НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Трофименко Ольга Дмитрівна

УДК 517.548

ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ ПОЛІАНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНЬ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
ЗЕЛІНСЬКИЙ Юрій Борисович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу комплексного аналізу
і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного аналізу;

кандидат фізико-математичних наук
НЕСТЕРЕНКО Олексій Никифорович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться 4 жовтня 2016 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 2 вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради РОМАНЮК А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теореми про середнє значення для розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними традиційно привертають увагу дослідників. Класичними прикладами таких теорем є теорема Гауса про сферичні середні гармонічних функцій та теорема Морери–Карлемана про аналітичність неперервної функції $f(z)$ в області на комплексній площині, яка має нульові інтеграли $\int f(z)\,dz$ по колах. Ці теореми дозволили отримати в якості їх простих наслідків низку важливих властивостей аналітичних та гармонічних функцій, як, наприклад, принцип максимуму, і викликали велику кількість робіт, присвячених з одного боку — їх доповненню та узагальненню для аналітичних та гармонічних функцій, а з іншого — визначенню нових класів функцій у термінах послаблення умов тієї чи іншої теореми про середнє значення. Зокрема, таким чином було введенно поняття субгармонічної функції, яке є центральним поняттям сучасної теорії потенціалу. Починаючи з XIX століття, було встановлено велику кількість конкретних теорем про середнє значення, що характеризують гармонічні поліноми заданого степеня, поліаналітичні та полігармонічні функції, а також розв'язки деяких інших важливих однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, як, наприклад, хвильове рівняння, рівняння теплопровідності або рівняння Гельмгольца.

Розробляючи створену ним теорію періодичних в середньому функцій, Ж. Дельсарт[1] довів гармонічність дійсних неперервних функцій у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, які співпадають зі своїми усередненнями по мірі Лебега на кулях з радіусами r_1 та r_2, де r_1 та r_2 — дійсні додатні числа, відношення яких не є відношенням нулів цілої функції $d_n(z) := 2^{n/2}\Gamma(n/2+1)J_{n/2}(z)z^{-n/2} - 1$. Результати такого типу отримали назву теорем про два радіуси. З іншого боку, використовуючи поняття перетворення Фур'є–Лапласа розподілу з компактним носієм, Л. Зальцман[2] знайшов необхідні і достатні умови на комплексну борелівську міру μ на одиничній кулі простору $\mathbb{R}^n$ та на лінійний диференціальний оператор P зі сталими коефіцієнта-

---

[1] Delsarte J. Lectures on Topics in Mean Periodic Functions and the Two-Radius Theorem. – Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961. – 145 p.

[2] Zalcman L. Mean values and differential equations // Israel Math. J. – 1973. – **14**. – P. 339–352.

ми, за яких неперервні слабкі розв'язки рівняння $Pf = 0$ у довільній області $G \subset \mathbb{R}^n$ характеризуються умовою $\int f(x+rt)\,d\mu(t) = 0$ для всіх $x \in G$ та $r > 0$, таких, що замкнена куля із центром x радіуса r належить G. Цей результат є першою теоремою про середнє значення загального характеру і містить в якості наслідків теореми Гауса та Морери–Карлемана, а також низку інших раніше встановлених конкретних теорем про середнє значення.

Згадані результати Ж. Дельсарта та Л. Зальцмана виявили глибокі зв'язки між комплексним аналізом, теорією лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, гармонічним аналізом, інтегральною геометрією та теорією спеціальних функцій, і отримали розвиток у роботах багатьох авторів (К. Беренстейн, Д. Струппа, Д. Сміт, Р. Гей, А. Іжер, Л. Браун, Б. Шрейбер, Б. Тейлор, Й. Глобевник, У. Рудін та ін.), які узагальнювали та доповнювали їх у різних напрямах[3,4]. Зокрема, найбільш складні теореми про два радіуси належать В. В. Волчкову.

Теореми про середнє значення та побудовані за їх допомогою оператори усереднення мають різноманітні застосування як в теорії функцій (наближення функцій, опис функціональних просторів), так і в якісній теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (граничні властивості, усунення особливостей, диференціальні властивості розв'язків та ін.).

Представлена дисертація присвячена встановленню нових теорем про середнє значення, зокрема теорем про два радіуси, що мають некласичний вигляд і описують класи розв'язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь на комплексній площині, ліва частина яких є добутком деяких натуральних степенів формальних похідних Коші ∂ та $\overline{\partial}$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась у рамках держбюджетних тем № 09-1вв/19 "Аналіз Фур'є та наближення функцій" (№ держреєстрації 0109U001653) і № 12-1вв/19 "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій"

---

[3] Беренстейн К., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники ВИНИТИ СССР. Современные проблемы математики. – 1989. – **54**. – С. 5-111.

[4] Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.

(№ держреєстрації 0112U002701), які виконувались у відповідності з планом науково-дослідницьких робіт кафедри математичного аналізу і теорії функцій (2009-2013) та кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь (2013-2014) Донецького національного університету.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи* є дослідження властивостей гладких функцій, визначених у крузі на комплексній площині, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах, тобто є розв'язками систем однорідних рівнянь згортки спеціального вигляду, що узагальнюють класичну властивість середнього значення по кругах для гармонічних функцій.

Об'єктом дослідження є системи таких рівнянь. *Предметом дослідження* є їх розв'язки.

Для досягнення зазначеної *мети* у роботі було поставлено такі задачі:

1. Встановити теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.
2. Дослідити точність умов цієї теореми.
3. Описати клас нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.
4. Встановити відповідну теорему про два радіуси.

При розв'язанні цих задач використовувалися методи комплексного аналізу, гармонічного аналізу, теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та теорії спеціальних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

2. Побудовано приклади функцій, що показують непокращуваність умов цієї теореми.

3. У термінах спеціальних функцій дано повний опис класу нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

4. У термінах функцій Бесселя отримано відповідну теорему про

два радіуси.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані в теорії еліптичних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на комплексній площині та в теорії квазіаналітичних класів функцій.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач та загальне керівництво роботою належать науковому керівнику. Результати розділів 3, 4 та 5 опубліковано відповідно в роботах [1, 3, 5], [6] та [2, 4]. Остаточні формулювання та доведення результатів належать здобувачу.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на наступних конференціях:

1. Міжнародна конференція ”Современные проблемы математики, механики и информатики”, 2008, Тула, Росія.
2. Український математичний конгрес, 2009, Київ.
3. Міжнародна конференція з комплексного аналізу, присвячена пам’яті А. А. Гольдберга, 2010, Львів.
4. Міжнародна конференція з сучасного аналізу, 2011, Донецьк.
5. Міжнародна конференція ”Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 70-річчю О. І. Степанця, 2012, Кам’янець-Подільський.
6. Міжнародна конференція ”Комплексний аналіз, теорія потенціалу та їх застосування”, присвячена пам’яті П. М. Тамразова, 2013, Київ.
7. Міжнародна конференція ”Комплексний аналіз”, 2013, Львів.
8. Всеукраїнська конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 2015, Ворохта.
9. Всеукраїнська конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, 2015, Чернівці.
10. 7-й Европейський математичний конгрес, 2016, Берлін, Німеччина (стендова доповідь).

Результати дисертації також доповідались на семінарі ”Аналіз Фур’є” у Донецькому національному університеті (керівник — професор Р. М. Тригуб), на семінарі ”Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники — професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко) на семінарі з теорії функцій і функціонального аналізу у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича (керівник — професор

В. К. Маслюченко), на семінарі відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник — професор Ю. Б. Зелінський) та на семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — професор А. С. Романюк).

Результати дисертації були відзначені грамотою на Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт (2007), третіми преміями на конкурсах Національної академії наук вищої освіти України в номінації "Краща наукова робота молодих вчених" (2009, 2010), грамотою Президії НАН України (2012) та стипендією Кабінету Міністрів України для молодих учених на 2014-2016 роки.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у статтях [1-6] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, з яких [4] внесено до міжнародних наукометричних баз, та відображено у збірниках тез конференцій [7-15].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація викладена на 107 сторінках і складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку літератури з 65 найменувань та переліку умовних позначень.

Подяки. Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору Ю. Б. Зелінському, а також професору В. В. Волчкову та д.ф.-м.н. А. В. Покровському за увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

Перший та **другий розділи** присвячено відповідно історичному огляду робіт за темою дисертації та опису методів дослідження, які в ній використовуються.

У **третьому розділі** розглядаються гладкі функції $f(z)$, визначені в крузі $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(R > 0)$, які для заданих чисел $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ та $s \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s < m$, задовольняють співвідношення вигляду

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!p!} \partial^{p-s} \bar{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\xi d\eta, \quad (1)$$

де $r \in (0,\ R)$, $z \in B_{R-r}$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ $(x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}$, i — уявна одиниця),

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Основними результатами третього розділу дисертації є наступні три теореми.

Теорема 3.4.1. *Нехай* $0 < r < R$, $f \in C^{\infty}(B_R)$, *і нехай при кожному* $z \in B_{R-r}$ *виконується рівність* (1), *а* $f(z) = 0$ *для всіх* $z \in B_r$. *Тоді* $f \equiv 0$ *в* B_R.

Теорема 3.4.2. *Нехай* $r > 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0, r)$ *існує функція* $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ *із наступними властивостями:*
1) для кожного $z \in \mathbb{C}$ *виконується* (1);
2) $f(z) = 0$ *для всіх* $z \in B_{r-\varepsilon}$;
3) $f \not\equiv 0$.

Якщо $m = 1$ і $s = 0$, то рівність (1) приймає вигляд

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} f(\zeta)\, d\xi d\eta,$$

і тоді твердження теорем 3.4.1 та 3.4.2 є частинними випадками відповідно тверджень (2) та (4) теореми 2.1 на с. 176 монографії В. В. Волчкова[4], які узагальнюють на випадок розв'язків однорідних рівнянь згортки з радіальним розподілом із компактним носієм класичні результати Ф. Йона[5] (розділ 6) про сферичні середні.

Для формулювання наступних результатів ми будемо використовувати такі позначення: $f_k(\rho) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it}) e^{-itk} dt$ $(0 < \rho < R$, $k \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$ — коефіцієнти Фур'є функції $f \in C(B_R)$,

$$J_{s+1}(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^{s+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(s+p+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \quad (z \in \mathbb{C})$$

---

[5] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 160 с.

— функція Бесселя (Γ — гамма-функція). Для $r > 0$ позначимо через $Z(g_r)$ множину всіх нулів цілої функції

$$g_r(z) := \frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}} - \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-s+1}}.$$

Нехай $\lambda \in Z_r := Z(g_r) \setminus \{0\}$, n_λ — кратність нуля λ функції $g_r(z)$, $\rho > 0$, та нехай $\Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho) = \left(\frac{d}{dz}\right)^\eta (J_k(z\rho))\,|_{z=\lambda}$, $\eta = 0, ..., n_\lambda - 1$.

Теорема 3.5.1. *Нехай $R > 0$, $r \in (0,\ R)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$. Тоді функція $f \in C^\infty(B_R)$ задовольняє умову* (1) *при всіх $z \in B_{R-r}$ тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти Фур'є $g_k(\rho)$ функції $g(z) := \partial^{m-s}\bar{\partial}^m f(z)$ мають вигляд*

$$g_k(\rho) = \sum_{\lambda \in Z_r} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,\eta,k} \Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho),$$

де для будь-якого $\alpha > 0$ виконується умова

$$\max_{\eta=0,\dots,n_\lambda-1} |c_{\lambda,\eta,k}| = O(|\lambda|^{-\alpha}) \tag{2}$$

при $\lambda \to \infty$ ($0 \le \rho < R$, $k \in \mathbb{Z}$).

З теореми 3.5.1 випливає, що розв'язки рівняння

$$\partial^{m-s}\bar{\partial}^m f = 0 \tag{3}$$

задовольняють умову (1) при всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$. Зауважемо, що з приналежності функції f до класу $C^\infty(B_R)$ випливає приналежність до цього класу і функції g. Тому всі доданки $g_k(\rho)e^{ik\varphi}$ ряду Фур'є функції g є нескінченно диференційовними функціями відносно змінних x та y ($z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$), а сам цей ряд збігається до функції g в топології простору $\mathcal{E}(B_R)$. З іншого боку, в дисертації встановлено (лема 3.5.2), що всі достатньо великі за модулем нулі функції $g_r(z)$ є простими. Тому з (2) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ всі доданки ряду $\sum_{\lambda \in Z_r} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda-1} c_{\lambda,\eta,k}\Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho)e^{ik\varphi}$ є нескінченно диференційовними функціями відносно x та y, а сам цей ряд збігається до k-го доданку ряду Фур'є функції g в топології простору $\mathcal{E}(B_R)$.

Четвертий розділ присвячено теоремам про два радіуси. Його основним результатом є наступна теорема.

Теорема 4.2.1. *Нехай* $r_1, r_2 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$. *Тоді:*
1) якщо $R > r_1 + r_2$, $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} = \varnothing$, $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$ *та при всіх* $r \in \{r_1, r_2\}$ *та* $z \in B_{R-r}$ *виконується рівність* (1), *то функція* f *належить до класу* $C^\infty(B_R)$ *та задовольняє в* B_R *рівняння* (3);
2) якщо $\max\{r_1, r_2\} < R < r_1 + r_2$ *або* $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} \neq \varnothing$, *то існує функція* $f \in C^\infty(B_R)$, *що задовольняє умову* (1) *при всіх* $r \in \{r_1, r_2\}$ *та* $z \in B_{R-r}$ *і не є розв'язком рівняння* (2) *в* B_R.

У випадку $m = 1$, $s = 0$ маємо $g_{s,m,r}(z) \equiv 2^{-1}d_2(zr)$, де функція $d_n(z)$ визначена на с. 1. Тому умова $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} = \varnothing$ еквівалентна тому, що r_1/r_2 не є відношенням нулів функції $d_2(z)$, і твердження 1) та 2) теореми 4.2.1 відновлюють відповідно твердження (1) та (4) теореми 5.4 на с. 399 монографії В. В. Волчкова[4] при $n = \dim \mathbb{R}^n = 2$, де представлена локальна версія згаданого раніше класичного результату Ж. Дельсарта[1]. У цій теоремі також досліджено випадок $R = r_1 + r_2$ і показано, що якщо r_1/r_2 не є відношенням нулів функції $d_n(z)$, то кожна функція $f \in C^\infty(B_R)$, яка співпадає зі своїми усередненнями (по мірі Лебега) по кулях радіусів r_1 та r_2 відповідно в B_{R-r_1} та B_{R-r_2}, є гармонічною в B_R, і для довільних $k \in \mathbb{N}$, $r_1 > 0$ та $r_2 > 0$, $r_1 + r_2 = R$, існує негармонічна функція $f \in C^k(B_R)$ з такою властивістю ($n \geq 2$). У теоремі 4.2.1 випадок $r_1 + r_2 = R$ залишається відкритим.

У заключному **п'ятому розділі** дисертації розглядаються теореми про середнє по вершинах правильного багатокутника. Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 3$, $s < m < n+1$, і нехай $d_n := 2(5 + 4\cos\frac{\pi}{n})^{-1/2}$ при непарному n, $d_n := 2(4 + 5\cos^2\frac{\pi}{n})^{-1/2}$ при парному n. Нехай також $R > 0$, $r \in (0,\ d_nR)$. У цьому розділі описано клас функцій $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$, які задовольняють умову

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{nr^{2p}}{(p-s)!p!}\partial^{p-s}\bar{\partial}^p f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(re^{i\alpha+i\frac{2\pi\nu}{n}})^s f(z + re^{i\alpha+i\frac{2\pi\nu}{n}})$$

при всіх $z \in B_R$ і $\alpha \in [0,\ 2\pi)$, таких, що $\{z + re^{i\alpha+i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \subset B_R$.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена встановленню нових теорем про середнє значення для розв'язків однорідних еліптичних рівнянь на комплексній площині, ліва частина яких є добутком деяких натуральних степенів формальних похідних Коші. Її основні результати такі:

1. Встановлено теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

2. Побудовано приклади функцій, що показують непокращуваність умов цієї теореми.

3. У термінах спеціальних функцій дано повний опис класу нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

4. У термінах функцій Бесселя отримано відповідну теорему про два радіуси.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані в теорії еліптичних диференціальних рівнянь на комплексній площині та в теорії квазіаналітичних класів функцій.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Трофименко О. Д. Теорема о среднем для полианалитических функций / О. Д. Трофименко // Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – **17**. – С. 194-196.

2. Трофименко О. Д. Деякі інтегральні рівності для певних класів поліномів / О. Д. Трофименко // Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – **18**. – С. 184-188.

3. Трофименко О. Д. Узагальнення теореми про середнє для поліаналітичних функцій у випадках кола та круга / О. Д. Трофименко // Вісник ДонНУ, Сер. А: Природничі науки. – 2009. – **1**. – С. 28-31.

4. Трофименко О. Д. Аналог теореми про середнє для поліномів спеціального виду / О. Д. Трофименко // Український математичний журнал. – 2011. – **63**. – С. 699-707.

5. Трофименко О. Д. Теорема єдиності для розв'язків деяких рівнянь середніх значень / О. Д. Трофименко // Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 234-242.

6. Trofymenko O. D. Two-radii theorem for solutions of some mean value equations / O. D. Trofymenko // Lviv: Matematychni Studii. – 2013. – **40**. – P. 137-143.

7. Трофименко О. Д. Новая теорема о среднем для полианалитических функций / О. Д. Трофименко // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию профессора Л. А. Толоконникова. – Тула, 2008. – С. 98-100.

8. Трофименко О. Д. Теореми про середнє для поліаналітичних поліномів [електронний ресурс] / О. Д. Трофименко // Укр. мат. конгрес до 100-річчя М. М. Боголюбова. – Київ, 2009. – Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Trofimenko.pdf.

9. Трофименко О. Д. Рівності із функціями спеціальних видів на багатокутних та кругових областях / О. Д. Трофименко // Міжнародна конференція з комплексного аналізу, присвячена пам'яті А. А. Гольдберга: тези доповідей. – Львів, 2010. – С. 133-135.

10. Трофименко О. Д. Формулы среднего значения для функций специального вида / О. Д. Трофименко // Сб. тез. международной конференции по современному анализу. – Донецк, 2011. – С. 110.

11. Трофименко О. Д. Опис деяких класів функцій в термінах формули середніх значень / О. Д. Трофименко // Теорія наближення функцій та її застосування: тези доповідей міжнародної конференції, присвяченої 70-річчю члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця. – Київ, 2012. – С. 107-108.

12. Trofymenko O. D. Two-radii theorems that characterize some special functions / O. D. Trofymenko // Complex analysis and related topics: abstracts of international conference. – Lviv, 2013. – P. 84-85.

13. Trofymenko O. D. A description of solutions for the integral equation of special type / O. D. Trofymenko // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези всеукраїнської наукової конференції. – Івано-Франківськ, 2015. – С. 81.

14. Трофименко О. Д. Опис деяких класів поліаналітичних функцій / О. Д. Трофименко // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге: тези доповідей. – Чернівці, 2015. – С. 113-114.

15. Trofymenko O. D. A mean value theorem for polynomials of special form [електронний ресурс] / O. D. Trofymenko // 7th European Congress of Mathematics. – Berlin, 2016. – Режим доступу: https://cats.host/7ecm/cats2/cats21/src/login/index.php?object0 =DownloadHandler&action0=downloadAttachment:fileId =10b0d21863c21c6e6eed5b739d8ec1e8

АНОТАЦІЇ

Трофименко О. Д. Теореми про середнє для полianалітичних функцій та їх узагальнень. — Рукопис. — Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена теоремам про середнє значення для розв'язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на комплексній площині, ліва частина яких представлена у вигляді добутку деяких невід'ємних цілих степенів формальних похідних Коші. Розглянуто системи однорідних рівнянь згортки спеціального вигляду, визначених на гладких функціях у крузі, які узагальнюють класичну властивість середнього значення по кругах для гармонічних функцій. Встановлено точну теорему єдиності для функцій, що задовольняють таку систему у випадку одного рівняння. Також досліджено випадок двох рівнянь і встановлено теорему, що містить в якості частинного випадку класичну теорему Дельсарта про два радіуси для розмірності два.

Ключові слова: теорема про середнє, поліаналітична функція, теорема єдиності, правильний багатокутник, теорема про два радіуси, функція Бесселя.

Трофименко О. Д. Теоремы о среднем для полианалитических функций и их обобщений. — Рукопись. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертации рассматриваются гладкие функции $f(z)$, определенные в круге $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(R > 0)$, которые для заданных $m \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$, удовлетворяют соотношениям вида

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!p!} \partial^{p-s}\bar{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\xi d\eta \qquad (1)$$

где $r \in (0,\ R)$, $z \in B_{R-r}$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Для $r > 0$ обозначим через Z_r множество нулей целой функции

$$g_{s,m,r}(z) := \frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}} - \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-s+1}}.$$

Одним из основных результатов диссертации является следующая теорема, в которой содержится при $m = 1$ и $s = 0$ классическая теорема Ж. Дельсарта[1] о двух радиусах для размерности $n = 2$.

Теорема 4.2.1. *Пусть* $r_1, r_2 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$. *Тогда:* *1) если* $R > r_1 + r_2$, $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} = \varnothing$, $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$, *и при всех* $r \in \{r_1, r_2\}$ *и* $z \in B_{R-r}$ *выполняется равенство* (1), *то функция* f *принадлежит к классу* $C^\infty(B_R)$ *и удовлетворяет в* B_R *уравнению*

$$\partial^{m-s}\bar{\partial}^m f = 0;$$

2) если $\max\{r_1, r_2\} < R < r_1 + r_2$ *или* $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} \neq \varnothing$, *то существует функция* $f \in C^\infty(B_R)$, *которая удовлетворяет условию* (1) *при всех* $r \in \{r_1, r_2\}$ *и* $z \in B_{R-r}$ *и не является решением уравнения* (2) *в* B_R.

Ключевые слова: теорема о среднем, полианалитическая функция, теорема единственности, правильный многоугольник, теорема о двух радиусах, функция Бесселя.

Trofymenko O. D. Mean value theorems for polyanalytic functions and their generalizations. — Manuscript. — The Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

This thesis is devoted to the mean value theorems for solutions of homogeneous linear partial differential equations with constant coefficients in the complex plane whose left hand side is represented in the form of the product of some non-negative integer powers of the formal Cauchy derivatives. We consider systems of special type homogeneous convolution equations defined on smooth functions in a disk, which generalize the classical mean value property over disks for harmonic functions. A sharp version of the uniqueness theorem for functions satisfying such a system in the case of one equation has been established. We also investigate the case of two equations and prove a theorem consisting the classical Delsarte's two-radii theorem for dimension two as a special case.

Key words: mean value theorem, polyanalytic function, uniqueness theorem, regular polygon, two-radii theorem, Bessel function.

Підписано до друку 08.08.2016. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 0,75. Ум. друк. арк. 0,7.
Тираж 100 пр. Зам. 46.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.