

Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Почекети Олександра Анатолійовича

“Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса”,
поданої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук
за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Застосування симетрійних методів до рівнянь математичної фізики було розпочато у другій половині дев'ятнадцятого століття після встановлення Софусом Лі того факту, що більшість відомих методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь є частковими випадками загального підходу, який ґрунтуються на інваріантності диференціального рівняння відносно деякої неперервної групи симетрії. Ці групи, відомі сьогодні як групи Лі, вплинули на різні галузі математики, як теоретичної, так і прикладної, а також на фізику та інші науки, що суттєво застосовують математичні методи. Поступово склалося так, що домінуюче положення у теорії груп Лі посіло її глобальне абстрактне переформулювання, за яке виступав Е. Картан, у той час як застосування груп Лі до диференціальних рівнянь, розпочаті С.Лі та Е. Нетер, виявилися згорнутими. Це тривало, доки Г. Біркгоф не звернув увагу на невикористані можливості застосування групових методів для розв’язання диференціальних рівнянь механіки рідини. Пізніше Л.В. Овсянніков та його школа приступили до успішної реалізації систематичної програми застосування методів Лі до широкого кола фізично важливих задач. Останні десятиліття свідчать про справжній вибух дослідницької активності в цій області — як у застосуваннях до конкретних фізичних моделей, так і в розширенні та поглибленні самої теорії. Слід відзначити, що суттєвий внесок у розв’язання низки її важливих проблем зробила українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь, заснована В.І. Фущичем. Проте багато важливих питань теорії досі залишаються без відповіді, а повну область можливих застосувань методів груп Лі до диференціальних рівнянь ще належить окреслити.

Зокрема, у різних галузях сучасної науки широко використовують моделі на основі нелінійних рівнянь еволюційного типу, у зв’язку з чим виникла задача опису таких рівнянь, які мають найкращі (у сенсі Лі) симетрійні властивості. І хоча, після опублікування в 1959 році класичної статті Л.В. Овсяннікова, цій задачі присвячено значна кількість робіт, повного її розв’язання ще не отримано. З іншого боку, методом симетрійної редукції побудовано багатопараметричні сім’ї точних розв’язків низки важливих нелінійних рівнянь релятивістської та нерелятивістської фізики, але, водночас, систематичне проведення та узагальнення процедури симетрійної редукції для диференціальних рівнянь, що виникають як моделі у математичній фізиці, а також пов’язане з цим дослідження прихованих, умовних та потенціальних симетрій вимагають нових підходів. Отже, актуальність дисертаційної роботи Почекати О.А., як з теоретичної, так і з практичної точок зору не викликає сумніву.

Об'єктом дослідження у дисертації є різноманітні класи (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку, які можна розглядати як узагальнення класичного рівняння Бюргерса. Вивчено широке коло структур, пов'язаних з цими класами, що включає групоїди, групи та алгебри еквівалентності, точні розв'язки, закони збереження, ліївські, приховані, умовні та потенціальні симетрії, а тому відображені у назві дисертації як “розширений груповий аналіз”.

Охарактеризуємо коротко зміст дисертаційної роботи.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Згідно з вимогами ДАК МОН України, у вступі обґрунтовано актуальність тематики, розкрито наукову новизну отриманих результатів та проведено анотацію роботи. Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації. У другому розділі коротко наведено основні теоретичні відомості з групового аналізу диференціальних рівнянь, які використано у дисертації.

Оригінальні результати містять наступні три розділи.

Одна із основних задач, розв'язаних у дисертації, — це опис групоїдів еквівалентності класів узагальнених рівнянь Бюргерса. Цьому присвячено весь третій розділ, підрозділи 5.1 і 5.2, а також значна частина підрозділу 4.5. Описано групоїди еквівалентності таких класів:

- класу узагальнених рівнянь Бюргерса, лінеаризованих заміною Коула–Хопфа, та двох його підкласів з калібриваними довільними елементами;
- класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, який є довільною функцією часової та просторової змінних;
- подібного класу узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі;
- відповідних класів узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса,
- а також класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі степеневою нелінійністю у конвективному члені та лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу.

Обчислення групоїдів еквівалентності необхідно проводити в термінах скінчених перетворень, що призводить до розв'язання визначальних рівнянь, значно складніших за ті, що виникають у рамках інфінітезимального підходу Лі, наприклад, при знаходженні алгебри еквівалентності класу диференціальних рівнянь. У той же час розгляд скінчених перетворень дозволяє отримати значно більше, зокрема, як побічний результат побудувати повну групу еквівалентності класу, що включає не тільки неперевні, але й дискретні перетворення еквівалентності. Поняття групоїда еквівалентності класу диференціальних рівнянь запропоновано Р.О. Поповичем разом з технікою обчислення таких групоїдів, що ґрунтуються на понятті нормалізованого класу. Клас диференціальних рівнянь називають нормалізованим, якщо його група еквівалентності породжує його групоїд еквівалентності. Якщо клас ненормалізований, його можна розбити на максимальні нормалізовані підкласи, а також прокласифікувати максимальні умовні групи еквівалентності всього класу. Фактично, складність групоїда екві-

валентності класу можна визначити як складність множин його максимальних нормалізованих підкласів і максимальних умовних груп еквівалентності, причому ці множини частково пов'язані між собою. У залежності від типу групи еквівалентності, що породжує всі допустимі перетворення у класі, розрізняють нормалізованість у різних сенсах — звичайному, узагальненому, розширеному або розширеному узагальненому. Природно, що найбільш зручною для використання є нормалізованість у звичайному сенсі. Саме у класах диференціальних рівнянь з цією властивістю задачу групової класифікації розв'язують за допомогою алгебраїчного методу.

Дослідження повних множин скінчених допустимих перетворень дозволило дисертуantu розпочати розгляд з широкого нормалізованого надкласу, який містить усі вищезгадані класи. Це спростило обчислення, оскільки виведені обмеження на допустимі перетворення можна використати у подальшому при побудові різних об'єктів, пов'язаних з точковими перетвореннями між рівняннями з надкласу, таких як групоїди, групи і алгебри еквівалентності підкласів та групи і алгебри ліївської інваріантності рівнянь з класу.

Центральним у дисертації як за рівнем, так і за кількістю результатів є четвертий розділ, який цілком присвячено розширеному симетрійному аналізу класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, що ґрунтуються на доведеній у третьому розділі нормалізованості цього класу у звичайному сенсі і знайденій там же його групі еквівалентності. Окрім розв'язання задачі групової класифікації та проведення ліївських редукцій, що є стандартним для класичного симетрійного аналізу, знайдено закони збереження і про класифіковано приховані, умовні та потенціальні симетрії рівнянь з цього класу, а також побудовано їх неліївські точні розв'язки.

Відмітимо, на мою думку, найбільш вагомі моменти четвертого розділу. Так, алгебраїчний метод групової класифікації застосовано у елегантний спосіб, що вимагає класифікації не всіх, а лише підхожих підалгебр у проекції алгебри еквівалентності на простір змінних. Стандартну процедуру використання ліївських симетрій для редукції диференціальних рівнянь до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних реалізовано на основі оригінальної техніки класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Спеціальну увагу приділено правильному вибору анзаців при побудові редукованих рівнянь. У результаті, редуковані звичайні диференціальні рівняння мають простий вигляд двох типів у залежності від їх порядку, а тому їх можна об'єднати у класи, зручні для подальшої класифікації прихованих симетрій і побудови точних розв'язків. Це дає можливо перший приклад у літературі щодо класифікації прихованих симетрій диференціальних рівнянь з певного класу. Теорема 4.14 містить вичерпну класифікацію операторів редукції (тобто, умовних симетрій) класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній і є одним з небагатьох прикладів подібних класифікацій у літературі. Неочікуваним і ефективним для побудови точних розв'язків вище-

згаданих рівнянь виявилося зведення відшукання підмножини їх операторів редукції до розв'язання рівняння швидкої дифузії зі степенем дифузії -1 , для якого відомо багато точних розв'язків. Цікавою і плідною є також ідея, що класифікацію потенціальних симетрій доцільно розпочинати з вивчення потенціальних допустимих перетворень.

У п'ятому розділі розв'язано задачу групової класифікації для класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі степеневою нелінійністю у конвективному члені та лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу. Для цього класичний інфінітезимальний метод Лі модифіковано за допомогою відбору калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності на основі збереження чи покращення властивостей нормалізованості. Знайдені симетрії використано для побудови точних розв'язків рівнянь з класу, що розглядається.

Дисертаційну роботу оформлено згідно з вимогами ДАК МОН України. Всі результати, включені до неї, супроводжуються вичерпними та строгими доведеннями. Ці результати опубліковано в 13 роботах, з них шість — статті у фахових виданнях. Автореферат дисертації вірно і повно відображає її зміст.

Разом з цим, відмічу такі зауваження стосовно цієї роботи.

1. Позначення класів узагальнених рівнянь Бюргерса не є однотипними. А саме, відповідні множини довільних елементів вказано двома способами — або через їх позначення, або через умови, що визначають ці множини.
2. Підрозділ 3.2.3 дисертації присвячено зв'язку між групоїдами еквівалентності класу лінеаризованих узагальнених рівнянь Бюргерса та класу лінійних еволюційних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними. Крім того, у твердженні 4.13 встановлено зв'язок між лійськими розв'язками рівняння Бюргерса і лінійного рівняння тепlopровідності. З огляду на відомі результати виглядає природним поширити ці дослідження на групоїди еквівалентності підкласів, що виникають при калібруваннях довільних елементів, а також на лійські та некласичні симетрії, редукції і розв'язки усіх рівнянь з вищезгаданих класів.
3. Основну увагу у дисертації приділено класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній. Саме для цього класу отримано найцікавіші результати. Водночас, клас узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі є не менш важливим. Тому було б цікаво провести його симетрійний аналіз настільки ж повно, як і для класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній. Це тим більше доцільно, зважаючи на те, що такий аналіз фактично розпочато у дисертації. Зокрема, описано групоїд еквівалентності класу узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі та групоїд еквівалентності відповідного класу потенціальних рівнянь.

4. При дослідженні узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі необхідно буде використати зв'язок підкласу таких рівнянь, де довільний елемент квадратичний за просторовою змінною, з відповідним підкласом узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній через сім'ю точкових перетворень. У дисертації цей зв'язок використано лише на рівні потенціальних рівнянь.

Задачі, згадані у трьох останніх зауваженнях, органічно вписуються у дисертацію, і вона лише б виграла від включення розгляду цих задач до неї. Однак, з огляду на великий об'єм дисертаційної роботи вказані зауваження треба скоріше розглядати як побажання для подальших досліджень, тому вони не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Підсумовуючи сказане вище, можна констатувати, що дисертаційна робота Почекети О.А. "Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса" є завершеним науковим дослідженням, виконаним на високому математичному рівні. Отримані в ній результати суттєво збагачують теорію групового аналізу диференціальних рівнянь та практику його застосувань до фізичних моделей.

Вважаю, що дисертаційна робота «Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса» задовільняє вимогампп. 9, 11–13 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Почекета Олександр Анатолійович, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

16.09.2016

Цифра I.M.



до спеціалізації
26.06.01 16.09.2016 р.
секретар фаху фрд - 1 брошенко ж.д.