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння на нескінченності за допомогою функцій правильної зміни. 150

5.3. Кілька допоміжних тверджень. 155

5.4. Висновки 160

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 162

ПОЗНАЧЕННЯ

м.н. – майже напевно;

ПЗВЧ – підсилений закон великих чисел;

ORV-функція – O-правильно змінна функція;

PRV-функція – псевдоправильно змінна функція;

RV-функція – правильно змінна функція;

SQI-функція – достатньо швидко зростаюча функція;

$\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ – стандартний імовірносний простір;

SV-функція – повільно змінна функція;

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{R}^1$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{R}^1_+$ – множина невід'ємних чисел;

$\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathbb{R}^1_+)$ – множина дійсних функцій $f{=}(f(t), t \geq 0)$;

$\mathrm{F}_+ = \bigcup_{A>0} \{f \in \mathrm{F} \mid \ f(t) > 0,\ t \in [A,\ \infty)\}$;

$\mathrm{F}^{(\infty)}$ – простір функцій $f \in \mathrm{F}_+$ таких, що

(i) $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} f(t) < \infty \ \ \forall T > 0$,

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup f(t) = \infty$;

F^{∞} – множина функцій $f \in \mathrm{F}^{(\infty)}$ таких, що

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty;$$

$C^{(\infty)}$ – множина, яка містить неперервні функції з простору $\mathrm{F}^{(\infty)}$;

C^∞ – множина, яка містить неперервні функції з простору F^∞;

C^∞_{inc} – множина функцій $f \in C^\infty$, які строго зростають для великих t;

w – стандартний вінерів процес.

ВСТУП

Актуальність теми.

Дослідження асимптотичної поведінки випадкових процесів посідають одне з чільних місць у сучасній теорії ймовірностей. Однією з найбільш ефективних моделей випадкових процесів є стохастичні диференціальні рівняння, які, своєю чергою, є основою для досліджень у багатьох розділах економіки, теорії управління, теорії передачі інформації, статистичної фізики та ін. Інтерес до вивчення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь пояснюється тим, що вони виникають у багатьох прикладних задачах, наприклад в задачах фільтрації, в задачах про оптимальну зупинку, у стохастичному підході до детермінованих крайових задач, у стохастичному управлінні, в задачах екології та фінансової математики. Дослідженню їхніх властивостей присвячено численні серії наукових публікацій та монографій не тільки останніх десятиріч.

Практично всі сучасні монографії, присвячені теорії випадкових процесів, містять розділи про стохастичні інтеграли і стохастичні диференціальні рівняння (наприклад, [13, 15, 19, 29, 31, 33, 139]). Існує багато монографій, присвячених стохастичним інтегралам та стохастичним диференціальним рівнянням (наприклад, [14,30,32,37,60,61,87,94,128,129,135,137]). Особливий інтерес викликають роботи, які присвячено безпосередньо застосуванню теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Тут слід відміти монографії К.В. Гардинера [22], Н.Г. Ван Кампена [41] і книги [35,65,93,138] про застосування стохастичних методів в фізиці, хімії та інших природничих і технічних науках. Одним з напрямків, що активно розвиваються є застосування стохастичних диференціальних рівнянь у стохастичній фінансовій математиці та економіці [2, 80].

Вважається, що термін "стохастичні диференціальні рівняння" належить С. Н. Бернштейну, який розглядав певні схеми для отримання ланцюгів Маркова з подальшим граничним переходом, які і називав стохастичними диференціальними рівняннями. Результати робіт С.Н. Бернштейна [3,4] в подальшому застосовувались в теорії стохастичних диференціальних рівнянь, основи якої заклали Й.І. Гіхман [23,24] та К. Іто [108–110] (незалежно один від одного). Вони представили загальне означення стохастичного диференціального рівняння і довели теореми існування та єдиності сильного розв'язку.

Слід також відмітити монографії Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [29–32], в яких представлено систематичне викладення теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Особлива увага в [29–32] приділяється багатовимірним рівнянням, проблемам існування та єдиності розв'язку, який не є неперервним і не є марковським процесом, досліджується асимптотична поведінка та стійкість розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь.

У монографіях К. Іто та Г. Маккіна [37], Є.Б. Динкіна [34], Дж.Л. Дуба [33], М.В. Крилова [46], Г. Маккіна [61] відображено основні етапи розвитку цієї теорії, основними завданнями якої є дослідження існування та єдиності розв'язку, його обмеженості, стійкості, ергодичності тощо.

Одним з важливих завдань при дослідженні стохастичних диференціальних рівнянь є вивчення асимптотичної поведінки розв'язку цього рівняння на нескінченності.

Й.І. Гіхман та А.В. Скороход [32] досліджували асимптотичну еквівалентність розв'язку стохастичного диференціального рівняння та розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння. Інший підхід до розв'язання цієї задачі представлено в роботі Г.Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера [118]. Саме таку задачу для багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь розглядалася в [121]. Аналогічні задачі, але для дискретного часу та стохастичних різницевих рівнянь, розв'язувалися в [112, 119, 122]. Г.Л. Кулініч [49–57] досліджував граничну поведінку розв'язків стохастичних однорідних та нестійких дифузійних рівнянь. Ним були досліджені питання про асимптотичну поведінку розподілів функціоналів від дифузійного процесу, про асимптотичну поведінку модуля розв'язку стохастичного диференціального рівняння в одновимірному та багатовимірному просторах, а також для рівнянь із випадковими коефіцієнтами.

Дослідження стохастичних диференціальних рівнянь закономірно привели до застосування широкого спектру підходів, одним з яких є вивчення стохастичного диференціального рівняння за допомогою відповідних звичайних диференціальних рівнянь. Саме цей метод ефективно застосовувався Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом [32] для визначення асимптотичної поведінки випадкового процесу, що є розв'язком автономного стохастичного диференціального рівняння, за допомогою поведінки відповідної невипадкової функції.

А.М. Самойленко та О.М. Станжицький в [68] вивчали задачу про

$$\eta(t) - \mu(t) \to 0 \text{ м.н. при } \quad t \to \infty,$$

де η – це розв'язок стохастичного диференціального рівняння, μ – розв'язок відповідного звичайного диференціального рівняння. Ці дослідження було продовжено в [44, 45]. Т. Мітсуі [130] розглядав задачу про

$$\eta(t) - \eta_n(t) \to 0 \text{ м.н. при } \quad t \to \infty,$$

де η – це розв'язок стохастичного диференціального рівняння, η_n – це апроксимація Ейлера розв'язку стохастичного диференціального рівняння.

У цій дисертаційній роботі досліджується асимптотична поведінка розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь за допомогою асимптотичної поведінки розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння, тобто

$$\frac{\eta(t)}{\mu(t)} \to 1 \text{ м.н. при } \quad t \to \infty.$$

Таким чином ми розглядаємо узагальнення задачі, яку вивчали Й.І. Гіхман та А.В. Скороход в [30] для неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

У дослідженнях використовуються псевдорегулярні функції (PRV), загальна теорія яких була розроблена в серії робіт В.В. Булдигіна, О.І. Клесова, Й.Г. Штайнебаха [6–8, 12].

Функції, які згодом назвали псевдорегулярно змінними [12], з'явилися в різних математичних дослідженнях досить давно, хоча до останнього часу використовувалися лише ті чи інші властивості таких функцій. Їх вивчали, наприклад, Б.І. Коренблюм [58], У. Штадтмюллер і Р. Траутнер [145], А.Л. Якимів [81]. Повну теорію таких функцій було створено в [12].

PRV-функції є природним узагальненням правильно змінних функцій, які мають велике значення для багатьох розділів сучасної математики, таких як теорія ймовірностей, теорія чисел, математична фізика, диференціальні рівняння. Застосування правильно змінних функцій пов'язані в першу чергу з теоремами абелевого типу. Вони застосовуються в математиці в основному завдяки ролі, яку відіграють у теоремах абелевого і тауберового типів. Зважаючи на результати досліджень про асимптотичну еквівалентність для PRV-функцій, природним є завдання отримати умови точного порядку зростання до нескінченності розв'язків автономного та більш загальних стохастичних диференціальних рівнянь і вивчити узагальнену задачу про ψ-асимптотичну еквівалентність, використовуючи теорію псевдорегулярних функцій. До того ж PRV-теорія дає можливість виписати умови асимптотичної еквівалентності в термінах коефіцієнтів рівняння, що в результаті забезпечує зникнення випадкової компоненти в коефіцієнтах для граничного процесу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" в рамках держбюджетної дослідницької теми № 2500 "Псевдорегулярні та спеціальні функції і їхнє застосування до задач стохастичного аналізу"(ДР № 0112U001588) та теми № 2810 "Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення"(ДР № 0115U00371).

Мета та задачі дослідження.

Метою роботи є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

У роботі розглядаються такі задачі:

- встановлення точного порядку росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з залежними від часу коефіцієнтами зсуву та дифузії;
- отримання умов асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часу;
- визначення ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь;
- дослідження $\psi_{1,2}$-асимптотичної поведінки розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь;
- отримання умов $\psi_{1,2}$-асимптотичної еквівалентності розв'язків двох одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь;

- знаходження умов необмеженості розв'язку стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часу.

Об'єктом дослідження є стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t))dt + \sigma(t, \eta(t))dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, b > 0. \tag{0.1}$$

Також досліджується відповідне до стохастичного звичайне диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = a\left(t, \mu(t)\right) dt,\ t \geq 0;\ \mu(0) \equiv b,\ b > 0. \tag{0.2}$$

Окремо розглядається стохастичне диференціальне рівняння з відокремлювальними змінними, коли $a(t, x) = g(x)\varphi(t)$, $\sigma(t, x) = \sigma(x)\theta(t)$. А також досліджується автономне рівняння з коефіцієнтами $a(t, x) = g(x)$, $\sigma(t, x) = \sigma(x)$. Саме для таких рівнянь вивчається узагальнена задача про $\psi_{1,2}$-еквівалентність.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка розв'язку η стохастичного диференціального рівняння (0.1).

Методика дослідження.

У роботі використовуються результати теорії стохастичних диференціальних рівнянь, теорії псевдорегулярних функцій, теорії звичайних диференціальних рівнянь. Застосовуються теореми про дуальність асимптотичної поведінки відношення функцій та відношення узагальнених обернених функцій, асимптотичні властивості *псевдорегулярних функцій*, *функцій з достатньо швидким зростанням та квазіобернених функцій.*

Наукова новизна одержаних результатів.

Всі отримані у роботі результати є новими. Зокрема,

- отримано умови еквівалентності розв'язків детермінованого неавтономного диференціального рівняння та збуреного за допомогою вінерівського процесу у випадку, коли розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності;

- запропоновано поняття ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, яке дозволяє порівнювати поведінку розв'язків у випадку, коли різниця між ними не є обмеженою;

- отримано умови ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків одновимірних автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь;

- для неавтономного стохастичного диференціального рівняння наведено достатні умови, що гарантують необмеженість розв'язку та узагальнюють відповідну умову Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Практичне значення одержаних результатів.

Усі отримані у дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер. Теоретична цінність результатів полягає у дослідженні асимптотичної поведінки при $t \to \infty$ розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, коефіцієнти зсуву та дифузії яких залежать від фазової та часової змінних.

Результати дисертації мають практичне застосування у задачах теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, статистики випадкових процесів, фінансовій математиці тощо. Їх можна застосовувати у дослідженні фізичних, хімічних, економічних, біологічних явищ, що моделюються за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача.

Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

За результатами дисертації опубліковано сім робіт ([10, 11, 43, 74, 102, 103, 124]), з них чотири у співавторстві з науковим керівником проф. В.В. Булдигіним та дві з науковим керівником проф. О.І. Клесовим, в яких В.В. Булдигіну та О.І. Клесову належить постановка завдань та загальне керівництво роботою. Одна робота є авторською.

Апробація результатів.

Результати дисертації доповідались та обговорювалися на

- XI-ій Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 2006 р.);
- Міжнародній конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications I"(м. Київ, 2006 р.);
- Міжнародній конференції "Skorohod Space 50 years on"(м. Київ, 2007 р.);
- XII-ій Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 2008 р.);
- конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання"(м. Умань, 2008 р.);
- іжуніверситетській науковій конференції з математики та фізики для студентів та молодих вчених (м. Київ, 2009 р.);
- Міжнародній конференції "Stochastic analysis and random dynamics"(м. Львів, 2009 р.);
- XIV-ій Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 2012 р.);
- Міжнародній конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications III"(м. Київ, 2012 р.);

- міжуніверситетській науковій конференції з математики та фізики для студентів та молодих учених (м. Київ, 2013 р.);
- німецько-українській конференції "Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory"(м. Ульм, (Німеччина), 2013 р.);
- німецько-українській конференції "Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory"(м. Коктебель, 2013 р.);
- німецько-українській конференції "Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory"(м. Ульм, (Німеччина), 2014 р.);
- XV-ій Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 2014 р.);
- засіданні наукового семінару "Стохастика та її застосування"при кафедрі дослідження операцій КНУ імені Т.Г. Шевченко, керівник О.М. Іксанов (м. Київ, 2014 р.);
- засіданнях наукового семінару з теорії випадкових процесів при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"(м. Київ, 2006 р., 2010 р., 2013 р., 2014 р.);
- засіданнях наукового семінару "Исчисление Маллявена и его приложения"Інституту математики НАН України, керівник А.А. Дороговцев (м. Київ, 2014 р., 2015 р.);
- засіданні наукового семінару ”Стохастичні диференціальні рівняння” при кафедрі загальної математики КНУ імені Т.Г. Шевченко, керівники О.М. Станжицький, Г.Л. Кулініч (м. Київ, 2014 р.).

Публікації

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 7 статей у фахових виданнях ([10, 11, 43, 74, 102, 103, 124]) і 14 тез доповідей на конференціях ([154–168]).

Зміст дисертації

Дисертація складається із вступу, огляду літератури, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету й задачі дослідження, виділено наукову новизну та практичну значущість отриманих результатів.

У **огляді літератури** (перший розділ) розглянуто відомі результати, що стосуються теми даної роботи та спорідненими питаннями, відомості щодо аналогічних результатів, отриманих іншими авторами.

У **другому розділі** наведені необхідні в наступних розділах означення, поняття, факти щодо теорії стохастичних диференціальних рівнянь, теорії псевдорегулярних функцій, теорії функцій правильної зміни.

Третій розділ присвячено дослідженню *точного порядку зростання розв'язку* стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, які залежать від часу .

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right)\varphi(t)dt + \sigma\left(\eta(t)\right)\theta(t)dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, b > 0, \qquad (0.3)$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала. Припустимо, що $\varphi = \left(\varphi(t),\ t \in \mathbb{R}^1_+\right)$ та $\theta = \left(\theta(t),\ t \in \mathbb{R}^1_+\right)$ – дійсні неперервні функції, $g = \left(g(x),\ x \in \mathbb{R}^1\right)$ та $\sigma = \left(\sigma(x),\ x \in \mathbb{R}^1\right)$ – неперервні додатні функції такі, що (0.3) має неперервний розв'язок η.

Нехай $\mu = \left(\mu(x), x \in \mathbb{R}^1\right)$ – неперервний розв'язок звичайного диференціального рівняння, яке відповідає стохастичному диференціальному рівняння (0.3) при $\sigma \equiv 0$, тобто

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right)\varphi(t)dt, t \geq 0;\;\; \mu(0) = b, b > 0. \tag{0.4}$$

Припустимо, що функції g та φ такі, що існує неперервний розв'язок μ та задовольняє умову $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$.

Для $t \geq 0$ введемо позначення

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(u)du \text{ та } \Phi_+(t) = \int\limits_0^t |\varphi(u)|\, du$$

та припустимо, що

$$\Phi(t) > 0,\;\; t > 0; \tag{0.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty, \tag{0.6}$$

а також

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} < \infty. \tag{0.7}$$

та

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \int\limits_b^x \frac{ds}{g(s)} = \infty. \tag{0.8}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай θ та φ – неперервні функції, g та σ – неперервні додатні функції такі, що* (0.3) *має неперервний розв'язок η. Нехай виконуються умови* (0.5), (0.6), (0.7) *та* (0.8).

Припустимо,що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} < \infty; \tag{0.9}$$

а також нехай виконуються наступні дві умови:

а) функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

б) функція g є неперервно диференційованою та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t |g'(\eta(s))|\, \theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0 \;\text{ м.н. на множині }\; \left\{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\right\}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G\left(\eta(t)\right)}{\Phi(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}.$$

Далі представлена теорема, що описує умови, достатні для асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичного та звичайного диференціальних рівнянь.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються всі умови теореми 3.1, а також*

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{du}{g(u)G(u)}>0 \quad \text{для всіх } c>1.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\},$$

де η *– розв'язок рівняння* (0.3) *та* μ *– розв'язок рівняння* (0.4).

Наступний результат дає достатні умови, за яких розв'язки стохастичного та звичайного диференціальних рівнянь є асимптотично еквівалентними на нескінченності у випадку, коли функція φ приймає лише додатні значення.

Наслідок 3.1. *Нехай* θ *– неперервна функція,* g, φ *та* σ *– неперервні додатні функції такі, що* (0.3) *має неперервний розв'язок* η. *Нехай виконуються умови* (0.5), (0.8), (0.9) *і крім того:*

а) функція $\frac{\sigma}{g}$ *є обмеженою;*

б) існує похідна $g'(t),\ t>0$, *та*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g'\left(\eta(t)\right)\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}.$$

Перш ніж вивчати умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь, досліджуються умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь, що відповідають стохастичним.

Нехай $\mu_k = (\mu_k(t),\ t \geq 0)$ – це неперервний розв'язок задачі Коші звичайного диференціального рівняння

$$d\mu_k(t) = g_k\left(\mu_k(t)\right)\varphi_k(t)dt,\ \ t \geq 0;\ \ \mu_k(0) = b_k,\ \ b_k > 0, k = 1, 2. \qquad (0.10)$$

Припустимо, що для кожного $k = 1, 2$, функція g_k з (0.10) є неперервною та додатною на $(0, \infty)$ та функція φ_k є неперервною.

Для $k = 1, 2$ покладемо

$$G_k(x) = \int\limits_{b_k}^{x} \frac{ds}{g_k(s)},\ \ x \geq b_k,$$

та

$$\Phi_k(t) = \int\limits_0^t \varphi_k(u)du,\ \ (\Phi_k)_+(t) = \int\limits_0^t \left|\varphi_k(u)\right| du,\ \ t \geq 0.$$

В подальшому для $k = 1, 2$ будемо використовувати наступні умови

$$\lim_{t\to\infty} G_k(x) = \infty; \qquad (0.11)$$

$$\Phi_k(t) > 0,\ \ t \geq 0 \text{ та } \lim_{t\to\infty} \Phi_k(x) = \infty; \qquad (0.12)$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_k(u)G_k(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1; \qquad (0.13)$$

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_k(u)G_k(u)} = 0. \qquad (0.14)$$

Розглянемо два випадки. В першому випадку, припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1. \qquad (0.15)$$

Ми отримаємо умови для рівнянь (3.5), при яких виконуються наступні три співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1, \qquad (0.16)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1, \qquad (0.17)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(t)}{G_2(t)}=1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1. \tag{0.18}$$

В другому випадку, припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(t)}{G_2(t)}=1, \tag{0.19}$$

та розглянемо умови, при яких справедливі співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1, \tag{0.20}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)}=1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1\,, \tag{0.21}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)}=1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1\,. \tag{0.22}$$

Наступні дві теореми описують необхідні та достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 3.3. *Нехай функції g_k та φ_k, $k=1,2$ задовольняють* (0.11), (0.12) *та* (0.15).

Тоді

1) якщо (0.13) *виконується хоча б для одного $k=1,2$, тоді справедливо* (0.16)*;*

2) якщо (0.14) *виконується хоча б для одного $k=1,2$, тоді справедливо* (0.17)*;*

3) якщо (0.13) *виконується хоча б для одного $k=1,2$ і хоча б для одного $k=1,2$ виконується* (0.14)*, тоді справедливо* (0.18).

Якщо G_1 та G_2 є асимптотично еквівалентними, то має місце наступний результат.

Теорема 3.4. *Нехай функцій g_k та φ_k, $k=1,2$ задовольняють* (0.11), (0.12) *та* (0.19).

Тоді,

1) якщо (0.13) *виконується хоча б для одного $k=1,2$, тоді справедлива імплікація* (0.20)*;*

2) якщо (0.14) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$*, тоді справедлива імплікація* (0.21)*;*

3) якщо (0.13) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$ *і хоча б для одного* $k = 1, 2$ *виконується* (0.14)*, тоді справедлива еквівалентність* (0.22)*.*

З попередніх результатів випливають умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння для $k = 1, 2$

$$d\eta_k(t) = g_k\left(\eta_k(t)\right)\varphi_k(t)dt + \sigma_k\left(\eta_k(t)\right)\theta_k(t)dw_k(t),\ t \geq 0; \tag{0.23}$$

$$\eta_k(0) \equiv b_k, b_k > 0,$$

де $w_k,\ k = 1, 2$ – стандартний вінерів процес, визначений на єдиному ймовірнісному просторі; $b_k,\ k = 1, 2$ – невипадкова додатна стала; $\theta_k,\ \varphi_k,\ k = 1, 2$ – дійсні неперервні функції; $g_k,\ \sigma_k,\ k = 1, 2$ – неперервні додатні функції такі, що для кожного $k = 1, 2$ стохастичне диференціальне рівняння (0.23) має єдиний та неперервний розв'язок $\eta_k = (\eta_k(t),\ t \geq 0)$.

Нехай виконуються наступні умови для $k = 1, 2$:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{(\Phi_k)_+(t)}{\Phi_k(t)} < \infty; \tag{0.24}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2^n}\theta_k^2(s)ds}{(\Phi_k)_+^2(2^n)} < \infty; \tag{0.25}$$

$$\text{функція } \frac{\sigma_k}{g_k} \text{ є обмеженою;} \tag{0.26}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t\left|g_k'(\eta_k(s))\right|\theta_k^2(s)ds}{(\Phi_k)_+(t)} = 0 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta_k(t) = \infty\right\}. \tag{0.27}$$

Наступні два твердження дають умови асимптотичної еквівалентності розв'язків η_1 та η_2.

Теорема 3.5. *Припустимо, що для кожного* $k = 1, 2$ *виконуються умови* (0.11)*,* (0.12)*,* (0.24)*–*(0.27) *та функції* Φ_1 *та* Φ_2 *є асимптотично еквівалентними. Тоді*

1. *якщо* (0.13) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$ *та функції* G_1 *та* G_2 *є асимптотично еквівалентними при* $t \to \infty$, *тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \bigcap_{k=1}^{2} \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta_k(t) = \infty \right\}; \tag{0.28}$$

2. *якщо* (0.14) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$ *та* (0.28) *виконується з*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{2} \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta_k(t) = \infty \right\} \right) > 0, \tag{0.29}$$

тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1;$$

3. *якщо виконується* (0.29) *та якщо* (0.13) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$, *а також якщо* (0.14) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$, *тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \Leftrightarrow (0.28).$$

Теорема 3.6. *Припустимо, що для кожного* $k = 1, 2$ *виконуються умови* (0.11), (0.12), (0.24)–(0.27) *та функції* G_1 *та* G_2 *є асимптотично еквівалентними. Тоді*

1. *якщо* (0.13) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$ *та функції* Φ_1 *та* Φ_2 *є асимптотично еквівалентними при* $t \to \infty$, *то виконується* (0.28)*;*

2. *якщо* (0.14) *виконується хоча б для одного*$k = 1, 2$, *а також виконуються* (0.28) *та* (0.29), *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1;$$

3. *якщо виконується* (0.29) *та якщо* (0.13) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$, *якщо* (0.14) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1 \Leftrightarrow (0.28).$$

Четвертий розділ присвячено дослідженню ψ-асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь та відповідних до них звичайних диференціальних рівнянь. У цьому розділі розглядаються лише автономні рівняння, тобто рівняння для яких $a(t,x) = g(x)$ та $\sigma(t,x) = \sigma(x)$.

Розглянемо розв'язок $\eta = (\eta(t),\ t \geq 0)$ стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right)dt + \sigma\left(\eta(t)\right)dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, b > 0. \tag{0.30}$$

Нехай $\mu = (\mu(t),\ t \geq 0)$ – розв'язок звичайного диференціального рівняння, що відповідає (0.30) при $\sigma \equiv 0$, тобто

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right)dt, \quad t \geq 0,\ \mu(0) = b > 0. \tag{0.31}$$

Вважаємо, що функції g, σ та ψ задовольняють наступні умови.

1. Функція g неперервна додатна на $\mathbb{R}^1_+$, функція σ неперервна додатна на $\mathbb{R}^1$, g та σ такі, що (0.30) має м.н. єдиний неперервний розв'язок η та (0.31) має єдиний неперервний розв'язок μ.

2. $\psi = (\psi(x), x \in \mathbb{R}^1{}_+)$ при $x \geq x_0 \geq 0$ є додатною неперервно-диференційовною функцією, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$.

Покладемо

$$G^{(\psi)}(\cdot) = G(\psi^{-1}(\cdot)), \quad g^{(\psi)}(\cdot) = g(\psi^{-1}(\cdot))\psi'(\psi^{-1}(\cdot)),$$

де $\lim\limits_{t\to\infty} G(t) = \int\limits_b^\infty \dfrac{du}{g(u)}$, функція $\psi^{-1}(u)$, $u \geq \psi(x_0)$, є оберненою до ψ, і ψ' є першою похідною функції ψ.

Теорема 4.1. *Припустимо, що виконуються наступні дві умови:*

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \int_b^\infty \frac{du}{g(u)} = \infty; \tag{0.32}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{t}^{ct}\frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)}=\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)}\frac{du}{g(u)G(u)}>0 \textit{ для всіх } c>1. \tag{0.33}$$

Тоді

а) якщо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t}=1 \text{ м.н.}, \tag{0.34}$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(t))}=1 \text{ м.н.}; \tag{0.35}$$

б) якщо

$$\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t}^{ct}\frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)}=\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)}\frac{du}{g(u)G(u)}=0,$$

то (0.35) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується* (0.34).

Теорема 4.1 дозволяє дослідити обмеження, за яких розв'язок η рівняння (0.30) та розв'язок μ рівняння (0.31) є ψ-асимптотично еквівалентними, тобто виконується співвідношення (0.35).

Умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [30]:

[ГС1] g – додатна неперервна функція на $\mathbb{R}^1_+$;

[ГС2] для всіх $t>0$ існує похідна $g'(t)$, така що $g'(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

[ГС3] σ – додатна неперервна функція на $\mathbb{R}^1$;

[ГС4] рівняння (4.4) має м.н. єдиний неперервний розв'язок η, для якого $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty$ м. н. та диференціальне рівняння (4.5) має єдиний неперервний розв'язок;

[ГС5] функція $\frac{g}{\sigma}$ є обмеженою.

Теорема 4.2. *Нехай ψ – додатна неперервно диференційована функція, строго зростаюча до нескінченності при $x \to \infty$, виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода і* (0.32)*. Якщо має місце* (0.33)*, то виконується співвідношення* (0.35)*.*

Аналогічний результат можна довести, якщо замість умов Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода використовувати *умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера* [118]: для $t > 0$ покладемо

$$h(t) = \frac{g'(t)\sigma^2(t)}{2}, \quad \psi(t) = \int\limits_1^t \frac{\sigma^2(u)}{g^3(u)} du.$$

[KKR0] функція g неперервна додатна на $\mathbb{R}^1_+$, функція σ неперервна додатна на $\mathbb{R}^1$, g та σ такі, що (0.30) має м.н. єдиний неперервний розв'язок, для якого $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ м. н. та диференціальне рівняння (0.31) має єдиний неперервний розв'язок.

[KKR1] $g : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ є двічі непевно диференційованою такою, що

$$\int_1^\infty (g(u))^{-1} du = \infty.$$

[KKR2] $h(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

[KKR3] $\sigma : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ є двічі неперервно-диференційованою строго додатною функцією і

$$\int\limits_0^\infty (tg(\mu(t)))^{-2} \sigma^2(\mu(t)) dt < \infty.$$

[KKR4] функції g, g', $\frac{\sigma^2(\mu)}{g^2(\mu)}$ і $h(\mu)$ строго вогнуті або випуклі.

Має місце теорема.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови [KKR0]-[KKR4] та $\psi-$ додатна неперервно диференційована функція строго зростаюча до нескінченності при $x \to \infty$. Якщо має місце* (0.33)*, то має місце* (0.35)*.*

У цьому розділі також розглядаються умови, при яких розв'язки μ_1 та μ_2 рівнянь виду (0.31) є $\psi_{1,2}$-асимптотично-еквівалентними, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1. \tag{0.36}$$

Розглянемо диференціальні рівняння виду (0.31) та припустимо, що

(B1) функція $g_k,\ k=1,2$ є неперервною додатною, визначеною на $(0,\infty)$ та такою, що диференціальне рівняння (0.31) має єдиний неперервний розв'язок μ_k.

(B2) $\psi_k=(\psi_k(x),\ x>0)$ додатна неперервно-диференційована функція, строго зростаюча до нескінченності при $x\to\infty$.

Теорема 4.4. *Нехай функції g_k та $\psi_k,\ k=1,2$ задовольняють (B1), (B2) та*

$$\lim_{x\to\infty}\int_{b_k}^{x}\frac{ds}{g_k(s)}=\infty,\ k=1,2. \tag{0.37}$$

Тоді

1) якщо умова

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{t}^{ct}\frac{du}{g_k^{(\psi_k)}(u)G_k^{(\psi_k)}(u)}=\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{\psi_k^{-1}(t)}^{\psi_k^{-1}(ct)}\frac{du}{g_k(u)G_k(u)}>0 \text{ для всіх } c>1 \tag{0.38}$$

виконується хоча б для одного $k=1,2$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1\ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1;$$

2) якщо умова

$$\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t}^{ct}\frac{du}{g_k^{(\psi_k)}(u)G_k^{(\psi_k)}(u)}=\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\psi_k^{-1}(t)}^{\psi_k^{-1}(ct)}\frac{du}{g_k(u)G_k(u)}=0 \tag{0.39}$$

виконується хоча б для одного $k=1,2$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1\ \Leftarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1;$$

3) якщо (0.38) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$ *і хоча б для одного* $k = 1, 2$ *виконується* (0.39), *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1.$$

Наступний результат дає умови $\psi_{1,2}$-еквівалентності для RV функцій.

Наслідок 4.1. *Нехай функцій* g_k *та* ψ_k, $k = 1, 2$, *такі, що виконуються умови (B1) і (B2). Якщо хоча б одна з функцій* $g_k^{(\psi_k)}$ *є RV-функцією з індексом* $\alpha < 1$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1.$$

Теорема 4.4 дає умови, за яких виконується $\psi_{1,2}$-еквівалентність для інтегральних функцій. Але можливо встановити зв'язок між $\psi_{1,2}$-асимптотичною еквівалентністю підінтегральних функцій G_1**,** G_2 та ψ-асимптотичною еквівалентністю розв'язків μ_1, μ_2.

Теорема 4.5. *Нехай функції* g_k *та* ψ_k, $k = 1, 2$ *такі, що виконуються умови (B1), (B2) та* (0.37).

Якщо хоча б для одного $k = 1, 2$ *виконується умова* (0.38), *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1.$$

Наслідок 4.2. *Нехай функції* g_k, $k = 1, 2$ *такі, що виконуються умови (B1),*(0.37), *функція* ψ*-додатна неперервно-диференційована, строго зростаюча до нескінченності. Якщо хоча б для одного* $k = 1, 2$ *виконується* (0.38), *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\mu_1(t))}{\psi(\mu_2(t))} = 1.$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між $\psi_{1,2}$-асимптотичною еквівалентністю підінтегральних функцій G_1, G_2 та ψ-асимптотичною еквівалентністю розв'язків μ_1, μ_2 для RV-функцій.

Теорема 4.6. *Нехай функції g_k та ψ_k, $k = 1, 2$ такі, що виконуються умови (B1) і (B2). Якщо $g_1^{(\psi_1)}$ та $g_2^{(\psi_2)}$ є RV-функціями з індексами меншими ніж 1, то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1.$$

Наслідок 4.3. *Нехай для G_1, G_2 виконуються умови (B1) та функція ψ є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючою до нескінченності. Якщо $g_1^{(\psi)}$ і $g_2^{(\psi)}$ є RV-функціями з індексами меншими ніж 1, то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\mu_1(t))}{\psi(\mu_2(t))} = 1.$$

Наслідок 4.4. *Нехай G_1 та G_2 є RV-функціями з індексами меншими ніж 1 і виконується (B1). Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1.$$

Для двох стохастичних диференціальних рівнянь виду (0.30) має місце наступне твердження.

Теорема 4.7. *Нехай для $g = g_k$ і $\sigma = \sigma_k$, $k = 1, 2$ виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода, ψ_k, $k = 1, 2$ є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючою до нескінченності та має місце (0.37).*

1. *Якщо* (0.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.}, \tag{0.40}$$

і, крім того,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{0.41}$$

2. Якщо умови (0.38) *і* (0.39) *виконуються для кожного* $k = 1, 2$*, то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{0.42}$$

Аналогічна теорема є справедливою і для RV-функцій.

Теорема 4.8. *Нехай для* $g = g_k$ *і* $\sigma = \sigma_k$, $k = 1, 2$ *виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода,* ψ_k, $k = 1, 2$ *є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючою до нескінченності.*

1. *Якщо хоча б одна з* $g_1^{(\psi_1)}$ *або* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функцією з індексом меншими ніж 1, то виконуються співвідношення* (0.40) *та* (0.41)*.*

2. *Якщо* $g_1^{(\psi_1)}$ *і* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функціями з індексами меншими ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

П'ятий розділ присвячено дослідженню достатніх умов, при яких розв'язок неавтономного стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності.

Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = a\,(t,\eta(t))\,dt + \sigma\,(t,\eta(t))\,dw(t),\ t \ge 0; \eta(0) \equiv b > 0, \tag{0.43}$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала; η – розв'язок рівняння (0.43), a та σ – неперервні функції, визначені при $t \in \mathbb{R}_+^1$ та $x \in \mathbb{R}^1$. Позначимо

$$B(t,x) = \int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,\, y)}. \tag{0.44}$$

до того ж, нехай $B^{-1}(t,x)$– це функція обернена до функції $B(t,x)$ по змінній x при фіксованому t.

Припустимо, що

$$\lim_{x\to\infty} B(t,x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,\, y)} = \infty. \tag{0.45}$$

Розглянемо функцію

$$\tilde{a}(t,x) = -\int\limits_0^{B^{-1}(t,x)} \frac{\sigma_t'(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t,B^{-1}(t,x))}{\sigma(t,B^{-1}(t,x))} - \frac{1}{2}\sigma_x'(t,B^{-1}(t,x))$$

та покладемо

$$\alpha(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x),$$

$$A(T) = \int\limits_0^T \alpha(t)dt. \tag{0.46}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція. Припустимо, що стохастичне диференціальне рівняння* (0.43) *має м.н. неперервний розв'язок η. Функція σ є неперервно диференційовною по змінній t та по змінній x, виконується* (0.45) *та одна з умов*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1 \tag{0.47}$$

або

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^{-2v(x)}dx = +\infty \text{ та } \int\limits_0^\infty e^{-2v(x)}dx < +\infty, \tag{0.48}$$

де

$$v(x) = \int\limits_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} B(t,\eta(t)) = \infty \text{ м.н.} \tag{0.49}$$

Далі розглянемо декілька наслідків з теореми 5.1.

Наслідок 5.1. *Припустимо, що виконано всі умови теореми 5.1 стосовно функцій a та σ, $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$ та*

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{B}(x) = \lim_{x\to\infty} \int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} = \infty \text{ м.н.} \tag{0.50}$$

Якщо виконано умову (0.47) *або* (0.48), *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\theta(t)} \tilde{B}(\eta(t)) = \infty \text{ м.н.} \tag{0.51}$$

Наслідок 5.2. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція, для якої існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x. Припустимо, що стохастичне диференціальне рівняння* (0.43) *має м.н. неперервний розв'язок η. Покладемо*

$$A_1(T) = \int_0^T \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}_1(t,x)dt,$$

де

$$\tilde{a}_1(t,x) = -\int_0^x \frac{\sigma'_t(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t,x)}{\sigma(t,x)} - \frac{1}{2}\sigma'_x(t,x).$$

Якщо виконано співвіношення

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A_1(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1, \tag{0.52}$$

то виконується умова (0.49).

Наслідок 5.3. *Припустимо, що виконуються всі умови наслідку 5.1 стосовно функцій a та σ. Крім того, припустимо, що*

$$\liminf_{t\to\infty} \theta(t) > 0. \tag{0.53}$$

Якщо виконано умову (0.47) *або умову* (0.48), *то*

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.} \tag{0.54}$$

Наслідок 5.4. *Припустимо, що виконано всі умови наслідку 5.3 стосовно функцій a та σ. Нехай, крім того, $a(t,x) = \varphi(t)g(x)$, а функції θ та σ є монотонно спадними, $\theta(t) > 0$ та $\varphi(t) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$. Покладемо*

$$\gamma = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0.$$

Якщо

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int_0^T \frac{\varphi(t)}{\theta(t)}dt > \frac{1}{\gamma}, \tag{0.55}$$

то виконується (0.54)

Для рівняння (0.3) має місце наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція такі, що стохастичне диференціальне рівняння* (0.43) *має неперервний розв'язок η. Припустимо, що*

1) для функції σ існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x;

2) функція $\alpha(t) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^1} \tilde{a}(t, x)$, є RV-функцією з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$.

3) для кожного фіксованого t та для деякого $c_0 > 1$

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{B(t, c_0 x)}{B(t, x)} > 1,$$

Тоді має місце (0.49).

Наслідок 5.5. *Нехай $a(t, x) = g(x) \cdot \varphi(t)$, де g – неперервна додатна функція, φ – RV-функція з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$, $\sigma(t, x) = \sigma(x)$, де σ – неперервна додатна функція, для якої $\sigma'(x) \leq 0$. Крім того, припустимо, що*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^1} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0.$$

Тоді виконується (0.54)

Наслідок 5.6. *Припустимо, що $a(t, x) = \varphi(t) g(x)$ та $\sigma(t, x) = \theta_0 g(x)$, де θ_0 додатна стала та g – неперервна додатна диференційовна функція така, що $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^1} g'(x) < \infty$. Тоді* (0.54) *виконується, якщо виконується одна з наступних двох умов:*

1) $\liminf\limits_{T \to \infty} \dfrac{\Phi(T)}{\theta_0 \sqrt{2T \ln \ln T}} > 1$*; або*

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\theta_0 g(x)} dx = +\infty$ *та* $\int\limits_{0}^{\infty} e^{\theta_0 g(x)} dx < +\infty$.

Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, професору Валерію Володимировичу Булдигіну за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач, постійну увагу та підтримку в роботі. Валерій Володимирович був науковим керівником моєї кандидатської дисертації протягом багатьох років. Він також надав мені можливість викладати в КПІ, що стало важливим етапом в моєму житті. Також висловлюю щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Клесову Олегу Івановичу за допомогу, підтримку та керівництво дисертаційною роботою, після прикрої і несподіваної смерті Валерія Володимировича.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наведемо короткий огляд робіт за тематикою дисертаційної роботи.

Стохастичні диференціальні рівняння займають важливе місце як у теорії випадкових процесів, так і у застосуваннях у різних галузях природничих та соціальних наук. Дослідження стохастичних інтегралів та пов'язаних з ними диференціальних рівнянь починаються з сорокових років XX сторіччя у роботах С.Н. Берштейна [3, 4], К. Іто [108], Й.І. Гіхмана [23], Н.Н. Боголюбова та Н.М. Крилова [5]. На теперішній час стохастичним диференціальним рівнянням та різноманітним властивостям їх розв'язків присвячено величезну кількість літератури. До монографій, в яких найбільш повно розглядається цей об'єкт, слід віднести монографії Л. Арнольда [87], Х. Мао [128], А. Фрейдмана [148], Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [32], А.Т. Баруча-рида [94], Г. Маккіна [61], Н. Ікеди та С. Ватанабе [14], М. Метівьє [129].

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичного диференціального рівняння в скінченому евклідовому просторі вивчалися, наприклад, в роботах Н.В. Крилова та А.К. Звонкіна [47], Ф. Вей та К.Ванг [152], S. Zhou та M. Xue [142], J. Jacod та J. Memin [111].

Стохастичні диференціальні рівняння в гільбертовому та банаховому просторах досліджувалися Л.І. Гальчуком [21], А.В. Мельніковим [63], Ю.С. Мішурою [133], R.F. Curtain [104], P.L. Falb [104], G. Da Prato, J. Zabczyk [105], G. Kallianpur, J. Xiong [113], K. Liu [126], A. Freidman [149, 150].

Достатньо велику кількість робіт присвячено вивченню стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних (див. наприклад [48, 66, 67, 146, 151]).

Одне з перших місць в теорії випадкових процесів посідають задачі, пов'язані з асимптотичними властивостями розв'язків стохастичних диференціальних рівняннь. Засновниками досліджень в цьому напрямку можно назвати Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [26], Р.Л. Стратоновича [73], Р.З. Хасьмінського [76].

Основними асимптотичними властивостями розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, які розглядаються в літературі є обмеженість та необмеженість розв'язків, стійкість розв'язків, ергодичність розв'язків, гранична поведінка розв'язків і т.д.

Питання, пов'язані з обмеженістю розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь розглядалися в роботах А.В. Мельнікова [134], А.М. Самойленко, Н.І. Махмудова та А.М. Станжицького [141], П.Х. Берандрі [89].

Результати щодо необмеженності розв'язків стохастичних диференціальних рівняннь з ростом часу можно знайти, наприклад, в монографіях І.Й. Гіхмана та А.В. Скорохода [26] та К. Іто, Г. Маккіна [37].

Задачі про стійкість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь присвячено багато статей та монографій. Дослідження стійкості ймовірносних систем з неперервними фазовими траєкторіями у різних постановках проводились в працях А.А. Андронова, Л.С. Понтрягіна та А.А. Вітта [1], Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [32], Н.Н. Воровича [20], В.Д. Мільмара та А.Д. Мишкіса [64]. В цьому напрямку працювали також Р.З. Хасьмінський [76,77], В.С. Королюк [59], Й.І. Гіхман, А.В. Скороход [26], В.К. Ясинський [83], І.Я. Кац та Н.Н. Красовський [39], Ж.Є. Бертрам [91], К. Ліу [126], А. Розкоз [140] та інші. В монографії І.Я. Каца [40] розглянуто модель стохастичного рівняння з марковськими параметрами, які дозволяють розглядати стійкість систем з розривними фазовими траєкторіями.

Асимптотичну еквівалентність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків відповідних звичайних диференціальних рівнянь одним з перших почали досліджувати задачу Й.І. Гіхман та А.В. Скороход [30]. Пізніше Г. Келлер, Г. Керстинг, У. Рослер в роботі [118] отримали аналогічні результати про асимптотичну еквівалентність розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків відповідних звичайних диференціальних рівнянь. Умови такої еквівалентності в [30] та [118] відрізняються суттєво.

Г. Келлер, Г. Керстинг, У. Рослер присвятили ще декілька робіт дослідженню асимптотичних властивостей процесів різних видів за допомогою звичайного диференціального рівняння. Асимптотична поведінка рекурсивно визначеного дискретного процесу вивчалась у роботі [119]. Хоча результати для рекурсивного дискретно-визначеного процесу виявились аналогічними результатам роботи [118] для автономного стохастичного диференціального рівняння, але існують технічні відмінності в їх отриманні, а також припущення на коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння в [119] є більш строгими ніж в [118]. В роботі [120] Г. Келлер, Г. Керстинг, У. Рослер досліджували асимптотичну поведінку процесів народження та загибелі.

Метод вивчення властивостей стохастичного диференціального рівняння за допомогою відповідного звичайного диференціального застосовується в роботі [144] до дослідження умов єдиності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Результати роботи узагальнюють класичну теорему Іто, а також автор пропонує нові умови потраекторної єдиності розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

Ці дослідження було продовжено в роботах С.Я. Махно [62], В.В. Булдигіна та А.В. Коваля [9], Г.Л. Кулініча [52].

В монографії А.А. Лєвакова [60] знайдені умови, при яких для кожного розв'язку системи з випадковими збуреннями існує розв'язок звичайного диференціального рівняння з випадковою початковою умовою таке, що середнє квадратичне відхилення вказаних розв'язків прямує до нуля при

$t \to \infty$.

В роботах А.П. Креневича [44, 45] досліджується асимптотична еквівалентність розв'язків стохастичних систем зі сталими коефіцієнтами та лінійних звичайних систем у сенсі середнього квадратичного та з імовірністю одиниця. В роботах [44,45] асимптотична еквівалентність розуміється, як близкість за нормою в евклідовому просторі. У цих роботах вивчається асимптотична поведінка на нескінченності розв'язків стохастичних систем методами якісної теорії диференціальних рівнянь. Згідно з цим методом за вихідною нелінійною стохастичною системою будується лінійна система звичайних диференціальних рівнянь така, що кожному розв'язку стохастичної системи ставиться у відповідність такий розв'язок звичайної системи, що в певних імовірностних сенсах різниця цих розв'язків прямує до нуля при $t \to \infty$.

В монографії А.М. Самойленко та О.М. Станжицького [68] отримано умови асимптотичної відповідності лінійної стохастичної системи і системи лінійних звичайних диференціальниих рівнянь у випадку, коли детермінована система є системою зі сталими коефіцієнтами, і розв'язки, якої обмежені на півосі $t \geq 0$.

В статті А.М. Самойленко, О.М. Станжицького, І.Г. Новака [68] розглянуто більш загальну ситуацію, а саме коли лінійна детермінована система є системою зі змінними коефіцієнтами і розв'язки, якої не обов'язково є обмеженими на півосі $t \geq 0$. Авторами показано, що в лінійному випадку можна побудувати відповідність між системами, при якій нетривіальним розв'язкам стохастичної системи відповідають нетривіальні розв'язки детермінованої системи, крім того знайдено умови асимптотичної відповідності слабко нелінійної стохастичної системи і лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь у припущенні, що остання є експоненціально дихотомічною на осі. Зазначимо, що задачу дослідження стійкості стохастичних диференціальних рівнянь теж можно звести до аналогічної задачі для відповідних детермінованих диференціальних рівнянь. Окремі результати для спеціального класу стохастичних рівнянь можно знайти в роботах В.С. Королюка [59] та Є.Ф. Царькова [78].

При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язку стохастичного диференціального рівняння, одну з умов в роботі [30] було накладено на розв'язок звичайного диференціального рівняння, що відповідає стохастичному диференціальному рівнянню. Складний аналітичний вигляд цієї умови створює враження, що вона є суто технічною і не має змістовного підгрунтя. Пізніше В.В. Булдигіним, О.І. Клесовим, Й.Г. Штайнебахом [7, 8] було доведено еквівалентність цієї умови псевдо-регулярній зміні (PRV) відповідної функції та знайдено зручний еквівалентний запис цієї умови в термінах нижньої (або верхньої) границі Й. Карамати.

Й. Карамата у статті [114] ввів поняття функції з регулярною зміною (RV-функції) та довів низку фундаментальних тверджень.

Узагальнення результатів статті [114] представлено у монографіях [92] та [70]. Узагальнення RV-функцій належать В. Авакумовичу [88]. В останні роки, у теорії ймовірностей виявилося по ряду питань, в яких з'явилася природна необхідність залучати як математичний апарат правильно змінні функції.

У сучасній літературі при узагальненнях теорії RV-функцій Й. Карамати виникають чотири, класи функцій: PRV, WPI, SQI та POV. Класи PRV, WPI, SQI та POV- функцій мають внутрішню характеризацію в термінах верхніх та нижніх граничних функцій, які природно виникають при вивченні RV-функцій.

Властивості цих класів функцій вивчали В. Феллер [147], S. Aljančić та D. Arandelović [85], D. Arandelović [86], Н.К. Барі та С.Б. Стєчкін [72], але самі терміни PRV, WPI, SQI та POV були введені в роботах [7, 8]. В.В. Булдигін, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах спочатку отримали найпростіші застосування PRV,WPI, SQI та POV-функцій у теоремах відновлення, після цього було закладено основи теорії цих класів функцій, яка потім дозволила отримати більш складні застосування. Усі ці результати були зібрані в монографії [12]. Саме властивості PRV-функцій використовуються в дисертаційній роботі для дослідження поставлених задач.

PRV-функції з'явилися в різних математичних дослідженнях досить давно. Під різними назвами виникали і досліджувались в роботах Б.І. Коренблюма [58], В. Матушевської [131, 132], У. Штадтмюллера і Р. Траутнера [145], С.М. Бермана [90], С.Б. Стечкіна та Н.К. Барі [72], А.Л. Якиміва [82]. У статтях [58], [145] неспадні PRV-функції використовувались при доведенні аналогів тауберових теорем для перетворення Лапласа. Зокрема, у роботі У. Штадтмюллера і Р. Траутнера [145] доведено, що тауберова теорема для перетворення Лапласа неспадної додатної функції має місце тоді і тільки тоді, коли ця функція має PRV-властивість. У роботі А.Л. Якиміва [82] вивчалась багатовимірна PRV-властивість, але результати цієї роботи є важливими і в одновимірному випадку.

Однією з важливих властивостей PRV-функцій є те, що вони зберігають асимптотичну еквівалентність функцій і послідовностей. Саме ця властивість визначає широке використання функцій цього класу. Важливим є також питання про умови, за яких обернені або квазіобернені функції зберігають еквівалентність функцій, тобто важливо не тільки знати, коли сама функція, а й коли її обернена зберігає еквівалентність.

У роботі О.І. Клесова, З. Рихліка та Й. Штайнебаха [123] з використанням PRV вивчався зв'язок між підсиленим законом великих чисел для послідовності випадкових величин та його аналогом для процесу відновлення.

Деякі результати роботи [123] узагальнюються в роботі В.В. Булдигіна, О.І. Клесова та Й Штайнебаха [99], де PRV властивість вивчається більш детально. Зокрема показано, що PRV функції і тільки вони зберігають асимптотичну еквівалентність функцій та послідовностей. В роботі

В.В. Булдигіна, О.І. Клесова та Й. Штайнебаха [6] теорія PRV-функцій використовується для дослідження питання стійкості диференціальних рівнянь. У [99] також означені POV-функції, які узагальнюють функції з правильною зміною та додатним індексом. Доведено, що строго зростаючі та необмежені POV-функції та квазіобернені до них функції одночасно зберігають асимптотичну еквівалентність функцій та послідовностей. Більше того, тільки для POV функцій виконується ця властивість. Як застосування загальної теорії в [123] вивчалася асимптотична поведінка узагальнених функцій відновлення, які були побудовані за неперервними послідовностями та функціями.

В роботах В.В. Булдигіна, О.І. Клесова та Й Штайнебаха [6–8] теорія PRV-функцій використовується для дослідження питання стійкості диференціальних рівнянь та асимптотичної поведінки розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь

РОЗДІЛ 2. Допоміжні результати.

Для зручності у уьому розділі наведено допоміжні результати, на які існують посилання з інших розділів. В розділі 2.1 наведено основні відомості про автономні та неавтономні стохастичні диференціальні рівняння, які можно знайти також в монографії [30]. В розділі 2.2 наведено деякі результати, що стосуються теорії функції регулярної зміни, які можна знайти, наприклад, в [12]. Усі ці результати відносяться до тематики дисертації і використовуються при отриманні основних результатів.

2.1. Стохастичні диференціальні рівняння

2.1.1. Існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння першого порядку.

Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = a\,(t,\eta(t))\,dt + \sigma\,(t,\eta(t))\,dw(t),\ t \geq 0; \eta(0) \equiv \eta_0, \tag{2.1}$$

де w – стандартний вінерівський процес заданий на ймовірностному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, a та σ – неперервні функції та $x \in \mathbb{R}^1$, η_0 – невипадкова додатна стала, η – розв'язок рівняння (2.1) (детальніше див. стор. 33, [30]).

Теорема 2.1 (теорема 1, стор. 40, [30])**.** *Нехай $T > 0$. Якщо виконуються умови:*

- *функції $a(t,x)$ та $\sigma(t,x)$ визначені при $t \in [0,T]$ і $x \in \mathbb{R}$ та вимірні по сукупності змінних;*
- *існує таке число K, що при $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$ мають місце нерівності*

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|,$$

$$|a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \le K^2\left(1+|x|^2\right);$$

- $\eta(0)$ *не залежить від* $w(t)$ *і* $\mathbb{E}\eta(0)^2 < \infty$.

Тоді існує розв'язок η *рівняння* (2.1)*, який задовольняє наступним умовам:*

A) розв'язок $\eta(t)$ *є м.н. неперервним і* $\eta(t) = \eta(0)$ *при* $t = 0$*;*

B) $\sup\limits_{0\le t\le T} \mathbb{E}\eta(t)^2 < \infty$.

Якщо $\eta_1(t)$ *та* $\eta_2(t)$ *два розв'язки рівняння* (2.1)*, які задовольняють умовам A) та B), то*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_1(t)-\eta_2(t)| = 0\right\} = 1.$$

2.1.2. Необмеженість розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння, коефіцієнти якого не залежать від часу безпосередньо, тобто

$$d\eta(t) = a\left(\eta(t)\right)dt + \sigma\left(\eta(t)\right)dw(t). \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) називається *автономним.* Введемо інтеграли

$$I_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\int\limits_0^z \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}dz,$$

$$I_2(x) = \int_{x}^{+\infty} \exp\left\{-\int\limits_0^z \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}dz.$$

Теорема 2.2 (теорема 1, стор. 119, [30])**.** *Нехай коефіцієнти рівняння* (2.2) *задовольняють умови теореми 2.1 та* $\sigma(x) > 0$ *для всіх* x*, а* $\eta(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.2)*. Тоді для будь-яких* x

1. *якщо* $I_1(x) = +\infty$ *та* $I_2(x) = +\infty$*, то*

$$P\left\{\sup_{t>0}\eta(t) = +\infty\right\} = P\left\{\inf_{t>0}\eta(t) = +\infty\right\} = 1;$$

2. якщо $I_1(x) < +\infty$ *та* $I_2(x) < +\infty$*, то*

$$P\left\{\sup_{t>0}\eta(t) = +\infty\right\} = P\left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = +\infty\right\} = \mathbb{E}\frac{I_1(\eta(0))}{I_1(\eta(0)) + I_2(\eta(0))};$$
$$P\left\{\inf_{t>0}\eta(t) = -\infty\right\} = P\left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = -\infty\right\} = \mathbb{E}\frac{I_2(\eta(0))}{I_1(\eta(0)) + I_2(\eta(0))};$$

3. якщо $I_1(x) < +\infty$ *та* $I_2(x) = +\infty$*, то*

$$P\left\{\sup_{t>0}\eta(t) < +\infty\right\} = P\left\{\inf_{t>0}\eta(t) = -\infty\right\} = P\left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = -\infty\right\} = 1;$$

4. якщо $I_1(x) = +\infty$ *та* $I_2(x) < +\infty$*, то*

$$P\left\{\sup_{t>0}\eta(t) = +\infty\right\} = P\left\{\inf_{t>0}\eta(t) > -\infty\right\} = P\left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = +\infty\right\} = 1.$$

При оцінці розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь може бути корисною наступна лема.

Лема 2.1. *(лема 4, стор. 120, [30]) Нехай* $\eta_1(t)$ *та* $\eta_2(t)$ *– розв'язки рівнянь* $d\eta_i(t) = a_i\,(t, \eta_i(t))\,dt + dw(t),\ i = 1, 2$*, що задовольняють одним і тим самим початковим умовам* $\eta_i(0) = x$*. Якщо для всіх* $t \geq 0$ *і* x *виконується нерівність* $a_1(t,x) < a_2(t,x)$*, то* $\eta_1(t) < \eta_2(t)$ *м.н. для t>0.*

Наступний результат містить умови збіжності м.н. розв'язку стохастичного диференціального рівняння до ∞.

Теорема 2.3 (теорема 2, стор.121, [30])**.** *Нехай* η *– розв'язок рівняння* $d\eta(t) = a\,(t, \eta(t))\,dt + dw(t)$ *з початковою умовою* $\eta(0) = \eta_0$*. Покладемо*

$$\alpha_1(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} a(t,x), \quad \alpha_2(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} a(t,x),$$

та

$$a_1(x) = \inf_{t>0} a(t,x), \quad a_2(x) = \sup_{t>0} a(t,x).$$

Тоді $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ *м. н., якщо виконується одна з наступних двох умов:*

1) $\lim\limits_{t\to\infty}\inf \dfrac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}}\int\limits_0^T \alpha_1(t)dt > 1;$

або

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\int\limits_0^x 2a_1(z)dz} dx = +\infty$ *та* $\int\limits_0^{\infty} e^{-\int\limits_0^x 2a_1(z)dz} dx < +\infty.$

А також $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = -\infty$ *м. н., якщо виконується одна з наступних двох умов:*

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup \frac{1}{\sqrt{2T \ln\ln T}} \int\limits_0^T \alpha_2(t)dt < -1$*;*

або

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\int\limits_0^x 2a_2(z)dz} dx < +\infty$ *та* $\int\limits_0^{\infty} e^{-\int\limits_0^x 2a_2(z)dz} dx = +\infty.$

2.1.3. Точний порядок росту автономного стохастичного диференціального рівняння.

Розглянемо рівняння (2.2) та припустимо, що існує єдиний розв'язок для довільного початкового значення $\eta(0)$ (для довільного $T > 0$ розв'язок є єдиним у сенсі, що вказується в теоремі 2.1) і $\sigma(x) > 0$ для всіх x.

Означення 1 ([30]). Нехай $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = +\infty$ м.н. Функція $\varphi(t)$, що прямує до нескінченності при $t \to \infty$ називається *точним порядком росту* розв'язку стохастичного диференціального рівняння, якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\varphi(t)} = 1 \text{ м.н.}$$

Теорема 2.4 (теорема 1, стор. 125, [30]). *Нехай* η *є розв'язком рівняння* (2.2)*, відносно коефіцієнтів якого виконуються наступні умови:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = a_0 > 0;$

2) σ *обмежена та додатна функція;*

3) коефіцієнти a *та* σ *такі, що* $P\left\{\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = +\infty\right\} = 1.$

Тоді

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{a_0 t} = 1\right\} = 1.$$

тобто $\varphi(t) = a_0 t$ *є точним порядком розв'язку рівняння* (2.2)*.*

Теорему 2.4 можно використовувати для доведення існування точного порядку росту, відмінного від лінійного. Для цього корисним є наступний результат.

Теорема 2.5 (теорема 2, стор. 126, [30]). *Нехай η є розв'язком рівняння* (2.2), *коефіцієнти якого задовольняють наступним умовам:*

1) a та σ такі, що $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=+\infty$ м.н.;

2) існує зростаюча двічі неперервно диференційована функція $f(x)$, для якої $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $f'(x)\sigma(x)$ є обмеженою функцією і

$$\lim_{x\to\infty}\left[a(x)f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)\sigma^2(x)\right]=C>0. \tag{2.3}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\eta(t))}{t}=C \text{ м.н.}$$

Зауваження 2.1 (зауваження 1, стор. 127, [30]). Умови, яким повинна задовольняти функція, щоб виконувались твердження теореми 2.5, можно взяти наступні:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x)f'(x)=C>0$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\sigma^2(x)=0$;
3. функція $f'(x)\sigma(x)$ є обмеженою.

Використовуючи теорему 2.5, можна вказати умови, за яких точний порядок росту розв'язку стохастичного диференціального рівняння (2.2) визначається функцією μ, що є розв'язком відповідного звичайного диференціального рівняння

$$d\mu(t)=a(\mu(t))dt. \tag{2.4}$$

Теорема 2.6 (теорема 4, стор. 130, [30]). *Нехай $a(x)$ таке, що рівняння* (2.2) *та* (2.4) *мають єдиний розв'язок при довільних початкових даних. Припустимо, що $a(x)>0$ для всіх достатньо великих $x>0$; $\frac{\sigma(x)}{a(x)}$ – обмежена, існує похідна $a'(x)$, причому $a'(x)\to 0, x\to\infty$. Якщо $\mu(t)$ – розв'язок рівняння* (2.4), *для якого $\lim\limits_{t\to+\infty}\mu(t)=+\infty$ та при деякому $C>0$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\frac{z}{u}-1|\le\varepsilon}\sup_{z>C}\left|\frac{\mu(z)}{\mu(u)}-1\right|=0, \tag{2.5}$$

то

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1\right\}=1.$$

2.1.4. Формула Іто.

Нехай $(\mathfrak{F}_t, t\geq 0)$ – це потік σ-алгебр, тобто $\mathfrak{F}_{t_1}\subseteq\mathfrak{F}_{t_2}$ для $t_1\leq t_2$. Позначимо через $H_2[0,T]$ простір випадкових функцій $f(t)$, визначених при $t\in[0,T]$ та при кожному t вимірних відносно $\mathfrak{F}_t$, для яких інтеграл $\int\limits_0^T f^2(t)dt$ є скінченим м.н. Введемо поняття стохастичного диференціалу. Припустимо, що процес $\eta(t)$ при всіх $0\leq t_1<t_2\leq T$ задовольняє співвідношенню

$$\eta(t_1)-\eta(t_2)=\int\limits_{t_1}^{t_2}a(t)dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}b(t)dw(t),$$

де $\sqrt{|a(t)|}\in H_2[0,T], b\in H_2[0,T]$. Тоді процес має стохастичний диференціал на $[0,T]$: $d\eta(t)=a(t)dt+b(t)dw(t)$.

Має місце наступа теорема.

Теорема 2.7 (теорема 4, стор. 25, [30]). *Нехай процес $\eta(t)$ має стохастичний диференціал $d\eta(t)=a(t)dt+b(t)dw(t)$, а функція $f(t,x)$ неперервна та має неперервні похідні $f'_t(t,x)$, $f'_x(t,x)$, $f''_{xx}(t,x)$. Тоді процес $f(t,\eta(t))$ також має стохастичний диференціал і*

$$df(t,\eta(t))=\left(f'_t(t,\eta(t))+f'_x(t,\eta(t))a(t)+\frac{1}{2}f''_{xx}(t,\eta(t))b^2(t)\right)dt+$$
$$+f'_x(t,\eta(t))b(t)dw(t).$$

Зауваження 2.2 (стор. 34, [30]). Нехай $\eta(t)$ – розв'язок рівняння (2.1), а $f(t,x)$ – монотонна по x неперервна по x та t функція, визначена при $t\in[0;T]$, $x\in\mathbb{R}^1$, для якої існують та неперервні похідні $f'_t(t,x)$, $f'_x(t,x)$, $f''_{xx}(t,x)$. При кожному $t\in[0;T]$ існує функція $g(t,x)$ обернена по x до $f(t,x)$, тобто функція для якої $f(t,g(t,x))=x, g(t,f(t,x))=x$. Покладемо $\xi(t)=f(t,\eta(t))$. Тоді $\eta(t)=g(t,\eta(t))$ та

$$d\xi(t)=\left(f'_t(t,\eta(t))+f'_x(t,\eta(t))a(t,\eta(t))+\frac{1}{2}f''_{xx}(t,\eta(t))\sigma^2(t,\eta(t))\right)dt$$

$$+f'_x(t,\eta(t))\sigma(t,\eta(t))dw(t).$$

Таким чином, процес буде розв'язком рівняння

$$d\xi(t) = \tilde{a}(t,\xi(t))dt + \tilde{\sigma}(t,\xi(t))dw(t),$$

де

$$\tilde{a}(t,x) = f'_t(t,g(t,x)) + f'_x(t,g(t,x))a(t,g(t,x)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,g(t,x))\sigma^2(t,g(t,x)),$$

$$\tilde{\sigma}(t,x) = f'_x(t,g(t,x))\sigma(t,g(t,x)).$$

2.1.5. Властивість стохастичного інтегралу.

Теорема 2.8 (теорема 1, стор. 20, [30]). *Нехай* $f(t) \in H_2[0,T]$ *та* $\int\limits_0^T \mathbb{E}f^2(t)dt < \infty$. *Тоді сепарабельний процес* $I(t) = \int\limits_0^t f(s)dw(s)$ *є неперервним м.н. і при* $a > 0$ *виконуються нерівності:*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)dw(s)\right| > a\right\} \le \frac{1}{a^2}\int_0^T \mathbb{E}f^2(t)dt, \tag{2.6}$$

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)dw(s)\right|^2 \le 4\int_0^T \mathbb{E}f^2(t)dt. \tag{2.7}$$

Оцінки (2.6) та (2.7) можно назвати нерівностями А. Н. Колмогорова та Дж. Дуба для стохастичних інтегралів.

2.2. Правильно змінні функції

Нехай $\mathbb{R}^1$ — множина дійсних чисел, $\mathbb{R}^1_+$ — множина невід'ємних чисел, $\mathbb{Z}$— множина цілих чисел, $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

Нехай $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathbb{R}^1_+)$ — множина дійсних функцій $f{=}(f(t), t \geq 0)$, які є додатними для достатньо великих аргументів:

$$\mathrm{F}_+ = \bigcup_{A>0} \{f \in \mathrm{F} \mid\ f(t) > 0,\ t \in [A,\, \infty)\}\,;$$

$\mathrm{F}^{(\infty)}$ – простір функцій $f \in \mathrm{F}_+$ таких, що

(i) $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} f(t) < \infty\ \forall T > 0$,

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup f(t) = \infty$.

Далі, нехай F^{∞} – множина функцій $f \in \mathrm{F}^{(\infty)}$ таких, що

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty.$$

$\mathrm{C}^{(\infty)}$ – множина, яка містять неперервні функції з простору $\mathrm{F}^{(\infty)}$;

$\mathrm{C}^{\infty}_{inc}$ – множина функцій $f \in C^{\infty}$, які строго зростають для великих t.

"Вимірність" будемо розуміти за Лебегом.

Для кожної $f \in \mathrm{F}_+$ будемо розглядати її *верхню* та *нижню* граничні функції:

$$f^*(c) = \limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} \ \text{ та } f_*(c) = \liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)},\ \ c > 0.$$

2.2.1. RV та ORV-функції.

Поняття правильно змінної функції було введено Й. Караматою [114].

Означення 2 ([114]). Про вимірну функцію $f \in \mathrm{F}_+$ кажуть, що вона є *правильно змінною* (RV), якщо

$$f_*(c) = f^*(c) \in \mathbb{R}^1_+ \text{ для будь якого } c > 0.$$

Означення 3 ([114]). Якщо $f_*(c) = f^*(c) = 1$ для будь якого $c > 0$, то кажуть, що функція f *повільно змінюється* (SV).

Для кожної RV функції f існує число $\alpha \in \mathbb{R}^1$ (*індекс функції* f) таке, що $f_*(c) = f^*(c) = c^\alpha$, $c > 0$. Крім того, якщо f є правильно змінною функцією з індексом α, то $f(t) = t^\alpha l(t)$, $t > 0$, де $l(t)$ – SV функція.

Одне з важливих узагальнень RV-функцій належить В. Г. Авакумовічу [88], Й. Караматі [117].

Означення 4 ([88], [117]). Про функцію $f \in \mathrm{F}_+$ кажуть, що вона *O-правильно змінюється* (ORV), якщо $f^*(c) < \infty$ для будь-якого $c > 0$.

Зрозуміло, що кожна RV функція є ORV-функція. Властивості ORV функцій вивчалися у роботі S. Aljančić та D. Arandelović [85]. Н.К. Барі та С.Б. Стечкін [72] досліджували ORV-функції та застосовували їх до задач наближення функцій. Ці результати разом із теорією RV-функцій та їх узагальнень плідно застосовуються в різних напрямах математики (див. Е. Сенета [143], N. H. Bingham та ін. [92]).

Для доведення деяких результатів дисертації буде корисною теорема Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів від RV-функцій (див. [12, 70, 92, 114]).

Нагадаємо, що вимірну дійсну функцію $f(t), t \geq A$, називають *локально інтегровною*, якщо вона інтегровна (за Лебегом) на будь-якому відрізку $[a,\, b] \subset [A, \infty)$.

Теорема 2.9 (теорема Карамати, [12]). *Нехай f– локально інтегровна RV-функція. Тоді:*

1) якщо $\rho > -1$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int\limits_A^x f(t)dt} = \rho + 1;$$

2) якщо $\rho < -1$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int\limits_x^\infty f(t)dt} = |\rho + 1|;$$

3) якщо $\rho = -1$ *і* $I_f(\infty) = \infty$, *то*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int\limits_A^x f(t)dt} = 0;$$

де $I_f(\infty) = \int\limits_A^\infty f(t)dt$

4) якщо $\rho = -1$ *і* $I_f(\infty) < \infty$, *то*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int\limits_x^\infty f(t)dt} = 0.$$

Зазначимо, що твердження 3) та 4) цієї теореми довів С. Парамесваран [136].

2.2.2. PRV-функції.

Усі означення, результати та приклади цього підрозділу та підрозділів 2.2.3-2.2.5 можна знайти в [12].

Кожна RV функція f має властивість: $\lim\limits_{c\to 1} f^*(c) = 1$. Ця властивість визначає ширший клас важливих функцій (див. [99]).

Означення 5. Будемо казати, що вимірна функція $f \in \mathrm{F}_+$ *псевдоправильно змінюється* (PRV), якщо

$$\lim_{c\to 1} f^*(c) = 1. \tag{2.8}$$

З (2.8) випливає (див. [99]), що кожна PRV-функція є ORV-функція. Будь яка швидко зростаюча функція, наприклад $f(t) = e^t,\ t \geq 0$, не може бути PRV-функцією.

Можно пересвідчитись в тому, що умова (2.8) співпадає з умовою: $\liminf\limits_{c\to 1} f^*(c) = 1$. Відомим є більш узагальнений результат.

Лема 2.2 ([12]). *Нехай* $f \in \mathrm{F}_+$. *Тоді*

1) умова (2.8) *еквівалентна будь якій з наступних чотирьох умов:*

(i) $\liminf\limits_{c\to 1} f^*(c) = 1$;

(ii) $\lim\limits_{c\to 1}\limsup\limits_{t\to\infty}\left|\dfrac{f(ct)}{f(t)}-1\right|=0$*;*
(iii) $\lim\limits_{c\downarrow 1} f^*(c)=\lim\limits_{c\downarrow 1} f_*(c)=1$*;*
(iv) $\lim\limits_{c\uparrow 1} f^*(c)=\lim\limits_{c\uparrow 1} f_*(c)=1$*;*

2) умова (2.8) *виконується тоді і тільки тоді, коли верхня гранична функція f^* (або нижня гранична функція f_*) неперервна у точці $c = 1$, тобто* $\lim\limits_{c\to 1} f^*(c)=1$ *або* $\lim\limits_{c\to 1} f_*(c)=1$*;*

3) якщо верхня гранична функція f^* є неспадною, то умова (2.8) *виконується тоді і тільки тоді, коли* $\lim\limits_{c\downarrow 1} f^*(c)=1$ *або* $\lim\limits_{c\uparrow 1} f_*(c)=1$*; крім того, за цих умов f^* є неперервною для кожного* $c\in(0,\ \infty)$.

Можна довести (див. [12]), що умова Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода (2.5) означає, що μ є PRV-функцією.

Приклад 2.1 ([12])**.** Кожна PRV-функція є ORV-функція, але не навпаки. Наприклад, $f(t)=2+(-1)^{[t]},\ t\geq 0$, є ORV-функція, але не є PRV.

Приклад 2.2 ([12])**.** Кожна RV-функція є PRV-функція, але не навпаки. Наприклад, нехай α є фіксоване дійсне число. Тоді

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{при } t=0,\\ t^{\alpha}\exp\{\sin(\ln t)\}, & \text{при } t>0, \end{cases}$$

є PRV-функція, але не є RV-функція.

Найважливішою властивістю PRV-функцій є те, що вони зберігають еквівалентність. Нижче наведено точні означення.

Означення 6. Дві функції u та v називаються *асимптотично еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)=\lim\limits_{t\to\infty} v(t)=\infty$ та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{v(t)}=1.$$

Означення 7. Ми кажемо, що функція f *зберігає еквівалентність функцій*, якщо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(u(t))}{f(v(t))}=1$$

для невід'ємних асимптотично еквівалентних функцій u та v, тобто для таких u та v, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{v(t)}=1$$

та $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\infty$.

Лема 2.3 ([12]). *Вимірна функція $f\in \mathrm{F}_+$ зберігає еквівалентність функцій тоді і тільки тоді, коли вона є PRV-функцією.*

Лема 2.4 ([12]). *Нехай $f\in \mathrm{F}^\infty$ та f є додатною неперервно диференційовною функцією для всіх $t\geq t_0>0$. Тоді f є PRV-функцією тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{c\to 1}\ \limsup_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{f'(u)}{f(u)}du=0.$$

Лема 2.5 ([12]). *Нехай $f\in \mathrm{F}^\infty$ та f є додатною неперервно диференційовною функцією такою, що $f'(t)\geq 0$ для всіх $t\geq t_0>0$. Тоді f є PRV-функцією тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{c\downarrow 1}\ \limsup_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{f'(u)}{f(u)}du=0.$$

Наслідок 2.1 ([12]). *Нехай $f\in \mathrm{F}^\infty$ та f є додатною неперервно диференційовною функцією для всіх $t\geq t_0>0$.*

1) Якщо

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t\mid f'(t)\mid}{f(t)}<\infty,$$

то f є PRV-функцією.

2) Якщо f є PRV-функцією, то

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}<\infty.$$

3) Якщо $f'(t)\geq 0$ та

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}<\infty,$$

то f є PRV-функцією.

4) Якщо $f'(t)>0$ та f' є неспадною, то f є PRV-функцією.

Наслідок 2.2 ([12]). *Припустимо, що* $f \in \mathrm{F}^{\infty}$ *та* f *є додатною неперервно диференційовною функцією,* $f'(t) > 0$ *та* f' *є неспадною для всіх* $t \geq t_0 > 0$. *Тоді якщо*

$$\int\limits_{0+}^{1} f'_*(c)dc > 1,$$

то f *є PRV-функцією.*

2.2.3. SQI-функції.

Розглянемо деякі важливі класи функцій (див. також [12]).

Означення 8. Будемо казати, що вимірна функція $f \in \mathrm{F}_+$ є *достатньо швидко зростаючою* (SQI), якщо

$$f_*(c) > 1 \text{ для будь-якого } c > 1, \tag{2.9}$$

або, що еквівалентно, якщо $f_*(c) < 1$ для будь-якого $c \in (0, 1)$.

Зауважимо, що функція з повільною зміною не може бути SQI-функцією. З іншого боку, будь-яка RV-функція з додатнім індексом і будь-яка *швидко* зростаюча монотонна функція, наприклад $f(t) = e^t,\ t \geq 0$, є SQI-функцією. Ці функції використовували А. Л. Якимів [153], D. Djurčić, A. Torgašev [107], В.В. Булдигін та ін. [6–8, 12, 99].

Лема 2.6 ([12]). *Нехай* $f \in \mathrm{F}^{\infty}$ *та* f *є додатною неперервно диференційовною функцією для всіх* $t \geq t_0 > 0$. *Тоді* f *є SQI-функцією тоді і тільки тоді, коли*

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{f'(u)}{f(u)}du > 0 \text{ для всіх } c > 1.$$

Наслідок 2.3 ([12]). *Нехай* $f \in \mathrm{F}^{\infty}$ *є додатною неперервно диференційовною функцією та* $f'(t) \geq 0$ *для всіх* $t \geq t_0 > 0$.

1) Якщо

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} > 0,$$

то f є SQI-функцією.

2) Якщо f є SQI-функцією, то

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} > 0.$$

3) Якщо f є SQI-функцією, то

$$\limsup_{t\to\infty} tf'(t) = \infty.$$

4) Якщо $f'(t) > 0$ та f' є неспадною, то f є SQI-функцією.

Наслідок 2.4 ([12]). *Припустимо, що $f \in \mathrm{F}^\infty$ та f є додатною неперервно диференційовною функцією, $f'(t) > 0$ та f' є неспадною для всіх $t \geq t_0 > 0$. Тоді якщо $cf'_*(c) > 1$ для всіх $c > 1$, то f є SQI-функцією.*

2.2.4. Квазіобернені функції.

Якщо функція f не є неперервною або не є монотонною, то вона не завжди може мати обернену. В цьому випадку використовують узагальнену обернену функцію або квазіобернену функцію. Нагадаємо означення квазіобернених функцій [12].

Означення 9. Нехай $f \in \mathrm{F}^{(\infty)}$. Функцію $f^{(-1)} \in \mathrm{F}^{(\infty)}$ називають *квазіоберненою функцією* до f, якщо $f\left(f^{(-1)}(s)\right) = s$ для великих s

Для кожної $f \in C^{(\infty)}$ квазіобернена функція існує, але може бути не єдиною. Якщо $f \in C^\infty_{inc}$, то існує *обернена функція* f^{-1}, тобто $f\left(f^{-1}(s)\right) = s$ та $f^{-1}(f(t)) = t$ для всіх великих значень s і t. Квазіобернена функція характеризується лише однією з двох властивостей обернених функцій: друга з них $f^{(-1)}(f(t)) = t$ не обов'язково виконана.

Приклад 2.3 ([12]). Нехай $x \in C^{(\infty)}$. Покладемо

$$x_1^{(-1)}(s) = \begin{cases} \inf\{\, t \geq 0 : \, x(t) = s \,\}, & s \geq \min\{0,\, s_0\}, \\ 0, & s < \min\{0,\, s_0\}, \end{cases}$$

де $s_0 = x(0)$. Функція $x_1^{(-1)}$ є квазіоберненою до x. Якщо $x \in C^\infty_{inc}$, то $x_1^{(-1)} = x^{-1}$.

Приклад 2.4 ([12]). Нехай $x \in C^{(\infty)}$. Покладемо

$$x_2^{(-1)}(s) = \begin{cases} \sup\{\, t \geq 0 : \, x(t) = s \,\}, & s \geq \min\{0, \, s_0\}, \\ 0, & s < \min\{0, \, s_0\}, \end{cases}$$

де $s_0 = x(0)$. Функція $x_2^{(-1)}$ є квазіоберненою до x. Зауважимо, що $x_1^{(-1)}(s) \leq x_2^{(-1)}(s), \ s > 0$, та взагалі кажучи, $x_1^{(-1)} \neq x_2^{(-1)}$. Якщо $x \in C_{inc}^{\infty}$, то $x_1^{(-1)} = x_2^{(-1)} = x^{-1}$.

2.2.5. Квазіобернені функції, які зберігають еквівалентність функцій .

Розглянемо умови, за яких обернені та квазіобернені функції зберігають еквівалентність функцій.

Теорема 2.10 ([12]). *Нехай $f \in C_{inc}^{\infty}$. Обернена функція f^{-1} зберігає еквівалентність функцій тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (2.9).

Теорема 2.11 ([12]). *Нехай $f \in C_{inc}^{\infty}$ і виконується умова* (2.9). *Якщо для деякої функції $x \in F^{\infty}$, і для деякого числа $a \in (0, \, \infty)$*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{f(t)} = a,$$

то для будь-якої квазіоберненої функції $x^{(-1)}$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{x^{(-1)}(s)}{f^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)} = 1,$$

де f^{-1} є оберненою до f функцією.

РОЗДІЛ 3. **Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтом зсуву та дифузії, що залежать від часу.**

У розділі 3 розглядається задача про *точний порядок зростання* для стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву g та дифузії σ наступного виду:

$$g(t,x) = g(x)\varphi(t) \text{ та } \sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t),$$

де g та σ – неперервні додатні функції, θ та φ – неперервні функції. Будемо досліджувати умови на функції g, φ, θ, σ, при яких поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння майже напевно (м.н.) є асимптотично еквівалентною поведінці розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння. Подібна задача раніше вивчалась у роботах Й.І. Гіхмана і А.В. Скорохода [30], Г. Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера [118], а потім у роботах В.В. Булдигіна, О.І. Клесова та Й. Штайнебаха [6–8, 12]. В усіх згаданих роботах ця задача розв'язувалась для *автономних стохастичних диференціальних рівнянь*, а саме для рівняння

$$d\eta(t) = g(\eta(t))dt + \sigma(\eta(t))dw(t),\ t \ge 0;\ \ \eta(0) \equiv b,\ b > 0, \tag{3.1}$$

де w -вінерів процес. В роботах [6–8, 12], [30], [118] припускалося, що g та σ є додатними неперервними функціями такими, що існує єдиний неперервний розв'язок цього рівняння і розглядався лише той випадок, коли $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ м.н. У згаданих вище роботах було встановлено умови, за яких розв'язок автономного стохастичного диференціального рівняння є асимптотично еквівалентним розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння.

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right)dt,\ t \ge 0; \mu(0) \equiv b > 0,$$

тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1 \text{ м.н. на множині} \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}. \tag{3.2}$$

Означення 10. Ми кажемо, що умова

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1$$

відбувається м.н. на множині

$$B=\left\{\omega:\lim_{t\to\infty}\eta(t,\omega)=\infty\right\},$$

якщо існує подія Ω_1 така, що $\Omega_1\subset\Omega, P(\Omega_1)=1$, для якого

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t,\omega)}{\mu(t)}=1$$

виконується для будь-якого $\omega\in(\Omega_1\bigcap B)$.

Починаючи з роботи Й.І. Гіхмана та А. В. Скорохода [30], схема дослідження умов, за яких

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1 \text{ м.н. на множині} \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\},$$

складається з двох основних кроків. На першому з них розглядається випадковий процес

$$Y(t)=G(\eta(t)),t\geq 0, \text{ де } G(x)=\int_b^x\frac{du}{g(u)},x\geq b,$$

та доводиться за певних умов, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t}=1 \text{ м.н. на множині} \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}. \tag{3.3}$$

На другому кроці доводиться, що за певних умов співвідношення (3.3) обумовлює асимптотичну еквівалентність м.н. розв'язку стохастичного диференціального рівняння та розв'язку детермінованого неавтономного диференціального рівняння.

Для цього в роботі Й.І. Гіхмана, А. В. Скорохода [30] припускалось, що для деякого $C>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{z>C}\sup_{|\frac{z}{u}-1|\leq\varepsilon}\left|\frac{\mu(z)}{\mu(u)}-1\right|=0.$$

Ця умова вказує на те, що функція μ є PRV-функцією (див. означення 5), які почали вивчати в останні роки [12]. Результати для PRV-функцій можна ефективно використовувати при знаходженні умов, за яких розв'язки автономних стохастичних диференціальних рівнянь та відповідних до них автономних звичайних диференціальних рівнянь є асимптотично еквівалентними. Такий підхід до вивчення асимптотичної поведінки розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь реалізовано в роботах [6, 100, 101].

У цьому розділі розглянемо подібну задачу для неавтономних стохастичних диференціальних рівняннь.

Розглянемо два неавтономні стохастичні диференціальні рівняння

$$d\eta_k(t) = g_k\left(\eta_k(t)\right)\varphi_k(t)dt + \sigma_k\left(\eta_k(t)\right)\theta_k(t)dw_k(t),\ t \geq 0; \tag{3.4}$$

$$\eta_k(0) \equiv b_k,\ b_k > 0,$$

для $k = 1, 2$, де $w_k,\ k = 1, 2$ – стандартні вінерові процеси, означені на повному ймовірносному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Характер залежності між процесами w_1 та w_2 може бути довільним. Початкові значення $b_k,\ k = 1, 2$ – невипадкові додатні сталі; θ_k, φ_k, $k = 1, 2$ – дійсні неперервні функції; g_k, σ_k, $k = 1, 2$ – неперервні додатні функції такі, що для кожного $k = 1, 2$ стохастичне диференціальне рівняня (3.4) має єдиний та неперервний м.н. розв'язок $\eta_k = (\eta_k(t),\ t \geq 0)$.

Для $k = 1, 2$ позначимо через $\mu_k = (\mu_k(t),\ t \geq 0)$ неперервний розв'язок задачі Коші звичайного диференціального рівняння, яке отримується з (3.4) при $\sigma_k = 0$, тобто

$$d\mu_k(t) = g_k\left(\mu_k(t)\right)\varphi_k(t)dt, t \geq 0; \tag{3.5}$$

$$\mu_k(0) = b_k, b_k > 0, k = 1, 2.$$

Припустимо, що для кожного $k = 1, 2$ функції g_k та φ_k такі, що існує неперервний розв'язок μ_k.

Нехай розв'язок μ_k задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty}\mu_k(t)=\infty.$$

Розділ 3 має таку структуру. У підрозділі 3.1 вивчаються умови, при яких розв'язки стохастичного диференціального рівняння (3.4) та розв'язки відповідного звичайного диференціального рівняння асимптотично еквівалентні м.н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta_k(t)=\infty\right\}$, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_k(t)}{\mu_k(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta_k(t)=\infty\right\},\ k=1,2.$$

У підрозділі 3.2 отримано критерій асимптотичної еквівалентності, розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь (3.5).

У підрозділі 3.3 досліджуються умови, при яких розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь (3.4) асимптотично еквівалентні м.н., тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta_1(t)=\infty\right\}\bigcap\left\{\lim_{t\to\infty}\eta_2(t)=\infty\right\}.$$

Усі задачі тісно пов'язані між собою, а розв'язання задачі підрозділу 3.3 випливає з результатів підрозділів 3.1 та 3.2.

3.1. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від часу.

3.1.1. Умови та формулювання основного результату.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right)\varphi(t)dt + \sigma\left(\eta(t)\right)\theta(t)dw(t),\ t \geq 0;,\ \eta(0) \equiv b, b > 0, \quad (3.6)$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала. Припустимо, що $\varphi = (\varphi(t), t \in \mathbb{R}^1_+)$ та $\theta = (\theta(t), t \in \mathbb{R}^1_+)$ – дійсні неперервні функції, $g = (g(x), x \in \mathbb{R}^1)$ та $\sigma = (\sigma(x), x \in \mathbb{R}^1)$ – неперервні додатні функції такі, що (3.6) має неперервний розв'язок η.

Основним завданням цього підрозділу є знаходження умов, за яких

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\right\},$$

де $\mu = (\mu(x), x \in \mathbb{R}^1)$ – неперервний розв'язок звичайного диференціального рівняння, яке отримується з стохастичного диференціального рівняння (3.6) при $\sigma \equiv 0$ або $\theta \equiv 0$, тобто

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right)\varphi(t)dt,\ t \geq 0;\ \ \mu(0) = b, b > 0. \quad (3.7)$$

Припустимо, що функції g та φ такі, що існує розв'язок μ, який задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty. \quad (3.8)$$

Умови, при яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності будемо досліджувати у розділі 5. а для (3.8) наведемо одну достатню умову.

Для $t \geq 0$ введемо позначення

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)du$$

до того ж, припустимо, що

$$\Phi(t) > 0,\ t > 0; \tag{3.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty. \tag{3.10}$$

Покладемо

$$G(x) = \int\limits_b^x \frac{ds}{g(s)},\ x \geq b.$$

Відносно функції G зробимо наступне припущення

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \infty. \tag{3.11}$$

Зауваження 3.1. З умови (3.11) випливає, що $G \in \mathbb{C}^{\infty}_{inc}$.

Нижче наведено умови існування, єдиності та диференційовності розв'язку задачі (3.7). Для зручності ми спочатку відзначимо необхідні властивості функції G.

Лема 3.1. *Нехай g є додатною функцією та виконується* (3.11). *Тоді*

1. *обернена G^{-1} існує і є неперервною.*
2. *обернена G^{-1} існує і є диференційовною, якщо додатково припустити, що g є неперервною функцією.*

Доведення. Доведемо 1. Покажемо, що G є монотонно зростаючою. Дійсно, нехай $x_1 < x_2$, тоді

$$G(x_1) - G(x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{g(s)} > 0,\ \ x_2 > x_1 \geq b.$$

оскільки $g(x) > 0, x \in \mathbb{R}^1$. З останнього випливає, що G^{-1} існує. Функція g є додатною неперервною функцією, то G є неперервною функцією, а тому G^{-1} є також неперервною функцією. Перейдемо до доведення 2. Нехай додатково функція g є неперервною. Тоді функція G є диференційовною. Дійсно,

$$G'(x) = \left(\int_b^x \frac{ds}{g(s)} \right)' = \frac{1}{g(x)} > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^1,$$

причому G' –неперервна функція. Покажемо, що G^{-1} також диференційовна, використовуючи теорему про обернену функцію. Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^1$, тоді $x_0 = G^{-1}(y_0)$

$$(G^{-1})'(x) = \frac{1}{G'(x_0)} = g(x_0),$$

тобто похідна існує в довільній точці $y_0 \in \mathbb{R}^1$. $\blacksquare$

Лема 3.2. *Нехай g — додатна неперервна функція, а φ — неперервна функція та виконується умова* (3.9). *Тоді задача* (3.7) *має єдиний неперервно диференційовний розв'язок μ, причому*

$$\mu(t) = G^{-1}(\Phi(t)), \;\; t \geq 0. \tag{3.12}$$

Крім того, якщо виконано умови (3.10) *та* (3.11), *то*

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) = \infty. \tag{3.13}$$

Доведення. Оскільки $G(b) = 0, \;\; b > 0$, то $G^{-1}(0) = b$.

При $t > 0$ маємо

$$d(G^{-1}(\Phi(t))) = (G^{-1})'(\Phi(t))(\Phi(t))'dt = g(G^{-1}(\Phi(t)))\varphi(t)dt.$$

Крім того, $G^{-1}(\Phi(0)) = G^{-1}(0) = b$, тому $G^{-1}(\Phi(t))$ є розв'язком задачі (3.7).

З іншого боку, якщо μ є розв'язком рівняння (3.7), то для будь-якого $t \geq 0$ маємо

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)du = \int_0^t \frac{d\mu(s)}{g(\mu(s))} = \int_b^{\mu(t)} \frac{d\upsilon}{g(\upsilon)} = G(\mu(t)).$$

Отже,

$$\Phi(t) = G(\mu(t)),$$

та

$$\mu(t) = G^{-1}(\Phi(t)).$$

За умови (3.9) співвідношення (3.12) визначає єдиний розв'язок рівняння (3.7). ■

Надалі ми припускаємо, що функції g та φ є такими, що існує неперервний розв'язок μ, який задовольняє умові (3.13).

Окрім функцій Φ та G, важливу роль при вивченні асимптотичної поведінки розв'язку звичайного диференціального рівняння μ та процесу η відіграє функція Φ_+ :

$$\Phi_+(t) = \int\limits_0^t |\varphi(u)|\, du.$$

Припустимо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} < \infty. \tag{3.14}$$

Відмітимо, що умова (3.14) виконуються для будь-якої додатної функції φ. Також зауважимо, що якщо виконується умова (3.9), то $\Phi_+(t) > 0$ при $t > 0$. Дійсно,

$$0 < \Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(u)du = \left|\int\limits_0^t \varphi(u)du\right| \le \int\limits_0^t |\varphi(u)|du = \Phi_+(t).$$

Приклад 3.5. Покажемо, що існують функції φ, які приймають як додатні, так і від'ємні значення, що задовольняють умови (3.9), (3.10) та (3.14). Прикладом такої функції є

$$\varphi(t) = a + \cos t,\ t > 0,\ a \in (a_0; 1)\,,$$

де $a_0 > 0$ є розв'язком рівняння

$$x(\pi + \arccos x) - \sqrt{1 - x^2} = 0. \tag{3.15}$$

Розвязок рівняння (3.15) дійсно належить інтервалу $(0; 1)$, оскільки ліва частина (3.15) дорівнює -1 при $x = 0$ та дорівнює π при $x = 1$. Крім того, він є єдиним, оскільки похідна лівої частини (3.15) є додатною, а відповідна функція є монотонно зростаючою.

Спочатку, перевіримо умову (3.9). Оскільки $\Phi'(t) = \varphi(t) = a + \cos t$, то критичні точки функції задовольняють рівняння $\cos t = -a$, звідки

$$t_n = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Функція Φ може приймати від'ємні значення при $t > 0$ лише на проміжку $[\pi; 2\pi]$. При $t_0 = \pi + \arccos a$ функція Φ досягає мінімального значення, тому

$$\Phi_{min} = \Phi(t_0) = a(\pi + \arccos a - \sqrt{1-a^2}) > 0, \text{при } a \in (a_0; 1)\,,$$

а отже, з (3.15) випливає (3.9).

До того ж, легко бачити, що $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim\limits_{t\to\infty} (at + \sin t) = \infty$. Отже, умова (3.10) виконується.

Перевіримо умову (3.14). Для всіх $t > 0$ маємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t |a + \cos u|\,du}{at + \sin t} \leq$$

$$\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t a\ \ du + \int\limits_0^t |\cos u| du}{at + \sin t} \leq$$

$$\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{(a+1)t}{at + \sin t} = \frac{a+1}{a} < \infty \text{ при } a \in (a_0; 1)\,.$$

При вивченні точного порядку росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь використовують різні методи. У цій роботі дослідження поставленої задачі, складається з двох кроків.

Перший крок полягає в знаходженні умов, при яких

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}. \tag{3.16}$$

Другим кроком є знаходження умов на функцію G, при яких

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)}=1 \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))}=1 \tag{3.17}$$

м. н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}$.

В свою чергу, з співвідношення в правій частині (3.27) випливає асимптотична еквівалентність η та μ :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))}=1\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1$$

м. н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}$.

Такий підхід в дослідженні асимптотичних властивостей розв'язку стохастичного диференціального рівняння розвивався в роботах [6–8].

3.1.2. Достатні умови асимптотичної еквівалентності $G\circ\eta$ та Φ м.н.

Перейдемо до розв'язання задачі першого кроку. Наступна теорема містить достатні умови асимптотичної еквівалентності $G\circ\eta$ та Φ м.н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}$.

Теорема 3.1. *Нехай φ та θ – неперервні функції, g та σ – неперервні додатні функції такі, що стохастичне диференціальне рівняння* (3.6) *має неперервний розв'язок η. Нехай виконуються умови* (3.9), (3.10),(3.11) *та* (3.14). *Припустимо,що*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)}<\infty. \tag{3.18}$$

Нехай виконуються наступні дві умови:

а) функція $\dfrac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

б) для функції g існує похідна $g'(x),\ x\in\mathbb{R}^1$, причому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t|g'(\eta(s))|\,\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)}=0 \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\right\}. \tag{3.19}$$

Тоді виконується (3.16).

Доведення теореми 3.1 наведено в підрозділі 3.1.5 після низки допоміжних результатів.

Зауваження 3.2. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального (3.6) з неперервними коефіцієнтами $a(t,x) = \varphi(t)g(x)$ та $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$ описує теорема 2.1.

Зауваження 3.3. Теорема 3.1 узагальнює теорему 2.6 з книги Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [30], де розглянуто випадок автономного рівняння, для якого $\varphi(t) = 1$ та $\theta(t) = 1$. Умова (3.18) в цьому випадку виконується автоматично, оскільки $\Phi_+(t) = t$.

А також теорема 3.1 є узагальненням відповідних результатів Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера, [118] стосовно асимптотичної еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння та розв'язку звичайного диференціального рівняння.

Зауваження 3.4. Умова (3.19) містить обмеження на розв'язок η рівняння (3.6), яке не зручно перевіряти. Можна запропонувати достатні умови, які не містять процесу η і які є більш зручними для перевірки. Наприклад,

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0 \quad \text{та} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t \theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} < \infty$$

або

$$\limsup_{x\to\infty} |g'(x)| < \infty \quad \text{та} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t \theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0.$$

Зауваження 3.5. При $\theta(t) = 1,\ t \geq 0$, ряд (3.18) збігається, якщо для деякого $\delta > \frac{1}{2}$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^\delta}{\Phi_+(t)} < \infty. \tag{3.20}$$

Для того, щоб це перевірити, розглянемо загальний член ряду (3.18):

$$0 < \frac{\int\limits_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} \le \frac{2^{k+1}}{\Phi_+^2(2^k)}.$$

В силу умови (3.20) маємо, що існує $M > 0$ таке, що

$$\frac{t^\delta}{\Phi_+(t)} < M, \text{ для довільного } t > 0.$$

Тому

$$\frac{2^k}{\Phi_+^2(2^k)} \le 2^{(1-2\delta)k} \left(\frac{2^{k\delta}}{\Phi^2{}_+(2^k)} \right) \le M^2 2^{(1-2\delta)k}.$$

Отже

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\int\limits_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} \le 2M^2 \sum_{k=0}^\infty 2^{(1-2\delta)k}.$$

Ряд в правій частині збігається для деякого $\delta > \frac{1}{2}$.

Зазначимо також, що (3.20) виконується, якщо для деякого $\beta < \frac{1}{2}$

$$\liminf_{u \to \infty} \varphi(u) u^\beta > 0. \tag{3.21}$$

Дійсно, якщо виконується (3.21), то існують такі $\varepsilon > 0$ та $u_0 \ge 0$, що

$$\varphi(u) > \varepsilon u^{-\beta}, \ u > u_0.$$

Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $u_0 = 0$. Тому при $t \ge 1$

$$\int\limits_0^t \varphi(u)du \ge \varepsilon \int\limits_0^t u^{-\beta} du = \frac{\varepsilon}{1-\beta} t^{1-\beta}$$

та для довільного $\delta > 0$

$$\frac{t^\delta}{\Phi(t)} = \frac{t^\delta}{\int\limits_0^t \varphi(u)du} \le \frac{t^\delta}{\frac{\varepsilon}{1-\beta} t^{1-\beta}} \le \frac{(1-\beta)}{\varepsilon} t^{\delta - 1 + \beta}.$$

Отже, якщо $\beta < \frac{1}{2}$, то $\delta > \frac{1}{2}$ й умова (3.20) виконується.

Зауваження 3.6. Аналогічним чином можна показати, що у випадку, коли θ є правильно змінною функцією порядку $\rho \geq -1$, то з умови (3.20) при $\delta > \frac{1}{2} + \rho$ випливає (3.18). В цьому випадку умова (3.21) при $\beta < \frac{1}{2} - \rho$ є достатньою для (3.18).

Приклад 3.6. (Модель росту популяції)

Стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = r(t)\eta(t)dt + \beta\eta(t)dw(t), \;\; t \geq 0; \;\; \eta(0) \equiv 1, \tag{3.22}$$

описує зростання популяції (див. [135]), де η – розмір популяції в момент часу t; r – відносна швидкість росту популяції, яка залежить від часу; w – стандартний вінерів процес; $\beta \in \mathbb{R}^1_+$.

Вважаємо, що r є неперервною функцією. Позначимо $R(t) = \int\limits_0^t r(s)ds$ та припустимо, що

$$R(t) > 0, \;\; t > 0, \tag{3.23}$$

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t r(s)ds = \infty, \tag{3.24}$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{R(t)} = 0. \tag{3.25}$$

Розв'язок рівняння (3.22) має вигляд:

$$\eta(t) = \exp\left\{ \left(R(t) - \frac{1}{2}\beta^2 t \right) + \beta w(t) \right\}. \tag{3.26}$$

З (3.25) випливає, що η прямує до нескінченності м.н. при $t \to \infty$. Дійсно,

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \lim_{t\to\infty} \exp\left\{ \left(R(t) - \frac{1}{2}\beta^2 t \right) + \beta w(t) \right\} =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \exp\left\{ t \left(\frac{R(t)}{t} - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta\frac{w(t)}{t} \right) \right\} = \infty \text{ м.н.}$$

Зрозуміло, що

$$\Phi(t) = R(t).$$

Зауважимо, що в силу (3.23), (3.24), для функції $\Phi(t)$ виконуються умови (3.9), (3.10). Для функції $g(x) = x$ має місце (3.11), оскільки

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Умова (3.18) теореми 3.1 теж виконується в силу (3.25). Зрозуміло також, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{R^2(2^k)} < \infty.$$

Оскільки $g'(x) = 1$, то в силу умови (3.25) та зауваження 3.4 має місце (3.19). Тому в силу теореми 3.1 маємо (3.16), тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\eta(t))}{R(t)} = 1 \text{ м.н.}$$

3.1.3. Достатні умови м.н. асимптотичної еквівалентності розв'язку η та розв'язку μ.

Перейдемо до дослідження умов другого кроку, за яких м. н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\right\}$ виконується наступна імплікація

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1. \tag{3.27}$$

Для дослідження будемо використовувати теорію SQI та PRV функцій, яка була розроблена В.В. Булдигіним, О.І. Клесовим та Й.Г. Штайнебахом [6–8] (див. також [12]). Певні властивості цих функцій вивчались багатьма авторами, серед яких Б.И. Коренблюм [58], У. Штадтмюллер та Р. Траутнер [145]. Теорію таких функціій (характеристичні властивості, інтегральне представлення, теореми про рівномірну збіжність і т.д.) побудовано в [12]. Однією з найважливіших властивостей PRV функцій є те, що вони зберігають еквівалентність функцій (див. означення 7). Нагадаємо умови, при яких обернена до G функція зберігає еквівалентність.

Твердження 3.1 ([12]). *Припустимо, що*

1) $\lim\limits_{t\to\infty} G(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_b^t \dfrac{ds}{g(s)} = \infty$*;*

2) $\liminf\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \dfrac{du}{g(u)G(u)} > 0$ *для всіх* $c > 1$.

Тоді для будь-яких функцій f_1 *та* f_2 *таких, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1$$

та

$$\lim_{t\to\infty} f_1(t) = \lim_{t\to\infty} f_2(t) = \infty,$$

має місце співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G^{-1}(f_1(t))}{G^{-1}(f_2(t))} = 1.$$

Зважаючи на твердження 3.1, якщо виконуються умови теореми 3.1, то для будь-якого $\omega \in \Omega$, для якого виконується (3.16), маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))} = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}.$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми. Отже, наступна теорема описує умови, за яких точний порядок зростання розв'язку стохастичного диференціального рівняння (3.6) майже напевно є таким же, як і у розв'язку звичайного диференціального рівняння (3.7).

Теорема 3.2. *Нехай виконуються всі умови теореми 3.1,* (3.11)*, а також*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1. \tag{3.28}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\},$$

де η *– розв'язок рівняння* (3.6) *та* μ *– розв'язок рівняння* (3.7) *(див.* (3.12)*).*

Зауваження 3.7. Якщо $\varphi(t) = \theta(t) = 1,\ t \geq 0$, з теорем 3.1 та 3.2 випливають відповідні результати робіт [6–8], що стосуються умов асимптотичної еквівалентності розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків автономних звичайних диференціальних рівнянь.

Зауваження 3.8. Оскільки g є додатною і неперервною функцією, то згідно з лемою (2.6), де $f = G$ та $f' = \frac{1}{g}$, умова (3.28) рівносильна тому, що G є SQI-функцією (див. означення 8).

Якщо функція φ приймає лише додатні значення, то умови теореми 3.2 зміняться наступним чином.

Наслідок 3.1. *Нехай* θ *– неперервна функція,* g, φ *та* σ *– неперервні додатні функції такі, що* (3.6) *має неперервний розв'язок* η*. Нехай виконуються умови* (3.9), (3.10), (3.11), (3.14), (3.28) *і крім того:*

а) функція $\dfrac{\sigma}{g}$ *є обмеженою;*

б) існує похідна g' *та*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g'(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0 \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}. \tag{3.29}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}.$$

Оскільки умова (3.29) залежить від розв'язку стохастичного диференціального рівняння, то замість нього доцільно використовувати наступні співвідношення:

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0 \text{ та } \limsup_{t\to\infty} \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} < \infty,$$

або

$$\limsup_{x\to\infty} |g'(x)| < \infty \text{ та } \lim_{t\to\infty} \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Умова (3.28) є необхідною і достатньою для того, щоб функція G^{-1} зберігала еквівалентність функцій. Достатні умови, при в яких виконується (3.28), містяться у наступному твердженні (див. наприклад, [6], [102]).

Твердження 3.2 ([6]). *Нехай g - додатна неперервна функція така, що виконується* (3.11), *і крім того, або*

1) $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)G(x)}{x} < \infty$*; або*

2) g незростає при великих x; або

3) існує таке $\alpha < 1$, що $0 < \inf\limits_{x\geq 1} g(x)x^{-\alpha}$, $\sup\limits_{x\geq 1} g(x)x^{-\alpha} < \infty$; або

4) $g^*(c) < c$ для всіх $c > 1$, де $g^*(c) = \limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(cx)}{g(x)}$; або

5) g є RV-функцією з індексом $\alpha < 1$ (див. наприклад [70]).

Тоді виконується умова (3.28).

Наведемо приклад стохастичного диференціального рівняння, для коефіцієнтів якого виконуються всі умови теореми 3.1 та теореми 3.2.

Приклад 3.7. Для $\alpha > 0$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = t^{\alpha}\left(1+\eta^2(t)\right)^{\gamma} dt + \left(1+\eta^2(t)\right)^{\gamma} dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b > 0, \quad (3.30)$$

де w — стандартний вінерів процес; b — невипадкова додатна стала. Коефіцієнти рівняння мають вигляд $\varphi(t) = t^{\alpha}$, $\theta(t) = 1$, $g(x) = \sigma(x) = (1+x^2)^{\gamma}$.

Для стохастичного диференціального рівняння (3.30) виконуються всі умови теорем 3.1 та 3.2. Дійсно, при $\alpha > 0$ маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^{2\alpha+2}} < \infty.$$

Оскільки $g(x) = \sigma(x) = (1+x^2)^{\gamma}$, то $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою функцією.

Оскільки $g'(x) = 2\gamma x(1+x^2)^{\gamma-1}$, та $\frac{1}{2} < 1-\gamma < 1$, то

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} 2\gamma \frac{x}{(1+x^2)^{1-\gamma}} = 0$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \theta^2(s)ds}{\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\alpha+1)t}{t^{\alpha+1}} = 0 < \infty.$$

Так як g – RV функція з індексом $\alpha = 2\gamma < 1$, то виконується умова (3.11) і тому, в силу твердження 3.2, має місце (3.28).

Зауважимо, що основне припущення теорем про необмеженість розв'язку стохастичного диференціального рівняння (3.30) при $t \to \infty$ теж виконується. Поведінка розв'язку на нескінченності рівняння (3.30) буде роглянута більш детально у розділі 5.

Отже розв'язку рівняння (3.30) є асимптотично еквівалентним до розв'язку відповідного звичайного дифференціального рівняння.

3.1.4. Допоміжні твердження.

Для доведення теорем 3.1 та 3.2 необхідні кілька допоміжних тверджень.

У першому з них будемо розглядати стохастичне диференціальне рівняння, яке відрізняється від (3.6) додатковим доданком у правій частині,

$$d\zeta(t) = \left(\tilde{g}\left(\zeta(t)\right)\varphi(t) + \tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t)\right)dt + \tilde{\sigma}\left(\zeta(t)\right)\theta(t)dw(t),\ t \geq 0; \quad (3.31)$$

$$\zeta(0) \equiv b, b > 0,$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала; $\tilde{g}_1$, φ та θ – неперервні функції, $\tilde{g}$ та $\tilde{\sigma}$ – неперервні додатні функції такі, що (3.31) має неперервний розв'язок ζ. Сформулюємо і доведемо твердження, яке містить умови, за яких існує границя відношення розв'язку ζ та функції Φ при $t \to \infty$.

Має місце наступна лема.

Лема 3.3. *Нехай виконуються* (3.9), (3.10), (3.14), (3.18) *та наступні три умови:*

А1) $\lim\limits_{x\to\infty}\tilde{g}(x) = \kappa\ \in (0,\, \infty)$*;*

Б1) функція $\tilde{\sigma}$ *є обмеженою;*

B1) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^t \tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0$ *м. н. на множині* $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t) = \infty\right\}$*;*

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = \kappa \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t) = \infty\right\}.$$

Доведення. Так як розв'язок рівняння (3.31) має вигляд

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int\limits_0^t \tilde{g}\left(\zeta(s)\right)\varphi(s)ds + \int\limits_0^t \tilde{g}_1\left(\zeta(s)\right)\theta^2(s)ds + \int\limits_0^t \tilde{\sigma}\left(\zeta(s)\right)\theta(s)dw(s),$$

то, враховуючи умови (3.14) та B1), для доведення леми 3.3 досить показати, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int\limits_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds = \kappa \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t) = \infty\right\} \qquad (3.32)$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi_+(t)} \int\limits_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) = 0 \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t) = \infty\right\} \qquad (3.33)$$

Доведемо спочатку рівність (3.32). За умови A1) леми 3.3 для будь-якого $\omega \in \left\{\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t) = \infty\right\}$ та будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $s_\varepsilon = s_\varepsilon(\omega) > 0$, що $|\tilde{g}(\zeta(s)) - \kappa| < \varepsilon$ при $s \geq s_\varepsilon$. Тому, зважаючи на умову (3.10), для будь-якого $t \geq s_\varepsilon$ маємо

$$\frac{\left|\int\limits_{s_\varepsilon}^t (\tilde{g}(\zeta(s)) - \kappa)\varphi(s)ds\right|}{\Phi(t)} \leq \frac{\varepsilon \int\limits_{s_\varepsilon}^t |\varphi(s)|\, ds}{\Phi(t)} \leq \frac{\varepsilon\Phi_+(t)}{\Phi(t)},$$

звідки

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\left|\int\limits_0^t (\tilde{g}(\zeta(s)) - \kappa)\varphi(s)ds\right|}{\Phi(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\left|\int\limits_{s_\varepsilon}^t (\tilde{g}(\zeta(s)) - \kappa)\varphi(s)ds\right|}{\Phi(t)} \leq$$

$$\leq \varepsilon \limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)}.$$

Враховуючи (3.14) та довільність $\varepsilon > 0$, отримуємо (3.32).

Доведемо тепер (3.33). Для цього при довільному $n \geq 0$ та довільному $\varepsilon > 0$ розглянемо наступні дві події

$$B_n = \left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\},$$

$$C_n = \left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{1}{\Phi_+(2^n)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Функція Φ_+ монотонно зростає, тому $B_n \subset C_n, \ \ n \geq 0$.

Оскільки $\tilde{\sigma}$ є обмеженою функцією, а θ – неперервною, то

$$\int_0^t \tilde{\sigma}^2(\zeta(s))\theta^2(s)ds < \infty \quad \text{i} \quad \int_0^t \mathbb{E}\tilde{\sigma}^2(\zeta(s))\theta^2(s)ds < \infty.$$

Враховуючи теорему 2.8, для будь-яких $n \geq 0$ і $\varepsilon > 0$ має місце оцінка

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{1}{\Phi_+(2^n)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Phi_+^2(2^n)\varepsilon^2} \int_0^{2^{n+1}} \mathbb{E}\left|\tilde{\sigma}(\zeta(s))\right|^2 \theta^2(s)ds \leq \frac{L^2\left(\int_0^{2^{n+1}} \theta^2(s)ds\right)}{\Phi_+^2(2^n)\varepsilon^2},$$

де $L = \sup_x \tilde{\sigma}(x) < \infty$.

Отже,

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \tag{3.34}$$

$$\leq \frac{L^2\left(\int_0^{2^{n+1}} \theta^2(s)ds\right)}{\Phi_+^2(2^n)\varepsilon^2}.$$

для довільних $n \geq 0$ та $\varepsilon > 0$.

Тепер для довільних $m \geq 1$ та $\varepsilon > 0$ розглянемо наступну подію

$$\tilde{B}_m = \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Представимо $\tilde{B}_m$ у вигляді

$$\tilde{B}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} B_k \right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(B_k),$$

то в силу (3.34) маємо

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$
$$\leq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\Xi_m L^2}{\varepsilon^2},$$

де

$$\Xi_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{n+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^n)}, m \geq 1.$$

Отже, для довільних $m \geq 1$ та $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\Xi_m L^2}{\varepsilon^2}. \tag{3.35}$$

Зауважимо, що в силу умови (3.18), $\Xi_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Позначимо

$$X_m = \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right|.$$

Тоді з співвідношення (3.35) та умови (3.18) випливає, що $\lim\limits_{m\to\infty} X_m = 0$ за ймовірністю. Оскільки $X_{m+1} \leq X_m$, то $\lim\limits_{m\to\infty} X_m = 0$ м.н.

Звідси випливає (3.33).

З співвідношень (3.32), (3.33) та (3.10) випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = \kappa \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\right\}.$$

Лему 3.3 доведено. ■

Тепер повернемось до рівняння (3.6) та розглянемо друге допоміжне твердження, яке описує поведінку на нескінченності функції від розв'язку η, з аналогічним нормуванням як і в лемі 3.3.

Лема 3.4. *Нехай θ та φ – неперервні функції, g і σ – неперервні додатні функції такі, що стохастичне диференціальне рівняння* (3.6) *має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η та виконуються умови* (3.9), (3.10), (3.14), (3.18)*. Нехай $f = (f(x),\ x \in \mathbb{R}^1)$ – є строго зростаюча двічі неперервно-диференційована функція, для якої виконуються наступні три умови:*

А2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)g(x) = C \in (0;\infty)$;

Б2) функція $f'\sigma$ є обмеженою;

В2) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^t f''(\eta(s))\sigma^2(\eta(s))\,\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0$ м. н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\right\}$.

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)} = C \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\right\}.$$

Доведення. Нехай $f^{-1} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ є обернена до f функція. Покладемо $\zeta(t) = f(\eta(t)),\ t > 0$. Тоді $\eta(t) = f^{-1}(\zeta(t)),\ t > 0$.

Застосовуючи формулу Іто для $f(\eta(t))$ (див. зауваження 2.2), отримаємо

$$d\zeta(t) = \left[f'(\eta(t))g\left(\eta(t)\right)\varphi(t) + \frac{1}{2}f''(\eta(t))\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)\right]dt+$$
$$+ f'(\eta(t))\sigma\left(\eta(t)\right)\theta(t)dw(t) =$$
$$=\Big[f'(f^{-1}(\zeta(t))g\left(f^{-1}(\zeta(t))\right)\varphi(t)+$$
$$+\frac{1}{2}f''(f^{-1}(\zeta(t)))\sigma^2(f^{-1}(\zeta(t))\theta^2(t)\Big]dt+$$
$$+ f'(f^{-1}(\zeta(t))\sigma\left(f^{-1}(\zeta(t))\right)\theta(t)dw(t).$$

Таким чином, процес ζ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$d\zeta(t) = (\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t) + \tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t))dt + \tilde{\sigma}(\zeta(t))\theta(t)dw(t),$$

де

$$\tilde{g}(x) = f'(f^{-1}(x))g\left(f^{-1}(x)\right),$$
$$\tilde{g}_1(x) = \frac{1}{2}f''(f^{-1}(x))\sigma^2(f^{-1}(x)),$$
$$\tilde{\sigma}(x) = f'(f^{-1}(x))\sigma\left(f^{-1}(x)\right).$$

Зауважимо, що це рівняння має вигляд (3.31). Тому можемо скористатися лемою 3.3.

Оскільки функція f є строго зростаючою та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Тому з В2) маємо

$$\lim_{x\to\infty}\tilde{g}(x) = \lim_{x\to\infty} f'(f^{-1}(x))g\left(f^{-1}(x)\right) = \lim_{x\to\infty} f'(x)g(x) = C$$

та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t \tilde{g}_1\left(\zeta(s)\right)\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t f''(\eta(s))\sigma^2(\eta(s))\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0$$

м.н. на множині $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty\right\}$.

Крім того, за умовою Б2) функція $f'\sigma$ є обмеженою, тому $\tilde{\sigma}$ є обмеженою функцією. Отже, виконуються всі умови леми 3.3 і тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = C \text{ м.н.}$$

Оскільки $\zeta(t) = f(\eta(t))$, то з останнього співвідношення випливає твердження теореми. Отже

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)} = C \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}.$$

Лему 3.4 доведено. ■

3.1.5. Доведення теореми 3.1.

Нехай $f(0) = 0$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{du}{g(u)},\ x > 0 \text{ та } f(x) = -\int_x^0 \frac{du}{g(u)},\ x < 0.$$

Тоді

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)},\ x \neq 0,$$

звідки

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)g(x) = 1.$$

За умовою а) функція $f'\sigma$ є обмеженою, а за умовою б) функція f є двічі неперервно-диференційовною. В силу б) маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int_0^t f''(\eta(s))\sigma^2(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int_0^t \frac{\sigma^2(\eta(s))}{g^2(\eta(s))} \cdot g'(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)} \leq$$

$$\leq \lim_{t\to\infty} \frac{L\int_0^t |g'(\eta(s))|\,\theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0$$

м.н. на множині $\left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}$, де $L = \sup_x \frac{\sigma^2(x)}{g^2(x)} < \infty$.

Отже, виконуються всі умови леми 3.4 з $f = G$ та $C = 1$. Тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1, \text{ м.н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}.$$

Теорему 3.1 доведено.

3.1.6. Доведення теореми 3.2.

В силу теореми 3.1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \left\{ \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}.$$

Тоді з умов (3.11), (3.28) та леми 2.6, де треба покласти $f = G$ і $f' = \frac{1}{g}$, випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{G(ct)}{G(t)} > 0 \text{ для будь-якого } c > 1.$$

Отже, в силу теореми 2.10, функція G^{-1} зберігає асимптотичну еквівалентність функцій, тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))} = \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1$$

м.н. на множині $\left\{ \lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \right\}$.

Таким чином теорему 3.2 доведено.

3.2. Асимптотична еквівалентність розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь.

3.2.1. Умови та формулювання основного результату.

У цьому підрозділі розглядаються необхідні та достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь виду (3.5). А саме будемо досліджувати умови, при яких розв'язки μ_1 та μ_2 цих рівнянь є асимптотично еквівалентними, тобто виконується наступне співвідношення.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1.$$

Для дослідження поставленої задачі будемо використовувати результати робіт [7,8,10], де знайдені умови, за яких обернені та квазі-обернені функції зберігають відношення еквівалентності.

Припустимо, що для кожного $k = 1, 2$, функція g_k у (3.5) є неперервною та додатною на $(0, \infty)$, а функція φ_k є неперервною.

Для $k = 1, 2$ покладемо

$$G_k(x) = \int\limits_{b_k}^{x} \frac{ds}{g_k(s)}, \ x \geq b_k,$$

(тут b_k – початкове значення відповідного звичайного диференціального рівняння), та

$$\Phi_k(t) = \int\limits_0^t \varphi_k(u)du,$$

$$(\Phi_k)_+(t) = \int\limits_0^t |\varphi_k(u)|\, du, \ t \geq 0.$$

В подальшому для $k = 1, 2$ будемо використовувати умови:

$$\lim_{x\to\infty} G_k(x) = \infty; \tag{3.36}$$

$$\Phi_k(t) > 0,\ t \geq 0 \text{ та } \lim_{t\to\infty} \Phi_k(x) = \infty; \tag{3.37}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_k(u)G_k(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1; \tag{3.38}$$

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_k(u)G_k(u)} = 0. \tag{3.39}$$

Зауваження 3.9. Умова (3.38) вже зустрічалась в підрозділі 3.1 (див. (3.28)). Умова (3.39) також має важливий зміст. Оскільки функція g є додатною та неперервною функцією, то згідно з лемою 2.5, у якій треба покласти $f = G_k$ та $f' = \frac{1}{g_k}$, $k = 1, 2$, рівносильна тому, що G є PRV-функцією (див. означення 5).

Розглянемо два випадки. В першому випадку, припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1. \tag{3.40}$$

За умови (3.40) ми отримаємо умови для рівнянь (3.5), при яких виконуються наступні три співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1, \tag{3.41}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1, \tag{3.42}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1. \tag{3.43}$$

В другому випадку, припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1. \tag{3.44}$$

За умови (3.44) ми отримаємо умови, при яких справедливі співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1, \tag{3.45}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1\,, \tag{3.46}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1\,. \qquad (3.47)$$

3.2.2. Випадок $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1$.

Перейдемо до першого випадку, в якому припускається еквівалентність функцій Φ_1 та Φ_2. Наступний результат встановлює зв'язок між граничною поведінкою відношення функцій G_1, G_2 та граничною поведінкою відношення розв'язків μ_1 та μ_2.

Теорема 3.3. *Нехай функції g_k та φ_k, $k = 1, 2$ є такими, що виконано умови* (3.36)*,* (3.37)*, та* (3.40)*.*

Тоді

1) якщо (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то справедлива імплікація* (3.41)*;*

2) якщо (3.39) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то справедлива імплікація* (3.42)*;*

3) якщо (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ і хоча б для одного $k = 1, 2$ виконується* (3.39)*, тоді справедлива еквівалентність* (3.43).

Доведення. Нехай виконується (3.38) хоча б для одного $k = 1, 2$, наприклад, для $k = 1$. Тоді в силу умов (3.36), (3.38) і леми 2.6, де

$$f = G_1 \;\text{ і }\; f' = \frac{1}{g_1},$$

маємо, що G_1 є SQI-функцією, тобто вона задовольняє умову

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{G_1(ct)}{G_1(t)} > 0 \;\text{ для будь-якого } c > 1.$$

Крім того, з (3.36) випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} G_1^{-1}(t) = \infty.$$

В силу теореми 2.10, G_1^{-1} зберігає асимптотичну еквівалентність функцій, тому з (3.37) та те, що за припущенням (3.40) маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(\Phi_1(t))}{G_2^{-1}(\Phi_2(t))}=1.$$

Якщо (3.44) виконано, то в силу теореми 2.11 маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(t)}{G_2^{-1}(t)}=1.$$

Тому, враховуючи те, що (3.40) отримуємо, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(\Phi_2(t))}{G_1^{-1}(\Phi_2(t))}=1.$$

Оскільки, $\mu_j=G_j^{-1}(\Phi_j),\ j=1,2$, (див. лему 3.2), то в результаті ми отримуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(\Phi_1(t))}{G_2^{-1}(\Phi_2(t))}==\lim_{t\to\infty}\left(\frac{G_1^{-1}(\Phi_1(t))}{G_1^{-1}(\Phi_2(t))}\cdot\frac{G_1^{-1}(\Phi_2(t))}{G_2^{-1}(\Phi_2(t))}\right)=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(\Phi_1(t))}{G_1^{-1}(\Phi_2(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(\Phi_2(t))}{G_2^{-1}(\Phi_2(t))}=1.$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi_2=\infty$ на підставі (3.37), то має місце

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)}=1.$$

Твердження 1) доведено.

Для того, щоб довести твердження 2), припустимо, що (3.39) виконується хоча б для одного $k=1,2$. Нехай, наприклад, (3.39) виконується для $k=1$. Припустимо також, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1.$$

Зауважимо, що в силу леми 3.2 та умов (3.36), (3.37), то розв'язки диференціальних рівнянь прямують до нескінченності, тобто для $k=1,2$,

$$\lim_{t\to\infty}\mu_k(t)=\infty.$$

Тоді в силу умов (3.36), (3.39) і леми 2.3 з $f = G_1$ і $f' = \frac{1}{g_1}$

$$\lim_{c\to 1}\limsup_{t\to\infty}\frac{G_1(ct)}{G_1(t)} = 1 \text{ для всіх } c > 1.$$

Тому, в силу леми 2.3, функція G_1 є PRV-функцією, тобто такою, що зберігає еквівалентність функцій. В силу теореми 2.10, функція G_1^{-1} є SQI-функцією.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1$, а функція G_1 зберігає еквівалентність функцій, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(\mu_1(t))}{G_1(\mu_2(t))} = 1.$$

Звідси та з (3.40) випливає, що справедлива наступна рівність

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{G_1(\mu_1(t))}{G_1(\mu_2(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(\mu_2(t))}{G_2(\mu_2(t))} = 1,$$

Оскільки μ_2 є неперервною та прямує до нескінченності при $t \to \infty$, то функція G_1 еквівалентна G_2. Твердження 2) доведено.

З тверджень 1) та 2) випливає твердження 3). ■

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами g_k та $\varphi_k,\ k = 1, 2$, такими, що для них виконується теорема 3.3.

Приклад 3.8. Розглянемо два диференціальні рівняння вигляду (3.5), коефіцієнти яких мають вигляд

$$g_1(x) = 2\sqrt{x},\ g_2(x) = 2\sqrt{x+1},\quad x > 0.$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \cos x,\ \ \varphi_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Запишемо відповідні рівняння.

$$d\mu_1(t) = 2\sqrt{\mu_1(t)}\,(1+\cos t)\,dt;\ \mu_1(0) = 0,$$

$$d\mu_2(t) = 2\sqrt{\mu_2(t)+1}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt;\ \mu_2(0) = 0.$$

Оскільки $\Phi_1(x) = x + \sin x$, $\Phi_2(x) = \sqrt{x^2+1}$, то умову (3.37) виконано. Крім того,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}} = 1.$$

Оскільки $G_1(x) = \sqrt{x}$ та $G_2(x) = \sqrt{x+1}$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G_1(x)}{G_2(x)} = 1.$$

Функції $g_k,\ k = 1, 2$ задовольняють умови (3.38) та (3.39). Наприклад, для $k = 1$ маємо

$$\int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_1(u)G_1(u)} = \int\limits_t^{ct} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \ln c > 0 \text{ для всіх } c > 1,$$

звідки

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_1(u)G_1(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1$$

та

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g_1(u)G_1(u)} = \lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} (\ln c) = 0.$$

Всі умови теореми 3.3 виконуються, тобто μ_1 еквівалентна μ_2.

Цей результат нескладно отримати і безпосередньо.

Зрозуміло, що

$$\mu_1(t) = (t + \sin t)^2$$

- розв'язок першого диференціального рівняння, а

$$\mu_2(t) = t^2$$

– розв'язок другого.

Зауважимо, що

$$\lim_{x\to\infty} \mu_k(t) = \infty,\ k = 1, 2.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1.$$

Наведемо приклади функцій для яких виконуються умови (3.38) та (3.39).

Приклад 3.9. Для функції

$$g(x) = \frac{x+1}{(\ln(x+1))^2}, \quad x > 0.$$

виконується умова (3.39), але не виконується (3.38). Дійсно

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g_1(u)G_1(u)} = \liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{\frac{u+1}{(\ln(u+1))^2} \cdot \frac{(\ln(u+1))^3}{3}} =$$

$$= 3 \cdot \liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{(u+1)\ln(u+1)} =$$

$$= 3 \cdot \liminf_{t\to\infty} \left(\ln \left(\frac{\ln(ct+1)}{\ln(t+1)} \right) \right) = 0 \text{ для всіх } c > 1.$$

Звідки

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g_1(u)G_1(u)} = \lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \left(\ln \left(\frac{\ln(ct+1)}{\ln(t+1)} \right) \right) = 0.$$

Приклад 3.10. Умови (3.38), (3.39) виконуються для широкого класу правильно змінних функцій g. Нижче наводимо доведення випадку 5) твердження 3.2.

Розглянемо

$$g(x) = |x|^\rho l(|x|), \quad x > 0.$$

де $l(x)$– SV-функція, $0 < \rho < 1$. Тоді, за теоремою Карамати [92],

$$G(x) = \int_b^x \frac{ds}{s^\rho l(s)} \sim \frac{x^{1-\rho}}{(1-\rho)l(x)} = R(x),\ x \to \infty.$$

Тому для $c > 1$

$$\int_t^{ct} \frac{ds}{g(s)G(s)} \sim \int_t^{ct} \frac{ds}{s^\rho l(s) \frac{s^{1-\rho}}{(1-\rho)l(s)}} = \frac{1}{1-\rho} \int_t^{ct} \frac{ds}{s} = \frac{\ln c}{1-\rho} > 1.$$

З останнього випливає, що для $c > 1$

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g(s)G(s)} = \frac{\ln c}{1-\rho} > 0;$$

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g(s)G(s)} = \lim_{c\downarrow 1} \frac{\ln c}{1-\rho} = 0.$$

3.2.3. Випадок $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1$.

Перейдемо тепер до другого випадку, в якому припускається еквівалентність функцій G_1 та G_2 визначених у $\mathbb{R}^1$. Має місце наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай функції g_k та φ_k, $k = 1, 2$ задовольняють умови* (3.36), (3.37) *та* (3.44)

Тоді,

1) якщо (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, тоді справедлива імплікація* (3.45)*;*

2) якщо (3.39) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, тоді справедлива імплікація* (3.46)*;*

3) якщо (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ і хоча б для одного $k = 1, 2$ виконується* (3.39)*, тоді справедлива еквівалентність* (3.47).

Доведення. Твердження 1) доводиться так само, як і твердження 1) теореми 3.3. Для доведення твердження 2) теореми 3.4, припустимо, що (3.39) виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, наприклад для $k = 1$. Тоді в силу умов (3.36), (3.37), (3.39) і леми 2.5, де $f = G_1$ і $f' = \frac{1}{g_1}$, функція G_1 є PRV-функцією. Тому, в силу леми 2.3, функція G_1 зберігає еквівалентність функцій, а в силу теореми 2.10, функція G_1^{-1} є SQI-функцією.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1$, а функція G_1 зберігає еквівалентність функцій, та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(\mu_1(t))}{G_1(\mu_2(t))}=1.$$

А тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(\mu_2(t))}{G_2(\mu_2(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)}=1.$$

Твердження 2) доведено.

З тверджень 1) та 2) випливає 3). ■

У теоремі 3.3 та теоремі 3.4 використовуються співвідношення (3.38) та (3.39). Умови, при яких виконується (3.38), згадувались у підрозділі 3.1 (див. твердження 3.2). Доцільно нагадати умови, при яких виконується (3.39).

Твердження 3.3 ([6]). *Нехай g – додатна неперервна функція така, що виконується* (3.11)*, і крім того, або*

1) $\liminf\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)G(x)}{x}>0$*; або*

2) g незростає при великих x; або

3) існує таке $\alpha<1$, що $0<\inf\limits_{x\ge1}g(x)x^{-\alpha},\ \sup\limits_{x\ge1}g(x)x^{-\alpha}<\infty$*; або*

4) $g^*(c)<c$ *для всіх* $c>1$*, де* $g^*(c)=\lim\limits_{x\to\infty}\sup\frac{g(cx)}{g(x)}$*; або*

5) g є RV-функцією з індексом $\alpha<1$ (див. [70]).

Тоді виконується умова (3.39)*, якщо покласти* $g_k=g$*.*

Зауваження 3.10. З випадку 4) твердження 3.3 випливає, наприклад, що для функції

$$g(x)=\mid x\mid^{\alpha}(2+\sin x),\quad 0<\alpha<1$$

умову (3.39) виконано. Додамо, що для цієї функції виконано умову (3.28) на підставі твердження 3.2. Замість $f(x)=2+\sin x$ в цьому прикладі можно обрати довільну функцію

$$g(x)=\mid x\mid^{\alpha}f(x),\quad 0<\alpha<1,$$

де $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^1}f(x)>0$ та $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^1}f(x)<\infty$.

3.2.4. Випадок суперпозиції функцій $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))}=1$.

Якщо припустити, що функції $\varphi_k,\ k=1,2$ приймають лише додатні значення, то можна розглянути суперпозицію функцій $G_k\circ(\Phi_k),\ k=1,2$ та для рівняння (3.7) дослідити умови, при яких виконуються співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))}=1\Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1; \tag{3.48}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))}=1\Leftarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1; \tag{3.49}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))}=1\Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1. \tag{3.50}$$

Нааведемо приклад, який показує імплікацію (3.48).

Приклад 3.11. Нехай $\varphi_k=\frac{1}{g_k},\ k=1,2$, тобто

$$(\Phi_k)=G_k,\quad G_k(0)=0,\ \ k=1,2.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{-1}(G_1(t))}{G_2^{-1}(G_2(t))}=1.$$

Розглянемо рівняння

$$d\mu_k(t)=g_k(\mu_k(t))\frac{1}{g_k(t)}dt,\ t\ge 0, k=1,2.$$

Знайдемо розв'язки цих рівнянь:

$$\frac{d\mu_k(t)}{g_k(\mu_k(t))}=\frac{dt}{g_k(t)},\ \ k=1,2,$$

$$G_k(\mu_k(t))=G_k(t),\quad k=1,2,$$

тобто $\mu_k(t)=t,\ k=1,2$, і тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1\ .$$

Припустимо, що функції G_k та $\Phi_k,\ k=1,2$ задовольняють умовам:

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{G_k(t)}^{G_k(ct)} d(\ln(\Phi_k)^{-1}(u)) > 0 \text{ для всіх } c>1, \tag{3.51}$$

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_{G_k(t)}^{G_k(ct)} d(\ln(\Phi_k)^{-1}(u)) = 0, \tag{3.52}$$

де $(\Phi_k)^{-1}$– функція обернена до Φ_k.

Умова (3.51) є подібною до умови (3.38) і, згідно з лемою 2.6, рівносильна тому, що $(\Phi_k)^{-1}\circ G_k,\ k=1,2$ є SQI-функцією. Дійсно,нехай для $k=1$ та для всіх $c>1$ має місце нерівність

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{f'(u)}{f(u)} du > 0.$$

Покладемо

$$f=(\Phi_1)^{-1}\circ(G_1) \ \text{ і } \ f' = \frac{1}{\varphi_1((\Phi_1)^{-1}\circ(G_1))g_1}.$$

Тоді

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{f'(u)}{f(u)} du = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{du}{[\varphi_1((\Phi_1)^{-1}(G_1(u)))g_1(u)][(\Phi_1)^{-1}(G_1(u))]} =$$

$$= \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{dG_1(u)}{[\varphi_1((\Phi_1)^{-1}(G_1(u)))][(\Phi_1)^{-1}(G_1(u))]} =$$

$$= \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{G_1(t)}^{G_1(ct)} \frac{dz}{[\varphi_1((\Phi_1)^{-1}(z))][(\Phi_1)^{-1}(z)]} = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{G_1(t)}^{G_1(ct)} d(\ln(\Phi_k)^{-1}(u)).$$

Отже, виконується (3.51).

Аналогічно можна показати, що умова (3.52) є подібною до умови (3.39) і згідно з лемою 2.5 рівносильна тому, що $(\Phi_k)^{-1}\circ G_k,\ k=1,2$ є PRV-функцією.

Зауважимо, що у випадку $(\Phi_k)^{-1}(t) = t$ отримаємо, що умови (3.51) та (3.52) зведуться до (3.38) та (3.39), відповідно.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.5. *Нехай функції g_k та φ_k, $k = 1, 2$ задовольняють умови* (3.36) *та* (3.37)*. Тоді,*

1) якщо (3.51) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, тоді справедлива імплікація* (3.48)*;*

2) якщо (3.52) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, тоді справедлива імплікація* (3.49)*;*

3) якщо (3.51) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ і хоча б для одного $k = 1, 2$ виконується* (3.52)*, тоді справедлива еквівалентність* (3.50).

Доведення. Нехай виконується (3.51) для одного з $k = 1, 2$, наприклад для $k = 1$. Тоді в силу умов (3.36) та (3.37), (3.51) і леми 2.5, де

$$f = (\Phi_1)^{-1}(G_1) \text{ і } f' = \frac{1}{\varphi_1((\Phi_1)^{-1}(G_1))g_1}$$

ми маємо, що

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(ct))}{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))} > 1 \text{ для будь-якого } c > 1.$$

Крім того в силу теореми 2.10 функція $(\Phi_1)^{-1}(G_1)$ зберігає асимптотичну еквівалентність функцій, тому, враховуючи (3.37), маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{-1}(\Phi_1(t))}{G_2^{-1}(\Phi_2(t))} = 1.$$

Оскільки $\mu_j = G_j^{-1}(\Phi_j)$, $j = 1, 2$. Тому,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{-1}(\Phi_1(t))}{G_2^{-1}(\Phi_2(t))} = 1.$$

Твердження 1) доведено.

Для того, щоб довести твердження 2), припустимо, що (3.52) виконується хоча б для одного $k = 1$. Тоді в силу умов (3.36), (3.37), (3.52) і леми 2.5,

$f = (\Phi_1)^{-1}(G_1)$ і $f' = \dfrac{1}{\varphi_1((\Phi_1)^{-1}(G_1))g_1}$ ми маємо, що $(\Phi_1)^{-1}(G_1)$ є PRV-функцією. Тому, в силу леми 2.3, функція $(\Phi_1)^{-1}(G_1)$ зберігає еквівалентність функцій. В силу теореми 2.10, функція $G_1^{-1}(\Phi_1)$ є SQI-функцією, так як $(\Phi_1)^{-1}(G_1) \in C_{inc}^{\infty}$.

Оскільки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} = 1,$$

а функція $\Phi_k^{-1}(G_k)$ зберігає еквівалентність функцій, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))} = 1.$$

Відмітимо, що $(\Phi_j)^{-1}(G_j(\mu_j(t))) = t,\ j = 1, 2$, тому справедлива наступна рівність

$$1 = \lim_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_1(t)))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(\mu_2(t)))} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_1(t)))}{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_2(t)))} \cdot \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_2(t)))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(\mu_2(t)))} \right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_1(t)))}{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_2(t)))} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(\mu_2(t)))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(\mu_2(t)))},$$

і, відповідно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\Phi_1)^{-1}(G_1(t))}{(\Phi_2)^{-1}(G_2(t))} = 1.$$

Твердження 2) доведено.

З тверджень 1) та 2) випливає 3). ■

3.3. Асимптотична еквівалентність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами виду $g(t,x)=g(x)\varphi(t),\ \sigma(t,x)=\sigma(x)\theta(t)$.

У цьому підрозділі розглянемо два стохастичних диференціальних рівняння (3.4). Ми знайдемо умови, при яких розв'язки двох стохастичних диференціальних рівнянь є асимптотично еквівалентними:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}=1 \text{ м. н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta_1(t)=\infty\right\}\bigcap\left\{\lim_{t\to\infty}\eta_2(t)=\infty\right\}.$$

Ця задача є останньою в списку поставлених задач у розділі 3, а її розв'язок тісно пов'язаний з усіма попередніми та випливає з результатів підрозділів 3.1 та 3.2, оскільки має місце наступне представлення

$$\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}=\frac{\eta_1(t)}{\mu_1(t)}\cdot\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}\cdot\frac{\mu_2(t)}{\eta_2(t)}. \tag{3.53}$$

Припустимо, що φ_k та $\theta_k,\ k=1,2,$ – дійсні неперервні функції; g_k та $\sigma_k,\ k=1,2,$ – неперервні додатні функції такі, що для кожного $k=1,2$ стохастичне диференціальне рівняння (3.4) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η_k. Крім того, припустимо, що для кожного $k=1,2$ функція g_k має похідну $g_k'(x),\ x\in\mathbb{R}^1$.

Нехай виконуються наступні умови для $k=1,2$:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{(\Phi_k)_+(t)}{\Phi_k(t)}<\infty; \tag{3.54}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2^{n+1}}\theta_k^2(s)ds}{(\Phi_k)_+^2(2^n)}<\infty; \tag{3.55}$$

$$\text{функція } \frac{\sigma_k}{g_k} \text{ є обмеженою;} \tag{3.56}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t|g_k'(\eta_k(s))|\,\theta_k^2(s)ds}{(\Phi_k)_+(t)}=0 \text{ м.н. на множині } \left\{\lim_{t\to\infty}\eta_k(t)=\infty\right\}. \tag{3.57}$$

Наступні два твердження дають умови асимптотичної еквівалентності розв'язків η_1 та η_2.

Теорема 3.6. *Припустимо, що для кожного $k = 1, 2$ виконуються умови* (3.36), (3.37), (3.54)–(3.57) *та функції Φ_1 та Φ_2 є асимптотично еквівалентними. Тоді*

1. *якщо* (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ та функції G_1 та G_2 є асимптотично еквівалентними при $t \to \infty$ тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \bigcap_{k=1}^{2} \Big\{ \lim_{t\to\infty} \eta_k(t) = \infty \Big\}; \qquad (3.58)$$

2. *якщо* (3.39) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ та* (3.58) *виконується з*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{2} \Big\{ \lim_{t\to\infty} \eta_k(t) = \infty \Big\} \right) > 0, \qquad (3.59)$$

   тоді G_1 та G_2 є асимптотично еквівалентними при $t \to \infty$;

3. *якщо виконується* (3.59) *та якщо* (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, а також якщо* (3.39) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = 1 \Leftrightarrow (3.58).$$

Доведення. Доведення теореми 3.6 випливає з теорем 3.1 та 3.3. ■

Теорема 3.7. *Припустимо, що для кожного $k = 1, 2$ виконуються умови* (3.36), (3.37), (3.54)–(3.57) *та функції G_1 та G_2 є асимптотично еквівалентними. Тоді*

1. *якщо* (3.38) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ та функції Φ_1 та Φ_2 є еквівалентними при $t \to \infty$, тоді виконується* (3.58)*;*

2. *якщо* (3.39) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, а також виконуються* (3.58) *та* (3.59)*, тоді Φ_1 та Φ_2 є асимптотично еквівалентними при $t \to \infty$;*

3. нехай виконується (3.59). *Якщо* (3.38) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$, *та якщо* (3.39) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$, *тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = 1 \Leftrightarrow (3.58).$$

Доведення. Доведення теореми 3.7 випливає з теорем 3.1 та 3.4. ■

3.4. Висновки

У розділі 3 розглядалась задача про *точний порядок зростання* розв'язку стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтом зсуву та дифузії, які спеціальним чином залежать від часу, а саме

$$g(t,x) = g(x)\varphi(t),\ \sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t).$$

Було знайдено умови на функції g, φ, θ, σ, при яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння майже напевно є асимптотично еквівалентним розв'язку детермінованого неавтономного звичайного диференціального рівняння.

Використовуючи отримані результати, було знайдено необхідні та достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь та умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь.

Результати цього розділу було опубліковано [10,11,74,103] і доповідались на 7 конференціях [154–161].

РОЗДІЛ 4. ψ-асимптотична стійкість розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь.

У розділі 3 вивчалась асимптотична еквівалентність розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами

$$g(t,x) = g(x)\varphi(t),\ \ \sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t),$$

а також асимптотична еквівалентність відповідних до них звичайних диференціальних рівнянь. Ця задача є узагальненням задачі про точний порядок росту для розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь, у яких коефіцієнти залежать лише від фазової змінної, тобто

$$g(x) = (g(x), x \in \mathbb{R}^1),\ \ \sigma(x) = (\sigma(x), x \in \mathbb{R}^1).$$

Нагадаємо, що дослідження цієї задачі для автономних стохастичних диференціальних рівнянь бере початок з $[30, 118]$ та продовжується в серії робіт [6–8].

Задачу про асимптотичну еквівалентність розвя'зків стохастичних диференціальних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь можно узагальнювати різними способами. Наприклад, результати глави 3 та робіт $[6–8, 30]$ можна поширити на так звану $\psi_{1,2}$-асимптотичну (ψ-асимптотичну) еквівалентність розвя'зків стохастичних диференціальних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь.

У цьому розділі розглядаються необхідні та достатні умови ψ-асимптотичної еквівалентності та $\psi_{1,2}$-асимптотичної еквівалентності розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь, $\psi_{1,2}$-асимптотичної еквівалентності розв'язків двох автономних звичайних диференціальних рівнянь, $\psi_{1,2}$-асимптотичної еквівалентності розв'язків двох автономних стохастичних диференціальних рівнянь.

Розглянемо два автономних стохастичних диференціальних рівняння

$$d\eta_k(t) = g_k\left(\eta_k(t)\right)dt + \sigma_k\left(\eta_k(t)\right)dw_k(t),\ t \geq 0; \tag{4.1}$$

$$\eta_k(0) \equiv b_k,\ b_k > 0,\ k = 1, 2,$$

де $\{\, w_k,\ k = 1, 2\,\}$ – стандартні вінерівські процеси, задані на одному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$; $\{\, b_k,\ k = 1, 2\}$ – невипадкові додатні константи; $\{\, g_k, \sigma_k,\ k = 1, 2\,\}$ неперервні функції визначені на $\mathbb{R}^1$, такі що для кожного $k = 1, 2$, рівняння (4.1) має єдиний неперервний м. н. розв'язок $\eta_k = (\eta_k(t),\ t \geq 0)$ та

$$\lim_{t\to\infty} \eta_k(t) = \infty \text{ м.н.} \tag{4.2}$$

Для кожного $k = 1, 2$ розглянемо розв'язок $\mu_k = (\mu_k(t),\ t \geq 0)$ відповідної задачі Коші звичайного диференціального рівняння, що відповідає (4.1) при $\sigma_k \equiv 0$, тобто

$$d\mu_k(t) = g_k\left(\mu_k(t)\right)dt, t_k \geq 0;\quad \mu_k(0) = b_k,\ b_k > 0,\ k = 1, 2. \tag{4.3}$$

Припустимо, що для кожного $k = 1, 2$, функція g_k є такою, що існує єдиний розв'язок μ_k і до того ж $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_k(t) = \infty$.

Нехай ψ_1 та ψ_2 – задані функції. Наступні чотири основні питання будуть розглянуті в цьому розділі.

У підрозділі 4.1 буде розглянуто умови, при яких для заданих ψ_1 та ψ_2 розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь (4.1) є ψ-асимптотично еквівалентними відповідним розв'язкам звичайного диференціального рівняння (4.3), тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_k(\eta_k(t))}{\psi_k(\mu_k(t))} = 1,\ k = 1, 2 \text{ м.н.}$$

Підрозділ 4.2 присвячений $\psi_{1,2}$–асимптотичній еквівалентності розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, а саме

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1.$$

У підрозділі 4.3 нас будуть цікавити умови, при яких розв'язок першого стохастичного диференціального рівняння в (4.1) буде $\psi_{1,2}$–асимптотично еквівалентним розв'язку другого звичайного диференціального рівняння в (4.3)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1 \text{ м.н.}$$

Четверте питання, пов'язане з $\psi_{1,2}$–асимптотичною еквівалентністю розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))}=1 \text{ м.н.},$$

вивчається у підрозділі 4.4.

Усі ці питання тісно пов'язані між собою, причому відповіді на третє та четверте питання визначаються відповідями на перше та друге питання.

4.1. Граничні співвідношення між розв'язками стохастичних та звичайних автономних диференціальних рівнянь.

У підрозділі 4.1 будемо розглядати ψ-асимптотичну поведінку при $t \to \infty$ розв'язку $\eta = (\eta(t),\ t \geq 0)$ стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right) dt + \sigma\left(\eta(t)\right) dw(t),\ t \geq 0;\quad \eta(0) \equiv b,\ b > 0, \tag{4.4}$$

де w – стандартний вінерів процес, заданий на $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Припустимо, що $\sigma = (\sigma(x), x \in \mathbb{R}^1)$ є додатною функцією та $g = (g(x), x \in \mathbb{R}^1)$ є додатною на $(0; \infty)$. Будемо розглядати лише той випадок, коли $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ м.н.

4.1.1. Умови та формулювання основного результату.

Нехай $\mu = (\mu(t),\ t \geq 0)$ – розв'язок задачі Коші, що відповідає (4.4) при $\sigma \equiv 0$, тобто

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right) dt,\ t \geq 0,\ \mu(0) = b. \tag{4.5}$$

Припустимо, що функція g є такою, що розв'язок μ існує і єдиний, до того ж він прямує до нескінченності при $t \to \infty$.

Покладемо

$$G(t) = \int\limits_b^t \frac{ds}{g(s)},\ t \in [b, \infty). \tag{4.6}$$

Зауважимо, що функція $G = (G(t),\ t \geq b)$ є оберненою до функції μ, тобто $G = \mu^{-1}$ (див. лему 3.2 при $\varphi \equiv 1$). Крім того, якщо g є додатною та неперервною функцією для $x \geq b$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \int\limits_b^\infty \frac{du}{g(u)} = \infty,$$

оскільки $G(\mu(t)) = t$, а μ – неперервна функція.

Основним питанням цього розділу є знаходження умов, за яких

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.7}$$

для заданої функції $(\psi(x), x \in \mathbb{R}^1)$.

Іноді не завжди зручно досліджувати асимптотичну поведінку самого розв'язку стохастичного диференціального рівняння або навіть не можливо це зробити. В такому випадку доцільно розглядати так звану ψ-асимптотичну еквівалентність розвя'зків (тобто виконання (4.7)), де ψ – непрервна додатна диференційовна строго зростаюча до нескінченності функція.

Зауваження 4.1. Частковим випадком (4.7) є задача про зближення розв'язків η та μ, яка розглядалась в роботах А.П. Креневіча [44, 45], А.М. Самойленко, О.М. Станжицького [68] та А.М. Самойленко, О.М. Станжицького, І.Г. Новака [69]. Зближення розв'язків – є виконання співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} (\eta(t) - \mu(t)) = 0 \text{ м.н.} \tag{4.8}$$

Якщо обрати $\psi(x) = e^x$, то (4.7) означає, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{\eta(t)}}{e^{\mu(t)}} = 1 \text{ м.н.},$$

що є еквівалентним (4.8). Таким чином, задача про зближення розв'язків дійсно є частковим випадком задачі про асимптотичну еквівалентність.

Для розв'язку поставленої задачі цього розділу будемо використовувати метод Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода, який вже було описано в главі 3. За допомогою цього методу можна отримати умови, при яких

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{t} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.9}$$

Отже, розглянемо функції g, σ та ψ, які задовольняють наступним умовам:

1. функція g є неперервною додатною для $x \in \mathbb{R}^1$; функція σ неперервною додатною для $x \in \mathbb{R}^1$; g та σ такі, що (4.4) має м.н. єдиний неперервний розв'язок η, а (4.5) має єдиний неперервний розв'язок μ.

2. $\psi = (\psi(x), x \in \mathbb{R}^1{}_+)$ при $x \geq x_0 \geq 0$ є додатною неперервно-диференційовною функцією, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$.

Покладемо

$$G^{(\psi)}(\cdot) = G(\psi^{-1}(\cdot)), \ g^{(\psi)}(\cdot) = g(\psi^{-1}(\cdot))\psi'(\psi^{-1}(\cdot)),$$

де G задано в (4.6), функція $\psi^{-1}(u)$, $u \geq \psi(x_0)$, є оберненою до ψ, а ψ' є першою похідною функції ψ.

Зауважимо, що $\left(G^{(\psi)}(t), \ t \geq b_k\right)$ є оберненою до функції $\psi(\mu(\cdot))$. Наприклад, якщо $\psi(\cdot) = \ln(\cdot)$, тоді $G^{(\ln)}(\cdot) = G(e^{(\cdot)})$ і $g^{(\ln)}(\cdot) = g(e^{(\cdot)})e^{-(\cdot)}$. Якщо ж $\psi(x) = x$, тоді $G^{(\psi)} = G$ і $g^{(\psi)} = g$.

Наша мета – знайти умови на функції g, σ та ψ, при яких з співвідношення (4.9) випливає співвідношення (4.7). Іншою метою є знаходження умов, при яких співвідношення (4.7) та (4.9) є еквівалентними. Для цього, ми розглянемо наступне твердження.

Теорема 4.1. *Припустимо, що g та σ є неперервними додатними функціями такими, що рівняння (4.4) має неперервний розв'язок η, а ψ є додатною неперервно-диференційованою функцією на $(0, \infty)$, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$, Припустимо, що виконуються наступні дві умови:*

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \int_b^\infty \frac{du}{g(u)} = \infty, \tag{4.10}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)} = \liminf_{t\to\infty} \int_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1. \tag{4.11}$$

Тоді

а) З (4.9) *випливає* (4.7)*;*

б) якщо додатково

$$\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t}^{ct}\frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)}=\lim_{c\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)}\frac{du}{g(u)G(u)}=0, \qquad (4.12)$$

то (4.7) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується* (4.9)*.*

Доведення. З умов (4.10), (4.11) та леми 2.6, де треба покласти $f = G^{(\psi)}$, тобто $f' = \frac{1}{g^{(\psi)}}$, випливає, що $G^{(\psi)}$ є SQI-функцією, тобто задовольняє умову

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{G^{(\psi)}(ct)}{G^{(\psi)}(t)} > 1 \text{ для всіх } c > 1.$$

Крім того, $G^{(\psi)} \in C^{\infty}_{inc}$. Отже, в силу теореми 2.10 функція $\psi(\mu(\cdot)) = \left(G^{(\psi)}\right)^{-1}(\cdot)$ зберігає еквівалентність функцій. Тому в силу (4.9),

$$1=\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\mu(G(\eta(t)))}{\psi(\mu(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(t))} \quad \text{м.н.}$$

Таким чином твердження а) доведено.

Для доведення твердження б) необхідно скористатись тим, що з умов (4.10), (4.12) та леми 2.5, де треба покласти $f = G^{(\psi)}$ і $f' = \frac{1}{g^{(\psi)}}$, випливає, що $G^{(\psi)}$ є PRV-функцією.

Тому за умов (4.10), (4.11) та (4.12) та в силу леми 2.3, функція $G^{(\psi)}(\cdot) = G(\psi^{-1}(\cdot))$ зберігає еквівалентність функцій. Тепер в силу (4.7),

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{G^{(\psi)}(\psi(\eta(t)))}{G^{(\psi)}(\psi(\mu(t)))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(t))}=1 \text{ м.н.}$$

Твердження б) доведено. ■

Відмітимо, що при виконанні умови (4.10) розв'язок μ буде прямувати до нескінченності при $t\to\infty$. Дійсно, оскільки (4.10) виконується та функція G є зростаючою та неперевною, то

$$\lim_{t\to\infty}G^{-1}(t)=\infty,$$

а отже,

$$\lim_{t\to\infty}\mu(t) = \lim_{t\to\infty}G^{-1}(t) = \infty.$$

Якщо покласти $\psi(x) \equiv x$, то з теореми 4.1 випливає одна теорема з [8], яка описує умови еквівалентності без ψ розв'язку рівняння (4.4) та розв'язку рівняння (4.5), тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.13}$$

Зауваження 4.2. Зауважимо, що нескладно навести приклад функції g, яка задовольняє одночасно (4.10) та (4.11), зокрема для $g(u) = e^{-u}$, $u > 0$ при $\psi(x) = e^x$. Наприклад, для функції $g(u) = u$, $u > 0$ при $\psi(x) \equiv x$, умова (4.10) виконується, а (4.11) – ні.

Наслідок 4.1. *Нехай g є неперервною додатною функцією, ψ є додатною неперервно-диференційованою функцією на $(0,\infty)$, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$ та виконуються умови (4.10) та (4.11). Тоді*

а) з

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t} = \kappa \text{ м.н.} \tag{4.14}$$

випливає

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))} = 1 \text{ м.н.}; \tag{4.15}$$

б) якщо виконується (4.12), то (4.15) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (4.14).

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.1.

Наведемо приклад стохастичного диференціального рівняння, розв'язок якого не є асимптотично еквівалентним до розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння, але для $\psi(x) = \ln x$ розв'язок є ψ-асимптотично еквівалентним.

Приклад 4.12. (Геометричний броунівський рух)

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = \alpha\eta(t)dt + \beta\eta(t)dw(t), \;\; t \geq 0; \; \eta(0) \equiv 1, \tag{4.16}$$

де w – стандартний вінерів процес; α, β – дійсні сталі. Припустимо, що константи α, β такі, що $\alpha - \frac{1}{2}\beta^2 > 0$, $\beta > 0$.

Тоді розв'язком (4.16) є

$$\eta(t) = \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta w(t)\right\}.$$

Зауважимо, що такий процес η називають *геометричним броунівським рухом.*

Відмітимо, що оскільки $\alpha - \frac{1}{2}\beta^2 > 0$, то згідно ПЗВЧ для вінерівського процесу маємо

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \lim_{t\to\infty}\exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta w(t)\right\} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\exp\left\{t\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta\frac{w(t)}{t}\right)\right\} = \infty \text{ м.н.}$$

Розглянемо задачу Коші для відповідного звичайного диференціального рівняння

$$d\mu(t) = \alpha\mu(t)dt, \;\; t \geq 0; \; \mu(0) \equiv 1, \tag{4.17}$$

розв'язком якої є

$$\mu(t) = e^{\alpha t}.$$

Знайдемо границю відношення розв'язку стохастичного диференціального рівняння до розв'язку звичайного диференціального рівняння.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta w(t)\right\}}{\exp\{\alpha t\}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\exp\left\{t\left(-\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{\beta w(t)}{t}\right)\right\} = 0 \;\text{ м. н.}$$

Отже, розв'язки не є асимптотично еквівалентними.

Зауважимо, що для функції g не виконуються умови (3.19) та (3.28) з теорем 3.1 та 3.2.

Дійсно, в даному випадку $g(x) = \alpha x$, $g'(x) = \alpha$. Тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t |g'(\eta(s))| \, \theta^2(s) ds}{\Phi_+(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t |\alpha| \, \beta^2 ds}{t} = |\alpha| \, \beta^2 \neq 0$$

та

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{ct} \frac{du}{u \ln u} = \liminf_{t\to\infty} \ln \frac{\ln ct}{\ln t} = 0 \text{ для всіх } c > 1.$$

З іншого боку розв'язки є ψ–асимптотично еквівалентними для $\psi(x) = \ln x$.

Щоб довести це, покажемо, що умови (4.11) та (4.12) виконуються.

Дійсно, $g(x) = \alpha x$, $G(x) = \frac{1}{\alpha} \ln x$, $\psi(x) = \ln x$. Тому

$$\psi^{-1}(x) = e^x, \;\; g^{(\psi)}(x) = g(\psi^{-1}(x))\psi'(\psi^{-1}(x)) = \alpha,$$

$$G^{(\psi)}(x) = G(\psi^{-1}(x)) = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\psi^{-1}(1)}^{\psi^{-1}(x)} \frac{du}{u} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_e^{e^x} \frac{du}{u} = \frac{1}{\alpha}(x-1), \;\; x \geq 1.$$

Співвідношення (4.11) виконано, оскільки

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)} \frac{du}{g(u)G(u)} = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{e^t}^{e^{ct}} \frac{du}{u \ln u} =$$

$$= \liminf_{t\to\infty} (\ln \ln e^{ct} - \ln \ln e^t) = \ln c > 0 \text{ для всіх } c > 1.$$

Співвідношення (4.12) теж виконується, оскільки

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(ct)} \frac{du}{g(u)G(u)} = \lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \ln c = 0.$$

Отже, виконуються всі умови наслідку 4.1, тому умова (4.15) є еквівалентною до (4.14), тобто має місце

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))} = 1 \;\; \text{м.н.},$$

де

$$\kappa = \lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\right)t+\beta w(t)-\ln b\right)}{t} = \frac{\alpha-\frac{1}{2}\beta^2}{\alpha} \text{ м.н.}$$

Цей результат можно отримати і при безпосередньому обчисленні. Оскільки, при $\kappa = \frac{\alpha-\frac{1}{2}\beta^2}{\alpha}$ маємо

$$\mu(\kappa t) = e^{\frac{\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\right)t}{\alpha}} = e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\right)t},$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))} = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\right)t+\beta w(t)}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\right)t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{\beta}{\alpha-\frac{1}{2}\beta^2}\frac{w(t)}{t}\right) = 1 \text{ м.н.}$$

Співвідношення (4.15) є еквівалентним (4.14) за умов (4.11), (4.12).

Аналогічний результат, який описано в наслідку 4.1, можно отримати для неавтономного стохастичного диференціального рівняння, яке досліджувалось в розділі 3.

Наслідок 4.2. *Нехай g та σ – неперервні додатні функції, φ та θ – неперервні функції такі, що рівняння* (3.6) *має неперервний розв'язок η, ψ є додатною неперервно-диференційованою функцією на* $(0,\infty)$, *яка строго зростає до нескінченності при $x\to\infty$ та виконуються умови* (4.10) *та* (4.11). *Тоді*

а) з

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = \kappa \text{ м.н.} \tag{4.18}$$

випливає

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.19}$$

б) якщо виконується (4.12), *то* (4.19) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується* (4.18).

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.1

Приклад 4.13. (Модель росту популяції)

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = r(t)\eta(t)dt + \beta\eta(t)dw(t), \;\; t \geq 0; \;\eta(0) \equiv 1, \tag{4.20}$$

де η – розмір популяції в момент часу t; r – відносна швидкість росту популяції; w – стандартний вінерів процес; $\beta \in \mathbb{R}^1_+$ – міра інтенсивності шуму в системі. Припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t r(s)ds = \infty \tag{4.21}$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{R(t)} = 0. \tag{4.22}$$

Розв'язок рівняння (4.20) має вигляд:

$$\eta(t) = \exp\left\{ \left(R(t) - \frac{1}{2}\beta^2 t \right) + \beta w(t) \right\}.$$

до того ж, в силу (4.22) маємо, що η прямує до нескінченності м.н. при $t \to \infty$.

Розглянемо задачу Коші для відповідного звичайного диференціального рівняння

$$d\mu(t) = r(t)\mu(t)dt, \;\; t \geq 0; \;\mu(0) \equiv 1. \tag{4.23}$$

Її розв'язком є

$$\mu(t) = e^{R(t)}.$$

Знайдемо границю відношення розв'язку стохастичного диференціального рівняння до розв'язку звичайного диференціального рівняння.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\exp\left\{ \left(R(t) - \frac{1}{2}\beta^2 t \right) + \beta w(t) \right\}}{\exp\{R(t)\}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \exp\left\{ t\left(-\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{\beta w(t)}{t} \right) \right\} = 0 \;\text{ м.н.}$$

Отже, розв'язки не є асимптотично еквівалентними. Відмітимо, що для коефіцієнтів рівняння (4.20) також не виконується умова (3.28) теореми 3.2, яка описує умови асимптотичної еквівалентності розв'язків, з шншого боку виконано всі умови теореми 3.1 (див. приклад 3.7 з розділу 3), тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)}=1 \text{ м.н.}$$

З іншого боку, для $\psi(x) = \ln x$, в силу наслідку 4.2, маємо ψ–асимптотичну еквівалентність, оскільки для g виконуються умови (4.11) та (4.12) (див. приклад 4.13), тому можна застосувати наслідок 4.2 з $\kappa = 1$, тобто отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))}=1 \text{ м.н.}$$

Цей результат можна перевірити практичним шляхом

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta(t))}{\psi(\mu(\kappa t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(R(t)-\frac{1}{2}\beta^2 t\right)+\beta w(t)}{R(t)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\beta^2 t}{R(t)}+\frac{w(t)}{R(t)}\right)=1 \text{ м.н.}$$

Отже, цей приклад показує справедливість наслідку 4.2.

4.2. Достатні умови для (4.11) та (4.12)

Наступні два твердження дають достатні умови, записані в термінах функції g, за яких виконуються (4.11) (див. твердження 4.4) та (4.12) (див. твердження 4.5), та які є більш зручними для практичного використання.

Твердження 4.4. *Нехай g – додатна неперервна функція на $(0;\infty)$, для якої виконується умова (4.10), а ψ – додатна неперервно диференційована функція, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$. Припустимо, що виконується одна з наступних умов:*

(1°) $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t}=\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)G(t)\psi'(t)}{\psi(t)}<\infty$*; або*

(2°) $g\cdot\psi'$ *не зростає при великих* t*; або*

(3°) *існує таке* $\alpha < 1$, *що* $0 < \inf\limits_{s\geq 1} g^{(\psi)}(s)s^{-\alpha} \leq \sup\limits_{s\geq 1} g^{(\psi)}(s)s^{-\alpha} < \infty$; *або*

(4°) $(g^{(\psi)})^*(c) < c$ для всіх $c > 1$, *де* $(g^{(\psi)})^*(c) = \limsup\limits_{t\to\infty} \frac{g^{(\psi)}(ct)}{g^{(\psi)}(t)}$; *або*

(5°) $g^{(\psi)}$ *є RV-функцією з індексом* $\alpha < 1$.

Тоді виконується умова (4.11).

Доведення. Нехай (1°) виконано. Тоді при $f = G^{(\psi)}$ і $f' = \frac{1}{g^{(\psi)}}$ маємо

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} = \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{G^{(\psi)}(t)g^{(\psi)}(t)} = \liminf_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{G^{(\psi)}(\psi(t))g^{(\psi)}(\psi(t))}$$

$$= \liminf_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{G(t)g(t)\psi'(t)} = \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{g(t)G(t)\psi'(t)}{\psi(t)}\right)^{-1} > 0.$$

Це означає, що $G^{(\psi)}$ є SQI-функцією (див. наслідок 2.3). На підставі леми 2.6 умова (4.11) виконується.

Нехай виконано (2°), тоді $g^{(\psi)}$ є не зростаючою функцією і тому

$$G^{(\psi)}(t) \leq \frac{t}{g^{(\psi)}(t)},$$

таким чином умова (4.11) випливає з (1°).

Нехай виконується (3°), тоді існує таке $M > 0$, що $g^{(\psi)}(t)t^{-\alpha} < M$, а отже $g^{(\psi)}(t) < Mt^{\alpha}$ для всіх $t \geq 1$.

Аналогічно, існує таке $m > 0$, що $g^{(\psi)}(t)t^{-\alpha} > m$, а отже $g^{(\psi)}(t) > mt^{\alpha}$ для всіх $t \geq 1$, тоді

$$G^{(\psi)}(t) = \int\limits_{\psi(b)}^{t} \frac{ds}{g^{\psi}(s)} \leq \int\limits_{\psi(b)}^{t} \frac{ds}{ms^{\alpha}} \leq \frac{t^{1-\alpha}}{m(1-\alpha)}.$$

Таким чином,

$$\frac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} \leq \frac{Mt^{\alpha}t^{1-\alpha}}{m(1-\alpha)t} \leq \frac{M}{m(1-\alpha)},$$

звідки

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} < \infty.$$

Нехай тепер виконано (4°).

Позначимо

$$f = G^{(\psi)} \text{ і } f' = \frac{1}{g^{(\psi)}}.$$

Тоді $f'_*(c) < c$ на підставі (4°), оскільки

$$\left(\frac{1}{g^{(\psi)}}\right)_* = \frac{1}{g^{(\psi)^*}}.$$

Тому з наслідку 2.4 випливає, що $G^{(\psi)}$ є SQI-функцією. Звідси отримуємо (4.11).

Покажемо, що з (5°) випливає (4°). Якщо виконується (5°), то

$$(g^{(\psi)})^*(c) = c^\alpha, \alpha < 1, c > 0.$$

Тоді при $c > 1$ маємо

$$(g^{(\psi)})_*(c) = c^\alpha < c.$$

Тому, умова (4.11) випливає з (5°). ■

Зауваження 4.3. Якщо виконано умову (4.10), та g не спадає при великих t, то умова (1°) твердження 4.4 є еквівалентною умові (4.11).

Зауваження 4.4. Умова (1°) твердження 4.4 не виконується, якщо $g^{(\psi)}(t) \equiv t$, оскільки в цьому випадку

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t \frac{ds}{s} = \infty.$$

Більше того, умова (1°) твердження 4.5 не виконуються, якщо функція $g^{(\psi)}$ є RV-функцією з індексом рівним 1, тобто $g^{(\psi)}$ є функцією вигляду $g^{(\psi)} = t\ell(t)$, де ℓ є SV-функцією, оскільки в цьому випадку

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \ell(t) \int\limits_1^t \frac{ds}{s\ell(s)} = \infty$$

(див. [136]).

Твердження 4.5. *Нехай g - додатна неперервна функція така, що виконується умова (4.10), а ψ – додатна неперервно диференційована функція, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$. Припустимо, що виконується одна з наступних умов:*

(1°) $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} = \liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)G(t)\psi'(t)}{\psi(t)} > 0$*; або*

(2°) $g \cdot \psi'$ *не спадає при великих t; або*

(3°) $\int\limits_{0+}^{1} \dfrac{dc}{g^{(\psi)*}(c)} > 0$*, де* $g^{(\psi)*}(c) = \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{g^{(\psi)}(ct)}{g^{(\psi)}(t)}$*; або*

(4°) *множина* $\left\{ c \in (0, 1] : \; g^{(\psi)*}(c) < \infty \right\}$ *має додатну міру Лебега ; або*

(5°) *виконується або умова (3°), або (4°), або (5°) твердження 4.4.*

Тоді виконується умова (4.12).

Доведення. Нехай виконано (1°). Якщо $f = G^{(\psi)}$, то $f' = \frac{1}{g^{(\psi)}}$. Тому

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{G^{(\psi)}(t)g^{(\psi)}(t)} =$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{G^{(\psi)}(\psi(t))g^{(\psi)}(\psi(t))} =$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{G(t)g(t)\psi'(t)} = \left(\liminf_{t\to\infty} \frac{G(t)g(t)\psi'(t)}{\psi(t)} \right)^{-1} < \infty.$$

Умова (4.12) випливає з (4.10), (2°), оскільки в силу (2°), $g^{(\psi)}$ є строго не спадаючою функцією, таким чином (1°) виконується;

Умова (4.12) випливає з (4.10) і (3°), в силу наслідку 2.6, де $f = G^{(\psi)}$ і $f' = \frac{1}{g^{(\psi)}}$, оскільки $\left(\frac{1}{g^{(\psi)}}\right)_*(c) = \frac{1}{g^{(\psi)*}(c)}$ для всіх $c > 0$;

Умова (4.12) випливає з (4.10) і (4°), оскільки з (4°) випливає (3°).

Умова (4.12) випливає з (4.10) і (5°), оскільки з (4°) випливає (5°). ■

Зауваження 4.5. В силу (4.10) умова (1°) твердження 4.5 еквівалентна умові (4.12), якщо функція g не спадає при великих t.

Дійсно, оскільки

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} > 0,$$

то для деяких m, t_0 та всіх $t > t_0$

$$g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t) > mt.$$

Тоді

$$0 < \int_t^{ct} \frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)} < \int_t^{ct} \frac{du}{mu} = \frac{1}{m} \ln u|_t^{ct} = \frac{1}{m} \ln c.$$

Отже

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g^{(\psi)}(u)G^{(\psi)}(u)} < \frac{1}{m} \ln c,$$

тому (4.12) виконується.

Наведемо приклад, коли функція G прямує до нескінченності, а умова (4.11) не виконується.

Приклад 4.14. Нехай $g(x) = \psi(x) = x,\ x > 0$. Очевидно, що умова (4.10) виконується, тобто

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \int_b^{\infty} \frac{du}{g(u)} = \int_b^{\infty} \frac{du}{u} = \ln u|_b^{\infty} = \infty.$$

З іншого боку, умова (4.11) не виконується, оскільки для всіх $c > 1$

$$0 \leq \liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g_1^{(\psi)}(u)G_1^{(\psi)}(u)} = \liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{u \ln u} =$$

$$= \liminf_{t\to\infty} (\ln\ln ct - \ln\ln t) \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{c-1}{\ln t} = 0.$$

У наступному прикладі представлені функції, які задовольняють усі три умови (4.10) - (4.12).

Приклад 4.15. Якщо $g(x) = x,\ x > 0$ та $\psi(t) = \ln t,\ t > 0$, тоді

$$\psi^{-1}(t) = e^t, \psi'(t) = \frac{1}{t}.$$

Тому

$$g^{(\psi)}(t) = g(\psi^{-1}(t))\psi'(\psi^{-1}(t)) = 1$$

та

$$G^{(\psi)}(t) = G(\psi^{-1}(t)) = \int\limits_{\psi^{-1}(b)}^{\psi^{-1}(t)} \frac{ds}{s} = \int\limits_{e^b}^{e^t} \frac{ds}{s} = t - b,\ t \geq b.$$

Тоді за твердженням 4.4 та твердженням 4.5, умови (4.10), (4.11) та (4.12) виконуються, оскільки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g^{(\psi)}(t)G^{(\psi)}(t)}{t} = 1,\ \ t > 0.$$

4.2.1. Умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Теорема 4.1 дає можливість перейти до дослідження обмежень на коефіцієнти детермінованого та стохастичного рівнянь, за яких розв'язок η рівняння (4.4) та розв'язок μ рівняння (4.5) є ψ-асимптотично еквівалентними м.н., тобто виконується співвідношення (4.7). Й.І. Гіхман та А.В. Скороход ([30], див. також теорему 2.6) довели, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{t} = 1 \text{ м.н.},$$

припускаючи, що

[ГС1] g – додатна неперервна функція на $\mathbb{R}^1_+$;

[ГС2] для всіх $t > 0$ існує похідна $g'(t)$, така що $g'(t) \to 0$ при $t \to \infty$

[ГС3] σ – додатна неперервна функція на $\mathbb{R}^1$;

[ГС4] рівняння (4.4) має м.н. єдиний неперервний розв'язок η, для якого $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ м. н. та диференціальне рівняння (4.5) має єдиний неперервний розв'язок;

[ГС5] функція $\frac{g}{\sigma}$ є обмеженою.

В подальшому [ГС1]-[ГС5] обмеження на функції g та σ будемо називати *умовами Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода.*

Зауважимо, що рівняння (4.4) має єдиний неперервний розв'язок η такий, що $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ м. н., так само як диференціальне рівняння (4.5) має єдиний неперервний розв'язок, якщо додатні неперервні функції g та σ задовольняють умовам теореми 2.1, тобто

- для довільного $T \in (0;\infty)$ існує додатне число $K = K(T)$ таке, що для всіх $x \in \mathbb{R}^1$

$$|g(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \le K^2 \left(1 + |x|^2\right);$$

- для довільного $C \in (0;\infty)$ існує число $L = L(C)$ таке, що

$$|g(x) - g(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \le L\,|x - y|$$

  для $(x, y) \in (-C; +C) \times (-C; +C)$;

- для всіх $x \in \mathbb{R}^1$

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\int\limits_{0}^{z} \frac{2g(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}dz = \infty \;\text{ та }\; \int\limits_{x}^{\infty} \exp\left\{-\int\limits_{0}^{z} \frac{2g(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}dz < \infty$$

(див. [30], §15 – 16, теорема 1).

Теорема 4.2. *Нехай ψ – додатна неперервно диференційована функція, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$. Припустимо, що виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода і* (4.10)*. Якщо має місце* (4.11) *або одна з умов твердження 4.4, то виконується співвідношення* (4.7)*.*

Доведення. Оскільки виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода, то за теоремою 2.5 отримуємо, що співвідношення (4.9) виконується м.н., тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{t} = 1 \text{ м.н.}$$

Нехай виконується (4.11) або одна з умов твердження 4.4. Тоді згідно з теоремою 4.1 виконується (4.7). Теорему доведено. ■

4.2.2. Умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера.

Результат теореми 4.2 можна також отримати, використовуючи *умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера* [118] замість умов Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Нагадаємо умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера. Для $t > 0$ покладемо

$$h(t) = \frac{g'(t)\sigma^2(t)}{2}, \ \upsilon(t) = \int\limits_1^t \frac{\sigma^2(u)}{g^3(u)} du.$$

[K0] Функція g неперервна та додатна на $\mathbb{R}^1_+$; функція σ неперервна додатна на $\mathbb{R}^1$; g та σ такі, що стохастичне диференціальне рівняння (4.4) має м.н. єдиний неперервний розв'язок, для якого $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ майже напевно, а звичайне диференціальне рівняння (4.5) має єдиний неперервний розв'язок.

[K1] $g : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ є двічі неперервно-диференційованою та такою, що $\int\limits_1^\infty (g(u))^{-1} du = \infty$.

[K2] $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0$.

[K3] $\sigma : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ є двічі неперервно-диференційованою строго додатною функцією і

$$\int\limits_0^\infty (tg(\mu(t)))^{-2} \sigma^2(\mu(t))dt < \infty.$$

[K4] функції $g, \ g', \ \dfrac{\sigma^2(\mu)}{g^2(\mu)}$ і $h(\mu)$ строго вогнуті або випуклі.

[K5] існує константа $C > 0$, така що $\ln\mu(2t) \le C\ln\mu(t)$ для великих t. Крім того, функція $e^{-(\cdot)}g(e^{(\cdot)})$ разом з похідною є строго вогнутими або випуклими.

Зауважимо, що за умов [K0]-[K4] виконується співвідношення (4.9), (див. [118], теорема 1). За умов [K0]-[K5] виконується також (4.7) при $\psi(t) = \ln t, \ t > 0$, (див. [118], теорема 5).

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови [K0]-[K4], а* ψ *– додатна неперервно диференційована функція, яка строго зростає до нескінченності при* $x \to \infty$. *Якщо має місце* (4.11) *або одна з умов твердження 4.4, то має місце* (4.7).

Доведення. Оскільки за умов [K0]-[K4] виконується співвідношення (4.9), то теорема 4.3 випливає з теореми 4.1 та твердження 4.4. ■

4.3. ψ-асимптотична стійкість розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними.

У цьому підрозділі розглянемо умови, при яких розв'язки μ_1 та μ_2 звичайних диференціальних рівнянь виду (4.3) є ψ_1, ψ_2-асимптотично еквівалентними, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1. \tag{4.24}$$

4.3.1. Умови та формулювання основного результату.

Розглянемо диференціальні рівняння (4.3) для $k = 1, 2$ та припустимо, що

[B1] функція $g_k,\ k = 1, 2,$ є неперервною додатною визначеною на $(0, \infty)$ та такою, що диференціальне рівняння (4.3) має єдиний неперервний розв'язок μ_k.

[B2] $\psi_k = (\psi_k(x),\ x > 0)$, $k = 1, 2$ є додатною неперервно диференційованою функцією, яка строго зростає до нескінченності при $x \to \infty$.

Покладемо

$$G_k^{(\psi)}(\cdot) = G_k(\psi^{-1}(\cdot)),\ g_k^{(\psi)}(\cdot) = g_k(\psi^{-1}(\cdot))\psi'(\psi^{-1}(\cdot)),$$

де

$$G_k(x) = \int_{b_k}^{x} \frac{ds}{g_k(s)},\ x \geq b_k,\ k = 1, 2.$$

Зауважимо, що для кожного $k = 1, 2$ функція $G_k = (G_k(x),\ x \geq b_k)$ є оберненою до функції μ_k, а також $G_k^{(\psi_k)} = \left(G_k^{(\psi_k)}(x),\ x \geq \psi_k(b_k)\right)$ є оберненою до функції $\psi_k(\mu_\kappa)$, де

$$G_k^{(\psi_k)}(s) = \int_{\psi_k(b_k)}^{x} \frac{ds}{g_k^{(\psi_k)}(s)},\ x \geq \psi_k(b_k),\ k = 1, 2.$$

Будемо використовувати наступну умову

$$\int\limits_{b_k}^{x} \frac{ds}{g_k(s)} = \infty,\ k = 1,2. \tag{4.25}$$

В силу умови [B1], рівність (4.25) є еквівалентною наступному співвідношенню

$$\int\limits_{b_k}^{\infty} \frac{ds}{g_k^{(\psi_k)}(s)} = \infty,\ k = 1,2.$$

Остання умова означає, що

$$\lim_{x\to\infty} G_k^{(\psi_k)}(x) = \infty,\ k = 1,2.$$

Отже, в силу [B1], умова (4.25) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{t\to\infty} \mu_k(t) = \infty,\ k = 1,2.$$

Метою цього підрозділу є знаходження обмежень на g_k та ψ_k, $k = 1,2$, при яких виконується (4.24).

Ми знаходимо достатні умови, при яких виконуються наступні три співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1; \tag{4.26}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1; \tag{4.27}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1. \tag{4.28}$$

Розглянемо наступні дві умови: для заданого $k = 1,2$

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{du}{g_k^{(\psi_k)}(u) G_k^{(\psi_k)}(u)} = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\psi_k^{-1}(t)}^{\psi_k^{-1}(ct)} \frac{du}{g_k(u) G_k(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1; \tag{4.29}$$

$$\lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{ct} \frac{du}{g_k^{(\psi_k)}(u) G_k^{(\psi_k)}(u)} = \lim_{c\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \int\limits_{\psi_k^{-1}(t)}^{\psi_k^{-1}(ct)} \frac{du}{g_k(u) G_k(u)} = 0. \tag{4.30}$$

Зауваження 4.6. Для заданого $k = 1, 2$ умови (4.29) і (4.30), відповідно, співпадають з умовами (4.11) і (4.12), де $g = g_k^{(\psi_k)}$ і $G = G_k^{(\psi_k)}$. Якщо одна із умов (1°) – (5°) твердження 4.4 (твердження 4.5) виконується, де

$$g = g_k^{(\psi_k)} \text{і} \ \ G = G_k^{(\psi_k)},$$

то виконується умова (4.29) ((4.30)).

Наведемо приклад функцій, для яких виконується умови (4.29), (4.30).

Приклад 4.16. Для заданого $k = 1, 2$ функції g_k та ψ_k є додатними і неперервними на $(0;\ \infty)$ і такими, що виконується умова [B2]. Нехай $g_k^{(\psi_k)}$ є RV-функцією з індексом $\alpha < 1$. Тоді виконується умова (5°) твердження 4.4 та твердження 4.5. Зрозуміло, що виконується і (4.25). В силу зауваження 4.6 функції g_k та ψ_k задовольняють (4.29) та (4.30)

Теорема 4.4. *Нехай функцій g_k та $\psi_k,\ k = 1, 2$ задовольняють [B1], [B2],* (4.25)*. Тоді*

1) якщо (4.29) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то справедлива імплікація* (4.26)*;*

2) якщо (4.30) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$, то справедлива імплікація* (4.27)*;*

3) якщо (4.29) *виконується хоча б для одного $k = 1, 2$ і хоча б для одного $k = 1, 2$ виконується* (4.30)*, то справедлива еквівалентність* (4.28).

Доведення. Нехай виконується (4.29) для одного з $k = 1, 2$. Тоді в силу умов (4.25), (4.29) і леми 2.6, у якій $f = G_k^{(\psi_k)}$ і $f' = \frac{1}{g_k^{(\psi_k)}}$, ми маємо, що $G_k^{(\psi_k)}$ є SQI-функцією, тобто вона задовольняє умову (2.9). Крім того,

$$G_j^{(\psi_k)} \in C_{inc}^{\infty},\ \ j = 1, 2.$$

та

$$\left(G_j^{(\psi_j)}\right)^{-1} = \psi_j \circ \mu_j,\ j = 1, 2.$$

Тому співвідношення (4.26) випливає в силу теореми 2.11. Твердження 1) доведено.

Для того, щоб довести твердження 2), припустимо, що (4.30) виконується хоча б для одного $k = 1, 2$. Тоді в силу умов (4.25), (4.30) і леми 2.4, де

$$f = G_k^{(\psi_k)} \quad \text{і} \quad f' = \frac{1}{g_k^{(\psi_k)}},$$

функція $G_k^{(\psi_k)}$ є PRV-функцією. Тому, в силу леми 2.3, функція $G_k^{(\psi_k)}$ зберігає еквівалентність функцій. В силу теореми 2.10, функція $\psi_k \circ \mu_k$ є SQI функцією, так як $G_j^{(\psi_k)} \in C_{inc}^{\infty}$ і $\left(G_j^{(\psi_j)}\right)^{-1} = \psi_j \circ \mu_j, \ j = 1, 2$. Тоді, в силу теореми 2.11, виконується твердження 2).

З тверджень 1) та 2) випливає 3). ∎

Враховуючи теорему 4.4 та приклад 4.16 отримуємо наступний результат.

Наслідок 4.3. *Нехай функції g_k та ψ_k, $k = 1, 2$, такі, що виконуються умови [B1], [B2]. Якщо хоча б одна з функцій $g_k^{(\psi_k)}$ є RV функцією з індексом $\alpha < 1$, тоді виконується еквівалентність* (4.28).

Теорема 4.4 дає умови, за яких виконуються співвідношення (4.26)-(4.28) для інтегральних функцій $G_1^{\psi_1}$ та $G_2^{\psi_2}$. Виникає питання, чи можливо встановити зв'язок між ψ-асимптотичною еквівалентністю підінтегральних функцій g_1, g_2 та ψ-асимптотичною еквівалентністю розв'язків μ_1, μ_2.

Нас будуть цікавити умови, при яких виконуються наступні три співвідношення.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1; \tag{4.31}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1; \tag{4.32}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1. \tag{4.33}$$

Ці співвідношення виконуються не завжди. Наступні два контрприклади демонструють, те що з еквівалентності g_1, g_2 без додаткових умов не випливає еквівалентність μ_1, μ_2.

Приклад 4.17. Нехай

$$g_1(u) = u,\ g_2(u) = u + \sqrt{u},\ u \geq 0,\ \psi(x) = x,\ x > 0.$$

Відповідні диференціальні рівняння мають вигляд:

$$\mu_1'(t) = \mu_1(t),\ \mu_1(0) = 1;$$

$$\mu_2'(t) = \mu_2(t) + \sqrt{\mu_2(t)},\ \mu_2(0) = 1.$$

Єдиним розв'язком першого рівняння є

$$\mu_1(t) = e^t,\ t \geq 0,$$

а другого рівняння є

$$\mu_2(t) = \left(2 \cdot e^{\frac{t}{2}} - 1\right)^2,\ t \geq 0.$$

Таким чином

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 4.$$

Бачимо, що g_1 та g_2 є еквівалентними, але відповідні розв'язки μ_1 та μ_2 не є еквівалентними.

Зауважимо, що g_1, g_2 є RV-функціями з індексом 1.

Приклад 4.18. Нехай

$$g_1(x) = x + 1,$$

$$g_2(x) = \frac{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}{2\sqrt{\ln(x+1)} + 1},\ x \geq 0,$$

та

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = 1.$$

Тоді відповідні задачі Коші мають наступний вигляд

$$\mu_1'(t) = \mu_1(t) + 1, t \geq 0, \mu_1(0) = 1,$$

$$\mu_2'(t) = \frac{2(\mu_2(t)+1)\sqrt{\ln(\mu_2(t)+1)}}{2\sqrt{\ln(\mu_2(t)+1)}+1},\ t \geq 0,\ \mu_2(0) = 1.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}{2\sqrt{\ln(x+1)}+1}\cdot\frac{1}{x+1} = 1,$$

то функції g_1 та g_1 є еквівалентними.

Знайдемо границю відношення розв'язків μ_1 та μ_2.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_2(t)}{\mu_1(t)} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}(2(t+C)+1)}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4(t+C)}}}-1\right)\cdot\frac{1}{2e^t-1} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}+C-\frac{1}{2}\sqrt{1+4(t+C)}}-e^{-t}}{2-e^{-t}} = 0,$$

де $C = \ln 2 + \sqrt{\ln 2}$.

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_2(t)}{g_1(t)} = 1,\ \text{а}\ \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_2(t)}{\mu_1(t)} = 0.$$

Результати теореми 4.4 показують, що задача про виконання (4.31)-(4.33) тісно пов'язана з наступним питанням.

Розглянемо дві функції $(f_1,\, t > 0)$ та $(f_2,\, t > 0)$, які є невід'ємними й інтегрованими за Лебегом на кожному скінченому проміжку і для заданих чисел a_1 та a_2 покладемо

$$F_k(t) = \int\limits_{a_k}^{t} f_k(u)du,\ t \geq a_k,\ k = 1,2.$$

Припустимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} F_k(t) = \infty,\ k = 1,2$. Нас буде цікавити, при яких умовах виконуються наступні співвідношення.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{F_1(t)}{F_2(t)} = 1; \tag{4.34}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1 \Leftarrow \lim_{t\to\infty}\frac{F_1(t)}{F_2(t)} = 1; \tag{4.35}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{F_1(t)}{F_2(t)} = 1. \tag{4.36}$$

Очевидно, що (4.34) виконується завжди. Дійсно, нехай функції f_1 та f_2 є еквівалентними. З того, що $\lim\limits_{t\to\infty} F_k(t) = \infty,\ k = 1, 2,$ випливає , що для будь-якого $a \geq a_1,\ a_2$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\int\limits_a^t f_1(u)du}{\int\limits_a^t f_2(u)du}.$$

Так як

$$\int\limits_a^t f_1(u)du = \int\limits_a^t \frac{f_1(u)}{f_2(u)} \cdot f_2(u)du \leq \left(\sup_{u\geq a} \frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right) \int\limits_a^t f_2(u)du,$$

то для будь-якого $a \geq a_1,\ a_2$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\int\limits_a^t f_1(u)du}{\int\limits_a^t f_2(u)du} \leq \sup_{u\geq a} \frac{f_1(u)}{f_2(u)}.$$

Таким чином

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{f_1(u)}{f_2(u)} = 1.$$

Аналогічно показуємо, що $1 \leq \liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{F_1(t)}{F_2(t)}$. Тобто F_1 та F_2 є еквівалентними.

Зауважимо, що якщо f_1 є еквівалентною f_2, та F_1 прямує до нескінченності, то функція F_2 теж є необмеженою, тобто якщо $\lim\limits_{t\to\infty} F_1(t) = \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} F_2(t) = \infty$.

Припустимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} F_1(t) = \infty$ та $\lim\limits_{t\to\infty} F_2(t) < \infty$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} F_1(t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{a_1}^t \frac{f_1(u)}{f_2(u)} \cdot f_2(u)du \leq \left(\sup_{u\geq a_1} \frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right) \lim_{t\to\infty} F_2(t) < \infty,$$

що суперечить припущенню, що $\lim\limits_{t\to\infty} F_1(t) = \infty$. Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} F_2(t) = \infty$.

Розглянемо також співвідношення (4.35). На відміну від (4.34) співвідношення (4.35) потребує додаткових обмежень. Наступний приклад демонструє це.

Приклад 4.19. Нехай

$$f_1(t) = 2t, f_2(t) = 2t(1 + \cos t^2),\ t \geq 0,$$

тоді первісні мають вигляд

$$F_1(t) = t^2, F_2(t) = t^2 + \sin t^2, t \geq 0.$$

Таким чином

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} = 1,$$

але границі

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_1(t)}{f_2(t)}$$

не існує. Зауважимо, що функція f_1 є RV-функцією з індексом $\alpha = 1$.

Отже, співвідношення (4.35) виконується лише за певних умовах. Застосовуючи теорему Карамати (див. зауваження 2.9 або [92], ст. 26), отримуємо наступний результат.

Лема 4.1. *Якщо f_1 та f_2 є RV-функціями з індексами α_1 та α_2 більшими за -1, то виконуються імплікації* (4.35) *та* (4.36).

Доведення. Для кожного $k = 1, 2$, функція F_k є RV-функцією з індексом $\alpha_k + 1 > 0$, так як f_k є RV-функцією з індексом $\alpha_k > -1$. Припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} = 1.$$

Тоді $\alpha_1 + 1 = \alpha_2 + 1 = \beta > 0$ і в силу теореми Карамати (див. теорему 2.9) отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tf_k(t)}{\beta F_k(t)} = 1,\ k = 1, 2.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{tf_1(t)}{\beta F_1(t)} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\beta F_2(t)}{tf_2(t)} = 1.$$

Співвідношення (4.35) доведено. Еквівалентність (4.36) випливає з (4.34) і (4.35). Лему доведено. ■

В силу (4.34) та теореми 4.4 отримуємо наступні результати.

Теорема 4.5. *Нехай функції g_k та $\psi_k,\ k=1,2$ такі, що виконуються умови [B1], [B2],* (4.25). *Якщо хоча б для одного $k=1,2$ виконується* (4.29)*, то виконується імплікація* (4.31).

Доведення. Нехай для $k=1$ виконується (4.29), тобто

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_t^{ct}\frac{du}{g_1^{(\psi_k)}(u)G_1^{(\psi_k)}(u)}>0 \text{ для всіх } c>1.$$

Оскільки g_k та $\psi_k,\ k=1,2$ задовольняють (B1), (B2), (4.25), то в силу теореми 4.4 отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1.$$

Нехай $g_1^{(\psi_1)}$ та $g_2^{(\psi_2)}$ є еквівалентними, тоді, враховуючи (4.34), маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{g_2^{(\psi_2)}(t)}}{\frac{1}{g_1^{(\psi_1)}(t)}}=1\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{G_2^{(\psi_2)}(t)}{G_1^{(\psi_1)}(t)}=1.$$

А отже, маємо наступні дві імплікації

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)}=1\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{G_2^{(\psi_2)}(t)}{G_1^{(\psi_1)}(t)}=1\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(\mu_2(t))}{\psi_1(\mu_1(t))}=1.$$

Теорему доведено. ■

Зауважимо, що функція $g_1(u)=u,\ u\geq 0$, яка розглядалась у прикладі 4.17 , та функція $g_1(x)=x+1$ з прикладу 4.18 задовольняють (4.25), але для них не виконується (4.29).

Якщо покласти, що $\psi_1=\psi_2=\psi$, то з теореми 3.5 можемо отримати наступний результат.

Наслідок 4.4. *Нехай функції $g_k,\ k=1,2$ такі, що виконуються умови [B1],* (4.25)*, функція ψ – додатна неперервно-диференційована, строго зростаючої до нескінченності. Якщо хоча б для одного $k=1,2$ виконується* (4.29)*, то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1(t)}{g_2(t)}=1\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\mu_1(t))}{\psi(\mu_2(t))}=1.$$

Враховуючі попередні відомості, можна одержати наступний результат.

Теорема 4.6. *Нехай функції g_k та $\psi_k,\ k=1,2$, такі, що виконуються умови [B1], [B2]. Якщо $g_1^{(\psi_1)}$ та $g_2^{(\psi_2)}$ є RV-функціями з індексами менше ніж 1, тоді виконується умова* (4.33).

Доведення. Так як для функцій $g_1^{(\psi_1)}$ та $g_2^{(\psi_2)}$ виконуються всі умови наслідку 3.2, тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1.$$

За припущенням теореми 3.6, функції $g_1^{(\psi_1)}$ та $g_2^{(\psi_2)}$ є RV-функціями з індексами менше ніж 1, тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1,$$

а отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1.$$

Теорему доведено. ■

З теореми 3.6. при $\psi_1=\psi_2=\psi$ випливають наступні результати.

Наслідок 4.5. *Нехай для $g_1,\ g_2$ виконуються умови [B1] та функція ψ є додатною неперервно-диференційованою строго зростаючої до нескінченності. Якщо $g_1^{(\psi)}$ і $g_2^{(\psi)}$ є RV-функціями з індексами менше ніж 1,*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1(t)}{g_2(t)}=1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\mu_1(t))}{\psi(\mu_2(t))}=1.$$

Наслідок 4.6. *Нехай g_1 та g_2 є RV-функціями з індексами менше ніж 1 і виконується [B1], тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1(t)}{g_2(t)}=1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=1.$$

Зауваження 4.7. Приклади 4.17 та 4.18 показують, що RV-функції g_1 та g_2 в силу наслідку 3.4 не можуть мати індекс рівний 1 (в усіх інших твердженнях теж).

4.4. Гранична поведінка відношення розв'язку стохастичного диференціального рівняння та розв'язку іншого звичайного диференціального рівняння

Результати попереднього підрозділу дають можливість знайти умови, при яких розв'язок η_1 першого стохастичного диференціального рівняння в (4.1) і розв' язок μ_2 другого звичайного диференціального рівняння в (4.3) є ψ-асимптотично еквівалентними, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1 \quad \text{м.н.}$$

Ця задача є більш загальною ніж задача, що розглядалась у підрозділі 4.1, але її розв'язок випливає з результатів підрозділів 4.1 та 4.2, оскільки

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} \quad \text{м.н.} \tag{4.37}$$

Твердження теорем 4.1, 4.2 і 4.3 є стійкими по відношенню до змін початкових умов і змін функції $g^{(\psi)}$ на асимптотично-еквівалентну версію. Наступні теореми демонструють цей факт.

Теорема 4.7. *Нехай виконується [B1], [B2],* (4.25)*, і нехай функція* σ_1 *неперервною додатною при* $x\in\mathbb{R}^1$*;* g_1 *та* σ_1 *є такими, що рівняння* (4.1) *при* $k=1$ *має м.н. єдиний неперервний розв'язок* η_1*. Припустимо, що*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1(\eta_1(t))}{t}=1 \text{ м.н.}$$

Тоді

1. *якщо виконується* (4.29) *хоча б для одного* $k=1,2$*, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1 \quad \text{м.н.} \tag{4.38}$$

Крім того

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)}=1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}=1 \text{ м.н.} \tag{4.39}$$

2. Якщо умови (4.29) *і* (4.30) *виконуються для кожного* $k = 1, 2$, *тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.40}$$

Доведення. Почнемо з доведення першого пункту теореми 4.7. Припустимо, що для $k = 1$ виконується (4.29), а також, що функція $G_1^{(\psi_1)}$ є асимптотично еквівалентною до функції $G_2^{(\psi_2)}$. Тоді виконуються всі умови теореми 4.4, тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1.$$

За умовою $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{G_1(\eta_1(t))}{t} = 1$ м.н. та для функцій g_1 та G_1 справедливе співвідношення (4.29). Тому в силу теореми 4.1, η_1 та μ_1 є ψ_1-асимптотично еквівалентними, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Крім того, якщо припустити, що $g_1^{(\psi_1)}$ є еквівалентною до $g_2^{(\psi_2)}$, то в силу теореми 4.5 виконується (4.39).

Твердження 1) теореми 4.7 доведено.

Твердження 2) теореми 4.7 за аналогічних міркувань випливають з теорем 4.1, 4.4. Теорему доведено. ■

Зауваження 4.8. Теорема 4.7 залишається справедливою, якщо припущення еквівалентності $G_1(\eta_1(t))$ та t замінити на умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода або на умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера.

Розглянемо деякі наслідки теореми 4.7 з умовами Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Теорема 4.8. *Нехай виконується [B1], [B2] і* (4.25)*, і нехай* $g = g_1$ *і* $\sigma = \sigma_1$ *такі, що виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5].*

1) Якщо (4.29) *виконується хоча б для одного* $k = 1, 2$*, тоді виконується* (4.38) *та* (4.39)*.*

2) Якщо (4.29) *і* (4.30) *умови виконуються для кожного* $k = 1, 2$*, тоді виконується* (4.40)*.*

Доведення. Оскільки для g_1 і σ_1 виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода, то в силу теореми 2.5

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G_1(\eta_1(t))}{t} = 1 \text{ м.н.}$$

Тепер теорема 4.8 випливає з теореми 4.7. ■

Теорема 4.9. *Нехай виконується [B1] і [B2], і нехай* $g = g_1$ *і* $\sigma = \sigma_1$ *такі, що виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5].*

1. *Якщо хоча б одна з* $g_1^{(\psi_1)}$ *або* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функцією з індексом менше ніж 1, тоді виконується умова* (4.39)*.*

2. *Якщо* $g_1^{(\psi_1)}$ *і* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функціями з індексом менше ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Доведення. Теорема 4.9 випливає з теореми 4.8, прикладу 4.16 і леми 4.1, де $f_k' = \frac{1}{g_k^{(\varphi_k)}}$, $k = 1, 2$. ■

Зауважимо, що теореми 4.2, 4.8 та 4.9 узагальнюють та доповнюють теорему 2.6 [30].

Якщо покласти $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, то з теореми 4.9 випливають наступні результати.

Наслідок 4.7. *Нехай для $g = g_1$ і $\sigma = \sigma_1$ виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода. Припустимо, що g_2 задовольняє [B1] і ψ є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючої до нескінченності. Якщо $g_1^{(\psi)}$ або $g_2^{(\psi)}$ є RV-функцією з індексом менше ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1(t)}{g_2(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\eta_1(t))}{\psi(\mu_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Наслідок 4.8. *Нехай для $g = g_1$ і $\sigma = \sigma_1$ виконуються [B1] та умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5]. Якщо g_1 або g_2 є RV-функцією з індексом менше ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1(t)}{g_2(t)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\mu_2(t)} = 1 \text{ м.н.}$$

Приклад 4.20. (див. [30], §17, зауваження 1) Припустимо, що виконуються *умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода* [ГС1]-[ГС5] для функції $g(x) = g_1(x)$, яка є еквівалентною до $Cx^{\beta},\ x\to\infty$, де $0 \le \beta < 1$ і $C > 0$. Тоді в силу наслідка 4.8, при $g_2(x) = Cx^{\beta},\ x > 0$, отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{t^{\frac{1}{1-\beta}}} = (C(1-\beta))^{\frac{1}{1-\beta}} \text{ м.н.},$$

тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{(C(1-\beta)t)^{\frac{1}{1-\beta}}} = 1 \text{ м.н.}$$

так як $\mu_2(t)$ еквівалентне $(C(1-\beta)t)^{\frac{1}{1-\beta}}$ при $t\to\infty$.

Відмітимо, що так як умова (1°) твердження 4.4 не виконується при $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv x$ і $g_1(x) \sim Cx^{\beta},\ x\to\infty$, тому ми не можемо використовувати теорему 2.7.

Приклад 4.21. Припустимо, шо виконуються *умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода* [ГС1]-[ГС5] з $g(x) = g_1(x)$, яка є еквівалентною $\dfrac{Cx}{(\ln x)^{\gamma}}$ при $x\to\infty$, де $\gamma > 0$ і $C > 0$. Покладемо $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv (\ln(x+1))^{1+\gamma},\ x > 0$. Тоді $g_1^{(\psi_1)}(t)$ є еквівалентною до $C(1+\gamma)$ при $t\to\infty$. Тоді, в силу наслідка 4.7, при $g_2(x) = \dfrac{C(x+1)}{(\ln(x+1))^{\gamma}}$, $x > 0$, отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\ln\eta_1(t))^{1+\gamma}}{t} = C(1+\gamma) \text{ м.н.}$$

тобто $\psi_2(\mu_2(t))$ є еквівалентною до $(C(1+\gamma)t)$ при $t \to \infty$.

Приклад 4.22. Припустимо, що виконуються *умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода* [ГС1]-[ГС5] для $g(x) = g_1(x)$, яка є еквівалентною $Cx\exp(-(\ln x)^r)$ при $x \to \infty$, де $0 < r < 1$ і $C > 0$. Зауважимо, що $\exp(\ln(x)^r)$, $x > 1$ є повільно змінною функцією, і

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp((\ln x)^r)}{(\ln x)^\gamma} = \infty \text{ для будь-якого } \gamma > 0.$$

Покладемо $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \exp((\ln x)^r),\ x > 0$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{r(\ln t)^{\frac{(r-1)}{r}}} = 1.$$

В силу наслідку 4.7, при $g_2(x) = Cx\exp(-(\ln x)^r)$, $x > 0$, отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\exp((\ln \eta_1(t))^r)}{\exp((\ln \mu_2(t))^r)} = 1 \text{ м.н.}$$

Зауваження 4.9. Теореми 4.8 та 4.9 наслідки 4.7 та 3.6 залишаються справедливими, якщо умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода замінити на умови Г. Келлера, Г. Керстинга, У. Рослера.

Приклад 4.23. (див. [30], §17, зауваження 2) Припустимо, що умови [K0]-[K4] справджуються для $g(x) = g_1(x) \sim Cx$ при $x \to \infty$, де $C > 0$. Покладемо $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \ln x$ і $g_2(x) = Cx$ при $x > 0$. Тоді $g_1^{(\psi_1)}(t) \sim C$ при $t \to \infty$. Тоді за умовою теореми 4.9 та в силу зауваження 4.9, отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \eta_1(t)}{Ct} = 1 \text{ м.н.},$$

тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_2(\mu_2(t))}{Ct} = 1.$$

4.5. ψ-асимптотична еквівалентність розв'язків двох стохастичних автономних диференціальних рівнянь.

У цьому підрозділі ми розглянемо два стохастичні диференціальні рівняння (4.1) та умови, при яких розв'язки η_1 та η_2 є ψ-асимптотично-еквівалентними, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

за умови, що η_1 та η_2 прямують до нескінченності.

Ця задача є останньою розділу 4, її розв'язок випливає з результатів підрозділів 4.1 і 4. 3, оскільки

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(\mu_2(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} \text{ м.н.} \qquad (4.41)$$

У цьому розділі ми розглянемо нові твердження, в яких будуть використовуватись умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5], але у випадку $g = g_k$ і $\sigma = \sigma_k,\ k = 1, 2$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 4.10. *Нехай для $g = g_k$ і $\sigma = \sigma_k,\ k = 1, 2,$ виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5] та* (4.25)*; $\psi_k,\ k = 1, 2,$ є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючої до нескінченності функцією.*

1. *Якщо* (4.29) *виконується для кожного $k = 1, 2,$ тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \qquad (4.42)$$

і, крім того,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \qquad (4.43)$$

2. *Якщо умови* (4.29) *і* (4.30) *виконуються для кожного* $k = 1, 2$*, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_1^{(\psi_1)}(t)}{G_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.44}$$

Доведення. Нехай виконується (4.41) для $k = 1$ та умови теореми 4.10, тоді мають місце теореми 4.2, 4.4 і 4.5.

Оскільки виконуються всі умови теореми 4.2, то для $k = 1$ отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_1(\mu_1(t))} = 1 \text{ м.н.}, \tag{4.45}$$

а для $k = 2$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(\mu_2(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.} \tag{4.46}$$

Так само виконуються всі умови теореми 4.4, тому маємо імплікацію (4.26). А отже, в силу представлення (4.41) умова (4.42) виконується.

Оскільки виконуються всі умови теореми 4.5, то має місце імплікація (4.31), тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\mu_1(t))}{\psi_2(\mu_2(t))} = 1$$

Тоді (4.43) випливає з представлення (4.41) та співвідношень (4.45), (4.46).

Якщо для кожного $k = 1, 2$ виконуються умови (4.29) і (4.30), то (4.44) випливає з (4.45), (4.28), (4.41). ■

Теорема 4.11. *Нехай для* $g = g_k$ *і* $\sigma = \sigma_k$, $k = 1, 2$ *виконуються умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5],* ψ_k, $k = 1, 2$*, є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючої до нескінченності функцією.*

1. *Якщо хоча б одна з* $g_1^{(\psi_1)}$ *або* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функцією з індексом менше ніж 1, тоді виконуються співвідношення* (4.42) *та* (4.43).

2. *Якщо* $g_1^{(\psi_1)}$ *і* $g_2^{(\psi_2)}$ *є RV-функціями з індексом менше ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g_1^{(\psi_1)}(t)}{g_2^{(\psi_2)}(t)} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(\eta_1(t))}{\psi_2(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Доведення. Теорема 4.11 випливає з теореми 4.10, прикладу 4.16 і леми 4.1, де $f_k' = \frac{1}{g_k^{(\psi_k)}}$, $k = 1, 2$. ∎

Якщо покласти $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, то з теореми 4.11 випливають наступні результати.

Наслідок 4.9. *Нехай для $g = g_k$ і $\sigma = \sigma_k$, $k = 1, 2$ виконуютьсся умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5] і ψ є додатною неперервно-диференційованою, строго зростаючої до нескінченності функцією. Тоді якщо $g_1^{(\psi)}$ або $g_2^{(\psi)}$ є RV-функцією з індексом менше ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1(t)}{g_2(t)} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(\eta_1(t))}{\psi(\eta_2(t))} = 1 \text{ м.н.}$$

Якщо $\psi(x) \equiv x$, тоді отримуємо наступний результат.

Наслідок 4.10. *Нехай для $g = g_k$ і $\sigma = \sigma_k$, $k = 1, 2$ виконуютьсся умови Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [ГС1]-[ГС5]. Якщо g_1 або g_2 є RV-функцією з індексом менше ніж 1, тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1(t)}{g_2(t)} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1 \quad \text{м.н.}$$

4.6. Висновки

У розділі 4, використовуючи теорію псевдорегулярних функцій, знайдено умови на функції g, σ та ψ, за яких випадковий процес $\psi(\eta(t))$ є асимптотично еквівалентним м.н до функції $\psi(\mu(t))$, де η – це розв'язок автономного стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t) = g\left(\eta(t)\right) dt + \sigma\left(\eta(t)\right) dw(t),\ \eta(0) \equiv b > 0,$$

а μ – розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$d\mu(t) = g\left(\mu(t)\right) dt,\ \mu(0) = b > 0.$$

Використовуючи отримані результати, знайдено необхідні та достатні умови $\psi_{1,2}(\psi)$-еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь, критерій $\psi_{1,2}(\psi)$-еквівалентності розв'язків двох стохастичних диференціальних рівнянь. Крім того, знайдено умови, при яких розв'язок η_1 одного стохастичного диференціального рівняння і розв'язок μ_2 другого звичайного диференціального рівняння є $\psi_{1,2}(\psi)$-асимптотично-еквівалентними. Отримані відповідні наслідки на той випадок, коли g є RV-функцією.

Результати цього розділу було опубліковано у [102], і доповідалися на дванадцятій та п'ятнадцятій Міжнародних наукових конференціях імені академіка М.П. Кравчука (2008) [157],(2014) [168], на конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання" (2008) [158], на україно-німецькій конференції(2014) [167].

РОЗДІЛ 5. **Необмеженість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь**

При розв'язанні задачі про точний порядок росту розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь та знаходженні умов асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних рівнянь, одним з основних припущень в розділах 3 та 4 було те, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння η із збільшенням часу м.н. прямує до нескінченності. В цьому розділі ми досліджуємо умови, за яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння є необмеженим.

Необмеженість розв'язку є важливим питанням при вивченні асимптотичної поведінки розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Перші результати, що стосуються питання необмеженості розв'язку для *автономного* стохастичного диференціального рівняння були отримані Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом [30]. У цьому розділі ми доводимо деякі достатні умови, за яких розв'язок неавтономного стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності при $t \to \infty$. Дослідження проводиться на основі PRV-теорії. Отже, в даному розділі властивості PRV-функцій ефективно використовуються для знаходження достатніх умов необмеженості розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

5.1. Необмеженість розв'язку стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часу.

Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = a\left(t, \eta(t)\right) dt + \sigma\left(t, \eta(t)\right) dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, \tag{5.1}$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала; η – розв'язок рівняння (5.1), a– неперервна функція, σ – неперервна додатна функція, визначені при $t \in \mathbb{R}^1_+$ та $x \in \mathbb{R}^1$.

Позначимо

$$B(t, x) = \int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(t,\, y)}. \tag{5.2}$$

Припустимо, що

$$\lim_{x\to\infty} B(t, x) = \lim_{x\to\infty} \int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(t,\, y)} = \infty. \tag{5.3}$$

До того ж, нехай $B^{-1}(t, x)$ – це функція обернена до функції $B(t, x)$ по змінній x при фіксованому t.

Розглянемо функцію

$$\tilde{a}(t, x) = -\int\limits_0^{B^{-1}(t,x)} \frac{\sigma'_t(t, y)}{\sigma^2(t, y)} dy + \frac{a(t, B^{-1}(t, x))}{\sigma(t, B^{-1}(t, x))} - \frac{1}{2}\sigma'_x(t, B^{-1}(t, x))$$

та покладемо

$$\alpha(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t, x),$$

$$A(T) = \int\limits_0^T \alpha(t)dt. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція. Припустимо, що стохастичне диференціальне рівняння* (5.1) *має м.н. неперервний розв'язок* η. *Функція* σ *є неперервно диференційовною по змінній* t *та по змінній* x, *виконується* (5.3) *та одна з умов*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1 \tag{5.5}$$

або

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-2v(x)}dx = +\infty \text{ та } \int_{0}^{\infty} e^{-2v(x)}dx < +\infty, \tag{5.6}$$

де

$$v(x) = \int_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} B(t,\eta(t)) = \infty \text{ м.н.} \tag{5.7}$$

Доведення. Покладемо

$$\gamma(t) = B(t,\eta(t)),\ t > 0.$$

Тоді

$$\eta(t) = B^{-1}(t,\ \gamma(t)).$$

Застосуємо формулу Іто (див. зауваження 2.2) для рівняння (5.1):

$$\begin{aligned} d\gamma(t) =& [B'_t(t,\ \eta(t)) + B'_x(t,\ \eta(t))a(t,\eta(t)) + \frac{1}{2}B''_{xx}(t,\eta(t))\sigma^2(t,\ \eta(t))]dt+ \\ &+ B'_x(t,\eta(t))\sigma\,(t,\ \eta(t))\,dw(t) = \\ =& [B'_t(t,\ B^{-1}(t,\gamma(t))) + B'_x(t,\ B^{-1}(t,\gamma(t)))a(t,B^{-1}(t,\gamma(t)))+ \\ &+ \frac{1}{2}B''_{xx}(t,B^{-1}(t,\gamma(t)))\sigma^2(t,\ B^{-1}(t,\gamma(t)))]dt+ \\ &+ B'_x(t,B^{-1}(t,\gamma(t)))\sigma\left(t,\ B^{-1}(t,\gamma(t))\right)dw(t), \end{aligned}$$

де

$$B'_x(t,x) = \frac{1}{\sigma(t,x)},$$

$$B'_t(t,x) = -\int_0^x \frac{\sigma'_t(t,\ y)}{\sigma^2(t,\ y)}dy,$$

$$B''_{xx}(t,x) = -\frac{\sigma'(t,x)}{\sigma^2(t,x)}.$$

Таким чином, процес γ є розв'язком рівняння

$$d\gamma(t) = \tilde{a}(t,\gamma(t))dt + dw(t),\ t \geq 0,$$

де

$$\tilde{a}(t,x) = -\int\limits_0^{B^{-1}(t,x)} \frac{\sigma'_t(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t,B^{-1}(t,x))}{\sigma(t,B^{-1}(t,x))} - \frac{1}{2}\sigma'_x(t,B^{-1}(t,x)).$$

Тепер в силу теореми 2.3 маємо

$$\lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \lim_{t\to\infty} B(t,\eta(t)) = \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^{\eta(t)} \frac{dy}{\sigma(t,y)} = \infty \text{ м.н.}$$

■

Далі розглянемо декілька наслідків з теореми 5.1.

Наслідок 5.1. *Припустимо, що виконано всі умови теореми 5.1 стосовно функцій a та σ, $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$ та*

$$\lim_{x\to\infty}\tilde{B}(x) = \lim_{x\to\infty}\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} = \infty \text{ м.н.} \tag{5.8}$$

Якщо виконано умову (5.5) *або* (5.6), *то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(\eta(t)) = \infty \text{ м.н.} \tag{5.9}$$

Доведення. Нехай функцію $B(t,x)$ визначено рівністю (5.2), тоді

$$B(t,x) = \frac{1}{\theta(t)}\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} = \frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(x).$$

Функція $B^{-1}(t,x) = \tilde{B}^{-1}(\theta(t)x)$ обернена по x до $B(t,x)$, тобто

$$B\left(t, B^{-1}(t,x)\right) = x.$$

Дійсно, оскільки

$$B(t,x) = \frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(x) \text{ та } B^{-1}(t,x) = \tilde{B}^{-1}(\theta(t)x),$$

то

$$B\left(t, B^{-1}(t,x)\right) = B\left(t, \tilde{B}^{-1}(\theta(t)x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}\left(\tilde{B}^{-1}(x\theta(t))\right) = \frac{1}{\theta(t)}x\theta(t) = x.$$

З іншого боку

$$B^{-1}\left(t, B(t,x)\right) = \tilde{B}^{-1}\left(\frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(x)\theta(t)\right) = \tilde{B}^{-1}\left(\tilde{B}(x)\right) = x.$$

Далі наслідок 5.1 випливає з теореми 5.1. ■

Зауваження 5.1. Якщо $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t) = \infty$, то (5.9) є більш сильним результатом, ніж $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ м.н. Дійсно, в цьому випадку $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{B}(\eta(t)) = \infty$ м.н., звідки $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ м.н.

Розглянемо приклади стохастичних диференціальних, для яких виконуються умови теореми 5.1 та наслідку 5.1.

Приклад 5.24. (Узагальнений геометричний броунівський рух) Розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t) = \varphi(t)\eta(t)dt + \theta(t)\eta(t)dw(t)$$

ми називаємо узагальненим геометричним броунівським рухом. Припустимо, що $\theta(t) \equiv \beta > 0$ не залежить від часу t. Тоді

$$\tilde{a}(t,x) = \frac{\varphi(t)}{\beta} - \frac{1}{2}\beta.$$

Якщо

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int\limits_0^T \left(\frac{\varphi(t)}{\beta} - \frac{1}{2}\beta\right) dt > 1, \tag{5.10}$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(\eta(t))=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\eta(t)}{\beta}=\infty \text{ м.н.}$$

Звідки маємо, що

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty \text{ м.н.}$$

Для узагальненого геометричного броунівського руху при $\theta(t)\equiv\beta$ умову (5.10) виконано,наприклад, якщо

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{\frac{1}{\beta}\Phi(T)-\frac{1}{2}\beta T}{T^{\rho}}>0 \text{ для деякого } \rho>\frac{1}{2},$$

де $\Phi(T)=\int\limits_0^T\varphi(t)dt$. Найпростіший вигляд ця умова має при $\rho=1$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(T)}{T}>\frac{1}{2}\beta^2.$$

Приклад 5.25. (Узагальнений процес Орнштейна-Улєнбєка) Розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t)=\varphi(t)\eta(t)dt+\theta(t)dw(t)$$

ми називаємо узагальненим процесом Орнштейна-Улєнбєка. Оскільки $g(x)=x$, $\sigma=1$, то

$$\tilde{a}(t,x)=-\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}x+\varphi(t)x=x\left(-\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}+\varphi(t)\right).$$

Покладемо

$$f(t)=-\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}+\varphi(t)$$

та припустимо, що

$$\inf_{t>0}f(t)=\lambda>0,$$

$$\sup_{t>0}f(t)=\gamma>0.$$

Якщо $x>0$, то

$$\inf_{t>0}\tilde{a}(t,x)=\lambda x.$$

Якщо $x < 0$, то

$$\inf_{t>0} \tilde{a}(t,x) = \gamma x.$$

Тому при $x > 0$

$$v(x) = \int_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz = \frac{\lambda}{2}x^2,$$

а при $x < 0$

$$v(x) = \int_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz = -\frac{\gamma}{2}x^2.$$

Це означає, що

$$\int_{-\infty}^0 e^{-2v(x)}dx = \int_{-\infty}^0 e^{\gamma x^2}dx = +\infty \ \textit{та} \ \int_0^\infty e^{-2v(x)}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x^2}dx < +\infty.$$

Отже, виконуються всі умови наслідку 5.1, тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\theta(t)} = \infty \text{ м.н.}$$

Для класичного процесу Орнштейна-Улєнбєка $\theta(t)$ не залежить від t і тому

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.}$$

Якщо ж $\lim\limits_{t\to\infty} \theta(t) = \infty$ в означенні узагальненого процесу Орнштейна-Улєнбєка, то отриманий результат означає більше, ніж прямування до нескінченності розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Наприклад, якщо $\theta(t) = t$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{t} = \infty \text{ м.н.}$$

Наслідок 5.2. *Нехай a– неперервна функція, σ– неперервна додатна функція, для якої існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x. Припустимо, що стохастичне диференціальне рівняння* (5.1) *має м.н. неперервний розв'язок η. Покладемо*

$$A_1(T) = \int_0^T \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}_1(t,x)dt,$$

де

$$\tilde{a}_1(t,x) = -\int\limits_0^x \frac{\sigma'_t(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t,x)}{\sigma(t,x)} - \frac{1}{2}\sigma'_x(t,x).$$

Якщо виконано співвіношення

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A_1(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1, \tag{5.11}$$

то виконується умова (5.7).

Доведення. Позначимо $\alpha_1(t) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}_1(t,x)$, тоді

$$\alpha_1(t) \le \alpha(t),$$

до того ж

$$A_1(t) \le A(t),$$

а отже

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A_1(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} < \liminf_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}}.$$

Тепер, в силу (5.11), маємо (5.5). Наслідок 5.2 доведено. ■

Для побудови прикладів стохастичних диференціальних рівнянь, для яких виконується (5.5), умова (5.11) є більш зручною для перевірки.

Наслідок 5.3. *Припустимо, що виконуються всі умови наслідку 5.1 стосовно функцій a та σ. Крім того, припустимо, що*

$$\liminf_{t\to\infty} \theta(t) > 0. \tag{5.12}$$

Якщо виконано умову (5.5) *або умову* (5.6)*, то*

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.} \tag{5.13}$$

Доведення. Оскільки виконуються всі умови наслідку 5.1, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(\eta(t)) = \infty \text{ м.н.}$$

З (5.12) випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що для $t > T_0$ маємо $\theta(t) > \varepsilon$. Це означає, що для $t > T_0$

$$\frac{1}{\theta(t)}\tilde{B}(\eta(t)) < \frac{1}{\varepsilon}\tilde{B}(\eta(t)),$$

тому, в силу (5.9), випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{B}(\eta(t)) = \infty \text{ м.н.}$$

Оскільки, функція $\tilde{B}(x)$ є монотонно зростаючою, неперервною і прямує до нескінченності, то

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.}$$

■

Приклад 5.26. Розглянемо модель класичного геометричного броунівського руху (4.17), яку розглядали у розділі 4. Нагадаємо вигляд рівняння (4.17).

$$d\eta(t) = \alpha\eta(t)dt + \beta\eta(t)dw(t), \;\; t \geq 0; \;\eta(0) \equiv 1.$$

Практичним шляхом було показано, що розв'язок цього рівняння прямує до нескінченності (див. приклад 4.13).

Коефіцієнти цього рівняння задовольняють умовам наслідку 5.3. Дійсно, функція $a(t,x)$ має вигляд

$$a(t,x) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\beta,$$

тоді виконується умова (5.5)

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\beta\right)T}{\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1 \text{ при } \alpha > \frac{1}{2}\beta^2.$$

Зауважимо,що $\liminf\limits_{t\to\infty} \theta(t) = \liminf\limits_{t\to\infty} \beta > 0$. Тобто в силу наслідку 5.3

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.}$$

Наслідок 5.4. *Припустимо, що виконано всі умови наслідку 5.3 стосовно функцій a та σ. Нехай, крім того,*

$$a(t,x) = \varphi(t)g(x),$$

а функції θ та σ є монотонно спадними, $\theta(t) > 0$ та $\varphi(t) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$. Покладемо

$$\gamma = \inf_{x \in \mathbb{R}^1} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0.$$

Якщо

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2T \ln \ln T}} \int_0^T \frac{\varphi(t)}{\theta(t)} dt > \frac{1}{\gamma}, \tag{5.14}$$

то виконується (5.13)

Доведення. В даному випадку

$$\tilde{a}_1(t,x) = -\frac{\theta'(t)}{\theta^2(t)} \tilde{B}(x) + \frac{g(x)\varphi(t)}{\sigma(x)\theta(t)} - \frac{1}{2}\sigma'(x)\theta(t).$$

Оскільки θ є монотонно спадною, то $\theta'(t) \leq 0$, крім того, $\sigma'(x) \leq 0$, а тому

$$\inf_{x>0} \tilde{a}_1(t,x) \geq \gamma \frac{\varphi(t)}{\theta(t)}$$

або

$$\int_0^T \inf_{x>0} \tilde{a}_1(t,x) dt \geq \gamma \int_0^T \frac{\varphi(t)}{\theta(t)} dt.$$

Дослідимо $\inf\limits_{x<0} \tilde{a}_1(t,x)$. Маємо

$$\inf_{x<0} \tilde{a}_1(t,x) \geq \inf_{x<0} \left(-\frac{\theta'(t)}{\theta^2(t)} \tilde{B}(x) \right) + \inf_{x<0} \frac{g(x)\varphi(t)}{\sigma(x)\theta(t)} =$$

$$= \frac{\theta'(t)}{\theta^2(t)} \int_{-\infty}^0 \frac{dy}{\sigma(y)} + \gamma \frac{\varphi(t)}{\theta(t)}.$$

Тоді

$$\int_0^T \inf_{x<0} \tilde{a}_1(t,x) dt \geq \left(\frac{1}{\theta(0)} - \frac{1}{\theta(T)} \right) \int_{-\infty}^0 \frac{dy}{\sigma(y)} + \gamma \int_0^T \frac{\varphi(t)}{\theta(t)} dt.$$

Звідси та з умови (5.14) випливає умова (5.5). Це означає, що наслідок 5.4 випливає з наслідка 5.3. ■

Зауваження 5.2. Умову (5.14) виконано у випадку

$$\liminf_{t\to\infty}\ t^{\rho}\frac{\varphi(t)}{\theta(t)} > 0,\ \rho > -\frac{1}{2}.$$

Наприклад, якщо $\varphi(t) \equiv const$ та $\theta(t) \equiv const$, то останню умову виконано з $\rho = 0$. Це означає, що наслідок 5.4 можна застосувати і для автономного рівняння Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода.

Розглянемо приклад стохастичного диференціальниого рівняння розв'язок, якого прямує до нескінченності, а коефіцієнти задовольняють умовам наслідка 5.4

Приклад 5.27. Для $\alpha > 0$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = t^{\alpha}\left(1+\eta^2(t)\right)^{\gamma} dt + \left(1+\eta^2(t)\right)^{\gamma} dw(t),\ t \geq 0;\ \eta(0) \equiv b, \tag{5.15}$$

де w — стандартний вінерів процес; b — невипадкова додатна стала.

Перевіримо умови, при яких

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty \text{ м.н.}$$

Запишемо функцію $\tilde{a}(t,x)$ для рівняння (5.15):

$$\tilde{a}(t,x) = -\int\limits_0^{B^{-1}(t,x)} \frac{\sigma'_t(t,y)}{\sigma^2(t,y)}\,dy + \frac{a(t,B^{-1}(t,x))}{\sigma(t,B^{-1}(t,x))} - \frac{1}{2}\sigma'_x(t,B^{-1}(t,x)).$$

$$B(x) = \int\limits_0^x \frac{dy}{(1+y^2)^{\gamma}},\ \ B^{-1}(x) - \text{функція обернена до } B(x).$$

Тоді

$$\tilde{a}(t,x) = t^{\alpha} - \gamma B^{-1}(x)(1+(B^{-1}(x))^2)^{\gamma-1}.$$

В силу наслідку 5.2 замість дослідження функції $\tilde{a}(t,x)$ можемо перейти до дослідження функції $\tilde{a}_1(t,x)$, тобто

$$\tilde{a}_1(t,x) = t^\alpha - \gamma x(1+x^2)^{\gamma-1}.$$

Знайдемо найменше значення функції $\tilde{a}_1(t,x)$ по змінній x

$$[\tilde{a}_1(t,x)]'_x = \gamma(1+x^2)^{\gamma-2}((1-2\gamma)x^2-1),$$

$$x_{min} = (1-2\gamma)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\min_x [\tilde{a}_1(t,x)] = t^\alpha - \gamma\frac{(2-2\gamma)^{\gamma-1}}{(1-2\gamma)^{\gamma-\frac{1}{2}}}.$$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int_0^T \inf_{x\in\mathbb{R}^1} [\tilde{a}_1(t,x)]\, dt =$$

$$= \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int_0^T \left(t^\alpha - \frac{\gamma(2-2\gamma)^{\gamma-1}}{(1-2\gamma)^{\gamma-\frac{1}{2}}}\right) dt =$$

$$= \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \left(\frac{T^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{T\gamma(2-2\gamma)^{\gamma-1}}{(1-2\gamma)^{\gamma-\frac{1}{2}}}\right) = \infty.$$

Отже, в силу наслідку 5.2 та наслідку 5.3 розв'язок рівняння (5.15) прямує до нескінченності.

Зауважимо, що це рівняння досліджувалось в розділі 3 на предмет асимптотичної еквівалентності до розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння.

5.2. Дослідження поведінки розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння на нескінченності за допомогою функцій правильної зміни.

У підрозділі 5.1 отримано умови необмеженості розв'язку для стохастичного диференціального рівняння (5.1). Ці умови можно переписати, застосовуючи теорію функцій правильної зміни.

Теорема 5.2. *Нехай a – неперервна функція, σ – неперервна додатна функція такі, що стохастичне диференціальне рівняння* (5.1) *має неперервний розв'язок η. Припустимо, що*

1) для функції σ існують неперервні похідні σ'_t, σ'_x;

2) функція $\alpha(t) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x)$, є RV-функцією з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$.

3) для кожного фіксованого t та для деякого $c_0 > 1$

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{B(t, c_0 x)}{B(t,x)} > 1.$$

Тоді має місце (5.7).

Доведення. Оскільки функція α є функцією правильної зміни з індексом $\rho > -\frac{1}{2}$, то в силу прямої теореми Карамати (див. теорему 2.9) при $T \to \infty$, маємо, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{T\alpha(T)}{A(T)} = \rho + 1.$$

А отже

$$\lim_{T \to \infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T \ln\ln T}} = \lim_{T \to \infty} \frac{T\alpha(T)}{(\rho+1)\sqrt{2T \ln\ln T}} = \infty > 1,$$

де $A(T)$ визначено рівністю (5.4), тобто виконується умова (5.5) теореми 5.1. За умовою теореми

$$\lim_{x \to \infty} \frac{B(t, c_0 x)}{B(t,x)} > 1 \quad \text{для деякого } c_0 > 1,$$

Тому в силу леми 3.7.1 [12]

$$\lim_{x\to\infty} B(t,x) = \infty.$$

Тому виконано рівність (5.7). ■

Наслідок 5.5. *Нехай* $a(t,x) = g(x)\cdot\varphi(t)$, *де* g*– неперервна додатна функція,* φ *– RV-функція з індексом* $\rho > -\frac{1}{2}$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$, *де* σ *– неперервна додатна функція, для якої* $\sigma'(x) \le 0$. *Крім того, припустимо, що*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^1} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0.$$

Тоді виконується (5.13)

Доведення. Оскільки $\sigma'(x) \le 0$, то для будь-яких $t \ge 0$ та $x \in \mathbb{R}^1$

$$\tilde{a}(t,x) = \frac{a(t,B^{-1}(t,x))}{\sigma(t,B^{-1}(t,x))} - \frac{1}{2}\sigma'_x(t,B^{-1}(t,x)) \ge \frac{\varphi(t)g(B^{-1}(t,x))}{\sigma(B^{-1}(t,x))}.$$

Тому

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x) \ge \varphi(t) \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \frac{g(\tilde{B}^{-1}(x))}{\sigma(\tilde{B}^{-1}(x))},$$

де

$$\gamma = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \frac{g(\tilde{B}^{-1}(x))}{\sigma(\tilde{B}^{-1}(x))}.$$

Таким чином

$$\alpha(t) \ge \gamma\varphi(t).$$

Оскільки функція φ є RV-функцією з $\rho > -\frac{1}{2}$, то за теоремою Карамати звідси випливає

$$A(T) \ge \gamma \int_0^T \varphi(t)dt \sim \frac{\gamma}{\rho+1} T\varphi(T),\ T\to\infty.$$

Тепер

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \ge \frac{\gamma}{\rho+1} \liminf_{T\to\infty} \frac{T\varphi(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} = \infty.$$

З теореми 5.2 отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} B(t,\eta(t)) = \infty \text{ м.н.}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{B}(\eta(t)) = \infty \text{ м.н.}$$

Отже

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м.н.}$$

■

Приклад 5.28. Покладемо $g(x) = (1 + x^{\alpha})\frac{1+x}{2+x},\ \alpha \in (0,1)$ при $x > 0$ та $g(x)$ монотонно зростає від $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$, функція σ – монотонно спадна від $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$ при всіх $x \in \mathbb{R}^1$ та $\varphi(t) = t^2$. Тоді за таких припущень на коефіцієнти маємо, що

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^1} \frac{g(x)}{\sigma(x)} > 0$$

та $\sigma'(x) \le 0$, а функція φ є RV-функцією з $\rho = 2$.

Отже, виконуються всі умови наслідку 5.5, тобто має місце (5.13).

Зауважимо, що для стохастичного диференціального рівняння,з такими коефіцієнтами як у цьому прикладі можно застосувати теорем 3.1 та 3.2, оскільки всі умови теорем виконано.

Наслідок 5.6. *Припустимо, що* $a(t,x) = \varphi(t)g(x)$ *та* $\sigma(t,x) = \theta_0 g(x)$, *де* θ_0 *додатна стала та* g *– неперервна додатна диференційовна функція така, що* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^1} g'(x) < \infty$. *Тоді* (5.13) *виконується, якщо виконується одна з наступних двох умов:*

1) $\liminf\limits_{T\to\infty} \dfrac{\Phi(T)}{\theta_0\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1$; *або*

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\theta_0 g(x)}dx = +\infty$ *та* $\int\limits_{0}^{\infty} e^{\theta_0 g(x)}dx < +\infty.$

Доведення. В даному випадку

$$\tilde{a}(t,x) = \frac{1}{\theta_0}\varphi(t) - \frac{1}{2}g'(x)\theta_0.$$

Оскільки $K = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^1} g'(x) < \infty$, то

$$\alpha(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x) = \frac{1}{\theta_0}\varphi(t) - K.$$

Тоді умова (5.5) перепишеться наступним чином

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} = \liminf_{T\to\infty} \frac{\Phi(T)}{\theta_0\sqrt{2T\ln\ln T}}.$$

Так як $\inf\limits_{t>0}\varphi(t) = 0$, то

$$v(x) = \int\limits_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x g'(z)\theta_0 dz = -\frac{1}{2}g(x)\theta_0.$$

Наслідок 5.6 доведено. ■

Приклад 5.29. Нехай $g(x) = \cos^2 x + 1$, $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t + 1$, $\sigma = \cos^2 x + 1$. Тоді

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x) = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} (\operatorname{arctg} t + 1 + \sin 2x) = \operatorname{arctg} t.$$

Перевіримо виконання (5.5). Дійсно

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int\limits_0^T (\operatorname{arctg} t)\, dt =$$

$$= \liminf_{T\to\infty} \frac{(T\operatorname{arctg} T) - 0,5\ln(T^2+1)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} = +\infty.$$

Отже

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int\limits_0^T \inf_{x\in\mathbb{R}^1} (\tilde{a}(t,x))dt > 1,$$

тому розв'язок рівняння, з вище заданими коефіцієнтами, прямує до нескінченності.

Умова (5.6) теж виконується. Оскільки

$$\inf_{t>0} \tilde{a}(t,x) = \inf_{t>0} (\operatorname{arctg} t + 1 + \sin 2x) = \sin 2x + 1,$$

то

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\int_0^x 2\inf\limits_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\int_0^x (2\sin 2z+2)dz} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\cos 2x-2x-1} dx = +\infty$$

та

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\int_0^x 2\inf\limits_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz} dx < +\infty.$$

Зауваження 5.3. Умова 1) наслідку 5.6 виконано у випадку, якщо φ є RV функцією з $\rho > -\frac{1}{2}$.

Наведемо приклад стохастичного диференціального рівняння, коефіцієнти якого задовольняють умовам наслідку 5.6.

Приклад 5.30. Покладемо

$$a(t,x) = \sqrt{t} \cdot \ln(x^2+1) \text{ та } \sigma(x) = \ln(x^2+1).$$

Тоді

$$\tilde{a}(t,x) = \sqrt{t} - \frac{x}{x^2+1},$$

та за таких припущень на коефіцієнти маємо, що

$$\alpha(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}(t,x) = \sqrt{t} - \frac{1}{2}.$$

Тобто функція α є RV функцією з індексом $\rho = \frac{1}{2}$ та

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} = \infty.$$

А отже виконується (5.13).

5.3. Кілька допоміжних тверджень.

У цьому розділі ми доводимо кілька допоміжних результатів, які є корисними при перевірці умов (5.5) та (5.6), що полегшує побудову конкретних прикладів.

Лема 5.1. *Нехай φ – неперервна функція, g, σ та θ – неперервні додатні функції такі, що рівняння* (5.1)*, де* $a(t,x) = \varphi(t)g(x)$ *та* $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$ *має м. н. неперервний розв'язок* η*. До того ж, виконуються наступні три умови:*

1. *θ зростаюча функція при $t > 0$;*
2. *існує $x_0 \geq 0$ таке, що $\sigma'(x_0) \geq 0$;*
3. $\liminf\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \int\limits_0^T \dfrac{\varphi(t)}{\theta(t)}dt \leq \dfrac{\sigma(x_0)}{g(x_0)}$.

Тоді умова (5.5) *не виконується.*

Доведення. Оскільки

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}_1(t,x) \leq \tilde{a}_1(t,x_0) \leq \frac{g(x_0)}{\sigma(x_0)} \cdot \frac{\varphi(t)}{\theta(t)},$$

то

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{A_1(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}} = \liminf_{T\to\infty} \frac{\int\limits_0^T \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^1} \tilde{a}_1(t,x)dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \leq$$

$$\leq \liminf_{T\to\infty} \frac{\int\limits_0^T \frac{g(x_0)}{\sigma(x_0)} \cdot \frac{\varphi(t)}{\theta(t)}dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}} \frac{\varphi(t)}{\theta(t)}dt \leq \frac{g(x_0)}{\sigma(x_0)} \cdot \frac{\sigma(x_0)}{g(x_0)} = 1.$$

Отже, умова (5.5) не виконується. ■

Лема 5.2. *Нехай φ – неперервна додатна функція, $\theta(t) = \theta_0$ при $t > 0$, де θ_0 – деяке дійсне число, g та σ – неперервні додатні функції такі, що* *рівняння* (5.1)*, де* $a(t,x)=\varphi(t)g(x)$ *та* $\sigma(t,x)=\theta(t)\sigma(x)$ *має неперервний розв'язок* η*. До того ж, виконуються наступні дві умови:*

1. $\sigma'(x_0)\le 0$ *при* $x\in\mathbb{R}^1$*;*

2. $\lambda_0=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^1}\dfrac{g(x)}{\sigma(x)}>0$ *та*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2T\ln\ln T}}\int\limits_0^T\varphi(t)dt>\frac{\theta_0}{\lambda_0}.$$

Тоді умова (5.5) *виконується.*

Доведення. Для $x\in\mathbb{R}^1$

$$\tilde a_1(t,x)=\frac{g(x)}{\sigma(x)}\cdot\frac{\varphi(t)}{\theta_0}-\frac{1}{2}\sigma'(x)\theta_0\ge\frac{g(x)}{\sigma(x)}\cdot\frac{\varphi(t)}{\theta_0},$$

тобто

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^1}\tilde a_1(t,x)\ge\frac{\lambda_0}{\theta_0}\varphi(t).$$

Тоді

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{A_1(T)}{\sqrt{2T\ln\ln T}}=\liminf_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^1}\tilde a_1(t,x)dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}}\ge$$

$$\ge\frac{\lambda_0}{\theta_0}\cdot\liminf_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T\varphi(t)dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}}>\frac{\lambda_0}{\theta_0}\cdot\frac{\theta_0}{\lambda_0}=1.$$

Отже, (5.5) виконується. ■

Лема 5.3. *Нехай* g *та* φ *– неперервні додатні функції,* σ *– неперервно-диференційовна додатна функція така, що* $\sigma'(x)>0,\ \ x>0$*. Припустимо, що*

1. *функція* θ *є неспадною при* $t>0$*,* $\theta\ne const$ *;*

2. *похідна* $\theta'(t)$ *є обмеженою при* $t>0$*;*

3. $\dfrac{\sigma(x)}{x}\to 0$ *та* $\dfrac{g(x)}{\sigma(x)}\to 0$ *при* $x\to-\infty$*;*

4. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dy}{\sigma(y)} < \infty$*;*

5. $\inf\limits_{t>0} \varphi(t) < \infty$*.*

Тоді перша умова в (5.6) *виконується.*

Доведення. Не важко бачити, що при $x < 0$ та $t > 0$

$$\tilde{a}_1(t,x) \le \frac{\sup\limits_{t>0} \theta'(t)}{\theta^2(0)} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dy}{\sigma(y)} + \frac{\varphi(t)}{\theta(0)} \cdot \frac{g(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\sigma'(x)\theta(0).$$

Звідси випливає, що

$$v(x) = \int\limits_{0}^{x} \inf_{t>0} \tilde{a}_1(t,z)dz \le \int\limits_{0}^{x} \left(c_1 + c_2 \frac{g(z)}{\sigma(z)} - c_3\sigma'(z) \right) dz =$$

$$= x \left(c_1 + \frac{c_2}{x} \int\limits_{0}^{x} \frac{g(z)}{\sigma(z)} dz - c_3 \frac{\sigma(x) - \sigma(0)}{x} \right),$$

де

$$c_1 = \frac{\sup\limits_{t>0} \theta'(t)}{\theta^2(0)} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dy}{\sigma(y)}, \quad c_2 = \frac{1}{\theta(0)} \inf_{t>0} \varphi(t), \quad c_3 = \frac{\theta(0)}{2}.$$

Так як $c_1 > 0$, то вираз в дужках є додатнім для достатньо великих $|x|$. Тому звідси випливає перша умова в (5.6). ■

Лема 5.4. *Нехай*

1. *функція* θ *є неспадною та обмеженою при* $t > 0$*;*

2. *похідна* θ' *є обмеженою при* $t > 0$*;*

3. σ *є RV-функцією з індексом* $0 < \rho < 1$*;*

4. $\frac{g(x)}{x} \to 0$ *при* $x \to \infty$*.*

Тоді друга умова в (5.6) *виконується.*

Доведення. Не важко бачити, що при $x > 0$,

$$\tilde{a}_1(t,x) \geq -\frac{\sup\limits_{t>0}\theta'(t)}{\theta^2(0)}\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} + \frac{\inf\limits_{t>0}\varphi(t)}{\sup\limits_{t>0}\theta(t)}\cdot\frac{g(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\sigma'(x)\cdot\sup_{t>0}\theta(t).$$

Тому при

$$c_1 = -\frac{\sup\limits_{t>0}\theta'(t)}{\theta^2(0)}, \quad c_2 = \frac{1}{\theta(0)}\inf_{t>0}\varphi(t), \quad c_3 = \frac{\sup\limits_{t>0}\theta(t)}{2},$$

отримаємо

$$\tilde{a}_1(t,x) \geq c_1\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} + c_2\frac{g(x)}{\sigma(x)} - c_3\sigma'(x).$$

В силу теореми Карамати (див. теорему 2.9), при $x \to \infty$,

$$\frac{g(x)}{\sigma(x)} = o\left(\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}\right),$$

Дійсно, в силу умови 3 леми 5.4, σ є RV-функцією з індексом $0 < \rho < 1$, тоді $\dfrac{1}{\sigma}$ є RV-функцією з індексом $-1 < \rho < 0$, тому за теоремою Карамати

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}}{Cx\frac{1}{\sigma(x)}} = 1,$$

тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sigma(x)\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sigma(x)Cx\frac{1}{\sigma(x)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = 0.$$

Якщо σ – RV функція з індексом ρ, то σ' – RV-функція з індексом $\rho - 1$, а $\int\limits_0^x \dfrac{dy}{\sigma(y)}$ –RV-функція з індексом $-\rho + 1$, тому при $x \to \infty$,

$$\sigma'(x) = o\left(\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}\right).$$

Тоді

$$\tilde{a}_1(t,x) \geq \alpha\int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}$$

для всіх $x > 0$ та деякого $\alpha > 0$. Тоді

$$v(x) = \int\limits_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}_1(t,z)dz \geq \alpha \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^z \frac{dy}{\sigma(y)} \right) dz \text{ для всіх } x > 0.$$

В силу теореми Карамати, асимптотична поведінка інтегралу в правій частині визначається $\dfrac{z}{\sigma(z)}$ при $z \to \infty$. Тоді асимптотика усієї правої частини визначається $\dfrac{x^2}{\sigma(x)}$ при $x \to \infty$. Тому друга умова в (5.6) випливає з

$$\int\limits_0^\infty e^{-\delta \frac{x^2}{\sigma(x)}} dx < \infty \text{ для всіх } \delta > 0.$$

■

Таким чином,поєднуючі умови лем 4.1-4.4, отримаємо різні випадки, коли одна з умов (5.5) або (5.6) виконується.

5.4. Висновки

Отримані достатні умови, що гарантують необмеженість розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння. Результати цього розділу узагальнюють відповідні результати Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [30]. Їх було опубліковано у [43, 124] і доповідалися на 6 конференціях [161–166].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню умов асимптотичної еквівалентності розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь до розв'язків детермінованих неавтономних диференціальних рівнянь, таким чином йдеться про точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами зсуву та дифузії, які спеціальним чином залежать від часу, тобто $g(t,x) = g(x)\varphi(t),\ \sigma(t,x) = \sigma(x)\theta(t)$.

Як наслідок, у дисертаційній роботі розглядаються необхідні та достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох звичайних диференціальних рівнянь та встановлюються умови асимптотичної еквівалентності розв'язків двох стохастичних дифернеціальних рівнянь.

Значна увага приділяється задачі про ψ–асимптотичну еквівалентність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Ця задача вивчається для автономних стохастичних диференціальних рівнянь. Отримано критерій ψ–асимптотичну еквівалентність розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та розв'язків відповідних звичайних диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними. Отримані результати застосовуються до задачі про наближення двох розв'язків. Знайдено необхідні та достатні умови ψ–асимптотичної еквівалентністі розв'язків двох звичайних диференціальних рівняннь. Завдяки цим результатам встановлено зв'язок, який існує між асимптотичною еквівалентністю неперервних функцій та асимптотичною еквівалентністю щільностей цих функцій.

Наведено умови необмеженності розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння загального вигляду та встановлено умови при яких розвязок прямує до нескінченності в різних частинних випадках.

Усі результати роботи є новими.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Андронов А.А.* О стохастическом рассмотрении динамических систем/ Андронов А.А., Понтрягин Л.С., Витт А.А.// ЖЭТТ.– 1933.– № 3.– вип. З.– С. 165-180.

[2] *Артемьев С.С.* Математическое и статистическое мо- делирование в финансах/ Артемьев С.С., Якунин М.А.// Новосибирск : Изд. ИВ-МиМГ СО РАН.– 2008.— 174 с.

[3] *Бернштейн С.Н.* Principes de la theorie des equations differentielles stochastiques/ Бернштейн С.Н. // Труды физ.-мат. ин-та им. Стеклова. – 1934.– 5.– С. 95-124.

[4] *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей // Вид. 4.- 1946.- С. 485-546.

[5] *Боголюбов Н.Н.* / Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. // Зап. каф. мат. физ. АН УССР.– 1939.– № 4.– С. 5-158.

[6] *Булдигін В.В.* PRV властивість функцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.// Теор. ймовір. та мат. стат. –2004. – № 72. – С. 63-78.

[7] *Булдигін В.В.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I/ Булдигін В.В., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г. // Теорія ймовір. та мат. стат. –2004. – № 70. – С. 9-25.

[8] *Булдигін В.В.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування.II/ Булдигін В.В., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.// Теорія ймовір. та мат. стат. – 2004. –№ 71. – С. 63-78.

[9] *Булдигін В.В.* Про асимптотичні властивості розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Коваль В.О.// Укр. мат. журн. – 2000.–52, № 9. – С. 1166-1175.

[10] *Булдигін В.В.* Про асимптотичну стійкість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2007. – № 6. – С. 126-129.

[11] *Булдигін В.В.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2008. – № 1. – С. 127-132.

[12] *Булдигін В.В.* Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення/ Булдигін В.В., Індлекофер К.-Х., Клесов О.І., Штайнебах Й.Г. // К: ТВІМС. – 2012. – 441 с.

[13] *Булинский А.В.* Теория случайных процессов/ Булинский А.В., Ширяев А. Н.// Москва: Физматлит.– 2005.– 408 с.

[14] *Ватанабэ С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы/ Ватанабэ С., Икеда Н. // М.: Наука.–1986. – 445 с.

[15] *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов/ Вентцель А.Д // Москва: Наука.– 1996. – 400 с.

[16] *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений/ Веретенников А.Ю. // Матем. сб. – 1980. – III. – № 3. – С. 434-452.

[17] *Веретенников А.Ю.* О критериях существования сильного решения стохастического уравнения/ Веретенников А.Ю. // Теория вероятн. и её применен. – 1982. – XXVП. – № 3. – С. 417-427.

[18] *Веретенников А.Ю.* Параболические уравнения и стохастические уравнения Ито с коэффициентами разрывными по времени/ Веретенников А.Ю. // Мат.заметки. – 1982.– № 4. – С. 547-557.

[19] *Волков И.К.* Случайные процессы/ Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Т.М. // Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана.– 1999.— 448 с.

[20] *Вороович Н.Н.* Об устойчивости движения при случайных возмущениях/ Вороович Н.Н. // Изв. АН СССР Сер. мат.–1965.– т.20, № 1. – С. 43-48.

[21] *Гальчук Л.И.* О существовании и единственности решений для стохастических дифференциальнiх уравнений по полумартингалам/ Гальчук Л.И. // Теор.вероят. и ее применения.– 1978.– 23, №4.– С. 782-795.

[22] *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках/ Гардинер К. В. // Москва : Мир.– 1986.— 528 с.

[23] *Гихман И.И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями/ Гихман И.И. // Укр.Мат.Жур.– 1950 .– № 3.– С. 45-69.

[24] *Гихман И.И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов/ Гихман И.И. // Укр.Мат.Журнал.– 1950.– № 4.- С. 37-63.

[25] *Гихман И.И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями / Гихман И.И.// В кн.: Зимняя.школа по теории вероятностей и математической статистике.- Киев.: Наукова думка.– 1964.– С. 41-85.

[26] *Гихман И.И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений/ Гихман И.И. // В кн.: Предельные теоремы и статистические выводы.- Ташкент: ФАН.– 1966.– С. 14-15.

[27] *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы/ Гихман И.И.// В кн.: Шестая летняя математическая школа по теории вероятностей и математической статистике.- Киев : Институт математики АН УССР.– 1969.– С. 5-58.

[28] *Гихман И.И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений/ Гихман И.И., Дороговцев А.Я. // Укр. мат. журн.– 1965.– ХУП.– № 6.– С. 3-21.

[29] *Гихман И.И.* Введение в теорию случайных процессов/ Гихман И.И., Скороход А.В. // М.: Наука. – 1965. – 656 с.

[30] *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения/ Гихман И.И., Скороход А.В.// Киев: Наукова думка. – 1968. – 354 с.

[31] *Гихман И.И.* Теория случайных процессов/ Гихман И.И., Скороход А.В. // М.: Наука. – 1975. –т. III. – 496 с.

[32] *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения/ Гихман И.И., Скороход А.В. // Киев: Наукова думка. – 1982.– 610 с.

[33] *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы/ Дуб Дж.Л. // (Пер.с англ. под ред. А.М.Яглома.) М.: Наука. – 1956. – 605 с.

[34] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы/ Дынкин Е.Б. // М.: физ.мат.гиз. – 1963. – 859 с.

[35] *Зубарев Н. Д.* Статистическая механика неравновесных процессов/ Зубарев Н.Д., Морозов Г.В., Репке Г. // Москва : Физматлит. – 2002.— 432 с.

[36] *Исакова Т.И.* О существовании решения стохастического дифференциального уравнения с нерегулярными коэффициентами/ Исакова Т.И.// Докл.АН УССР. – 1982.– № II.– С. 10-13.

[37] *Ито К.* Диффузионные процессы и их траектории/ Ито К., Маккин Г. // Пер.с англ.под ред.Е.Б.Дшшина. М.: Мир. – 1968. – 384 с.

[38] *Кац М.* О некоторых связях между теорией вероятностей, дифференциальными и интегральными уравнениями/ Кац М. // Сб. пер., Математика. – 1957. – т. 1. – №2. – С. 95-124.

[39] *Кац И.Я.* Об устойчивости систем со случайными параметрами/ Кац И.Я., Красовский Н.Н.// Прикладн. матем. и механ. – 1960.– 27.– № 5.– С. 809-823.

[40] *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры/ Кац М.// Екатеринбург: УГАПС. – 1998. – 222 с.

[41] *Кампен Н.Г.В.* Стохастические процессы в физике и химии/ Кампен Н.Г.В.// Москва:Высшая школа.– 1990.— 376 с.

[42] *Клепцина М.Л.* Об одном классе стохастических уравнений с частными производными/ Клепцина М.Л., Веретенников А.Ю. // Теория вероятн. и ее прим.– 1984. – № I. – С. 154-158.

[43] *Клесов О.I.* PRV-умови необмеженості розв'язку стохастичного диференціального рівняння/ Клесов О.I., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2013. – № 4. – С. 63-66.

[44] *Креневич А.П.* Аисмптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто/ Креневич А.П.// Укр. мат. журн.– 2006. –58, № 10.– С. 1368-1384.

[45] *Креневич А.П.* Аисмптотична еквівалентність розв'язків нелінійних стохастичних систем Іто/ Креневич А.П.// Нелінійні коливання. – 2006. – 9, № 2. – С. 213-220.

[46] *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа/ Крылов Н.В.// М.: Наука.– 1977.– 400 с.

[47] *Крылов Н.В.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений/ Крылов Н.В., Звонкин А.К.// Труды школы-семинара по теории случайных процессов. – Вильнюс. – 1975. – С. 9-88.

[48] *Крылов Н.В.* Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и диффузионные процессы/ Крылов Н.В., Розовский Б.Л.// УМН. – 1975. – 37 № 6(228).– С. 9-88.

[49] *Кулинич Г.Л.* Предельное поведение решения стохастического диффузионного уравнения/ Кулинич Г.Л. // Укр. мат. журн.– 1967.– XIX.– № 3.– С. 119-125.

[50] *Кулинич Г.Л.* О предельном поведении распределения решения стохастического диффузионного уравнения/ Кулинич Г.Л. // Теория вероятн. и её применен. – 1967. – XII. – № 3. – С. 548-551.

[51] *Кулинич Г.Л.* Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения/ Кулинич Г.Л.// Укр. мат. журн.– 1968.– XX. – № 3. – С. 396-400.

[52] *Кулинич Г.Л.* Предельные распределения решения стохастического диффузионного уравнения/ Кулинич Г.Л.// Теория вероятн. и её применен. –1968. – XIII. – С. 502-506.

[53] *Кулинич Г.Л.* Об асимптотическом поведении распределения решения неоднородного стохастического диффузионного уравнения/ Кулинич Г.Л. // Теория вероятн. и матем. статистика.– Киев.– 1971.– № 4.– С. 95-102.

[54] *Кулинич Г.Л.* Предельные теоремы для одномерных стохастических дифференциальных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра/ Кулинич Г.Л. // Теория вероятн. и матем. статистика.– Киев. – 1976. – № 15.– С. 99-114.

[55] *Кулинич Г.Л.* О предельном поведении решений стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа со случайными коэффициентами/ Кулинич Г.Л. // В кн.: Предельные теоремы для слу-

чайных процессов, изд. Ин-та математики АН УССР.– Киев.– 1977.– С. 137-151.

[56] *Кулинич Г.Л.* О предельном поведении неустойчивых решений стохастических дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами/ Кулинич Г.Л. // Теория вероятн. и её применен.– 1978.– XXIII. – № 1. – С. 222-227.

[57] *Кулинич Г.Л.* О необходимых и достаточных условиях сходимости решений одномерных диффузионных уравнений к обобщённому процессу/ Кулинич Г.Л. // Теория вероятн. и её применен. – 1981. – XXVI.- № 1.– С. 212-213.

[58] *Коренблюм Б.И.* Асимптотическое поведение преобразования Лапласа в окресности ограниченой области/ Коренблюм Б.И. // Докл. Акад. Наук (СССР).– 1955. – т. 104/2.

[59] *Королюк В.С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями/ Королюк В.С. // Укр. мат. журн.– 1991. – 43, № 9. – С. 1176-1181.

[60] *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения/ Леваков А.А. // Минск, БГУ. – 2009. – 235 с.

[61] *Маккин Г.* Стохастические интегралы/ Маккин Г.// М.: Мир. – 1972. – 181 с.

[62] *Махно С.Я.* Сходимость решений одномерных стохастических уравнений/ Махно С.Я.// Теор. вер. и ее применениею.– 1999. – 44, № 3. – С. 555-572.

[63] *Мельников А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения: негладкость коэффициентов, регрессионные модели и стохастическая

апроксимация/ Мельников А.В. // Успехи мат. наук. – 1996.– Т.51, № 5. – С. 43-136.

[64] *Мильмар В.Д.* Об устойчивости движения при наличаи толчков/ Мильмар В.Д., Мышкис А.Д. // Сиб.мат. журн. – 1960. – Т.1, № 2. – С. 233-237.

[65] *Рёпке Г.* Неравновесная стохастическая механика/ Рёпке Г. // Москва: Мир.– 1990. — 320 с.

[66] *Розовский Б.Л.* О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных/ Розовский Б.Л. // Мат. сборник: Мир.– 1975. – 96 (2). – С. 314-341.

[67] *Розовский Б.Л.* Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, возникаюшие в задачах нелинейнойфильтрации/ Розовский Б.Л. // Успехи мат. наук. – 1972. – 27(3). – С. 213-214.

[68] *Самойленко А.М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями/ Самойленко А.М., Станжицький О.М. // К.: Наукова думка. – 2009. – 335 с.

[69] *Самойленко А.М.* Про асимптотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь/ Самойленко А.М., Станжицький О.М., Новак І.Г. // Укр. мат. журн. – 2011. – т. 63, № 8. – С. 1103-1127.

[70] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции/ Сенета Е. // М.: Наука. – 1985. – 133 с.

[71] *Скороход А.В.* О существовании и единственности решений стохастических диффузионных уравнений/ Скороход А.В. // Сиб. матем. журн. 2 .–1961.– № 1. – С. 129-137.

[72] *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Стечкин С.Б., Бари Н.К. // Тр. Моск. Матем. об-ва. – 1956.– № 5. – С. 483-522.

[73] *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение/ Стратонович Р.Л. // Из-во Московского университета.– 1966.

[74] *Тимошенко О.А.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі знакозмінним коефіцієнтом зсуву/ Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2009. – № 5. – С. 145-152.

[75] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения/ Феллер В. // М.: Мир. – 1984. – т.2. – 323 с.

[76] *Хасьминський Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров/ Хасьминський Р.З. // М.: Наука. – 1969. – 367 с.

[77] *Хасьминський Р.З.* Об устойчивости траекторий марковских процессов/ Хасьминський Р.З.// Приклад, математ. и механ.– 1962. – 26, № 6.– С. 1025-1032.

[78] *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений/ Царьков Е.Ф // Рига: Зинатне.– 1989.– 421 с.

[79] *Ширяев А.Н.* Вероятность-2/ Ширяев А.Н. // Москва: МЦНМО. – 2004. – 408 с.

[80] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой метематики/ Ширяев А.Н.// Москва : Фазис.– 1998. – 512 с.

[81] *Якымив А.Л.* Вероятностные приложения тауберовых теорем / Якымив А.Л. // Физматлит, Москва, 2005.

[82] *Якымив А.Л.* Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана-Харриса/ Якымив А.Л.// Труды МИАН СССР. –1986. – № 177. – С. 177-205.

[83] *Ясинский В.К.* Стохастические дифференциально-функциональные уравнения со всей предисторией/ Ясинский В.К.// К.: ТВІМС. – 2003. – 254 с.

[84] *Aljancic' S.* Slowly varying functions with remainder term and their applications in analysis/ Aljancic' S., Bojanic' R., Tomic' M.// Serb. Acad.Sci. Arts Monogr. – 1974. – sect.Math. – 462.– № 41.– P. 1-51.

[85] *Aljancic' S.* O-regularly varying functions/ Aljancic' S., Arandelovic' D. // Publ. Inst. Math. Nouvelle serie.- 1977. – № 22(36). – P. 5-22.

[86] *Aradelovic' D.* O-regularly varyiation and uniform convergence/ Aradelovic' D. // Publ. Inst. Math. Nouvelle serie. – 1990. – № 48(62). – P. 25-40.

[87] *Arnold L.* Stohastic differential equations/ Arnold L. // Theory and Applications, John Willey and Sons, London, 1974.

[88] *Avakumovic' V.G.*, Uber einen O-Inversionssatz/ Avakumovic' V.G. // Bull.Int. Acad. Youg. Sci. – 1936. – № 29-30. – P. 107-117.

[89] *Berandry P.H.* Almost periodic Stochastic Processes/ Berandry P.H., Diagem T. // Springer.–2011.– 250 p.

[90] *Berman S.M.* Sojourn and extremes of a diffusion process on a fixed interval/ Berman S.M. // Adv. Appl. Probab.– 1982.– № 14.– P. 811-832.

[91] *Bertram J.E.* On the stability of systems with random parametres/ Bertram J.E., Saradir P.E. // Trans. IRL-PGCT.–1959. – № 5.– P. 311-322.

[92] *Bingham N.H.* Regular variation/ Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. // Encyclopedia of math. and its applications, Cambridge, 476 p.

[93] *Bhattacharya R.N.* Stochastic Processes with applications/ Bhattacharya R.N., Waymire E.C. // Wiley. – NY. – 1990.

[94] *Bharucha-reid A.T.* Random Integral Equations/ Bharucha-reid A.T. // Academic Press. – NY. – 1972. – 476 p.

[95] *Bojanic' R.* A unified theory of regularly varying sequences/ Bojanic' R., Seneta E. // Math. Z. – 1973.– № 134.– P. 91-106.

[96] *Bojanic' R.* Slowly varying functions and asymptotic relations/ Bojanic' R. and Seneta E. // J. Math.Anal. Appl. – 1971. – № 34. – P. 302-315.

[97] *Bojanic' R.* On class of functions of regular asymptotic beheviour/ Bojanic' R., Karamata J. // U.S. Army Math. Res. Centre.Tech. Summary Rep. – 1963. – 436 p.

[98] *Bojanic' R.* On slowly varying and asymptotic relations/ Bojanic' R., Karamata J. // U.S. Army Math. Res. Centre.Tech. Summary Rep.– 1963. – 432 p.

[99] *Buldygin V.V.* Properties of subclass of Avacumovic' functions and their generalized inverses/ Buldygin V.V., Klesov O.I., Steinebach J.L. // Ukrain. Math. J. – 2002. – 54. – № 2.– P. 179-205.

[100] *Buldygin V. V.* On some extensions of Karamata's theory and their applications/ Buldygin V. V. , Klesov O. I., and Steinebach J. G. // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.).– 2006. – 80 (94).– P. 59-96.

[101] *Buldygin V.V.*, PRV property and the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations/ Buldygin V.V., Klesov O. I., Stainebach J.G. // Liet. Mat. Rink.– 2007.– № 4.– P. 445-465.

[102] *Buldygin V.V.* On the $\varphi-$asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations/ Buldygin V.V., Klesov O. I., Stainebach J.G., and

Tymoshenko O.A. // Theory of stochastic processes. – 2008. – № 1.– P. 11-30.

[103] *Buldygin V.V.* On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equastions with time-dependent coefficients/ Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. // Theory of stochastic processes. – 2010. – № 2. – P. 12-22.

[104] *Curtain R.F.* Stochastic differential equations in Hilbert space/ Curtain R.F., Falb P.L // J. Differ. Equat. – 1971.– 10.– № 3.– P. 412-430.

[105] *Da Prato G.* Stochastic equations in infinite dimensions/ Da Prato G., Zabszyk J. // Cambridge university press.– 1992.– 449 p.

[106] *Darish D.* A generalization of slowly varying functions/ Darish D., Seneta E. // Proc. Amer. Math. Soc. 96.– 1986. – № 3. – P. 470-472.

[107] *Djurčić D.* Asimptotic equivalence and inversion of functions in the class K_c / Djurčić D., Torgašev A.// J. Math. Anal. Appl.– 2001.– № 255.– P. 383-390.

[108] *Ito K.* On stochastic differential equations / Ito K. // Pro Jap.Acad. – 1946. – № 14.– P. 32-35.

[109] *Ito K.* On the stochastic differential equations in a differential manifold/ Ito K. // Nagoya Math.J. – 1950. – № 1.– P. 35-47.

[110] *Ito K.* On stochastic differential equations/ Ito K. // Mem. Am.Math.Soc.– 1951.– № 4.– P. 1-51.

[111] *Jacod J.* Weak and strong solutions of stochastic differential equations: existence and stability/ Jacod J., Memin J. // Lecture Notes in Mathimatics 851, Springer-Velage. – Berlin. – 1981.– P. 169-212.

[112] *Gonzalez M.* Asymptotic behaviour of critical controlled brauchiny processes with random control functions/ Gonzalez M., Molina M., I. del Puerto //J. Appl. Probab. – 2005. – № 42. – P. 463-477.

[113] *Kalliapour G.* Stochastic differential equations in infinite dimensional spaces/ Kalliapour G., Xiong Jie // California: Hayward.– 1995.– 342 p.

[114] *Karamata J.* Sur un mode de croissance reguliere des functions/ Karamata J. // Mathematica (Cluj).– 1930.– № 4.– P. 38-53.

[115] *Karamata J.* Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Satze/ Karamata J. // Math.Z.– 1931.– № 33.– P. 294-299.

[116] *Karamata J.* Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberian-Satze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen/ Karamata J. // J.reine angew.Math.– 1931.– №164.– P. 27-39.

[117] *Karamata J.* Bemerkung Arbeit des Avacumovic', mit Betrachtung einer Klasse von Funktionen, welche bei den vorcommen/ Karamata J. // Bull. Int. Acad. Youg.Sci. – 1936. – № 29-30.– P. 117-123.

[118] *Keller G.* On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations/ Keller G., Kersting G., Rosler U. // Z. Wahrsch. Geb.– 1984.– № 68.– P. 163-184.

[119] *Keller G.* The asymptotic behaviour of discrete time stochastic growth processes/ Keller G., Kersting G., Rosler U. // The Annals of Probability.– 1987.– V.15.– № 1.– P. 305-343.

[120] *Keller G.* On the Asymptotic Behaviour of First Passage Times for Discussions/ Keller G., Kersting G., Rosler U. // Prob.Th. Rel. fields-1988.– № 77.– P. 379-395.

[121] *Kersting G.* Asymptotic properties of solutions of multidimensional stochastic differential equations/ Kersting G.// Probab.Th. Rel. Fields.– 1982.– vol.88.– P. 187-211.

[122] *Klebaner F.C.* Stochastic differential equations and generalized Gamma distributions/ Klebaner F.C. // Ann.Probab.– 1989.– vol.7.–№ 1.– P. 178-188.

[123] *Klesov O.I.* Strong limit theorems for general renewal processes/ Klesov O.I., Rychlik Z., and Steinebach J.G. // Probab. Math. Statist.– 2001.– № 21.– P. 329-349.

[124] *Klesov O.I.* Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients/ Klesov O.I., Tymoshenko O.A. // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2013. – № 41.– P. 25-35.

[125] *Lin W.* Asimptotic moments boundednes of the numerical solutions of stochastic differential equations/ Lin W., Mao X. // J. of Computational and Applied Mathematic.– 2013.– № 251.– P. 22-52.

[126] *Liu K.* Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications/ Lin W., Mao X. // London; New York; Singapur, Chapman and hall.– 2006.– 297 p.

[127] *Levy P.* Propriites asymptotiques des sommes des variables aleatoires independantes ou enchainees/ Levy P. // J. Math. Pures Appl.– 1935. –(Ser. 9) 14.– P. 347-402.

[128] *Mao X.* Stochastic differential equations and Applications/ Mao X. // Horwood Publishing, Chichester.– 1997.

[129] *Mativier M.* Stohastic Integration/ Mativier M., Pellaumail J. // Academic Press.– New York.– 1980.

[130] *Mitsui T.* Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations/ Mitsui T. // Kokyuroku(Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ), 850.– 1995.– P. 124-138.

[131] *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions/ Matuszewska W. // Studia Math.– 1964.– № 24.– P. 271-279.

[132] *Matuszewska W.* On some clases of functions with regard to their orders of growth/ Matuszewska W., Orlicz W. // Studia Math.– 1965.– № 26.– P. 11-24.

[133] *Mishura Y.S.* Stohastic calculus for fractional brownion motion and related processes/ Mishura Y.S. //Springer. – 2008.– 389 p.

[134] *Melnikov A.V.* On strong solutions of stochastic equations with respect to semimartingales/ Melnikov A.V.//Stochastic Differential Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences.– 1982.– № 43.– P. 122-127.

[135] *Oksendal B.K.*Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications/ Oksendal B.K. // Berlin: Springer. – 2003.– 360 p.

[136] *Paramesvaran S.* Partition functions whose logarithms are slowly oscillating/ Paramesvaran S. // Trans. Amer. Math. Soc.– 1961.– № 100.– P. 217-240.

[137] *Protter P.* Stochastic integration and differential equations/ Protter P. // New Approach, Berlin, Springer-Verlag.– 1990.

[138] *Ramakrishnan A.* Stochastic Processes in physics and astronomy/ Ramakrishnan A. // Modras, Inst. Math. Sci.– 1978.

[139] *Rao M.N.* Stochastic Processes. General theory/ Rao M.N.// Boston, Kluwer. – 1995.

[140] *Rozkosz A.* On stability and existanes of solutions of SDE with reflaction at the boundary/ Rozkosz A. // Stochastic Processes and their Applic.– 1997.– № 68.– P. 285-302.

[141] *Samoilenko A.M.* Averagin method and two-sided bounded solutions of Ito stochastic systems/ Samoilenko A.M., Makhmudov N.I., Stanzhitskiy A.N. // Differential Equastions.–2007.– 43, № 1.– P. 56-65.

[142] *Schurz H.* Existence and uniqueness of solutions of semilinear stochastic infinite-dimensional differential systems with H-regular noise/ Schurz H. // J. of Math. Analysyis and Applications.– 2007.– v. 332.– № 1.– P. 334-345.

[143] *Seneta E.* An interpretation of some aspects of Karamata's theory of regular variation/ Seneta E. // Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sri.– 1973.– № 15.– P. 111-119.

[144] *Sonoc C.* On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations/ Sonoc C. // Portugaliae Mathematic.– 1998.– № 55.– P. 451-456.

[145] *Standmuller U.* Tauberian theorems for Laplace Transforms/ Standmuller U. and Trautner R. // J. reive angew. Math.– 1979.– № 311/321.– P. 283-290.

[146] *Szelely G.J.* On the asymptotic properties of diffusion processes/ Szelely G.J. // Ann. Univ. SCi. Budapest, sec. math. – 1974.– № 17.– P. 69-71.

[147] *Feller W.* One-sided analogues of Karamata's regular variation/ Feller W. // L'Enseignement Math. – 1969.– № 15.– P. 107-121.

[148] *Fraidman A.* Stochastic differential equations and Applications/ Fraidman A. // Academic Press, New York.- vol.1.– 1975.

[149] *Friedman A.* Limit behaviour of solutions of stochastic differential equations/ Friedman A. // Frans. Amer. Math. Soc.– 1972.– 170.– P. 359-384.

[150] *Friedman A.* Asymptotic stability and spira-ling properties of solutions of stochastic equations/ Friedman A., Pinsky M.A. // Trans.-Amer. Math. Soc.– 1973.– № 186.– P. 331-358.

[151] *Walsh J.B.* An introduction to Stochastic partial differential equations/ Walsh J.B. // Lectures Note in Math. Springer, Berlin.– vol.1180.– 1986.

[152] *Wei F.* The existence and uniqueness of the solutions for stochastic differential equations with infinite delay/ Wei F., Wang K. // J. of Math. Analysis and Applications.– 2006.– vol. 331.– № 1.– P. 516-531.

[153] *Yakymiv A.L.* Asymptotics properties of the state change points in a random record process/ Yakymiv A.L. // Theory Probab. Appl.– 1987.– № 31.– P. 508-512.

[154] Булдигін В.В. Про асимптотичну поведінку розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Матеріали Одинадцятої Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука. — К., 2006. – С. 683;

[155] Булдигін В.В. Про асимптотичну поведінку розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь / Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Матеріали Міжнародної конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications I"— К., 2006. — С. 19.

[156] Tymoshenko O.A. On asymptotic equivalence of solutions of stochastic differential equations/ Tymoshenko O.A. // Abstracts of international conference "Skorohod Space 50 years on". — K., 2007. – P. 147.

[157] Buldugin V.V. The asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations / Buldugin V.V., Tymoshenko O.A. // Матеріали Дванадцятої Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука. — К., 2008. — Ч.2. – С. 35.

[158] Булдигін В.В. Про точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Булдигін В.В., Тимошенко О.А. // Мтеріали конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання".– Умань, 2008.– С. 15.

[159] Тимошенко О.А. Про точний порядок зростання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь/ Тимошенко О.А. // Тези доп. Міжуніверситетської наукової конференції з математики та фізики для студентів та молодих учених. – К., 2009. – С. 54.

[160] Buldygin V.V. On exact order of growth of solutions of ordinary stochastic differential equations/ Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. // Abstracts of international conference "Stochastic analysis and random dynamics". — Lviv, 2009. – P. 42.

[161] Тимошенко О.А. Необмеженість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часу/ Тимошенко О.А. // Матеріали Чотирнадцятої Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука. – К., 2012. – С. 129;

[162] Tymoshenko O.A. Unboundedness of solutions of SDE with time-dependent coefficients / Tymoshenko O.A. // Abstracts of international conference "Modern Stochastics: Theory and Applications III". – Kyiv, 2012. – P. 30.

[163] Тимошенко О.А. Необмеженість розв'язків неавтономних СДР з ростом часу / Тимошенко О.А. // Тези доп. Міжуніверситетської нау-

кової конференції з математики та фізики для студентів та молодих учених. – К., 2013. – С. 75.

[164] Klesov O.I. Unbounded solutions of SDE/ Klesov O.I., Tymoshenko O.A. // Матеріали конференції Боголюбівські читання DIF-2013 "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". — Севастополь, 2013. — С. 329.

[165] Tymoshenko O.A. PRV conditions for the unboundedness of solutions of SDE / Tymoshenko O.A. // German-Ukrainian Workshop on Empirical Complete Convergence and ather Limit Theory and Probability Theory. – Ulm, 2013. – P. 16.

[166] Tymoshenko O.A. Conditions for the unboundedness of solutions of SDE in term of PRV functions/ Tymoshenko O.A. // Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and ather Limit Theory and Probability Theory. – Koktebel, 2013. – P. 13.

[167] Tymoshenko O.A. ψ-asymptotic behaviour of solutions of nonautonomous SDE / Tymoshenko O.A. // German-Ukrainian Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory. – Ulm, 2014. – P. 14.

[168] Тимошенко О.А. Про ψ-асимптотичну поведінку розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь/ Тимошенко О.А. // Матеріали П'ятнадцятої Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука. — К., 2014. – С. 127.