НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Почекета Олександр Анатолійович

УДК 517.958

Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Попович Роман Омелянович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу математичної фізики

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Цифра Іван Михайлович,
Інститут геофізики НАН України ім. С.І. Субботіна,
провідний науковий співробітник
відділу математичної геофізики

кандидат фізико-математичних наук, професор
Юрик Іван Іванович,
Національний університет харчових технологій,
професор кафедри вищої математики

Захист відбудеться "4" жовтня 2016 р. о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "30" серпня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А.С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Класичне рівняння Бюргерса і низка його узагальнень важливі у теорії нелінійних коливань як найпростіші рівняння, що відображають одночасно й ефекти нелінійного поширення хвиль, і дифузію. Узагальнені рівняння Бюргерса не менш інтенсивно використовують для моделювання широкого спектру явищ у фізиці, хімії, математичній біології тощо (Дж. Уізем, 1977).

Дослідження цих простих класів рівнянь, які, тим не менше, мають нетривіальні властивості, з точки зору групового аналізу розпочалося з робіт А.Р. Форсайта (1906). Згодом рівняння Бюргерса стало одним з класичних рівнянь математичної фізики, що використовується як стандартний тестовий приклад для розробки та відпрацювання нових методів групового аналізу диференціальних рівнянь.

Симетрійний підхід дає, можливо, єдиний універсальний конструктивний метод знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, знання перетворень між рівняннями з деякого класу дозволяє використовувати відомі розв'язки рівнянь з цього класу для побудови точних розв'язків перетворених рівнянь (Л.В. Овсянніков, 1978; П. Олвер, 1986; В.І. Фущич, 1989).

Метод ліївської редукції вже тривалий час застосовують для знаходження точних розв'язків рівнянь математичної фізики, і він значною мірою вичерпав свої можливості. Тому необхідні розвиток і застосування потужніших методів — наприклад, методу некласичної редукції (Дж. Блумен, 1969; В.І. Фущич, 1989; П. Олвер, 1996).

Крім ліївських та некласичних редукцій важливу роль у груповому аналізі відіграють закони збереження диференціальних рівнянь, потенціальні перетворення еквівалентності в класах диференціальних рівнянь, а також потенціальні симетрії рівнянь з цих класів (Дж. Блумен, 1989; Р.О. Попович, 2008). Закони збереження, як відомо, використовують як показник можливої інтегровності рівняння, для контролю чисельних похибок при наближених обчисленнях, а також у теорії асимптотичної інтегровності для опису нелокальних перетворень симетрії чи еквівалентності.

Незважаючи на те, що окремі задачі симетрійного аналізу узагальнених рівнянь Бюргерса розглядалися раніше у низці робіт, переважна більшість опублікованих результатів не є вичерпними. Задача розширеного групового аналізу таких класів залишалася до цього часу не розв'язаною, натомість накопичився певний об'єм часткових і не зовсім коректних результатів.

На сьогодні відомо лише декілька вичерпних описів некласичних симетрій для важливих класів нелінійних диференціальних рівнянь, параметризованих довільними функціями. Це, зокрема, роботи Д.Дж. Арріго, Дж.М. Хілла, П. Бродбріджа, П.А. Кларксона та Е.Л. Менсфілд для рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом, робота Н.М. Іванової і К. Софоклеуса для узагальненого рівняння Хакслі, а також робота Д.Дж. Арріго, Д.А. Екрута, Дж.Р. Флісса та Л. Ле для систем узагальнених рівнянь Бюргерса. Класифікація операторів редукції рівнянь з класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, наведена у цій дисертаційній роботі, є ще одним прикладом такого вичерпного опису.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем «Симетрія та інтегровність нелінійних моделей» (номер держреєстрації 0106U000436) та «Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики» (номер держреєстрації 0116U003059).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є вдосконалення і розвиток методів розширеного групового аналізу диференціальних рівнянь та дослідження з їх допомогою симетрійних властивостей класів узагальнених рівнянь Бюргерса.

Об'єктом дослідження є клас узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класи лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, клас узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, клас узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, а також клас узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу.

Предметом дослідження є групоїди еквівалентності та групи еквівалентності цих класів; групи та алгебри ліївських симетрій, ліївські редукції, приховані симетрії, оператори редукції, некласичні редукції, закони збереження та потенціальні симетрії рівнянь з цих класів, потенціальні допустимі перетворення між ними, а також точні розв'язки цих рівнянь.

Методи дослідження. Основою постановки і розв'язання задач групової класифікації у класах диференціальних рівнянь є класичний інфінітезимальний метод Лі–Овсяннікова. Задачі групової класифікації розв'язано з застосуванням як алгебраїчного методу групової класифікації, так і прямого методу інтегрування визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів ліївських симетрій. Застосовано також сучасні модифікації цих методів, такі як калібрування довільного елемента класу перетвореннями еквівалентності, відображення між класами за допомогою сімей точкових перетворень та розбиття класу на нормалізовані підкласи. Групоїди еквівалентності знайдено з використанням прямого методу в термінах скінченних точкових перетворень.

Для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь використано методи ліївської та некласичної редукції. Ліївські редукції прокласифіковано за допомогою оригінального методу класифікації редукцій у нормалізованому класі диференціальних рівнянь відносно групи еквівалентності цього класу. Техніка підбору оптимальних анзаців для ліївської редукції дозволила отримати простий та уніфікований вигляд редукованих рівнянь. При дослідженні некласичних редукцій застосовано техніку класифікації операторів редукції диференціальних рівнянь з деякого класу з точністю до еквівалентності, що існує на множині операторів редукції, а також еквівалентності, породженої групою еквівалентності цього класу.

Для знаходження законів збереження використано прямий метод у термінах характеристик.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертації та виносяться на захист, такі:

1. Вичерпно описано групоїди еквівалентності та знайдено групи еквівалентності класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класів лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, класу узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, класу узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, а також класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, та низки його підкласів.
2. З використанням алгебраїчного методу виконано групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній. При цьому виправлено низку неточностей у попередніх дослідженнях ліївських симетрій рівнянь з цього класу.
3. Запропоновано метод класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Цей метод у поєднанні з оптимізованим вибором анзаців дозволив вичерпно описати приховані симетрії узагальнених рівнянь

Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній та побудувати точні розв'язки таких рівнянь.

4. Прокласифіковано оператори редукції узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній відносно групи еквівалентності класу цих рівнянь. За допомогою знайдених операторів редукції встановлено зв'язок між такими рівняннями та потенціальним рівнянням швидкої дифузії з нелінійністю степеня -1, що також дало змогу побудувати нові точні розв'язки.
5. Вичерпно описано потенціальні допустимі перетворення між узагальненими рівняннями Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній та потенціальні симетрії таких рівнянь. Для цього запропоновано поняття потенціального групоїда еквівалентності класу диференціальних рівнянь.
6. Розв'язано задачу групової класифікації для класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, та побудовано точні розв'язки таких рівнянь.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими, і їх можна використати для розв'язання низки конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичної фізики, а також у математичній біології, хімії та теоретичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Загальний план досліджень і постановка задач належать науковому керівнику — Р.О. Поповичу. У роботах, опублікованих разом із іншими авторами, внесок співавторів дисертанта є наступним.

У роботах [1–3] Р.О. Поповичу належить постановка задачі та оцінка отриманих результатів. Крім цього, в [1] Р.О. Поповичу належить побудова відображення типу годографа для рівняння (7), отриманого з системи визначальних рівнянь, у [2] — вихідна ідея доведення теореми 2 (в [3] — теореми 1).

У статті [5] О.О. Ванєєвій належить початковий вибір класу диференціальних рівнянь для дослідження. Р.О. Поповичу належить постановка задачі та оцінка отриманих результатів. Усі обчислення проводилися дисертантом і О.О. Ванєєвою незалежно з метою їх подальшого порівняння та перевірки. Графіки розв'язків побудовано О.О. Ванєєвою.

Всі результати отримано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (2011–2016, керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), а також на науковому семінарі «Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики» кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2014); на об'єднаному семінарі з математичної фізики Інституту математики НАН України (керівники семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, професор Є.Д. Білоколос, 2016).

Результати дисертації були предметом доповідей на Міжнародному семінарі до 75-річчя від дня народження В.І. Фущича «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики» (Київ, 2011); на Міжнародній науковій міждисциплінарній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2013» (Київ, 2013); на XVI Міжнародній конференції «Dynamical System Modeling та Stability Investigation» (Київ, 2013); на Міжнародному семінарі на честь професора В.І. Фущича «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики» (Київ, 2013); на Міжнародному семінарі з нагоди 70-річчя Анатолія Нікітіна «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики» (Київ, 2015).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 13 роботах [1–13]. З них шість — у міжнародних наукових виданнях та у виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України, затвердженого МОН України [1–6], причому [4, 6] — без співавторів. Ще дві статті опубліковано в працях міжнародних конференцій [7, 8], чотири — тези міжнародних конференцій [9–12], одна — препринт [13]. Сім опублікованих робіт проіндексовано в наукометричних базах даних, а саме: [1, 3] — Web of Science, Scopus, ZbMath та MathSciNet; [2, 4] — ZbMath; [5] — Web of Science, Scopus та MathSciNet; [6] — Web of Science та Scopus; [7] — ZbMath та MathSciNet.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 137 найменувань. Дисертація містить 8 таблиць та 1 рисунок. Повний обсяг дисертації становить 159 сторінок, з них список використаних джерел займає 17 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації.

У **другому розділі** обґрунтовано вибір класів рівнянь для дослідження та наведено необхідні теоретичні відомості.

Класом диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_\theta\colon L(t,x,u_{(p)},\theta_{(q)}(t,x,u_{(p)}))=0$ з незалежними змінними t, x і залежною змінною u називається множина $\mathcal{L}|_\mathcal{S}=\{\mathcal{L}_\theta\mid\theta\in\mathcal{S}/_{\overset{\rm g}{\sim}}\}$, параметризована *довільним елементом* $\theta(t,x,u_{(p)})$, який є набором функцій-параметрів, що пробігають множину $\mathcal{S}$ розв'язків допоміжної системи рівнянь (і, можливо, нерівностей) $S=S(t,x,u_{(p)},\theta_{(q')}(t,x,u_{(p)}))=0$ $(\neq 0,\ >0,\ <0)$, де t, x і $u_{(p)}$ слід вважати незалежними змінними, факторизовану за відношенням калібрувальної еквівалентності $\overset{\rm g}{\sim}$. Тут $u_{(p)}$ та $\theta_{(q)}$ позначають набори похідних відповідно залежної змінної і довільного елемента до порядку p та q включно. Значення довільного елемента θ та $\tilde\theta$ називаються *калібрувально еквівалентними* ($\theta\overset{\rm g}{\sim}\tilde\theta$), якщо $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ визначають один і той самий многовид у просторі $(t,x,u_{(p)})$.

Нехай $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)$ позначає множину точкових перетворень у просторі (t,x,u), які відображають рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$. *Допустиме перетворення* у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ — це трійка $(\theta,\varphi,\tilde\theta)$, що складається з довільних елементів початкового рівняння $\mathcal{L}_\theta$, кінцевого рівняння $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ і точкового перетворення $\varphi\in\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)$ між $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$.

Групоїдом еквівалентності $\mathcal{G}^\sim=\mathcal{G}^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ називають множину $\{(\theta,\varphi,\tilde\theta)\mid\theta\in\mathcal{S},\ \tilde\theta\in\mathcal{S},\ \varphi\in\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\}$ допустимих перетворень у цьому класі з операцією композиції допустимих перетворень.

Множину $\mathrm{T}(\theta,\theta)$ з операцією композиції перетворень називають *(максимальною) групою точкових симетрій* рівняння $\mathcal{L}_\theta$ і позначають G_θ. Алгебру Лі, що складається з інфінітезимальних генераторів однопараметричних груп точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}_\theta$, називають *алгеброю ліївських симетрій* рівняння $\mathcal{L}_\theta$ і позначають $\mathfrak{g}_\theta$.

Група еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ — це (псевдо)група точкових перетворень у просторі $(t,x,u_{(p)},\theta)$, які узгоджені з контактною структурою цього простору, проектовні на простір $(t,x,u_{(\tilde p)})$ для будь-якого $\tilde p\colon 0\leqslant\tilde p\leqslant p$ і відображають кожне рівняння з класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ у рівняння з цього ж класу. Алгебру Лі, що складається з інфінітезимальних генераторів однопараметричних груп перетворень еквівалентності класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, називають *алгеброю еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і позначають $\mathfrak{g}^\sim$.

Клас диференціальних рівнянь $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ називають *нормалізованим*, якщо його групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ породжено його групою еквівалентності $G^{\sim}$, тобто для кожної трійки $(\theta, \varphi, \tilde{\theta}) \in \mathcal{G}^{\sim}$ існує перетворення $\mathcal{T}$ з групи еквівалентності $G^{\sim}$ таке, що $\tilde{\theta} = \mathcal{T}\theta$ та $\varphi = \mathcal{T}|_{(t,x,u)}$.

Оператором редукції диференціального рівняння з частинними похідними з незалежними змінними t, x та залежною змінною u називається векторне поле вигляду $Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$ з $(\tau, \xi) \neq (0,0)$, за допомогою якого можна побудувати анзац, який редукує кількість незалежних змінних на одиницю.

У **третьому розділі** дисертації визначено групоїди еквівалентності всіх розглянутих у роботі класів узагальнених рівнянь Бюргерса, починаючи з їхнього надкласу. Зокрема вивчено найширший лінеаризовний клас узагальнених рівнянь Бюргерса вигляду $u_t + au_{xx} + (au + a_x + b)u_x + \frac{1}{2}a_x u^2 + b_x u + f = 0$, де a, b та f залежать від (t,x), причому $a \neq 0$. Продемонстровано, як спрощується групоїд еквівалентності цього класу внаслідок калібрування довільного елемента. Описано групоїди еквівалентності та перевірено нормалізованість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній вигляду $\mathcal{L}_f\colon u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$, $f \neq 0$, класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі вигляду $\mathcal{C}_f\colon u_t + uu_x + (f(t,x)u_x)_x = 0$, $f \neq 0$, а також класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса вигляду $\mathcal{P}_f\colon v_t + v_x^2 + f(t,x)v_{xx} = 0$, $f \neq 0$. Доведено наступні твердження.

Теорема 3.1. *Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі. Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ складається з перетворень*

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \\ &\tilde{u} = \frac{\kappa(\gamma t + \delta)u - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \tilde{f} = \frac{\kappa^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} f, \end{aligned} \tag{1}$$

де α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 та κ — довільні сталі, визначені з точністю до ненульового множника, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ та $\kappa \neq 0$.

Твердження 3.2. *Звичайна група еквівалентності класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \alpha t + \beta, \quad \tilde{x} = \kappa(x + \mu_1 t + \mu_0), \quad \tilde{u} = \frac{\kappa}{\alpha}(u + \mu_1), \quad \tilde{f} = \frac{\kappa^2}{\alpha} f,$$

де α, β, κ, μ_1, μ_0 — довільні сталі, причому $\alpha \neq 0$ та $\kappa \neq 0$.

Групоїд еквівалентності класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ описується з використанням знайденої групи еквівалентності шляхом розбиття цього класу на три підкласи (твердження 3.3–3.5).

Твердження 3.3. *Підклас $\mathcal{C}^1=\{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx}\neq 0\}$ класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^1$ співпадає зі звичайною групою еквівалентності всього класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$.*

Твердження 3.4. *Узагальнена розширена група еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^2=\{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx}=0,\, f\neq 0\}$ класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ складається з перетворень*

$$\tilde t=\frac{1}{c_0}\int (X^1)^2\mathrm{d}t+c_3,\quad \tilde x=X^1x+\int (X^1)^2X^2\,\mathrm{d}t+c_5,$$

$$\tilde u=c_0\left(\frac{1}{X^1}u-\frac{c_1}{\lambda}x+X^2\right),\quad \tilde f=c_0f,$$

де $\quad X^1(t):=\left(c_1\int\frac{\mathrm{d}t}{\lambda}+c_2\right)^{-1},\quad X^2(t):=c_1\int\frac{f^1}{\lambda}\,\mathrm{d}t+c_4,$

$c_0,\dots,c_5$ — довільні сталі, причому $c_0\neq 0$ та $(c_1,c_2)\neq(0,0)$, довільний елемент f має вигляд $f=f^2(t)x^2+f^1(t)x+f^0(t)$, а $\lambda(t):=e^{2\int f^2\,\mathrm{d}t}$.

Тут і надалі інтеграл за t означає фіксовану первісну.

Твердження 3.5. *Між рівняннями з підкласів $\mathcal{C}^1$ та $\mathcal{C}^2$ не існує точкових перетворень.*

Твердження 3.6–3.10 описують групоїд еквівалентності класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$.

Твердження 3.6. *Узагальнена розширена група еквівалентності класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ співпадає з його звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}_{\mathrm{pot}}$ і складається з перетворень*

$$\tilde t=\alpha t+\beta,\quad \tilde x=\kappa(x+\mu_1t+\mu_0),$$

$$\tilde v=\frac{\kappa^2}{\alpha}\left(v+\frac{\mu_1}{2}x+\frac{\mu_1^2}{4}t+\nu\right),\quad \tilde f=\frac{\kappa^2}{\alpha}f,$$

де α, β, κ, μ_1, μ_0, ν — довільні сталі, причому $\alpha\neq 0$ та $\kappa\neq 0$.

Твердження 3.7. *Підклас $\mathcal{P}^3=\{\mathcal{P}_f \mid f=\mathrm{const}\neq 0\}$ класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований в узагальненому сенсі. Узагальнена група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^3$ складається з перетворень*

$$\tilde t=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\quad \tilde x=\kappa\frac{x+\mu_1t+\mu_0}{\gamma t+\delta},$$

$$\tilde v=\frac{\kappa^2f}{\alpha\delta-\beta\gamma}\ln\left|F^1\left(e^{v/f}+F^0\right)\right|,\quad \tilde f=\frac{\kappa^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}f,$$

де α, β, γ, δ, κ, μ_1, μ_0 — довільні сталі, причому $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ та $\kappa\neq 0$, набір $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\kappa)$ визначений з точністю до ненульового множника,

$$F^1=\begin{cases} k\sqrt{|\gamma t+\delta|}\exp\left(-\dfrac{(\gamma x-\mu_1\delta+\mu_0\gamma)^2}{4f\gamma(\gamma t+\delta)}\right), & \gamma\neq 0,\\ k\exp\dfrac{2\mu_1 x+\mu_1^2 t}{4f}, & \gamma=0,\end{cases}$$

k — ненульова стала, F^0 є розв'язком лінійного рівняння $F^0_t+fF^0_{xx}=0$.

Твердження 3.8. *Підклас $\mathcal{P}^1=\{\mathcal{P}_f\mid f_{xxx}\neq 0\}$ класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^1$ співпадає зі звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}_{\rm pot}$ всього класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$.*

Хоча клас $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ не є нормалізованим, його можна розбити на три підкласи, що є нормалізованими (у певному сенсі), а саме $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^3$ та доповнення їхнього об'єднання $\mathcal{P}^2=\overline{\mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^3}$. Підклас $\overline{\mathcal{P}^1}$, виокремлений з класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ обмеженням $f_{xxx}=0$, має складні трансформаційні властивості і не є нормалізованим. Однак, виключивши з $\overline{\mathcal{P}^1}$ невеликий підклас $\mathcal{P}^3$, ми отримаємо нормалізований підклас $\mathcal{P}^2$.

Твердження 3.9. *Підклас $\mathcal{P}^2=\{\mathcal{P}_f\mid f_{xxx}=0,\ f\neq\mathrm{const}\}$ класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований в узагальненому розширеному сенсі. Узагальнена розширена група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^2$ складається з перетворень*

$$\begin{aligned}&\tilde t=\frac{1}{c_0}\int\left(X^1\right)^2{\rm d}t+c_3,\quad \tilde x=X^1x+\int\left(X^1\right)^2X^2\,{\rm d}t+c_5,\\ &\tilde v=c_0\left(v-\frac{c_1}{4}\frac{X^1}{\lambda}x^2+\frac{X^1X^2}{2}x+\int\left(\frac{(X^1X^2)^2}{4}+\frac{c_1}{2}\frac{f^0}{\lambda}X^1\right){\rm d}t\right)+c_6,\\ &\tilde f=c_0f,\end{aligned}$$

$$\text{де}\quad X^1(t):=\left(c_1\int\frac{{\rm d}t}{\lambda}+c_2\right)^{-1},\quad X^2(t):=c_1\int\frac{f^1}{\lambda}\,{\rm d}t+c_4,$$

$c_0,\dots,c_6$ — довільні сталі, причому $c_0\neq 0$ та $(c_1,c_2)\neq(0,0)$, довільний елемент f має вигляд $f=f^2(t)x^2+f^1(t)x+f^0(t)$, а $\lambda(t):=e^{2\int f^2\,{\rm d}t}$.

Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^2$ також співпадає з $G^{\sim}_{\rm pot}$, але вона не породжує всіх допустимих перетворень в цьому підкласі.

Твердження 3.10. *Між будь-якими двома рівняннями з різних підкласів $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$ або $\mathcal{P}^3$ класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ не існує точкових перетворень.*

Четвертий розділ містить розширений груповий аналіз класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, що покращує і доповнює всі існуючі дослідження допустимих перетворень у цьому класі, ліївських симетрій, операторів редукції, законів збереження і потенціальних симетрій рівнянь з цього класу.

При розв'язанні задачі групової класифікації для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ принциповим є встановлений у третьому розділі факт, що цей клас нормалізований, а його група еквівалентності $G^{\sim}$ — скінченновимірна. Тому класифікацію виконано алгебраїчним методом. Проекція $\mathfrak{g}$ алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на простір (t,x,u) є лінійною оболонкою векторних полів $P^t=\partial_t$, $P^x=\partial_x$, $D^t=t\partial_t-u\partial_u$, $D^x=x\partial_x+u\partial_u$, $\Gamma=t\partial_x+\partial_u$, $\Pi=t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u$ і співпадає з об'єднанням максимальних алгебр $\mathfrak{g}_f$, $f\in\mathcal{S}$, ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Отже, достатньо прокласифікувати лише придатні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$, тобто ті, що належать множині $\{\mathfrak{g}_f,\ f\in\mathcal{S}\}$.

Перелік $G^{\sim}$-нееквівалентних придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпується наступними підалгебрами: одновимірними $\langle D^x\rangle$, $\langle P^t\rangle$, $\langle P^t+\Gamma\rangle$, $\langle P^t+D^x\rangle$, $\langle D^t+P^x\rangle$, $\langle D^t+aD^x\rangle$, $\langle D^t+D^x+\Gamma\rangle$, $\langle P^t+\Pi+aD^x\rangle$, двовимірними $\langle P^x,\Gamma\rangle$, $\langle D^x,P^t\rangle$, $\langle D^x,D^t\rangle$, $\langle D^x,P^t+\Pi\rangle$, $\langle P^t,D^t+P^x\rangle$, $\langle P^t,D^t+aD^x\rangle$, $\langle P^t+\Gamma,D^t+2D^x\rangle$, тривимірними $\langle P^x,\Gamma,P^t+\frac12D^x\rangle$, $\langle P^x,\Gamma,D^t+aD^x\rangle$, $\langle P^x,\Gamma,P^t+\Pi+aD^x\rangle$ і п'ятивимірною $\langle P^x,\Gamma,P^t,D^t+\frac12D^x,\Pi\rangle$. Відповідні значення функції f, а також умови, за яких ці алгебри є максимальними, наведено у таблиці 4.1 дисертації.

Запропоновано оригінальний метод класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Результат застосування цього методу разом з технікою оптимального вибору анзаців до класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ подано в таблиці 4.2 дисертації. Всі побудовані $G^{\sim}$-нееквівалентні редуковані рівняння (окрім двох рівнянь першого порядку) належать класу рівнянь простого вигляду, серед яких виокремлено всі рівняння, що допускають ліївські симетрії. Це дозволило вичерпно описати приховані симетрії та знайти точні розв'язки деяких рівнянь з цього класу.

Повністю прокласифіковано оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Теорема 4.14. *З точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності регулярні оператори редукції рівнянь $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ вичерпуються підмножинами:*

1) *$Q^1=\partial_t+u\partial_x$ для кожного рівняння $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$;*
2) *оператори ліївської симетрії з ненульовим коефіцієнтам при ∂_t;*
3) *$Q^\theta=\partial_t-(\theta_t/\theta_x)\partial_x$ для рівнянь $\mathcal{L}_{f^\theta}$ з $f^\theta=-1/\theta_x$, де $\theta=\theta(t,x)$ — довільний (несталий) розв'язок рівняння $\theta_t=\theta_{xx}/\theta_x+h(\theta)\theta_x$, h — довільна гладка функція від θ;*

4) $Q^{\xi^0\eta^1\eta^0} = \partial_t + \big(-\frac{1}{2}u + \xi^0\big)\partial_x + \big(\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}\xi^0u^2 + \eta^1 u + \eta^0\big)\partial_u$ *для класичного рівняння Бюргерса* $\mathcal{L}_1$*, де*

$$\xi^0 = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix}1 & u^1 & z^1\\ 1 & u^2 & z^2\\ 1 & u^3 & z^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u^1 & y^1\\ 1 & u^2 & y^2\\ 1 & u^3 & y^3\end{vmatrix}}, \quad \eta^1 = \frac{1}{4}\frac{\begin{vmatrix}1 & y^1 & z^1\\ 1 & y^2 & z^2\\ 1 & y^3 & z^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u^1 & y^1\\ 1 & u^2 & y^2\\ 1 & u^3 & y^3\end{vmatrix}}, \quad \eta^0 = -\frac{1}{4}\frac{\begin{vmatrix}u^1 & y^1 & z^1\\ u^2 & y^2 & z^2\\ u^3 & y^3 & z^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u^1 & y^1\\ 1 & u^2 & y^2\\ 1 & u^3 & y^3\end{vmatrix}},$$

u^i *— розв'язки рівняння* $\mathcal{L}_1$*, для яких визначник у знаменниках не дорівнює нулю,* $y^i = 2u^i_x + (u^i)^2$*,* $z^i = 4u^i_{xx} + 6u^iu^i_x + (u^i)^3$*,* $i = 1, 2, 3$.

Анзац $u = \varphi(\omega)$, $\omega = \theta(t, x)$, побудований за оператором Q^θ, редукує рівняння $\mathcal{L}_f$ з $f = -1/\theta_x$ до звичайного диференціального рівняння $\varphi_{\omega\omega} - \varphi\varphi_\omega - h(\omega)\varphi_\omega = 0$. У випадку $h = \mathrm{const}$ з точністю до $G^\sim$-еквівалентності можна покласти $h = 0$, і редуковане рівняння зводиться до рівняння Ріккаті $\varphi_\omega = \frac{1}{2}\varphi^2 + 2\nu$ з довільною сталою ν, яке легко інтегрується, а рівняння на θ є потенціальним рівнянням швидкої дифузії $\theta_t = \theta_{xx}/\theta_x$, для якого відомо багато точних розв'язків. У результаті для кожного з цих розв'язків отримаємо сім'ю точних розв'язків відповідного рівняння $\mathcal{L}_{f^\theta}$ з $f^\theta = -1/\theta_x$.

Рівняння $\mathcal{L}_f$ має ненульові закони збереження тоді і тільки тоді, якщо $f_{xxx} = 0$, тобто $f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t)$, де коефіцієнти f^2, f^1 та f^0 є гладкими функціями від t, що одночасно не дорівнюють нулю. Тоді $\lambda = \lambda(t) = e^{\int f_{xx}\,\mathrm{d}t}$ є єдиною лінійно незалежною характеристикою рівняння $\mathcal{L}_f$. Інакше кажучи, простір законів збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ одновимірний. Система

$$v_x = \lambda u, \quad v_t = -\lambda\left(\tfrac{1}{2}u^2 + fu_x - f_xu\right) \tag{2}$$

називається *системою для потенціалів* для рівняння $\mathcal{L}_f$. Виключивши з неї залежну змінну u, отримуємо *рівняння для потенціалу*

$$\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda}\colon\ v_t + \tfrac{1}{2\lambda}v_x^2 + fv_{xx} - f_xv_x = 0, \tag{3}$$

що відповідає рівнянню $\mathcal{L}_f$. Тут $f_{xxx} = 0$, $\lambda_t = f_{xx}\lambda$, $f\lambda \neq 0$. Рівняння $\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda}$ з $f \neq \mathrm{const}$ не має ненульових законів збереження, а отже (2) — єдина канонічна система для потенціалів для $\mathcal{L}_f$. Простір характеристик законів збереження рівняння $\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda}$ з $f = \mathrm{const}$ складається з функцій вигляду $\mu = \psi(t, x)e^{\frac{v}{2f\lambda}}$, де $\psi(t, x)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $\psi_t = f\psi_{xx}$. Вищих потенціальних законів збереження класичне рівняння Бюргерса не має.

Підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, де $\mathcal{S}' = \{f \in \mathcal{S} \mid f_{xxx} = 0\}$, природно розбити на підкласи $\mathcal{L}^1 = \{\mathcal{L}_f \mid f = \mathrm{const} \neq 0\}$ та $\mathcal{L}^2 = \{\mathcal{L}_f \mid f_{xxx} = 0,\ f \neq \mathrm{const}\}$. Обидва ці підкласи замкнені відносно групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, а отже нормалізовані, як і весь клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Допустимі перетворення та групоїд еквівалентності класу систем (2) назвемо *потенціальними допустимими перетвореннями* і *потенціальним групоїдом еквівалентності* підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ відповідно.

Лема 4.22. *Групоїди еквівалентності класу систем* (2) *та класу рівнянь* (3) *ізоморфні.*

Наслідок 4.23. *Для кожного фіксованого f, для якого $f_{xxx} = 0$, існує ізоморфізм між максимальними алгебрами ліївської інваріантності рівняння $\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda}$ та системи* (2) *з цим f.*

Розбиття класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ на підкласи $\mathcal{L}^1$ та $\mathcal{L}^2$ пов'язане з розбиттям класу рівнянь вигляду (3) з $f_{xxx} = 0$, $\lambda_t = f_{xx}\lambda$, $f\lambda \neq 0$ на підкласи $\hat{\mathcal{P}}^1 = \{\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda} \mid f = \mathrm{const}\}$ та $\hat{\mathcal{P}}^2 = \{\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda} \mid f \neq \mathrm{const}\}$ з суттєво різними трансформаційними властивостями.

Твердження 4.24. *Підклас $\hat{\mathcal{P}}^2$ нормалізований в розширеному узагальненому сенсі. Його розширена узагальнена група еквівалентності складається з перетворень*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta},\\
&\tilde{v} = c_0\left(v - \frac{\gamma\lambda(t)}{2(\gamma t + \delta)}x^2 + \frac{\delta\mu_1 - \gamma\mu_0}{\kappa(\gamma t + \delta)}\lambda(t)x + V^0(t)\right),\\
&\tilde{f} = \frac{\kappa^2}{\Delta}f, \quad \tilde{\lambda} = c_0\frac{\Delta}{\kappa^2}\lambda,
\end{aligned}
$$

де $$V^0 = \int\left(\frac{(\delta\mu_1 - \gamma\mu_0)^2}{2\kappa^2(\gamma t + \delta)^2} + \frac{\delta\mu_1 - \gamma\mu_0}{\kappa(\gamma t + \delta)}f^1(t) + \frac{\gamma}{\gamma t + \delta}f^0(t)\right)\lambda(t)\,\mathrm{d}t + \sigma,$$

α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 та κ — довільні сталі, визначені з точністю до ненульового множника, причому $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ та $\kappa \neq 0$, а σ і c_0 — повністю довільні сталі.

Групоїди еквівалентності підкласів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ ізоморфні з точністю до зсувів та масштабних перетворень v. Те ж саме справедливо і для груп еквівалентності підкласів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$, хоча ці групи еквівалентності мають різні типи. З цього також випливає, що для кожної функції f такої, що $f_{xxx} \neq 0$, групи ліївських симетрій рівнянь $\mathcal{L}_f$ та $\hat{\mathcal{P}}_{f,\lambda}$ ізоморфні з точністю до зсувів v, тому групові класифікації класів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ еквівалентні. Оскільки клас $\mathcal{L}^2$ замкнений відносно дії $G^{\sim}$, його групову класифікацію можна виокремити з групової класифікації всього класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Твердження 4.26. *Потенціальні допустимі перетворення підкласу $\mathcal{L}^2$ індуковано його звичайними допустимими перетвореннями. Рівняння з $\mathcal{L}^2$ не мають нетривіальних потенціальних симетрій.*

Клас $\hat{\mathcal{P}}^1$ є орбітою будь-якого свого рівняння під дією групи масштабних перетворень. Між рівняннями, одне з яких належить класу $\hat{\mathcal{P}}^1$, а інше — класу $\hat{\mathcal{P}}^2$, точкових перетворень не існує. Це дає повний опис групоїда еквівалентності класу рівнянь вигляду (3).

У п'ятому розділі виконано груповий аналіз класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, вигляду $u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}$, $ng \neq 0$. До цього класу застосовано калібрування $h = 0$ довільного елемента, що дозволило спростити процес групової класифікації.

Теорема 5.1. *Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_0, \quad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{T_t}\right)^{\frac{1}{n}} u,$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{T_t}h + \frac{T_{tt}}{nT_t^2}, \quad \tilde{g} = \frac{{\delta_1}^2}{T_t}\,g, \quad \tilde{n} = n,$$

де δ_1 та δ_0 — довільні сталі, $T = T(t)$ — довільна гладка функція, причому $\delta_1 T_t > 0$. Підклас класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$, виокремлений умовою $n \neq 1$, нормалізований в узагальненому сенсі відносно $\hat{G}^{\sim}$.

Оскільки степінь n є інваріантом при перетвореннях з групи еквівалентності, клас $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ можна вважати об'єднанням підкласів з фіксованими значеннями $n \in \mathbb{R}$. Тому для кожного фіксованого n група $\hat{G}^{\sim}$ породжує звичайну групу еквівалентності відповідного підкласу.

Теорема 5.5. *Узагальнена розширена група еквівалентності класу*

$$u_t + uu_x + h(t)u = g(t)u_{xx} \tag{4}$$

складається з перетворень

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = (x + \delta_1)X^1 + \delta_0, \quad \tilde{u} = \frac{X^1}{T_t}\left(u + (x+\delta_1)\frac{X^1_t}{X^1}\right),$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{T_t}\left(h + \frac{T_{tt}}{T_t} - 2\frac{X^1_t}{X^1}\right), \quad \tilde{g} = \frac{\left(X^1\right)^2}{T_t}g.$$

Тут $T = T(t)$ *— довільна гладка функція, причому* $T_t \neq 0$*, функція* $X^1 = X^1(t)$ *визначається рівністю*

$$X^1 = \left(\gamma \int H(t)\,\mathrm{d}t + \delta\right)^{-1}, \quad H(t) := e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t},$$

а δ_0*,* δ_1*,* δ *і* γ *— довільні сталі з* $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$*. Цей клас нормалізований в узагальненому розширеному сенсі.*

Теорема 5.7. *Клас* $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$*, де показник степеня* n *не зафіксовано, не є нормалізованим. Проте його можна розбити на нормалізовані підкласи з фіксованими значеннями* n*, не пов'язані між собою точковими перетвореннями. Кожний підклас* $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ *з конкретним значенням* n*,* $n \neq 1$*, нормалізований у звичайному сенсі, в той час як підклас класу* (4)*, що відповідає значенню* $n = 1$*, нормалізований тільки в узагальненому розширеному сенсі. Об'єднання будь-яких підкласів класу* $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ *з* $n \neq 1$ *є класом, нормалізованим в узагальненому сенсі.*

Теореми 5.1, 5.5 та 5.7 вичерпно описують групоїд еквівалентності класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$, що дозволяє знайти групоїд еквівалентності будь-якого підкласу класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$, зокрема двох відкаліброваних класів рівнянь

$$u_t + u^n u_x = g(t)u_{xx}, \quad ng \neq 0, \tag{5}$$

$$u_t + uu_x = g(t)u_{xx}, \quad g \neq 0. \tag{6}$$

Зауважимо, що (6) є підкласом класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній.

Наслідок 5.8. *Підклас класу* (5)*, виокремлений умовою* $n \neq 1$*, нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнена група еквівалентності співпадає з узагальненою групою еквівалентності всього класу* (5) *і складається з перетворень*

$$\tilde t = \alpha t + \beta, \quad \tilde x = \delta_1 x + \delta_0, \quad \tilde u = \left(\frac{\delta_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} u, \quad \tilde g(\tilde t) = \frac{\delta_1^2}{\alpha} g(t), \quad \tilde n = n,$$

де α*,* β*,* δ_0 *та* δ_1 *— довільні сталі, причому* $\alpha\delta_1 > 0$*.*

Клас (6) нормалізований у звичайному сенсі, і його звичайну групу еквівалентності утворено перетвореннями вигляду (1), де довільний елемент f перепозначено як g. Задачу групової класифікації для каліброваних класів розв'язано шляхом інтегрування визначальних рівнянь з точністю до групи еквівалентності всього класу. Відповідні класифікаційні списки наведено в дисертаційній роботі у таблицях 5.1–5.3. Проведено ліївські редукції та отримано нові точні розв'язки рівнянь з цього класу, деякі з них розширено перетвореннями еквівалентності.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі з використанням сучасних методів групового аналізу диференціальних рівнянь та оригінальних технік досліджено низку класів узагальнених рівнянь Бюргерса.

• Вичерпно описано групоїди еквівалентності та знайдено групи еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класів лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, класу $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, а також класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, та низки його підкласів. Основною технікою опису групоїдів еквівалентності є перевірка нормалізованості класу або, якщо клас не є нормалізованим, розбиття його на нормалізовані підкласи.

• Проведено розширений симетрійний аналіз класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, що включає опис ліївських симетрій, ліївських та некласичних редукцій, прихованих симетрій, законів збереження, потенціальних допустимих перетворень, потенціальних симетрій рівнянь з цього класу та побудову їх точних розв'язків.

• Оскільки клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, а його алгебра еквівалентності $G^{\sim}$ — скінченновимірна, групову класифікацію цього класу ефективно проведено з використанням алгебраїчного методу, додатково оптимізованого описом лише придатних підалгебр у проекції його алгебри еквівалентності. Всього існує дев'ятнадцять $G^{\sim}$-нееквівалентних випадків розширення ліївської симетрії для рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

• Запропоновано метод класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Цей метод у поєднанні з вибором оптимальних анзаців дозволив отримати для рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ редуковані рівняння, що належать (за виключенням двох простих рівнянь першого порядку) класу звичайних диференціальних рівнянь уніфікованого вигляду. Це дозволило вичерпно описати приховані симетрії рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ та побудувати нові точні розв'язки таких рівнянь.

• Прокласифіковано оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відносно групи еквівалентності $G^{\sim}$ цього класу. Слід зазначити, що це один з небагатьох прикладів повного опису операторів редукції для деякого класу диференціальних рівнянь, у якому некласичні редукції дають нетривіальні точні розв'язки. За допомогою знайдених операторів редукції встановлено зв'язок між певними рівняннями з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ та потенціальним рівнянням швидкої дифузії з нелінійністю степеня -1, що дало змогу побудувати їх нові точні розв'язки.

• Описано потенціальні допустимі перетворення в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і потенціальні симетрії рівнянь з цього класу. Виявилося зручним розпочинати класифікацію потенціальних симетрій диференціальних рівнянь з дослідження потенціальних допустимих перетворень у класі таких рівнянь. На прикладі класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ запропоновано поняття потенціального групоїда еквівалентності.

• Розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ та побудовано точні розв'язки низки рівнянь з цього класу. При цьому застосовані техніки були більш традиційними порівняно з розглядом відповідної задачі для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, проте задача для класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq 0\}}$ дозволила проілюструвати, як спрощується виконання класифікації при правильному виборі калібрування довільного елемента.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Pocheketa, O. A. Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // Phys. Lett. A. — 2012. — Vol. 376, no. 45. — P. 2847–2850.
2. Почекета, О. А. Оператори редукції рівняння Бюргерса / О. А. Почекета, Р. О. Попович // Доповіді НАН України. — 2012. — № 12. — С. 24–30.
3. Pocheketa, O. A. Reduction operators of Burgers equation / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 398, no. 1. — P. 270–277.
4. Почекета, О. А. Групоїди еквівалентності узагальнених рівнянь Бюргерса / О. А. Почекета // Доповіді НАН України. — 2013. — № 7. — С. 19–25.
5. Pocheketa, O. A. Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych, O. O. Vaneeva // Appl. Math. Comput. — 2014. — Vol. 243. — P. 232–244.
6. Pocheketa, O. A. Equivalence groupoid of generalized potential Burgers equations / O. A. Pocheketa // J. Phys. Conf. Ser. — 2015. — Vol. 621. — 012011, 10 p.

7. Pocheketa, O. A. Normalized classes of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012) / Ed. by O. O. Vaneeva, C. Sophocleous, R. O. Popovych et al. — Nicosia: University of Cyprus, 2013. — P. 170–178.
8. Почекета, О. А. Оператори редукції і точні розв'язки узагальнених рівнянь Бюргерса / О. А. Почекета // Матеріали міжнародної наукової міждисциплінарної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2013» (Київ, 18–22 березня, 2013). — Київ: Logos, 2013. — С. 123–127.
9. Pocheketa, O. A. The nonclassical reduction method applied to generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Proceedings of the XVI International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigation" (Київ, 29–31 травня, 2013). — Київ: Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2013. — P. 49.
10. Pocheketa, O. A. Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Symmetry and Integrability of Mathematical Physics, Kyiv, December 18–19, 2011. Abstract. — Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2011 [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Pocheketa.html
11. Pocheketa, O. A. Nonclassical reductions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Symmetry and Integrability of Mathematical Physics, Kyiv, December 21–24, 2013. Abstract. — Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2013 [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Pocheketa2013.html
12. Pocheketa, O. A. Equivalence groupoid of a class of generalized potential Burgers equations / O. A. Pocheketa // Symmetry and Integrability of Mathematical Physics, Kyiv, December 27–28, 2015. Abstract. — Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2015 [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2015/Pocheketa.html
13. Pocheketa, O. A. Extended symmetry analysis of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // Preprint. — arXiv:1603.09377. — 2016. — 31 p.

АНОТАЦІЇ

Почекета О.А. Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.03 — математична фізика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертацію присвячено симетрійному аналізу кількох класів узагальнених рівнянь Бюргерса: узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, а також узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, та низки підкласів цього класу. Для всіх цих класів описано їх групоїди еквівалентності шляхом доведення їх нормалізованості та знаходження відповідних груп еквівалентності. За необхідності використано техніку розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані підкласи.

Для класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній виконано розширений груповий аналіз. З використанням алгебраїчного методу розв'язано задачу групової класифікації для цього класу. Вичерпно описано оператори редукції, ліївські та некласичні редукції, закони збереження, потенціальні допустимі перетворення та потенціальні симетрії рівнянь з цього класу. Запропоновано метод класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Цей метод у поєднанні з оптимізованим вибором анзаців дозволив вичерпно описати приховані симетрії рівнянь з цього класу та побудувати точні розв'язки таких рівнянь. Нові розв'язки також побудовано методом некласичної редукції завдяки встановленому зв'язку з потенціальним рівнянням швидкої дифузії з нелінійністю степеня -1.

Задачу групової класифікації розв'язано і для класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу. Результат класифікації використано для побудови точних розв'язків таких рівнянь.

Ключові слова: узагальнені рівняння Бюргерса, групова класифікація диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності, група еквівалентності, ліївська симетрія, оператор редукції, прихована симетрія, потенціальна симетрія, точні розв'язки.

Почекета А.А. Расширенный групповой анализ обобщённых уравнений Бюргерса. — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена симметрийному анализу ряда классов обобщённых уравнений Бюргерса: обобщённых уравнений Бюргерса с переменным коэффициентом при второй производной, линеаризуемых обобщённых уравнений Бюргерса, обобщённых уравнений Бюргерса в сохраняющейся форме, обобщённых потенциальных уравнений Бюргерса, а также обобщённых уравнений Бюргерса с линейным затуханием и коэффициентами, зависящими от времени, вместе с несколькими подклассами этого класса. Описаны группоиды эквивалентности всех этих классов посредством доказательства их нормализованности и определения их групп эквивалентности. К ненормализованным классам применена техника разбиения на нормализованные подклассы.

Для класса обобщённых уравнений Бюргерса с переменным коэффициентом при второй производной выполнен расширенный групповой анализ. С использованием алгебраического метода решена задача групповой классификации для этого класса. Исчерпывающе описаны операторы редукции, лиевские и неклассические редукции, законы сохранения, потенциальные допустимые преобразования и потенциальные симметрии уравнений из этого класса. Предложен метод классификации лиевских редукций для уравнений из нормализованного класса относительно группы эквивалентности этого класса. Этот метод в сочетании с оптимизированным выбором анзацев позволил исчерпывающе описать скрытые симметрии уравнений из данного класса и найти точные решения таких уравнений. Новые решения также построены методом неклассической редукции благодаря сведению задачи к потенциальному уравнению быстрой диффузии с нелинейностью степени -1.

Задача групповой классификации решена и для класса обобщённых уравнений Бюргерса с линейным затуханием и коэффициентами, зависящими от времени. Результаты классификации использованы для построения точных решений уравнений из этого класса.

Ключевые слова: обобщённые уравнения Бюргерса, групповая классификация дифференциальных уравнений, группоид эквивалентности, группа эквивалентности, лиевская симметрия, оператор редукции, скрытая симметрия, потенциальная симметрия, точные решения.

Pocheketa O.A. Extended group analysis of generalized Burgers equations. — Manuscript.

Thesis for degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.03 — Mathematical Physics. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to symmetry analysis of several classes of generalized Burgers equations, namely, of variable-coefficient generalized Burgers equations, of linearizable generalized Burgers equations, of generalized Burgers equations in conserved form, of generalized potential Burgers equations, as well as the class of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping and some its subclasses. For each of these classes the exhaustive description of its equivalence groupoid is presented by means of determining its equivalence group and the evidence that either the class is normalized or it can be partitioned into normalized subclasses.

Extended group analysis is provided for the class of variable-coefficient generalized Burgers equations. The algebraic method is used to solve the group classification problem for this class. Reduction operators, Lie and nonclassical reductions, conservation laws, potential admissible transformations and potential symmetries of equations from this class are exhaustively described. A method of classification of Lie reductions for equations from a normalized class with respect to the equivalence group of this class is proposed. This method in combination with an optimized choice of ansatzes allows us to exhaustively describe hidden symmetries for equations from this class and to find some exact solutions of such equations. New solutions are also constructed using the nonclassical reduction method and the established relation with the potential fast diffusion equation with nonlinearity of the power -1.

The group classification problem is also solved for the class of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping. Classification results are used to construct exact solutions to some of these equations.

Key words: generalized Burgers equations, group classification of differential equations, equivalence groupoid, equivalence group, Lie symmetry, reduction operator, hidden symmetry, potential symmetry, exact solutions.

Підписано до друку 22.08.2016. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,58. Умов. друк. арк. 1,47.
Тираж 100 пр. Зам. 47. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.