

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Почекети Олександра Анатолійовича

«Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса»,

поданої на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Певні диференціальні рівняння успішно описують досить широке коло явищ, інколи зовсім різної природи, і саме такі рівняння, як правило, є найбільш фундаментальними об'єктами математичних досліджень. Головна властивість, яка виділяє ці моделі з нескінченої множини диференціальних рівнянь, полягає у наявності у них досить широкої симетрії, тобто у їхній інваріантності відносно значного класу перетворень. Симетрії взагалі відіграють вирішальну роль у побудові та дослідження сучасних моделей математичної фізики. Більш того, вже проведено велику роботу по вивченню та узагальненню об'єктів, пов'язаних з інваріантністю диференціальних рівнянь та перетвореннями між ними, які зараз включають групи, алгебри та супералгебри Лі, симетрії Лі–Беклунда, дискретні та вищі симетрії, нескінченновимірні алгебри симетрій тощо. Такі дослідження відкривають нові шляхи аналізу й інтегрування рівнянь математичної фізики, тобто мають важливе прикладне значення. При цьому основою науки про симетрію моделей математичної фізики залишається груповий аналіз диференціальних рівнянь, який на сьогодні став невід'ємною складовою частиною загальної теорії диференціальних рівнянь. З іншого боку, сучасний груповий аналіз перетворюється на важливу і красиву самостійну гілку фундаментальної математики, яка є синтезом теорії груп і алгебр Лі та їхніх зображень, диференціальної геометрії та теорії диференціальних рівнянь.

Дослідження в області групового аналізу диференціальних рівнянь активно виконують у багатьох наукових центрах світу, до яких належить і Інститут математики Національної академії наук України. Важливість цих досліджень обумовлена потребою у побудові нових ефективних методів інтегрування рівнянь математичної фізики, а також тим, що багато фундаментальних і актуальних прикладних проблем групового аналізу досі залишаються нерозв'язаними.

Основним об'єктом дослідження у дисертаційній роботі О.А. Почекети є досить прості класи узагальнених рівнянь Бюргерса, які інтенсивно вивчалися з симетрійної точки зору протягом останніх десятиліть. Але,

незважаючи на свою простоту, рівняння Бюргерса та різноманітні його узагальнення мають важливі та широкі застосування. Крім того, як випливає з результатів дисертації, попередні дослідження симетрійних властивостей розглядуваних класів далекі від повноти. На мою думку, дисертація є не тільки гарною ілюстрацією можливостей і переваг нових алгебраїчних підходів, які розроблено українською школою групового аналізу диференціальних рівнянь, але й містить різноманітні конкретні приклади нетривіальних обчислень, пов'язаних із симетріями диференціальних рівнянь, що, безумовно, може слугувати основою для подальшого розвитку досліджень із групового аналізу.

Дисертація складається зі вступу, 5 розділів та висновків, список використаних у ній джерел містить 137 найменувань. Обсяг дисертації становить 159 сторінок, у тому числі 142 сторінки основного тексту.

Перші два розділи присвячено огляду літератури та опису основних означень й понять, що використовуються в дисертації, а саме: класу диференціальних рівнянь, точкових перетворень між рівняннями, групової еквівалентності, групи еквівалентності та алгебри еквівалентності класу, нормалізованого класу диференціальних рівнянь, задачі групової класифікації, оператора редукції, закону збереження та інших понять групового аналізу диференціальних рівнянь.

У третьому розділі описано групової еквівалентності основних класів узагальнених рівнянь Бюргерса, які розглянуту у дисертаційній роботі. Групової еквівалентності деякого класу складається з усіх допустимих перетворень між рівняннями цього класу, а отже є підґрунтям для його подальшого розширеного групового аналізу, у тому числі розв'язання задачі групової класифікації.

Такий аналіз для класу $\mathcal{L}|_S$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній проведено у повному обсязі у розділі 4. Описано алгебру еквівалентності цього класу та вивчено її проекцію \mathfrak{g} на простір змінних (t, x, u) . Детальний виклад розв'язання задачі групової класифікації для класу $\mathcal{L}|_S$ може слугувати навчальним прикладом вивчення нормалізованого класу диференціальних рівнянь, група еквівалентності якого скінченновидимірна. Застосовано алгебраїчний метод групової класифікації, завдяки чому класифікацію ліївських симетрій рівнянь з класу $\mathcal{L}|_S$ зведено до класифікації підалгебр алгебри \mathfrak{g} , кожна з яких є максимальною алгеброю ліївської інваріантності хоча б для одного рівняння з цього класу. Такі підалгебри у роботі названо *придатними*. Їхній перелік наведено у таблиці 4.1, де для кожної придатної підалгебри також вказано значення довільного елементу класу, при яких

відповідні рівняння допускають цю підалгебру як свою максимальну алгебру ліївської інваріантності.

Окремі підрозділи розділу 4 присвячені побудові інваріантних розв'язків рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, класифікації прихованих і некласичних симетрій рівнянь з цього класу, проведенню ліївських та некласичних редукцій, а також дослідженню законів збереження, потенціальних допустимих перетворень, потенціальних перетворень еквівалентності і потенціальних симетрій рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Варто відзначити, що приховані симетрії та оператори редукції про класифіковано вичерпно, що справді рідко зустрічається в літературі, а розв'язки, побудовані за допомогою операторів редукції, дійсно нетривіальні.

У розділі 5 дисертації для групової класифікації класу $\mathcal{D}|_{\{ng \neq 0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, разом з розбиттям на нормалізовані підкласи застосовано іншу техніку сучасного групового аналізу — калібрування довільного елементу класу — з метою спрощення вигляду диференціальних рівнянь з класу, а отже і зменшення обсягу обчислювальних процедур, необхідних для отримання групової класифікації класу $\mathcal{D}|_{\{ng \neq 0\}}$ з точністю до загальної точкової еквівалентності. У цьому ж розділі наведено повний перелік розширень ліївських симетрій для класу $\mathcal{D}|_{\{ng \neq 0\}}$, для чого проведено процедуру, в деякому сенсі обернену до калібрування довільного елементу класу, а саме — розмноження результату класифікації перетвореннями з груп еквівалентності нормалізованих підкласів. Систематично розглянуто ліївські редукції рівнянь з класу за одновимірними та двовимірними підалгебрами, завдяки чому вдалося знайти у явному вигляді розв'язки диференціальних рівнянь, що належать до трьох достатньо широких підкласів класу $\mathcal{D}|_{\{ng \neq 0\}}$.

Результати, викладені у розділах 3–5, є оригінальним внеском у сучасний груповий аналіз диференціальних рівнянь математичної фізики. Характерною рисою дисертаційної роботи О.А. Почекети є використання низки оптимізацій обчислень, які вказують на великий потенціал розвитку навіть класичних галузей групового аналізу і водночас підкреслюють його ефективність. До оптимізацій відносяться вже згадане калібрування довільного елементу класу диференціальних рівнянь, власне перевірка нормалізованості кожного класу, що полегшує розв'язання всіх класифікаційних задач для цього класу, техніка розбиття ненормалізованого класу на декілька нормалізованих підкласів, застосована у дисертаційній роботі декілька разів, а також класифікація виключно придатних підалгебр проекції алгебри еквівалентності при груповій класифікації алгебра-

їчним методом. При проведенні ліївських редукцій застосовано дві оптимізаційних техніки: відома техніка оптимального вибору анзаців у такий спосіб, щоб всі редуковані рівняння мали найпростіший та одноманітний вигляд, та повністю оригінальна техніка класифікації ліївських редукцій диференціальних рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності всього класу, а не відносно груп ліївських симетрій кожного окремого рівняння, як при стандартному підході.

Ще однією перевагою дисертаційної роботи є те, що більшість тверджень про відображення між рівняннями сформульовано і доведено в термінах скінчених перетворень. Це, з одного боку, значно ускладнює всі обчислення і їх перевірку на комп’ютері порівняно з інфінітезимальним підходом, а з іншого — дозволяє отримати більш повні результати, оскільки, наприклад, дискретні перетворення еквівалентності неможливо вивчити в рамках інфінітезимального підходу.

Слід також відмітити рівень публікацій і журналів, де результати дисертації опубліковані, що разом з трьома десятками цитувань цих результатів у міжнародних журналах є беззаперечним свідченням добротності представленої дисертації.

Загальне враження про дисертаційну роботу дуже позитивне — однозначно, і дисертант, і його науковий керівник добре попрацювали. Хоча є у роботі і незначні недоліки, і друкарські помилки.

- Зокрема, на с. 12 (можливо, внаслідок автоматичного перекладу) надруковано «Dynamical System Modeling та Stability Investigation».
- Згадки іноземних вчених українською й англійською мовами у роботі наведено неоднотипно — з ініціалами і без них. Наприклад, Forsyth на с. 7 та Huxley на с. 8 — без ініціалів.
- Було б зручніше, якби позначення подібних класів рівнянь на потенціалах у підрозділі 3.4 і в підрозділі 4.7 були більш однотипними. Зокрема, класи \mathcal{P}^3 та $\hat{\mathcal{P}}^1$ відрізняються лише калібруванням потенціалу масштабними перетвореннями, причому це відмічено в дисертації, але не відображенено у позначенні.
- Позначення можна було б упорядкувати таким чином, щоб схожі параметр-функції різних класів позначали однакові літери. Так, клас (5.11) є підкласом класу $\mathcal{L}|_S$, і було б зручно, якби позначення довільного елемента $g = g(t)$ у цьому підкласі співпадало з позначенням довільного елемента $f = f(t, x)$ у всьому класі. Більш того, у наслідку 5.9 описано групу еквівалентності класу рівнянь (5.11), яка співпадає з групою еквівалентності класу $\mathcal{L}|_S$, наведеною в теоремі 3.1. Але вигляд перетворень групи в цих твердженнях різний,

оскільки використано відповідно звичайну та однорідну параметризації. У зауваженні 5.11 було б доречно вставити посилання на теорему 3.1 щодо цієї групи еквівалентності.

- У таблицях 5.2 і 5.3 не продубльовано знак + при переносі формул на інший рядок.
- У розділі 5 при розгляді класу $\mathcal{D}|_{\{ng \neq 0\}}$ було б доречно використати ту ж саму спеціальну техніку ліївської редукції, яку використано у розділі 4 для класу $\mathcal{L}|_S$. А саме, замість того, щоб окремо класифікувати підалгебри для кожного випадку розширення ядра ліївських симетрій відносно еквівалентності, породженої групою ліївських симетрій відповідних рівнянь (тобто відносно внутрішніх автоморфізмів розширення), можна було б прокласифікувати підалгебри алгебр еквівалентності двох нормалізованих підкласів у каліброваному класі відносно груп еквівалентності цих підкласів.

Але всі зазначені друкарські помилки та інші недоліки ніяк не впливають на високий загальний рівень дисертаційної роботи.

Дисертація має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані для подальшого розвитку методів групового аналізу диференціальних рівнянь, а знайдені точні розв'язки низки узагальнених рівнянь Бюргерса можуть бути цікавими для теоретичної фізики, математичної біології, хімії та інших прикладних досліджень.

На основі наведеного вище вважаю, що дисертаційна робота «Розширеній груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса» задовольняє вимогам пп. 9, 11–13 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Олександр Анатолійович Почекета, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент
кандидат фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики
Національного університету
харчових технологій

І.І. Юрик



спеціалізованої
вченого ради № 49, д. 106.01 19.09.2016р.
Артеменко Н.В.
Кандидат технічних наук

