МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

ТРОФИМЕНКО ОЛЬГА ДМИТРІВНА

УДК 517.548

ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ ПОЛІАНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНЬ

01.01.01 – математичний аналіз

**Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук**

**Науковий керівник —
доктор фізико-математичних наук,
професор Зелінський Юрій Борисович**

Вінниця – 2016

Зміст

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbb{R}^n$	n-вимірний дійсний евклідів простір із нормою $\lvert x\rvert=\sqrt{(x,x)}$, $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$;
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел;
$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел;
$\mathbb{N}_0$	множина цілих невід'ємних чисел;
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел;
$\mathbb{S}^{n-1}$	$n-1$-вимірна сфера $\{y\in\mathbb{R}^n : \lvert y\rvert=1\}$;
L_{loc}	простір локально інтегровних функцій;
$\mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$	множина всіх радіальних розподілів в $\mathbb{R}^n$ із компактним носієм;
B	відкритий одиничний круг на комплексній площині з центром в точці нуль;
$B(z,r)$	відкритий круг на комплексній площині з центром в точці z та радіусом r;
B_r	відкритий круг на комплексній площині з центром в точці 0 та радіусом r, $r>0$;
J_n	функція Бесселя першого роду порядку n $(n\in\mathbb{N}_0)$;
$\tilde{F}$	сферичне перетворення $F\in\mathcal{E}'_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$;
$\Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho)$	функція $\left(\frac{d}{dz}\right)^{\eta}(J_k(z\rho))\mid_{z=\lambda}$, де $\lambda\in\mathbb{C}$, $\eta,k\in\mathbb{N}_0$.

ВСТУП

Актуальність теми

Теореми про середнє значення для розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними традиційно привертають увагу дослідників. Класичними прикладами таких теорем є теорема Гауса про сферичні середні гармонічних функцій та теорема Морери–Карлемана про аналітичність неперервної функції $f(z)$ в області на комплексній площині, яка має нульові інтеграли $\int f(z)\,dz$ по колах. Ці теореми дозволили отримати в якості їх простих наслідків низку важливих властивостей аналітичних та гармонічних функцій, як, наприклад, принцип максимуму, і викликали велику кількість робіт, присвячених з одного боку — їх доповненню та узагальненню для аналітичних та гармонічних функцій, а з іншого — визначенню нових класів функцій у термінах послаблення умов тієї чи іншої теореми про середнє значення. Зокрема, таким чином було введенно поняття субгармонічної функції, яке є центральним поняттям сучасної теорії потенціалу.

Починаючи з XIX століття, було встановлено велику кількість конкретних теорем про середнє значення, що характеризують гармонічні поліноми заданого степеня, поліаналітичні та полігармонічні функції, а також розв'язки деяких інших важливих однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, як, наприклад, хвильове рівняння, рівняння теплопровідності або рівняння Гельмгольца.

Розробляючи створену ним теорію періодичних в середньому функцій, Ж. Дельсарт [30] довів гармонічність дійсних неперервних функцій у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, які співпадають зі своїми усередненнями по мірі Лебега на кулях з радіусами r_1 та r_2, де r_1 та r_2 — дійсні додатні числа, відношення яких не є відношенням нулів цілої функції

$$d_n(z) := 2^{n/2}\Gamma(n/2+1)J_{n/2}(z)z^{-n/2} - 1.$$

Результати такого типу отримали назву теорем про два радіуси. З іншого боку, використовуючи поняття перетворення Фур'є–Лапласа розподілу з компактним носієм, Л. Зальцман [63] знайшов необхідні і достатні умови на комплексну борелівську міру μ на одиничній кулі простору $\mathbb{R}^n$ та на лінійний диференціальний оператор P зі сталими коефіцієнтами, за яких неперервні слабкі розв'язки рівняння $Pf = 0$ у довільній області $G \subset \mathbb{R}^n$ характеризуються умовою

$$\int f(x+rt)\,d\mu(t) = 0$$

для всіх $x \in G$ та $r > 0$, таких, що замкнена куля із центром x радіуса r належить G. Цей результат є першою теоремою про середнє значення загального характеру і містить в якості наслідків теореми Гауса та Морери–Карлемана, а також низку інших раніше встановлених конкретних теорем про середнє значення.

Згадані результати Ж. Дельсарта та Л. Зальцмана виявили глибокі зв'язки між комплексним аналізом, теорією лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, гармонічним аналізом, інтегральною геометрією та теорією спеціальних функцій, і отримали розвиток у роботах багатьох авторів (К. Беренстейн, Д. Струппа, Д. Сміт, Р. Гей, А. Іжер, Л. Браун, Б. Шрейбер, Б. Тейлор, Й. Глобевник, У. Рудін та ін.), які узагальнювали та доповнювали їх у різних напрямах (див. огляд [1] та монографію [60]). Зокрема, найбільш складні теореми про два радіуси належать В. В. Волчкову.

Теореми про середнє значення та побудовані за їх допомогою оператори усереднення мають різноманітні застосування як в теорії функцій (наближення функцій, опис функціональних просторів), так і в якісній теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (граничні властивості, усунення особливостей, диференціальні властивості розв'язків та ін.).

Представлена дисертація присвячена встановленню нових теорем про середнє значення, зокрема теорем про два радіуси, що мають некласичний вигляд і описують класи розв'язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь на комплексній площині, ліва частина яких є добутком деяких натуральних степенів формальних похідних Коші ∂ та $\overline{\partial}$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дана робота виконувалась в рамках держбюджетных тем № 09-1вв/19 "Аналіз Фур'є та наближення функцій"(№ держреєстрації 0109U001653) і № 12-1вв/19 "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій"(№ держреєстрації 0112U002701), які виконуються у відповідності з планом науково-дослідницьких робіт кафедри математичного аналізу та теорії функцій (2009–2013 роки) і кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь (2013–2014 роки) Донецького національного університету.

Мета і задачі дослідження

Метою дисертаційної роботи є дослідження властивостей гладких функцій, визначених у крузі на комплексній площині, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах, тобто є розв'язками систем однорідних рівнянь згортки спеціального вигляду, що узагальнюють класичну властивість середнього значення по кругах для гармонічних функцій.

Об'єктом дослідження є системи таких рівнянь. *Предметом дослідження* є їх розв'язки.

Для досягнення зазначеної *мети* у роботі було поставлено такі задачі:

1. Встановити теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

2. Дослідити точність умов цієї теореми.

3. Описати клас нескінченно диференційовних функцій у крузі,

які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

4. Встановити відповідну теорему про два радіуси.
5. Описати класи гладких функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по вершинах правильних багатокутників, вписаних у круги фіксованого радіуса.

Методи дослідження

При розв'язанні задач використовувалися методи комплексного аналізу, гармонічного аналізу, теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та теорії спеціальних функцій.

Наукова новизна отриманих результатів

Визначається наступними положеннями:

1. Вперше встановлено теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.
2. Вперше побудовано приклади функцій, що показують непокращуваність умов цієї теореми.
3. У термінах спеціальних функцій вперше описано клас нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють

узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса

4. У термінах функцій Бесселя вперше отримано відповідну теорему про два радіуси

5. В явному вигляді вперше описано класи гладких функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по вершинах правильних багатокутників, вписаних у круги фіксованого радіуса.

Практичне значення отриманих результатів

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер.

Вони можуть бути використані в теорії еліптичних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на комплексній площині та в теорії квазіаналітичних класів функцій.

Особистий вклад здобувача

Результати розділу 3 опубліковано в роботах [17], [19] та [21]. Результати розділу 4 опубліковано в роботі [57]. Результати розділу 5 опубліковано в роботі опубликовано в роботах [18] та [20].

В дисертації систематично використовуються методи і результати робіт В. В. Волчкова про загальний вигляд роз'язків однорідного рівняння згортки із радіальним розподілом з компактним носієм, зокрема отримані ним загальні умови на парну цілу функцію експоненціального типу, яка є сферичним перетворенням заданого радіального розподілу, за яких довільний нескінченно диференційовний розв'язок породженого ним однорідного рівняння згортки у крузі розкладається в ряди по спеціальних функціях, що визначаються лише цією цілою функцією.

Науковому керівнику належить постановка задач, а також загальне керівництво роботою. Остаточні формулювання та доведення результатів належать здобувачу.

Апробация наукових результатів

Окремі результати дісертації було докладено та обговорено на наступних конференціях:

1. Міжнародна конференція "Современные проблемы математики, механики и информатики" 17-21 листопада, м.Тула, Росія, 2008 р.
2. Український математичнй конгрес до 100 років з дня народження М. М. Боголюбова, 27-28 серпня, м. Київ, Україна, 2009 р.
3. Міжнародна конференція з комплексного аналізу, присвячена пам'яті А. А. Гольдберга, 31 травня-5 червня, м. Львів, Україна, 2010 р.
4. Міжнародна конференція з сучасного Аналізу, 20–23 червня, м. Донецьк, Україна, 2011 р.
5. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю О. І. Степанця, 28 травня – 3 червня, м. Кам'янець-Подільський, Україна, 2012 р.

6. Міжнародна конференція ”Комплексний аналіз, теорія потенціалу та їх застосування”, присвячена пам’яті П. М. Тамразова, 19-24 серпня, м. Київ, Україна, 2013 р.

7. Міжнародна конференція ”Комплексний аналіз”, 23-28 вересня, м. Львів, Україна, 2013 р.

8. Всеукраїнська конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого – 1 березня, Ворохта, Україна, 2015 р.

9. Всеукраїнська конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, 1-4 липня, м.Чернівці, Україна, 2015 р.

Результати дисертації доповідалась неодноразово на семінарі ”Аналіз Фур’є” у Донецькому національному університеті (керівник – проф. Р. М. Тригуб), а також на семінарі з теорії функцій і функціонального аналізу у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича (керівник – проф. В. К. Маслюченко) та на семінарі відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник – проф. Ю.Б. Зелінський).

Результати розділу 3 були відзначені грамотою на Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт (2007 р.) і третіми преміями на конкурсах Національної Академії Наук Вищої Освіти України (номінація «Краща наукова робота молодих вчених», 2009 та 2010 рр.).

Результати розділу 5, отримали грамоту Президії Національної Академії Наук України (2012 р.).

За результатами розділів 3 та 5 автору було призначено стипендію Кабінета Міністрів України для молодих учених на 2014-2016 роки (наказ Міністерства освіти і науки України від 17.02.14 №6/2-106-14).

Публікації

Основні результати дисертації опубликовано в 6 статтях [17]-[21], [57] в наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, одну з яких [20] надруковано у виданні, внесеному до міжнародних науковометричних баз. Результати дисертації також відображено у матеріалах 8 міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [10]-[15], [55]-[56].

Структура та об'єм роботи

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку літератури, що включає 65 найменувань, та переліку умовних позначень. Повний об'єм роботи складає 107 сторінок машинописного тексту.

Основні положення, що виносяться на захист

1. Встановлено теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

2. Побудовано приклади функцій, що показують непокращуваність умов цієї теореми.

3. У термінах спеціальних функцій описано клас нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса

4. У термінах функцій Бесселя отримано відповідну теорему про два радіуси

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору Ю. Б. Зелінському, а також професору В. В. Волчкову та д.ф.-м.н. А. В. Покровському за увагу до роботи.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

У цьому розділі дано огляд результатів, присвячених теоремам про середнє значення для гармонічних та полігармонічних функцій, аналітичних та поліаналітичних функцій та розв'язків загальних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнами .

1.1 Теореми про середнє для гармонічних та полігармонічних функцій

Історично першою теоремою про середне значення була класична теорема Гауса про те, що для довільної області $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, довільної гармонічної функції f в цій області, та для довільних $x \in G$ і $r > 0$, для яких $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x) \leq r\} \subset G$, середне значення функції f по сфері радіуса із центром x співпадає з $f(x)$. Пізніше Кобе довів справедливість оберненої теореми. Ці результати виклакили велику кількість робіт, присвячених їх узагалененням та доповненням як для гармонічних функцій, так і для розв'язків більш загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад огляди [46], [63] і монографії [60], [58] з великою бібліографією).

У цьому підрозділі наведено декілька результатів, присвячених теоремам про середне значення для гармонічних та полігармонічних функцій, пов'язаних з результатами нашої дисертаційної роботи.

Як вже згадувалось у вступі, Ж. Дельсарт [30] довів гармонічність дійсних неперервних функцій у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, які співпадають зі своїми усередненнями по мірі Лебега на кулях з радіусами r_1 та r_2, де r_1 та r_2 — дійсні додатні числа, відношення яких не є відношенням нулів цілої функції $d_n(z) := 2^{n/2}\Gamma(n/2+1)J_{n/2}(z)z^{-n/2} - 1$, а також аналогічний результат для сферічних середніх в термінах іншої спеціальної функції (див. наступну теорему). Результати такого типу отримали назву теорем про два радіуси і отримали розвиток у роботах багатьох авторів (детальніше див. підрозділ 4.1). Набагато складнішим виявилось довести локальні теореми про два радіуси, тобто теореми, в яких розглядаються функції визначені не в усьому просторі $\mathbb{R}^n$, а лише в крузі $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ с $R < \infty$. Перші такі теореми були встановлені в роботі К. Беренстейна та Р. Гея [27] у 1986 році — через 25 років після згаданої піонерської роботи Ж. Дельсарата. Сформулюємо один з результатів роботи [27]. Для цього визначимо функцію

$$\sigma(t) = 2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)J_{(n-2)/2}(t)/t^{(n-2)/2}$$

множину

$$H_n = \{\xi/\eta : \xi, \eta \in (0, +\infty), \sigma(\xi) = \sigma(\eta) = 1\}$$

та позначимо через S^{n-1} одиничну сферу в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.1.1. *Якщо* $R > r_1 + r_2$, $r_1/r_2 \notin H_n$ *та* f *— неперевна функція в* B_R, *що задовольняє умов (для нормованої міри Лебега* $d\sigma$ *на* S^{n-1}*)*

$$f(x) = \int\limits_{S^{n-1}} f(x + r_1 y) d\sigma(y),$$

для кожного $x \in B_{R-r_1}$ *та*

$$f(x) = \int\limits_{S^{n-1}} f(x + r_2 y) d\sigma(y),$$

для кожного $x \in B_{R-r_2}$, *то функція* f *є гармонічною в* B_R.

Наступний тип умов, що характеризують гармонічність, був запропонований Й. Глобевніком та У. Рудіним у 1989 р. (див. [1]).

Теорема 1.1.2. *Розглянемо функцію* f, *неперервну в крузі* B_R. *Тоді* f *є гармонічною в* B_R *тоді і тільки тоді, коли для будь-якої опуклої множини* $U \subset B_R$, $O \in U$, *виконується умова*

$$\int\limits_{\partial U} f d\omega_U = f(0),$$

де $d\omega_U$ *— гармонічна міра межі* ∂U *відносно початку координат* O.

У зв'язку з формулюванням цієї теореми, нагадаємо, що гармонічна міра множини ∂U відносно точки O визначається як ймовірносна борелівська міра μ на ∂U, така, що для кожної функції $f \in C(\partial U)$ інтеграл $\int_{\partial U} f(x)\, d\mu$ дорівнює значенню в точці O неперервного (на $\overline{U}$) гармонічного продовження функції f з ∂U всередину області U (існування такої міри випливає із принципу максімуму для гармонічних функцій та теореми Ф. Ріса про загальний вигляд неперервного лінійного функціонала у просторах неперервних функцій).

Зупинемось на теоремах про середне значення для гармонічних поліномів. Перша така теорема була встановлена незалежно в роботах Ш. Какутані і М. Нагумо [43], Дж. Л. Уолша [61] та І. І. Прівалова [9] (розділ 3, §11): функція $f \in C(\mathbb{C})$ є гармонічним поліномом степеня не вище $m-1$ тоді і тількі тоді, коли її середнє значення по вершинах будь-якого правильного m-кутника дорівнює значенню цієї функції в його центрі ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$). Цей результат отримав подальший розвиток у роботах цього у роботах Е. Бекенбаха і М. Ріда [23], [24], Л. Флатто [37], А. Фрідмана [40] та Т. Ремзі і І. Вейта [49]. Сформулюємо результат з останньої роботи.

Теорема 1.1.3. *Нехай $R > 0$, μ – скінчена борелівська міра на одиничному колі в $\mathbb{C}$, $\int\limits_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1$, і нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Тоді*

1) якщо μ не є нормованою мірою Лебега, то кожна функція $f \in C(\mathbb{C})$, що задовольняє рівності

$$\int\limits_0^{2\pi} f(z+\xi e^{i\theta})\, d\mu(\theta) = f(z) \tag{1.1}$$

при всіх $z \in \mathbb{C}$ та $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = R$, є гармонічною (в $\mathbb{C}$). Якщо при цьому $\hat{\mu}(1) \neq 0$, то f є аналітичною. До того ж існує гармонічна функція, яка не задовольняє (1.1).

2) Якщо $\hat{\mu}(k) = 0$, $k = -1, -2, \ldots, -m$, $\hat{\mu}(-m-1) \neq 0$ та

$\hat{\mu}(1) \neq 0$ ($\hat{\mu}(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\hat{\mu}(m+1) \neq 0$ та $\hat{\mu}(1) \neq 0$), то $f \in C(\mathbb{C})$ задовольняє (1.1) тоді і тільки тоді, коли f — поліном від z ($\bar{z}$) порядку не вище m. Отже, якщо $\hat{\mu}(k) = 0$, $k = \pm 1, \pm 2, ..., \pm m$, $\hat{\mu}(\pm(-m-1)) \neq 0$, то рівняння (1.1) характеризує всі гармонічні поліноми степеня не вище m.

В цій теоремі $\mu(k) = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\mu(\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є міри μ.

В. В. Волчков розглянув локальну версію наслідка цієї теореми Ремзі–Вейта для гармонічних поліномів. Нехай $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, і нехай HP_{m-1} позначає клас всіх гармонічних поліномів в $\mathbb{R}^n$. Нехай також A — опуклий багатогранник в $\mathbb{R}^n$, всі вершини якого $v_1, \ldots, v_m$ лежать на одиничній сфері S^{n-1}. Позначимо $V = \{0, v_1, ..., v_m\}$,

$$r_A = \inf\{\mathrm{r} > 0 : \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathrm{Mot(A,B_r)}} \lambda \mathrm{V}} = \overline{\mathrm{B_r}}\},$$

де $\mathrm{Mot}(A, B_r)$ — множина всіх евклідових рухів λ таких, що $\lambda A \subset B_r$.

Нехай також $FE_A(B_R)$ – множина всіх локально інтегровних функцій у крузі B_R, таких, що $f \in FE_A(B_R)$ тоді і тільки тоді, коли рівняння

$$f(\lambda 0) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(\lambda v_j) \tag{1.2}$$

виконується для майже всіх $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, B_r)$.

Теорема 1.1.4. *Нехай $R > r_A$. Тоді виконуються наступні твердження:*

1) якщо $n = 2$ *та* A *— правильний* m*-кутник, то* $FE_A(B_R) = HP_{m-1}$*;*
2) якщо A *— правильний тетраедр у* $\mathbb{R}^n$*, то* $FE_A(B_R) = HP_2$*;*
3) якщо A *— куб або правильний октаедр у* $\mathbb{R}^n$*, то* $FE_A(B_R) = HP_2(B_R)$*.*

Ця теорема встановлена в [60] (с. 405-407). Функції, які задовольняють умову середнього значення по поверхневій мірі на багатогранниках в $\mathbb{R}^n$ вивчались у роботах К. Івасакі [32] та [33].

Розглянемо тепер деякі теореми про середнє значення для полігармонічних функцій.

Означення 1.1.5. *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*,* G *— область в* $\mathbb{R}^n$*. Функція* f *називається полігармонічною порядку* m *(або* m*-гармонічною) в області* G*, якщо вона належить класу* $C^{2m}(G)$ *і задовольняє в* G *рівнянню*

$$\Delta^m f = 0,$$

де Δ *— оператор Лапласа*

Теореми про середнє значення для полігармонічних функцій вивчалися у роботах П. Пізетті [48]. Ф. Сбрана [52]), М. Ніколеско [47], Д. Брембла і Л. Пейна [28]. Сформулюємо два результата з останньої роботи. Для цього позначимо через $B(x, r)$ відкриту евклідову кулю із центром x та радіусом r.

Нехай f — m-гармонічна функція в G, $x \in G$, $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}$, $0 < \rho_1 < ... < \rho_m$, $B(x, r_m) \Subset G$, і нехай σ — поверхнева міра на сфері S^{n-1}, нормована умовою $\sigma(S^{n-1}) = 1$. Тоді з результатів Пізетті [48] випливають наступні формули:

$$f(x) = \frac{\begin{vmatrix} \int\limits_{S^{n-1}} f(x+\rho_1 y)\, d\sigma(y) & \ldots & \int\limits_{S^{n-1}} f(x+\rho_m y)\, d\sigma(y) \\ \rho_1^2 & \ldots & \rho_m^2 \\ \rho_1^4 & \ldots & \rho_m^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_1^{2(m-1)} & \ldots & \rho_m^{2(m-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \ldots & \rho_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_1^{2(m-1)} & \rho_2^{2(m-1)} & \ldots & \rho_m^{2(m-1)} \end{vmatrix}}, \qquad (1.3)$$

$$\frac{\omega_n f(x)}{n} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho_1^n} \int\limits_{|y-x|\le\rho_1} f(y)\, dy & \ldots & \frac{1}{\rho_m^n} \int\limits_{|y-x|\le\rho_m} f(y)\, dy & \\ \rho_1^2 & \ldots & \rho_m^2 & \\ \rho_1^4 & \ldots & \rho_m^4 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_1^{2(m-1)} & \ldots & \rho_m^{2(m-1)} & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \ldots & \rho_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_1^{2(m-1)} & \rho_2^{2(m-1)} & \ldots & \rho_m^{2(m-1)} \end{vmatrix}}, \qquad (1.4)$$

де $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$. У третьому розділі дисертації встановлються аналоги цих співвідношень для поліаналітичних функцій. Наступні дві теореми належать Д. Бремблу та Л. Пейну [28]

Теорема 1.1.6. *Нехай f – функція, що є інтегровною на кожній сфері з G та задовольняє рівності (1.3) для майже всіх $x \in G$ та всіх $0 < \rho_1 < ... < \rho_m$ з умовою $B(x, \rho_m) \Subset G$. Тоді f дорівнює майже скрізь m-гармонічній функції $\bar{f}$ в G.*

Теорема 1.1.7. *Нехай функція f є локально інтегровною в G і задовольняє (1.4) для майже всіх $x \in G$ та всіх $0 < \rho_1 < ... < \rho_m$ з умовою $B(x, \rho_m) \Subset G$. Тоді f дорівнює майже скрізь m-гармонічній функції $\bar{f}$ в G.*

Зауважемо, що монографія [22] присвячена викладенню тонкої класифікації дійсно аналітичних функцій за допомогою їх близкості у певному сенсі до полігармонічних функцій.

1.2 Теореми про середнє для аналітичних та поліаналітичних функцій

Класичним прикладом теореми про середнє значення для аналітичних функцій комплексної змінної є теорема Морери-Карлемана: якщо функція $f(z)$ є неперервною в однозв'язній опуклій області G, то умова рівності нулю інтеграла $\int\limits_C f(z)\,dz$ по будь-якому колу $C \in G$ є необхідною і достатньою для аналітичності цієї функції в G.

В. С. Федоров [35] встановив аналог цього результату, пов'язаний з інтегруванням по кругах: критерієм аналітичності функції $f \in C(B_R)$ є виконання рівняння

$$\iint\limits_{B(z,r)} (\zeta - z) f(\zeta)\, d\xi d\eta = 0$$

для кожного круга $B(z,r) \Subset B_R$.

Слід також відмітити наступний наслідок зі згаданої раніше роботи Т. Ремзі та І. Вейта [49].

Наслідок 1.2.1. *Функція $f \in C(\mathbb{C})$ є аналітичною тоді і тільки тоді, коли існує $R > 0$ таке що для всіх $z \in \mathbb{C}$ виконуються умови*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta})\, d\theta = f(z)$$

та

$$\int\limits_{|\xi - z| = R} f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Для викладення подальших результатів нагадаємо означення поліаналітичних функцій.

Означення 1.2.2. *Нехай G — область в $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Поліаналітичні функції порядку m (або m-аналітичні функції) в G — це функції класу $C^m(G)$, які задовольняють в G рівняння*

$$\bar{\partial}^m f = 0,$$

$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ — оператор Коші–Рімана. Відомо декілька еквівалентних означень поліаналітичної функції порядку n. Зокрема, ми будемо користуватись тим, що клас m-аналітичних функцій в області $G \subset \mathbb{C}$ співпадає із класом всіх многочленів відносно $\bar{z}$ порядку $\leq m-1$, коефіцієнти яких є аналітичними функціями в G. 2-аналітичні функції називаються також біаналітичними або ареолярно моногенними функціями (термін має походження від одного еквівалентного означення 2-аналітичних функцій, запропонованого Д. Помпейю і Н. Теодореску). Такі функції відіграють важливу роль в теорії пружності.

М. О. Рідом [50] було отримано наступний аналог теорем Морери–Карлемана та Федорова для ареолярно моногенних функцій.

Теорема 1.2.3. *Нехай $f(z) \in C(B)$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(A) $f(z)$ є ареолярно моногенною в B;

(B) рівняння

$$\int\limits_{|\zeta - z| = r} (\zeta - z) f(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{1.5}$$

виконується для кожного круга $B(z, r) \Subset B$.

(C) Рівняння

$$\iint\limits_{B(z,r)} (\zeta - z)^2 f(\zeta)\, d\xi d\eta = 0 \tag{1.6}$$

виконується для кожного круга $B(z, r) \Subset B$.

Вже у перших роботах з теорії поліаналітичних функцій (див. [44], [45], [54] та [29]) відмічається зв'язок між поліаналітичними та полігармонічними функціями. А саме: дійсна частина поліаналітичних функцій порядку m в деякій області G є полігармонічною в G функцією того ж порядку m. І навпаки: для кожної дійсної функції $u(z)$, m-гармонічної в деякій однозв'язній області G, знайдеться така m-аналітична в G функція, для якої $u(z)$ є дійсною частиною.

Зауважемо, що якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ має точний порядок поліаналітичності m, то звідси ще не випливає, що точний порядок полігармонічності хоча б однієї з двох функцій u, v також дорівнює m. Наприклад, $\bar{z} + e^z$ – біаналітична функція, а її дійсна та уявні частини є гармонічними функціями. Також зрозуміло, що у випадку багатозв'язної області не для будь-якої (дійсної) полігармонічної в цій області функції u знайдеться така поліаналітична функція f, що $u = \operatorname{Re} f$.

Н. Теодореску [54] узагальнив на випадок для поліаналітичних функцій інтегральну формулу Коші.

Теорема 1.2.4. *Якщо функція f є m-аналітичною в замкненій області G, що обмежена, в свою чергу, обмеженим замкненим контуром Γ, то значення функції f в будь-якій точці z області G виражається через значення тієї ж функції та її формальних похідних в точках t границі Γ за наступною формулою*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{k!(t-z)} (\bar{z} - \bar{t})^k \partial^k f(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Наступний результат В. В. Волчкова [60] є теоремою типу

Морери.

Теорема 1.2.5. *Нехай* $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ *задовольняє рівнянню*

$$\int\limits_{|z|=r} f(z+\zeta)z^{m-1}dz = 0 \qquad (1.8)$$

для всіх $\zeta \in K$ *та майже всіх* $r \in (0, R - |\zeta|)$*, де* $K \subset \mathbb{R}$*,* $\lambda K \subset K$ *для кожного* $\lambda \in (0,\ 1)$*. Тоді* f *—* m*-аналітична в* B_R *і є однорідним гармонічним поліномом, що дорівнює на* K *тотожньо нулеві.*

Зауважемо, починаючи з 2000 року з'явились роботи, в яких поліаналітичні та полігармонічні функції на комплексній площині досліджуються із позицій якісної теорії еліптичних диференціальних рівнянь вигляду $\partial^k\bar{\partial}^l f = 0$, де $k, l \in \mathbb{N}$ (див. [25], [26] та [31]).

1.3 Теореми про середнє для розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо n-вимірний дійсний простір $\mathbb{R}^n$, де $n = 2m$ є парним числом. Позначимо координати $x_1, ..., x_n$ через $y_1, .., y_n$, а $x_{m+1}, ..., x_n$ через $z_1, ..., z_n$. Нехай функція $u(x) = u(y, z)$ належить класу $C^2(\mathbb{R}^n)$. Асгейрсон встановив науступну теорему (див. [4]).

Теорема 1.3.1. *Якщо* $u(y, z)$ *є розв'язком диференціального рів-*

няння

$$(\Delta_y - \Delta_z)u = \sum_{i=1}^{m} u_{y_i y_i} - \sum_{i=1}^{m} u_{z_i z_i} = 0,$$

що належить класу $C^2(\mathbb{R}^n)$, то для будь якої точки $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ та для будь якого $r > 0$ середнє значення функції $u(y, z_0)$, що обчислене по сфері в y-просторі з радіусом r і центром y_0, дорівнює середньому значенню функції $u(y_0, z)$, обчисленому по сфері в z-просторі з радіусом r і центром z_0.

В роботах [41] та [6] було встановлено конкретні теореми про середнє значення типу теореми Гауса для гармонічних функцій.

В монографії В. В. Волчкова [60] отримано наступну теорему про середнє значення для диференціальних рівнянь, що мають вигляд

$$P(D)f = 0, \tag{1.9}$$

де $P(x) = P(x_1 \ldots, x_n)$ — однорідний гармонічний поліном порядку $k \geq 2$, $P(D)$ — диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, отриманий із полінома $P(x)$ заміною x_k на $-i\frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k = 1, \ldots, n$, i — уявна одиниця).

Теорема 1.3.2. *Нехай G – область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та $f \in L_{\mathrm{loc}}(G)$. Тоді f є слабким розв'язком рівняння (1.9) в області G тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(y + r\sigma)p(\sigma)d\omega(\sigma) = 0 \tag{1.10}$$

для майже всіх $y \in G$ та $r \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial G))$.

Наступна теорема належить Л. Флатто [36].

Теорема 1.3.3. *Нехай* $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, K *— компакт в* $\mathbb{R}^n$. *Нехай також* μ *— борелівська міра на* K, $\mu(K) = 1$, *і нехай носій цієї міри не міститься у будь-якій гіперплощині. Якщо для кожного* $x \in \mathbb{R}^n$ *існує додатне дійсне число* ε_x *таке, що* $f(x) = \int\limits_K f(x+ty)\, d\mu(y)$, *де* $0 < t < \varepsilon_x$, *то функція* f *є розв'язком деякого еліптичного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Нехай μ — комплексна борелівська міра в $\mathbb{R}^n$ із носієм на замкненій одиничній кулі $\overline{B}$. Для області $G \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо множину функцій $f \in C(G)$, які задовольняють умову

$$\int f(x+rt)\, d\,\mu(t) = 0 \tag{1.11}$$

для всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ \mathrm{dist}(x, \partial G))$. Л. Зальцман [63] встановив, що ця множина співпадає з множиною слабких розв'язків в області G деякої скінченної системи однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Він також дослідив умови, за яких така система складається лише із одного рівняння. Для формулювання його основного результату у цьому напряму, ми нагадаємо, що перетворення Фур'є–Лапласа розподілу із компактним носієм в $\mathbb{R}^n$ (позначення $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) визначається формулою

$$\hat{T}(z) := T(e^{-(x\cdot z)}),$$

де $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot z = x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n$, а розподіл T діє на функцію $e^{-i(x\cdot z)}$ як на функцію аргументу x. Перетворення Фур'є–Лапласа розподілів з компактним носієм є цілими функціями експоненціального типу і описуються класичною теоремою Пелі–Вінера–Шварца (див., наприклад, [60]).

Нехай $P = P(x) = P(x_1, \ldots, x_n)$ — поліном, а $P(D)$ — диференціальний оператор, що відповідає цьому поліному ($x_k \to -i\frac{\partial}{\partial x_k}$). Будемо говорити, що міра μ характеризує неперервні слабки розв'язки диференціального рівняння $P(D)f = 0$, якщо для довільної області G та для довільної функції $f \in C(G)$ виконання умову (1.11) для всіх $x \in G$ та $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial G))$ еквівалентно тому, що f задовольняє у слабкому сенсі рівняння $P(D)f = 0$.

Мірі μ відповідає розподіл $F_\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, визначений формулою

$$F_\mu(\varphi) := \int \varphi(x)\, d\mu$$

для кожної фінітної нескінченно диференційовної функції φ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3.4. *Міра μ характеризує неперервні слабкі розв'язки рівняння $P(D)f = 0$ тоді і тільки тоді, коли поліном P є однорідним та існує розподіл $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ із носієм на $\overline{B}$, такий, що $\hat{T}(0) \neq 0$ і $F_\mu = P(-D)T$.*

Ця теорема з роботи Л. Зальцмана [63] є першою теоремою про середнє значення загального характеру і містить в якості наслідків велику кількість раніше встановлених конкретних теорем про середнє значення, наприклад, згаданих теорем Гауса–

Кобе, Морери–Карлемана, Федорова, Асгейрсона та інших авторів. Зокрема, теорема Морери–Карлемана відповідає випадку, коли $n = 2$, $P(D) = \overline{\partial}$ — оператор Коші–Рімана, $T(\varphi) = \int_B \varphi(x)\,dx$ для кожної фінітної нескінченно диференційовної функції φ в $\mathbb{R}^n$. Теоремою 1.3.4 фактично визначається класичний вигляд теорем про середнє значення для розв'язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

А. В. Покровський [8] узагальнив результат Л. Зальцмана на випадок рівняннь з квазіоднорідним диференціальним оператором $P(D)$. Нехай $M = (M_1, \ldots, M_n)$ — вектор з натуральними компонентами. Поліном $P(z)$ (оператор $P(D)$) називається M-однорідним, якщо існує таке $l \in \mathbb{N}_0$, що $P(z) \equiv \sum_k a_k z^k$, де $z^k := z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, а сума береться по всім мультиіндексам $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ з $k_1 M_1 + \ldots + k_n M_n = l$ $(z \in \mathbb{C}^n)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ та $r > 0$ введемо позначення: $r^M x := (r^{M_1} x_1, \ldots . r^{M_n} x_n)$.

Будемо говорити, що міра μ та вектор M характеризують неперервні слабки розв'язки диференціального рівняння $P(D)f = 0$, якщо для довільної області G та для довільної функції $f \in C(G)$ виконання умову $f(x + r^M t)\, d\,\mu(t) = 0$ для всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ \mathrm{dist}(x, \partial G))$, $r < 1$, еквівалентно тому, що f задовольняє у слабкому сенсі рівняння $P(D)f = 0$.

Наступна теорема з роботи [8] узагальнює згаданий результат Зальцмана як за формулюровкою, так і за методом доведення.

Теорема 1.3.5. *Міра μ та вектор M характеризують неперервні слабкі розв'язки рівняння $P(D)f = 0$ тоді і тількі тоді, коли поліном P є M-однорідним та існує розподіл $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ із носієм на $\overline{B}$, такий, що $\hat{T}(0) \neq 0$ і $F_\mu = P(-D)T$.*

Зрозуміло, що у випадку $M = (1, \dots, 1)$ теорема 1.3.5 є теоремою 1.3.4. З іншого боку з теореми 1.3.5 випливає також конкретна теорема про середне значення, що характерізує розв'язкі рівняння теплопровідності, яка була встановлена у згаданій раніше роботі У. Фалкса [41]. Одним з наслідків теореми 1.3.5 для M-однорідного гіпоеліптичного оператора $P(D)$ є існування фінітних нескінченно диференційовних функцій $\rho(x)$ з носієм на замкненій одиничній кулі $\overline{B}$, $\int_B \rho(t)\, dt = 1$, для яких виконання умови

$$\int f(x + r^M t)\rho(t)\, dt = f(x)$$

при всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ \mathrm{dist}(x, \partial G))$, $r < 1$, характеризує в класі $C(G)$ розв'язки рівняння $P(D)f = 0$.

Таким чином, класична форма теорем про середне значення може характерезувати розв'язки диференціального рівняння $P(D)f = 0$ лише за умову однорідності або квазіоднорідності диференціального оператора $P(D)$.

Існують інши форми теорем про середне значення, що характеризують розв'язки диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Наприклад (див. [60]), при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,\ 0)$ виконання умови

$$\int\limits_{B_r} f(x+y)dy = (2\pi)^{n/2} r^2 I_{n/2}(\lambda r) f(x)$$

для всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ \mathrm{dist}(x, \partial G))$ характеризує в класі $C(G)$ розв'язки рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + \lambda^2) f = 0,$$

де $I_{n/2}(z) = z^{-n/2} J_{-n/2}(z)$ Зокрема, при $\lambda = 0$ маємо класичну теорему із середнім значенням для гармонічних функцій.

Розділ 2

Методи дисертаційного дослідження

У цьому розділі сформульовано низку відомих результатів, які неоднаразово використовуються в дисертації.

2.1 Елементи теорії спеціальних функцій.

У цьому підрозділі дано означення і наведено основні властивості функцій Бесселя, більшість з яких використовуються у розділах 3 та 4 дисертації.

Означення 2.1.1. *Нехай* $\nu \in \mathbb{R}$. *Функція*

$$J_\nu(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)},$$

$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, *називаєтъся функцією Бесселя порядку* ν.

Якщо $\nu \notin \mathbb{Z}$, то

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + O(|z|^{2+\nu})$$

при $z \to 0$. У випадку $\nu \in \mathbb{N}$ має місце рівність $J_{-\nu}(z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$.

Функція Неймана порядку ν ($\nu \in \mathbb{R}$) визначається формулою

$$N_\nu(z) = \lim_{\mu \to \nu} \frac{J_\mu(z)\cos(\mu\pi) - J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння Бесселя

$$z^2 f'' + zf' + (z^2 - \nu^2)f = 0,$$

де $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,\ 0]$. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$f(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 N_\nu(z),$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Функції такого вигляду називають циліндрічними функціями порядку ν.

Функції Бесселя задовольняють наступні тотожності

$$\frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\big(z^{-\nu} J_\nu(z)\big) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).$$

Також для функції Бесселя є справедливою асимптотика

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}},$$

при $z \to \infty$, $|\arg z| < \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon \in (0,\ \pi))$, де

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma(\nu + m + 1/2)}{m!\Gamma(\nu - m + 1/2)},$$

а $\Gamma(z)$ — гамма-функція.

Нехай $\nu > -1$. Тоді функція $J_\nu(z)$ має нескінченну кількість нулів і всі ці нулі є дійсними числами. Також всі нулі цілої функції $z^{-\nu} J_\nu(z)$ є простими. Нехай $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — послідовність додатніх нулів функції $J_\nu(z)$, упорядкована за порядком зростання їх величин. Тоді

$$\zeta_m = \pi\left(m + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{4\nu^2 - 1}{8\pi\left(m + (\nu/2) - (1/4)\right)} -$$

$$-\frac{(4\nu^2-1)(28\nu^2-31)}{384\pi^3\left(m+(\nu/2)-(1/4)\right)^3}+O\left(\frac{1}{m^5}\right)$$

при $m \to \infty$.

Для $\nu > -1$ функції Бесселя задовольняють наступним умовам ортогональності

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 tJ_\nu(\zeta_k t)J_\nu(\zeta_m t)dt = 0, k \neq m, \\ \int\limits_0^1 tJ_\nu^2(\zeta_m t)dt = \frac{1}{2}J_{\nu+1}^2(\zeta_m). \end{cases}$$

Для кожної вимірної функції f на інтервалі $(0,\ 1)$ такої, що

$$\int\limits_0^1 t|f(t)|^2 dt < \infty,$$

можна визначити її ряд Фур'є-Бесселя

$$f(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu(\zeta_m t),$$

де

$$c_m = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\zeta_m)} \int\limits_0^1 tf(t)J_\nu(\zeta_m t)dt.$$

Тоді виконується наступна рівність

$$\lim_{N\to+\infty} \int\limits_0^1 t\left|f(t) - \sum_{m=1}^{N} c_m J_\nu(\zeta_m t)\right|^2 dt = 0.$$

Зокрема, якщо всі коефіцієнти c_m дорівнюють нулю, то $f \equiv 0$.

2.2 Теореми єдиності для розв'язків рівняння згортки із радіальним розподілів з компактним носієм

В дисертації систематично використовуються результати з монографії В. В. Волчкова [60] (частина 3, розділи 1 та 2) про єдиність розв'язків рівняння згортки із радіальним розпоілом з компактним носієм у просторі $\mathbb{R}^n$. У той же час ці результати грунтуються на теоремах єдиності для розв'язків рівняння згортки у випадку $n = 1$, які мають свою специфіку. Сформулюємо відповідні теореми, де φ є ненульовим розподілом із класу $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-r(\varphi), r(\varphi)]$, $R > r(\varphi) > 0$, а $\mathcal{D}'_\varphi(-R,\ R)$ — множина розподілів $f \in \mathcal{D}'(-R,\ R)$, для яких $f * \varphi(t) = 0$ для всіх $t \in (-R + r(\varphi),\ R - r(\varphi))$.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $f \in \mathcal{D}'_\varphi(-R,\ R)$, $f = 0$ *на інтервалі* $(-r(\varphi),\ r(\varphi))$, *і нехай виконується одне з наступних припущень:*

1) хоча б одна з точок $\pm r(\varphi)$ *не належить* $\operatorname{supp} f$*;*

2) $f, \varphi \in L_{\mathrm{loc}}(-R,\ R)$*;*

3) φ *— розподіл порядку* k *та* $f^{(k+1)} \in L_{\mathrm{loc}}(-R,\ R)$*;*

4) $\varphi \in C^\infty(-R,\ R)$.

Тоді $f = 0$ *на* $(-R,\ R)$.

Зменшити інтервал $(-r(\varphi),\ r(\varphi))$, на якому функція f дорівнює нулю, в цій теоремі не можна.

У наступній теоремі $n \geq 2$, $R > r(\varphi) > 0$, $\mathcal{E}'_{\mathrm{rad}}(R^n)$ — множина всіх радіальних розподілов в $\mathbb{R}^n$, φ — ненульовий розподіл із

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ з носієм в крузі $B_{r(\varphi)}$, $C^\infty_\varphi(B_R) := \mathcal{D}'_\varphi(B_R) \cap C^\infty(B_R)$

Теорема 2.2.2. *Якщо $f \in \mathcal{D}'_\varphi(B_R)$ та при деякому $\varepsilon > 0$ функція f дорівнює нулю в крузі $B_{r(\varphi)+\varepsilon}$, то $f = 0$ в B_R. Якщо ж $f \in C^\infty_\varphi(B_R)$ і $f = 0$ в $B_{r(\varphi)}$, то $f = 0$ в B_R.*

Обидва твердження цієї теореми є точними у сенісі умов на $r(\varphi)$.

2.3 Теорема Пелі–Вінера–Шварца для сферичного перетворення радіального розподілу з компактним носієм

Нагадаємо, що сферичним перетворенням розподілу $\varphi \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(R^n)$ називається функція

$$\tilde{\varphi}(z) := \varphi(I_{n/2-1}(z|x|)) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

до розподіл φ діє на функцію $I_{n/2-1}(z|x|)$ як на функцію аргументу x. Функція $\tilde{\varphi}$ характеризується наступною теоремою Пелі–Вінера–Шварца для сферичного перетворення.

Теорема 2.3.1. *Сферичне перетворення $g(z) := \tilde{\varphi}(z)$ розподілу $\varphi \in \mathcal{E}'_{\text{rad}}(R^n)$ з носієм на замкненій кулі $\overline{B}_R$ є парною цілою функцією і існують такі $c > 0$ та $N > 0$, що при всіх $z \in \mathbb{C}$ має місце оцінка*

$$|g\varphi(z)| \le c(1 + |z|^N)e^{r\mathrm{Imz}}.$$

Навпаки, якщо ця оцінка виконується при деяких $c > 0$ та $N > 0$ для парної цілої функції $g(z)$ при всіх $z \in \mathbb{C}$, то така фун-

кція є сферичним перетворенням деякого розподілу із $\mathcal{E}'_{\mathrm{rad}}(R^n)$ *з носієм на* $\overline{B}_R$.

2.4 Функціональне рівняння для поліномів

У розділі 5 нам буде потрібний наступний результат, який є частинним випадком більш загальної теореми з монографії [60] (с.250, теорема 3.1). Для його формулювання введемо такі позначення: $m \in \mathbb{N}$, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — множина із m точок в $\mathbb{C}$, які попарно не співпадають між собою; якщо $\varepsilon > 0$ і $\nu \in \{1, \ldots, m\}$, то $\Omega_{\nu,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : |v_\nu| - \varepsilon < |z| < |v_\nu| + \varepsilon\}$.

Теорема 2.4.1. *Нехай* $\varepsilon > 0$, *і нехай функції* $F_\nu \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega_{\nu,\varepsilon})$, $\nu = 1, \ldots, m$, *задовольняють наступних умов:*

a) існує таке $k \in \mathbb{N}$, *що для кожного* $\nu \in \{1, \ldots, m\}$ *та кожного* $\rho \in (v_\nu| - \varepsilon,\ |v_\nu| + \varepsilon)$ *ряд Фур'є функції* F_ν *містить в собі лише гармоніки порядку не вище* k;

b) майже скрізь в B_ε *виконується рівність*

$$\sum_{\nu=1}^{m} F(z + v_\nu) = 0.$$

Тоді F_ν *є поліномом в* $\Omega_{\nu,\varepsilon}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$.

2.5 Функція Гріна для оператора Лапласа на комплексній площині

Функція Гріна $g(z, \zeta)$ для оператора Лапласа в обмеженій жордановій області $G \subset \mathbb{C}$ з полюсом в точці ζ визначається як дійсна гармонічна функція в області $G \setminus \{0\}$, яка має нульові граничні значення у кожній точці межі ∂G області G і така, що функція $g(z,\zeta) + \ln|z-\zeta|$ має гармонічне продовження із $G \setminus \{\zeta\}$ на G. Така функція існує, є єдиною (за принципом максімуму) і симетричною, тобто $g(z,\zeta) = g(\zeta, z)$ для всіх $z, \zeta \in G$, $z \neq \zeta$.

У розділах 3 та 4 дисертації ми використоваємо наступну властивість функції Гріна.

Теорема 2.5.1. *Для довільної функції $f \in C^\infty(G)$ функція*

$$h(z) := \int_G g(z,\zeta) f(\zeta)\, d\xi d\eta$$

належить до класу $C^\infty(G)$, продовжується по неперервності нулем на ∂G, і є розв'язком рівняння Пуассона $\Delta h = f$ в G.

У випадку $G = B_R$ маємо явну формулу (див., наприклад, [9], с. 13):

$$g(z,\zeta) = \ln \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z-\zeta)},$$

яка встановлюється за допомогою побудови конформних автоморфізмів заданого круга.

2.6 Висновки до розділу 2

У цьому розділі наведено деякі відомі результати, які відіграють суттеву роль в доведенні основних результатів дисертації і більшість з яких неодноразово застосовується у наступних розділах. Це — результати про асимптотичну поведінку нулів функцій Бесселя, теореми єдиності для рівняння згортки, характерізація парної цілої функцій, що є сферичним перетворенням радіального розподілу з компактним носієм, розв'язання рівняння Пуассона в крузі за допомогою функції Гріна.

Розділ 3

Теореми єдиності для функцій, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах

У цьому розділі розглядаються гладкі функції, визначені у крузі на комплексній площині, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах, тобто є розв'язками систем рівнянь згортки спеціального вигляду, що узагальнюють класичну властивість середнього значення по кругах для гармонічних функцій. Встановлено теорему єдиності типу Йона для функцій, що задовольняють таку умову по кругах фіксованого радіуса та побудовано приклади, що показують непокращуваність умов цієї теореми. Також дано повний опис таких функцій в термінах розкладу їх коефіцієнтів Фурьє на сферах із центром в нулі в ряди по спеціальних функцій.

3.1 Деякі тотожності для поліаналітичних функцій

Нехай $R > 0$, $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$. Для функції $f \in C^1(B_R)$ позначимо через ∂f і $\overline{\partial} f$ її формальні похідні за Коші:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

де $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$, i — уявна одиниця). Нагадаємо, що функція $f \in C^m(B_R)$ називається поліаналітичною порядку m або m-аналітичною в крузі B_R, якщо вона задовольняє в B_R диференціальному рівнянню зі сталими коефіцієнтами

$$\overline{\partial}^m f = 0.$$

Оператор $\overline{\partial}^m$ є еліптичним, тому кожна така функція є дійсно аналітичною в B_R. Більш того, індукцією по m, неважко показати, що кожна m-аналітична функція є поліномом степеня не вище $m-1$ відносно змінної $\overline{z}$, коефіцієнти якого є аналітичними функціями комплексної змінної z в крузі B_R, і навпаки, кожен такий поліном є m-аналітичною функцією. Звідки випливає, що розклад m-аналітичної функції в ряд Тейлора у довільній точці $z_0 \in B_R$ по степеням $z - z_0$ і $\overline{z - z_0}$ містить лише біноми вигляду $(z - z_0)^k(\overline{z} - \overline{z}_0)^l$, де $k \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Встановимо наступну теорему.

Теорема 3.1.1. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, і нехай функція f є m-аналітичною в крузі B_R. Тоді для всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$ виконується рівність*

$$\sum_{p=1}^{m-1} \frac{r^{2p}}{(p-1)!p!} \partial^{p-1}\overline{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{3.1}$$

Для доведення теореми 3.1.1 нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.1.2. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq m-1$. Тоді для функції $f(z) = z^k \overline{z}^l$ для всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$ виконується рівність (3.1).*

Доведення. Нехай $r \in (0,\ R)$, $z \in B_{R-r}$. Покладемо $w = \zeta - z$, $q = \min\{k+1, l\}$. Тоді $q \leq m-1$ і двократне використання формули бінома Ньютона та тотожність

$$\int_{|w|=r} w^{-1} dw = 2\pi i$$

дають наступний ланцюжок рівностей:

$$\int\limits_{|\zeta - z|=r} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{|w|=r} (w+z)^k(\bar{w}+\bar{z})^l dw$$

$$= 2\pi i \sum_{p=1}^{q} C_k^{p-1} C_l^p r^{2p} z^{k-p+1} \bar{z}^{l-p}$$

$$= 2\pi i \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{(p-1)!p!} r^{2p} \partial^{p-1} \overline{\partial}^p f(z).$$

Якщо $q = m-1$, то рівність (3.1) доведено. Якщо ж $q < m-1$, то враховуючи тотожності

$$\partial^{p-1}\overline{\partial}^p f(z) \equiv 0, \qquad p = q+1, \ldots, m-1,$$

що випливають з вигляду функції $f(z)$, ми знову маємо (3.1). Лему доведено. □

Тепер доведемо Теорему 3.1.1.

Доведення. За умовою функція f є m-аналітичною в крузі B_R. Використовуючи загальний вигляд m-аналітичної функції, маємо наступну рівність

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + ... + \bar{z}^{m-1}\varphi_{m-1}(z), \tag{3.2}$$

де $\varphi_k(z)$ — голоморфні функції в B_R, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тоді для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ряд Тейлора функції $\varphi_k(z)$ із центром в точці $z = 0$ збігається до цієї функції абсолютно і рівномірно на компактних підмножинах круга B_R. Оскільки ряди Тейлора голоморфних функцій можна поелементно диференціювати будь-яку кількість разів, то звідси випливає що для кожного $\rho \in (0,\ R)$ функцію функцію f можно з довільною точністю наблизити m-аналітичними поліномами (відносно z та $\bar{z}$) в метриці простору $C^{2m-1}(B_\rho)$. Для m-аналітичних поліномів теорема 3.1.1 беспосередньо випливає з леми 3.1.2. Тому для кожної m-аналітичної функції f в крузі B_R виконується твердження цієї теореми. Теорему доведено. $\square$

Приклад функції

$$f(z) := z^{m-1}\bar{z}^m,$$

для якої ліва частина рівності (3.1) в точці $z = 0$ дорівнює нулю, а права ні, показує, що теорема 3.1.1 є точною у тому сенсі, що її твердження, взагалі кажучі, є хибним для поліаналітичних функцій порядку $\geq m$.

3.2 Теореми про середнє для поліаналітичних функцій

В даному підрозділі розглядається узагальнення співвідношення (3.1) на випадок, коли в його правій частині береться усереднення функції f із вагою $(\zeta - z)^s$, де $s \in \mathbb{N}_0$, а також його аналог, побудований за допомогою усереднень по кругах.

Теорема 3.2.1. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m-2$, і нехай функція f є m-аналітичною в крузі B_R. Тоді для всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$ виконується рівність*

$$\sum_{p=s+1}^{m-1} \frac{r^{2p}}{(p-s-1)!p!} \partial^{p-s-1} \overline{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\zeta. \quad (3.3)$$

Для доведення цього результату нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.2.2. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m-2$, і нехай $k, l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq m-1$. Тоді для функції $f(z) = z^k \overline{\zeta}^l$ для всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$ виконується рівність (3.3).*

Доведення. Нехай $0 < r < R$, $z \in B_{R-r}$, $q = \min\{k+s+1, l\}$, і нехай $q \geq s+1$. Тоді $q \leq m-1$ і з тих же самих міркувань, що і в лемі 3.2.1, ми маємо тотожність

$$\sum_{p=s+1}^{q} \frac{r^{2p}}{(p-s-1)!p!} \partial^{p-s-1} \overline{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\zeta.$$

Якщо $q = m-1$, то рівність (3.3) доведено. Якщо ж $q < m-1$, то враховуючи тотожності

$$\partial^{p-s-1} \overline{\partial}^p f(z) \equiv 0, \qquad p = q+1, \ldots, m-1,$$

що випливають з вигляду функції f, ми знову маємо (3.3). З вигляду функції f також випливає, що у випадку $q < s+1$ ліва і права частини рівності (3.3) дорівнюють нулю, оскільки $k+s+1 \geq s+1$, і тому $l \leq s$. Лему доведено. □

З леми 3.2.2 випливає, що твердження теореми 3.2.1 є справедливим для m-аналітичних поліномів. Для закінчення доведення цієї теореми залишилось скористатися загальним виглядом m-аналітичних функцій (3.2), з якого, як і в теоремі 3.1.1, випливає що функцію f можна з довільною точністю наблизити m-аналітичними поліномами в метриці $C^n(B_\rho)$ при всіх $\rho \in (0,\ R)$ та $n \in \mathbb{N}_0$ (зокрема при $n = 2m - s - 1$).

Наступна теорема є аналогом теореми 3.2.1 для усереднень по кругах.

Теорема 3.2.3. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m - 1$, і нехай функція f є m-аналітичною в крузі B_R. Тоді для всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$ виконується рівність*

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!p!} \partial^{p-s} \overline{\partial}^p f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \leq r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\xi\, d\eta, \tag{3.4}$$

де $\zeta = \xi + i\eta$ ($\xi, \eta \in \mathbb{R}$).

Так саме, як і попередніх двох теоремах, теорема 3.2.3 випливає з наступної леми.

Лема 3.2.4. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m - 1$, і нехай $k, l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq m - 1$. Тоді для функції $f(z) = z^k \overline{\zeta}^l$ для всіх $r \in (0,\ R)$ та $z \in B_{R-r}$ виконується рівність (3.4).*

Доведення. Нехай $0 < r < R$, $z \in B_{R-r}$, $q = \min\{k + s, l\}$, і нехай $q \geq s$. Тоді $q \leq m - 1$ і з тих же самих міркувань, що і в лемі

3.2.1, ми маємо тотожність

$$\sum_{p=s}^{q} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!p!} \partial^{p-s}\overline{\partial}^{p} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \leq r} f(\zeta)(\zeta - z)^{s} d\xi\, d\eta,$$

Якщо $q = m - 1$, то рівність (3.4) доведено. Якщо ж $q < m - 1$, то враховуючи тотожності

$$\partial^{p-s}\overline{\partial}^{p} f(z) \equiv 0, \qquad p = q+1, \ldots, m-1,$$

що випливають з вигляду функції f, ми знову маємо (3.4). З вигляду функції f також випливає, що у випадку $q < s$ ліва і права частини рівності (3.4) дорівнюють нулю, оскільки $k + s \geq s$, і тому $l < s$. Лему 3.2.4, а тим самим й теорему 3.2.3 доведено. □

Неважко навести приклади $(m+1)$-аналітичних функцій, для яких ліва частина в формулах (3.3) та (3.4) дорівнює нулю при $z = 0$ і довільному $r \in (0,\ R)$, а права ні. У випадку формули (3.3) — це функція

$$f(z) = z^{m-s-1}\bar{z}^{m},$$

а у випадку формули (3.4) — це функція

$$f(z) = z^{m-s}\bar{z}^{m}.$$

У цьому сенсі теореми цього підрозділу є точними.

3.3 Деякі тотжності з визначниками для поліаналітичних функцій

У цьому підрозділі ми встановимо декілька простих тверджень, які випливають з теореми 3.2.1.

Теорема 3.3.1. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s \leq m-2$, $R > 0$, $\{r_j\}_{j=1}^{m-s} \subset (0,\ R)$, і нехай функція f є m-аналітичною в крузі B_R. Тоді для всіх $z \in B_{R-r}$, де $r = \max_{1 \leq j \leq m-s} r_j$, виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} \frac{r_1^{2(s+1)}}{(s+1)!} & \frac{r_1^{2(s+2)}}{(s+2)!} & \cdots & \frac{r_1^{2(m-1)}}{(m-s-2)!(m-1)!} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=r_1} (\zeta-z)^s f(\zeta)\, d\zeta \\ \frac{r_2^{2(s+1)}}{(s+1)!} & \frac{r_2^{2(s+2)}}{(s+2)!} & \cdots & \frac{r_2^{2(m-1)}}{(m-s-2)!(m-1)!} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=r_2} (\zeta-z)^s f(\zeta)\, d\zeta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{r_{m-s}^{2(s+1)}}{(s+1)!} & \frac{r_{m-s}^{2(s+2)}}{(s+2)!} & \cdots & \frac{r_{m-s}^{2(m-1)}}{(m-s-2)!(m-1)!} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=r_{m-s}} (\zeta-z)^s f(\zeta)\, d\zeta \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Доведення. Нехай $z \in B_{R-r}$. Розглянемо наступну однорідну систему із $m-s$ лінійних рівнянь з невідомими $w_1, \ldots, w_{m-s}$:

$$w_1 \sum_{p=s+1}^{m-1} \frac{r_j^{2p}}{(p-s-1)!p!} \partial^{p-s-1} \overline{\partial}^p f(z) +$$

$$+ w_{m-s} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=r_j} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\zeta = 0. \tag{3.6}$$

З теореми 3.2.1 випливає, що ця система має нетривіальний розв'язок $w_p = \partial^{p-s-1}\overline{\partial}^p f(z)$, $p = 1, \ldots m-s-1$, $w_{m-s} = -1$. Тому її головний визначник дорівнює нулю. Теорему доведено. □

Теорема 3.3.2. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s \leq m-2$, $R > 0$, $\{r_j\}_{j=1}^{m-s} \subset (0,\ R)$, і нехай функція f є m-аналітичною в крузі B_R. Тоді для всіх $z \in B_{R-r}$, де $r = \max_{1 \leq j \leq m-s} r_j$, виконується* *рівність*

$$\overline{\partial} f(z) \begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & r_1^4 & ... & r_1^{2m-2s-4} \\ 1 & r_2^2 & r_2^4 & ... & r_2^{2m-2s-4} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & r_{m-s-1}^2 & r_{m-s-1}^4 & ... & r_{m-s-1}^{2m-2s-4} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{(s+1)!}{2\pi i r_1^{2s+2}} \int\limits_{|\zeta-z|=r_1} (\zeta-z)^s f(\zeta)\, d\zeta & r_1^2 & r_1^4 & ... & r_1^{2m-2s-4} \\ \frac{(s+1)!}{2\pi i r_2^{2s+2}} \int\limits_{|\zeta-z|=r_2} (\zeta-z)^s f(\zeta)\, d\zeta & r_2^2 & r_2^4 & ... & r_2^{2m-2s-4} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{(s+1)!}{2\pi i r_{m-s-1}^{2s+2}} \int\limits_{|\zeta-z|=r_{m-s-1}} (\zeta-z)^s f(\zeta)\, d\zeta & r_{m-s-1}^2 & r_{m-s-1}^4 & ... & r_{m-s-1}^{2m-2s-4} \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

Доведення. Нехай $z \in B_{R-r}$. З теореми 3.2.1 маємо рівності

$$\frac{r_j^{2(s+1)}}{(s+1)!} \overline{\partial}^{s+1} f(z) + \sum_{p=s+2}^{m-1} \frac{r_j^{2p}}{(p-s-1)!p!} \partial^{n-1-s} \overline{\partial}^p f(z)$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|=r_j} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\zeta, \qquad j = 1, ..., m-s-1.$$

Звідси

$$\overline{\partial}^{s+1} f(z) + \sum_{p=s+2}^{m-1} \frac{r_j^{2p-2s-2}(s+1)!}{(p-s-1)!p!} \partial^{p-1-s} \overline{\partial}^p f(z)$$
$$= \frac{(s+1)!}{2\pi i r_j^{2s+2}} \int\limits_{|\zeta-z|=r_j} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\zeta,$$
$$j = 1, \ldots, m-s-1.$$

Розглянемо наступну систему із $m-s-1$ лінійних рівнянь з $m-s-1$ невідомими $w_1, w_2, ..., w_{m-s-1}$:

$$w_1 + \sum_{p=s+2}^{m-1} r_j^{2p-2s-2} w_{p-s} = \frac{(s+1)!}{2\pi i r_j^{2s+2}} \int\limits_{|\zeta - z| = r_j} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\zeta,$$

$$j = 1, \ldots, m-s-1,$$

головний визначник якої є визначником Вандермонда і тому не дорівнює нулю. Ця система має розв'язок

$$w_1 = \overline{\partial}^{s+1} f(z),$$

$$\ldots$$

$$w_{m-s-1} = \frac{(s+1)!}{(m-s-2)!(m-1)!} \partial^{m-s-2} \overline{\partial}^{m-1} f(z),$$

звідси (3.7) випливає з формул Крамера. Теорему доведено. □

Аналогічним чином можна отримати формули для $\partial^{p-s-1}\overline{\partial}^{p} f(z)$, $p = s+2, ..., m-1$.

3.4 Теорема єдиності для функцій, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса

У цьому підрозділі встановлюються основні результати розділу 3 — теорема єдиності типу Йона для нескінченно диференціойвних функцій у крузі, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса. Також побудовано приклади функцій, які вказують на точність умов цієї теореми.

Нагадаємо, що класична теорема єдиності Ф. Йона стверджує, що кожна дійсна функція $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 2)$, яка співпадає зі своїми усередненнями по сферах радіуса $r = 1$ та дорівнює нулю при $|x| < 1$, тотожньо дорівнює нулю в $\mathbb{R}^n$. Цей результат є точним у тому сенсі, що для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ існують приклади нетривіальних нескінченно диференціовниxх функцій в $\mathbb{R}^n$, які співпадають зі своїми усередненнями по сферах радіуса $r = 1$ та дорівнюють нулю в кулі $|x| < 1 - \varepsilon$. Ці результати були отримані Ф. Йоном у 1934-35 роках, а їх викладенню присвячений розділ 6 його монографії [4]. В.В. Волчков узагальнив результати Ф. Йона на випадок роз'язків однорідних рівняннь згортки з радіальним розподілом із компактним носієм в $\mathbb{R}^n$ (див. теорему 2.1 на с. 176 монографії [60]). У випадку $m = 1$ та $s = 0$ наші результати містяться в цій теоремі В. В. Волчкова, але у випадку $s \geq 1$ рівняння згортки (3.4) породжується розподілом із компактним носієм, який вже не є радіальним. Тому основні результати цього розділу не вичерпуюються результатми В.В. Волчкова.

3.4.1 Деякі позначення

Для формулювання результатів цього підрозділу нам знадобляться наступні позначення.

Нехай, як і раніше, $R > 0$, B_R — відкритий круг на комплексній площині $\mathbb{C}$ із центром в точці $z = 0$ радіуса R. Для комплексного числа $\zeta = \xi + i\eta$ позначимо через ξ і η відповідно його дійсну та уявну частини: $\xi = \operatorname{Re}\zeta$, $\eta = \operatorname{Im}\zeta$. Нехай також $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq s \leq m-1$.

Далі функції $f \in C(B_R)$ визначемо її ряд Фур'є

$$f(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(\rho) e^{i\varphi k}, \tag{3.8}$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$,

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it}) e^{-itk} dt \qquad (z \neq 0). \tag{3.9}$$

У випадку $z = 0$ покладемо $f_0(0) = f(0)$, $f_k(0) = 0$ для всіх цілих $k \neq 0$. Далі ми будемо користуватися наступним добре відомим результатом: якщо функція f належить до класу $C^\infty(B_R)$, то всі члени її ряду Фур'є також належать до $C^\infty(B_R)$, а сам цей ряд збігається в топології простору $C^\infty(B_\rho)$ для кожного $\rho \in (0,\ R)$ (див. [60], с. 28-32).

Позначимо через $\mathcal{E}'_{\mathrm{rad}}(\mathbb{C})$ множину всіх радіальних розподілів в $\mathbb{R}^2$ з компактним носієм, тобто таких розподілів f (з компактним носієм), що $f(\varphi) = f(e^{i\alpha}\varphi)$ для довільних $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ та $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.4.2 Формулювання основних результатів

Основними результатми розділу 3 є наступні теореми.

Теорема 3.4.1. *Нехай* $0 < r < R$, $f \in C^\infty(B_R)$, *і нехай при кожному* $z \in B_{R-r}$ *виконується рівність (3.4), а* $f(z) = 0$ *для всіх* $z \in B_r$. *Тоді* $f \equiv 0$ *в* B_R.

Теорема 3.4.2. *Нехай* $r > 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0, r)$ *існує функція* $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ *із наступними властивостями:*

1) для кожного $z \in \mathbb{C}$ *виконується (3.4);*

2) $f(z) = 0$ *для всіх* $z \in B_{r-\varepsilon}$*;*

3) $f \not\equiv 0$.

3.4.3 Допоміжні результати та конструкції

Для доведення теореми 3.4.1 нам знадобляться наступні допоміжні результати.

Лема 3.4.3. *Нехай* $H \in C^s[r-R, R-r]$, $H(-x)(-1)^s = H(x)$ *та*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} H(x \cos t) \cos st \, dt \equiv 0. \tag{3.10}$$

Тоді H *— поліном степеня не вище* $s-1$ *при* $s \geq 1$ *та* $H \equiv 0$ *при* $s = 0$.

Ця лема належить В.В. Волчкову [3] (лема 2). Наступна лема відіграє центральну роль в доведенні теореми 3.4.1.

Лема 3.4.4. *Нехай функція* $f \in C^{\infty}(B_R)$ *задовольняє рівність (3.4) при всіх* $z \in B_{R-r}$. *Тоді ця рівність виконується для кожного доданку ряду Фур'є (3.8) цієї функції, і навпаки.*

Доведення. Цю лемму можно довести прямими обчисленнями. Але щоб уникнути їх, ми скористаемося тим, що для довільного $\rho \in (0,\ R)$ кожна функція $f \in C^{\infty}(B_R)$, яка задовольняє умову

(3.4), є границею в топології простору $C^\infty(B_\rho)$ деякої послідовності цілих дійсно аналітичних функцій, які також задовольняють умову (3.4). Цей факт є частинним випадком глибокої теореми про апроксимацію нескінченно диференційовних розв'язків однорідного рівняння згортки в опуклих областях багатовимірного евклідового простору експоненціальними поліномами, які є розв'язками цього рівняння (див. [7], теорема 20.1). Тому далі ми можемо вважати без зменьшення загальності, що функція f в умовах нашої леми є цілою дійсно аналітичною функцією. Тоді доданок із номером k ряду Фур'є цієї функції містить лише ті доданки $a_{jl}z^j\bar{z}^l$ розкладу функції f в ряд Тейлора по степеням z, $\bar{z}$, для яких $j-l=k$. Нехай лінійний оператор L_r визначений на лінійному просторі всіх цілих дійсно аналітичних функцій $g(z)$ на полем $\mathbb{C}$ з топологією рівномірної збіжності функцій з усіма їх частинними похідними на компактних підмножинах площини $\mathbb{C}$ формулою

$$\begin{aligned} &L_r g(z) := \\ &= \sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!p!} \partial^{p-s}\overline{\partial}^p f(z) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta-z|\le r} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Тоді оператор L_r відображує доданок ряду Фур'є функції f із номером k в доданок ряду Фур'є функції $L_r f$ із номером $k+s$. Оскільки $L_r g(z)\equiv 0$, то всі доданки ряду Фур'є функції $L_r g$ тотожно дорівнюють нулю. Звідси маємо твердження леми.

□

Лема 3.4.5. *Нехай* $0 < r < R$, $f \in C^{s+1}(B_R)$ *— радіальна функція, що задовольняє рівнянню (3.4) при всіх* $z \in B_{R-r}$, *та нехай* $f(z) = 0$ *в* B_r. *Тоді* $f \equiv 0$ *в* B_R.

Доведення. За наслідком 8.3 на с. 51 монографії [60] існує така функція $g \in C^s(-R, R)$, що $g = 0$ в $[-r, r]$ та виконується рівність

$$f(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho \cos\varphi)\, d\varphi.$$

Тепер достатньо показати, що $g \equiv 0$ на інтервалі $(-R,\ R)$.

Нехай

$$\Psi(z, \alpha) = \int_{|\zeta| \le r} G(\zeta + z)\Phi_\alpha(\zeta) d\xi d\eta, \tag{3.11}$$

де $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$,

$$G(\zeta) := g([\zeta]),$$

$$[\zeta] = \operatorname{Re}\zeta = \xi,$$

$$\Phi_\alpha(\zeta) = (\zeta e^{-i\alpha})^s.$$

З формули (3.11) маємо

$$\Psi(z, \alpha + \beta) = \int_{|\zeta - z| \le r} G(\zeta)\Phi_{\alpha+\beta}(\zeta - z) d\xi d\eta =$$

$$= \int_{|\zeta - z| \le r} G(\zeta)\Phi_\alpha(\zeta - z) e^{-i\beta s} d\xi d\eta,$$

звідки

$$\Psi(ze^{i\beta}, \alpha+\beta) = \int\limits_{|\zeta - ze^{i\beta}|\le r} G(\zeta)\Phi_\alpha(\zeta - ze^{i\beta})e^{-i\beta s}\, d\xi d\eta$$

$$= \int\limits_{|\zeta e^{i\beta} - ze^{i\beta}|\le r} G(\zeta e^{i\beta})\Phi_\alpha(\zeta e^{i\beta} - ze^{i\beta})e^{-i\beta s} d\xi d\eta$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z|\le r} G(\zeta e^{i\beta})\Phi_\alpha(\zeta - z) d\xi d\eta.$$

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi(ze^{i\beta}, \alpha+\beta)d\beta = \int\limits_{|\zeta - z|\le r} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(\zeta e^{i\beta})\, d\beta)\Phi_\alpha(\zeta - z)d\xi d\eta.$$

Тоді для кожного $z \in B_{R-r}$ послідовно отримаємо рівності

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g([\zeta e^{i\beta}])d\beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\rho\cos(\varphi+\beta))d\beta = 0$$

та

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi(ze^{i\beta}, \alpha+\beta)d\beta = 0,$$

де $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \rho < r$. Тепер визначемо функцію

$$H(u) := \Psi(u, 0), \qquad u \in (r-R,\ R-r).$$

Оскільки $g \in C^s(-R,\ R)$, то $H \in C^s(r-R,\ R-r)$. Тоді, враховуючи співвідношення

$$\Psi(ze^{i\beta}, \beta) = \Psi(ze^{i\beta}, 0)e^{-i\beta s} = H[ze^{i\beta s}]e^{-i\beta s} \qquad (z \in B_{R-r}, \beta \in \mathbb{R}),$$

маємо рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} H([ze^{i\beta}])e^{-i\beta s}d\beta = 0,$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\rho\cos\beta)e^{-i\beta s}d\beta = 0,$$

де $z = \rho \in \mathbb{R}$, $0 \le \rho < R - r$. Це дає рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\rho\cos\beta)\cos(\beta s)d\beta = 0.$$

За лемою 3.4.3 отримаємо, що $H(u)$ — поліном степеня $\le s - 1$. Тоді

$$\left(\frac{d}{du}\right)^s H \equiv 0.$$

Нарешті, маємо співвідношення

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^s H(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^s \Psi(x,0) =$$

$$= \int_{|\zeta|\le r} g^{(s)}([\zeta] + x)\Phi_0(\zeta)\, d\xi d\eta = 0.$$

Звідси, використовуючи одновимірний аналог теореми єдиності Ф. Йона для однорідних рівнянь згортки з розподілом із компактним носієм ([60], с. 150, випадок (2) теореми 1.1), маємо, що $g^{(s)}(x) = 0$ при $-R < x < R$. Тоді, враховуючи вище згадані умови на функцію g, отримаємо, що $g \equiv 0$ в інтервалі $(-R,\ R)$. $\square$

Для доведення теореми 3.4.2 нам знадобляться наступні конструкції. Нехай, як і раніше, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$, та нехай

$$J_{s+1}(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^{s+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(s+p+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \quad (z \in \mathbb{C})$$

— функція Бесселя (Γ — гамма-функція),

$$g_r(z) = g_{s,m,r}(z) := \frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}} - \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-s+1}},$$

$$Z(g_r) = \{z \in \mathbb{C} : g_r(z) = 0\},$$

$$Z_r = \{z \in Z(g_r) : \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{z \in Z(g_r) : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z = 0\}.$$

Для $\lambda \in Z_r$ символом n_λ позначається кратність нуля λ цілої функції g_r.

Для кожного $\varepsilon \in (0,\ \pi)$ справедлива асимптотична формула (див. [5])

$$J_s(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (s, 2m)}{(2z)^{2m}} -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (s, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}},$$

де $z \to \infty$ в куті $|\arg z| < \pi - \varepsilon$,

$$(s, m) = \frac{\Gamma(s+m+1/2)}{m!\Gamma(s-m+1/2)}.$$

Звідси можна отримати (див. лему 3.5.2), що

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leq c_1 \ln(|\lambda| + 1) \tag{3.12}$$

при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in Z_r$, де c_1 — деяка додатня константа.

Нехай $\varphi(z)$ — сумовна радіальна функція на комплексній площині $\mathbb{C}$. Тоді функція

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \varphi(z) J_0(\lambda|z|)\, dxdy \qquad (z = x + iy) \tag{3.13}$$

називається сферичним перетворенням функції φ ($\tilde{\varphi}(\lambda)$ визначена для тих $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких інтеграл в (3.13) існує). Відмітимо, що у випадку компактності носія функції φ її сферичне перетворення є парною цілою функцією експоненціального типу, яка характеризується теоремою Пелі–Вінера–Шварца для сферичних розподілів. Поняття сферичного перетворення відіграє в теорії радіальних розподілів з компактним носієм таку ж роль, як перетворення Фур'є–Лапласа в теорії довільних розподілів з компактним носієм, дозволяючи проводити дослідження розподілу за допомогою аналізу цілої, що відповідає цьому розподілу в образі заданого перетворення.

Сформулюємо декілька простих, але важливих для нас властивостей сферичного перетворення радіальних розподілів із компактним носієм, що випливають з його визначення простими обчисленнями, в яких δ позначає δ-функцію Дірака:

$$\widetilde{\Delta\varphi}(z) = -z^2\tilde{\varphi} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{E}'_{\mathrm{rad}}(\mathbb{C}),$$

$$\tilde{\delta} \equiv 1,$$

$$\widetilde{\Delta^k\delta} \equiv (-z^2)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Нехай радіальні розподіли із компактним носієм S_r та U_r визначені наступним чином:

$$S_r(\varphi) := \sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{2(p+1)(p-s)!p!}(4^{-1}\Delta)^p\delta,$$

$$U_r(\varphi) := \frac{1}{2\pi}\iint_{|z|\le r} \partial^s\varphi(z)z^s dxdy \quad (z = x+iy),$$

де φ — довільна функція із класу $C^\infty(\mathbb{C})$. Тоді маємо

$$\begin{aligned}\tilde{S}_r(z) &= \sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}(-1)^p}{2(p+1)(p-s)!p!4^{p-s}} z^{2p}\\ &= (-1)^s 2^{-2s} z^{2s} \sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}(-1)^{p-s}}{2(p+1)(p-s)!p!2^{2(p-s)}} z^{2(p-s)}\\ &= (-1)^s 2^{-2s} z^{2s} r^{2s+2} 2^s \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-2s+1}}\\ &= (-1)^s r^2 \left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2p-s}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-2s+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_r(z) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{|w|\le r} w^s\partial^s \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!p!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p} w^p\bar{w}^p\right) dudv\\ &= \frac{1}{2\pi}\iint_{|w|\le r} \left(\sum_{p=s}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p-s)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p} |w|^{2p}\right) dudv\\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{q+s}}{2(q+s)!q!(q+s+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(q+s)} r^{2(q+s+2)}\\ &= r^2(-1)^s\left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} 2^{s+1}\frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}},\end{aligned}$$

де $w = u + iv$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}\tilde{U}_r(z) - \tilde{S}_r(z) &= (-1)^s r^2 \left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} 2^s \frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}} \\ &\quad - (-1)^s r^2 \left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-2s+1}} \\ &= (-1)^s r^2 \left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} 2^s \left(\frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}} - \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-s+1}}\right) \\ &= (-1)^s r^2 \left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} g_{s,m,r}(z) = (-1)^s r^2 \left(\frac{zr}{2}\right)^{2s} g_r(z) \\ &= r^{2s+2} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^s g_r(z).\end{aligned}$$

Таким чином, для радіального розподілу

$$T_r := U_r - S_r$$

із носієм на замкненій кулі $\overline{B}_r$ ми встановили тотожність

$$\tilde{T}_r(z) \equiv r^{2s+2} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^s g_r(z).$$

Звідси, застосовуючи теорему Пелі–Вінера–Шварца (в обидві сторони) для сферичного перетворення [60] (с. 42, теорема 6.5), ми робимо висновок, що існує радіальний розподіл V_r із носієм на $\overline{B}_r$, для якого виконується тотожності

$$\tilde{V}(z) \equiv 2^{-2s} r^{2s+2} g_r(z),$$

$$T_r(\varphi) = \Delta^s V_r(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{C}).$$

Більш того, з вигляду функції $g_r(z)$ випливає, що в точці $z = 0$ вона має нуль порядку $2(m - s)$, і тоді функція $T_r(z)$ має в цій точці нуль порядку $2m$, тобто

$$\tilde{T}_r(z) \equiv z^{2m}\tilde{W}_r(z),$$

де $\tilde{W}_r(z)$ — парна ціла функція, для якої $\tilde{W}_r(0) \neq 0$, і яка є сферичним перетворенням деякого радіального розподілу із носієм в крузі $\overline{B}_r$ (за теоремою Пелі–Вінера–Шварца).

3.4.4 Доведення основних результатів

Доведемо теорему 3.4.1.

Доведення. Для цього, враховуючи лему 3.4.4, достатньо встановити, що $f_k(\rho) = 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}$. При $k = 0$ це випливає з леми 3.4.5. Оскільки $f \in C^\infty(B_R)$, то для кожного цілого k функція

$$F_k(z) := f_k(\rho)e^{ik\varphi}$$

$(z = \rho e^{i\varphi})$ також належить класу $C^\infty(B_R)$ (див. [60], с. 28-32).

Зафіксуємо $k > 0$. За лемою 3.4.4 функція $F_k(z)$ задовольняє умову (3.4) при всіх $z \in B_{R-r}$. Тоді функція $\partial^k F_k$ є радіальною та також задовольняює цю умову в B_{R-r}. У випадку, коли функція f є експоненціальним поліномом, це перевіряється безпосередньо з визначення функції F_k, звідси загальний випадок випливає за допомогою представлення функції f у вигляді границі послідовності експоненціальних поліномів, що задовольняють рівняння згортки (3.4) та збігаються до f в топології рівномірної збіжності з усіма частинними похідними на компактних підмножинах круга B_R (див. [7], теорема 20.1). З умови $f(z) = 0$ в B_r, випливає, що $F_k(z) = 0$ в B_R. З цього також маємо, що $\partial^k F_k(z) = 0$ для всіх $z \in B_r$. Застосовуючи лему 3.4.5 робимо висновок, що $\partial^k F_k \equiv 0$ в B_R, тобто функція F_k є k-аналітичною в крузі B_R та дорівнює нулю в B_R. За теоремою єдиності для дійсно аналітичних функцій маємо $F_k \equiv 0$ в B_R.

Аналогично встановлюється, що $\overline{\partial}^k F_{-k}$ є радіальною, задовольняє умову (3.4) в B_R та дорівнює нулю в B_r, звідки з леми 3.4.5 та теореми єдиності для дійсно аналітичних функцій маємо в B_R тотожність $F_{-k} \equiv 0$.

Таким чином $F_k \equiv 0$ в B_R для всіх цілих k. Тому $f \equiv 0$ в B_R. Теорему доведено. □

З доведення теореми 3.4.1 випливає, що якщо функція $f(z)$ співпадає при деякому цілому k з функцією $F_k(z)$ в крузі B_R, то умову умову $f \in C^\infty(B_R)$ в цій теоремі можно замінити умовою $f \in C^{|k|+2m-s-2}(B_R)$.

Тепер доведемо теорему 3.4.2.

Доведення. Розглянемо побудований вище радіальний розподіл T_r. Нехай ε — довільне число із інтервалу $(0,\ r)$. Використовуючи твердження (4) теореми 2.1 на с. 176 монографії [60], де представлено узагальнення теореми єдиності Ф. Йона на випадок рівняннь згортки із радіальним розподілом з компактним носієм, ми робимо висновок про існування радіальної функції $g \in C^\infty(\mathbb{C})$, такої, що $T_r * g \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, $g \not\equiv 0$ та $g(z) = 0$ для всіх $z \in B_r$. Нехай

$$f(z) := \partial^s g(z)$$

$(z \in \mathbb{C})$. Тоді $f(z) = 0$ для всіх $z \in B_r$ та $f \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$ (інакше $\partial^s g(z) \equiv 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}$, і тоді g — дійсно аналітична функція в $\mathbb{C}$, звідки за теоремою єдиності $g \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, що суперечить умову $g \not\equiv 0$). З іншого боку умова $T_r * g \equiv 0$ означає, що

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{2(p+1)(p-s)!p!}(4^{-1}\Delta)^p g(z) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z|\leq r} \partial^s g(\zeta)(\zeta-z)^s d\xi d\eta$$

$(\zeta = \xi + \eta)$, зввідки маємо потрібну нам тотожність

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{2(p+1)(p-s)!p!}\partial^{p-s}\overline{\partial}^p f(z) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z|\leq r} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\xi d\eta.$$

□

3.5 Опис гладких функцій з узагальненою умовою середнього значення по кругах фіксованого радіуса

У цьому підрозділі дається повний опис тих функцій $f \in C^\infty(B_R)$, для яких умова (3.4) виконується для фіксованого $r \in (0,\ R)$ при всіх $z \in B_{R-r}$. З цього опису випливає, що довільний розв'язок рівняння $\partial^{m-s}\overline{\partial}^m f = 0$ задовольняє умову (3.4)при кожному $r \in (0,\ R)$.

3.5.1 Формулювання основного результату

Для $\rho \geq 0$, $\lambda \in Z_r$ та $k \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$\Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho) = \left(\frac{d}{dz}\right)^\eta (J_k(z\rho))\,|_{z=\lambda}.$$

де $\eta = 0, ..., n_\lambda - 1$, а n_λ — кратність нуля λ.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $R > 0$, $r \in (0,\ R)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$. *Тоді функція* $f \in C^\infty(B_R)$ *задовольняє умову (3.4) при всіх* $z \in B_{R-r}$ *тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти Фур'є* $g_k(\rho)$ *функції* $g(z) := \partial^{m-s}\bar{\partial}^m f(z)$ *мають вигляд*

$$g_k(\rho) = \sum_{\lambda \in Z_r} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,\eta,k} \Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho),$$

де для будь-якого $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$\max_{\eta=0,\ldots,n_\lambda-1} |c_{\lambda,\eta,k}| = O(|\lambda|^{-\alpha}), \qquad \lambda \to \infty \tag{3.14}$$

($0 \le \rho < R$, $k \in \mathbb{Z}$*).*

Зробимо декілька зауважень стосовно формулювання цієї теореми. Перш за все, з приналежності функції f до класу $C^\infty(B_R)$ випливає приналежність до цього класу і функції g. Тому всі доданки ряду Фур'є функції g є нескінченно диференціовними функціями (в координатах x, y), а сам цей ряд збігається до функції g в топології простору $\mathcal{E}(B_R)$, тобто в топології рівномірної збіжності з усіма своїми частинними похідними на компактних підмножинах круга B_R. З іншого боку, в наступній лемі встановлюється, що всі нулі λ функції $g_r(z)$ є простими при достатньо великих за модулем λ. Тому з (3.14) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ всі доданки ряду

$$\sum_{\lambda \in Z_r} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,\eta,k} \Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho) e^{ik\varphi}$$

є нескінченно диференційовними функціями відносно координат

x, y $(z = x + iy = \rho e^{i\varphi})$, а сам цей ряд збігається до k-го доданку ряду Фурь'є функції g в топології простору $\mathcal{E}(B_R)$.

3.5.2 Дослідження асимптотичної поведінки нулів функції $g_r(z)$

Перш за все відмітимо, що з відомої асимптотики функцій Бесселя випливає, що функція $g_r(z)$ є парною цілою функцією експоненціального типу, яка зростає як многочлен на дійсній вісі (див. [5], § 29). Звідси випливає, що множина Z_r нескінченна. Насправді, в супротивному виппадку ми мали би представлення

$$g_r(z) = z^{2(m-s)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{f(z)},$$

де $n \in \mathbb{N}$, $f(z)$ — обмежена ціла функція, для якої функція $e^{f(z)}$ є парною. Звідси маємо $f(z) \equiv 0$, що суперечить означенню функції $g_r(z)$. Наступна лема відіграє центральну роль в доведенні теореми 3.5.1.

Лема 3.5.2. *Існують такі додатні сталі c_1, c_2 та c_3, що при $\lambda \in Z_r$, $|\lambda| \geq c_3$ виконуються нерівності*

$$|\mathrm{Im}\lambda| \leq c_1 \ln(1 + |\lambda|) \tag{3.15}$$

та

$$|g_r'(\lambda)| > c_2 |\lambda|^{2m-s+1}. \tag{3.16}$$

Зокрема, всі достатньо великі за модулем нулі функції $g_r(z)$ є простими.

Доведення. Нехай

$$P(z) := z^{s+1}\sum_{p=s}^{m-1}\frac{z^{2p-s+1}(-1)^{p-s}}{(2p+2)(p-s)!p!2^{2p-s}} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

і нехай $\lambda \in Z_r$. Тоді $g_r(\lambda) = 0$. Скористаємось наступною добре відомою асимптотикокою функцій Бесселя, яка є вірною при кожному $\varepsilon \in (0,\ \pi)$ в куті $|\arg z| < \pi - \varepsilon$, (див. [5], § 29), для визначенності далі ми вважаємо, що $\varepsilon = 3\pi/4$):

$$\begin{aligned}&J_{s+1}(\lambda r) = (2/(\pi\lambda r))^{1/2}[\cos(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4)\\ &+\frac{4(s+1)^2-1}{8\lambda r}\sin(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4)](1+o(1)), \qquad \lambda \to \infty.\end{aligned}$$

З цієї асимптотики та рівності

$$J_{s+1}(\lambda r) = P(\lambda r),$$

що еквівлентна умову $g_r(\lambda) = 0$, ми маємо

$$\begin{aligned}J_{s+1}(\lambda r) = (2/(\pi\lambda r))^{1/2}[&\cos(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4)\\ &+\frac{4(s+1)^2-1}{8\lambda r}\sin(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4)]\\ &= P(\lambda r)(1+o(1)), \qquad \lambda \to \infty\end{aligned}$$

(оскільки $P(z)$ — поліном). Звідси, використовуючи формули

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

ми послідовно отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\cos(\lambda r-(s+1)\pi/2-\pi/4)\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{1}{2}[\exp(i\lambda r-i(s+1)\pi/2-i\pi/4)\\
&\qquad\qquad\qquad+\exp(-i\lambda r+i(s+1)\pi/2+i\pi/4)]\\
&\qquad=\frac{1}{2}[\exp(-\mathrm{Im}(\lambda r)+i\mathrm{Re}(\lambda r)-i(s+1)\pi/2-i\pi/4)\\
&\qquad\qquad\qquad+\exp(\mathrm{Im}(\lambda r)-i\mathrm{Re}(\lambda r)+i(s+1)\pi/2+i\pi/4)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(\lambda r-(s+1)\pi/2-\pi/4)\\
&\qquad\qquad\qquad=-i\frac{1}{2}[\exp(i\lambda r-i(s+1)\pi/2-i\pi/4)\\
&\qquad\qquad\qquad-\exp(-i\lambda r+i(s+1)\pi/2+i\pi/4)]\\
&\qquad=-\frac{i}{2}[\exp(-\mathrm{Im}(\lambda r)+i\mathrm{Re}(\lambda r)-i(s+1)\pi/2-i\pi/4)\\
&\qquad\qquad\qquad-\exp(\mathrm{Im}(\lambda r)-i\mathrm{Re}(\lambda r)+i(s+1)\pi/2+i\pi/4)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(\lambda r-(s+1)\pi/2-\pi/4)\\
&\qquad\qquad+\frac{4(s+1)^2-1}{8\lambda r}\sin(\lambda r-(s+1)\pi/2-\pi/4)\\
&\qquad=\frac{1}{2}[\exp(-\mathrm{Im}(\lambda r)+i\mathrm{Re}(\lambda r)-i(s+1)\pi/2-i\pi/4)\\
&\qquad+\exp(\mathrm{Im}(\lambda r)-i\mathrm{Re}(\lambda r)+i(s+1)\pi/2+i\pi/4)]\\
&-i\frac{4(s+1)^2-1}{16\lambda r}[\exp(-\mathrm{Im}(\lambda r)+i\mathrm{Re}(\lambda r)-i(s+1)\pi/2-i\pi/4)\\
&\qquad\qquad-\exp(\mathrm{Im}(\lambda r)-i\mathrm{Re}(\lambda r)+i(s+1)\pi/2+i\pi/4)]
\end{aligned}$$

З останнього ланцюжка рівностей випливає, що при $\lambda\to\infty$,

$\lambda \in Z_r$, ми маємо $|\mathrm{Im}(\lambda r)| \to \infty$, бо інакше функція

$$\cos(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4) + \frac{4(s+1)^2 - 1}{8\lambda r} \sin(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4)$$

обмежена при $|\lambda| \geq 1$, $\lambda \in Z_r$, і тоді $J_{s+1}(\lambda r) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in Z_r$. Звідси послідовно випливають асимптотичні рівності

$$\begin{aligned} &|\cos(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4) + \frac{4(s+1)^2 - 1}{8\lambda r} \sin(\lambda r - (s+1)\pi/2 - \pi/4)| \\ &\qquad = \frac{1}{2} e^{|\mathrm{Im}(\lambda r)|}(1 + o(1)), \qquad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in Z_r, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} e^{|\mathrm{Im}(\lambda r)|} = (\pi|\lambda|r/2)^{1/2} |P(\lambda r)|(1 + o(1)), \qquad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in Z_r,$$

остання з яких дає нерівність (3.15). Далі, використовуючи відому формулу диференцювання функцій Бесселя

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_{s+1}(z)}{z^{s+1}}\right) = -\frac{J_{s+2}(z)}{z^{s+1}}$$

і те, що $|\mathrm{Im}(\lambda r)| \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in Z_r$, ми маємо в точках $\lambda \in Z_r$ наступне:

$$\begin{aligned} g_r'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{J_{s+1}(\lambda r) - P(\lambda r)}{(\lambda r)^{s+1}}\right) \\ &= -\frac{J_{s+2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{s+1}} r - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{P(\lambda r)}{(\lambda r)^{s+1}}\right) \\ &= -\frac{J_{s+2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{s+1}} r - Q(\lambda r), \end{aligned}$$

де

$$Q(\lambda r) := \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{P(\lambda r)}{(\lambda r)^{s+1}}\right).$$

Тоді, розмірковуючи так само, як і для функції J_{s+1}, і використовуючи асимптотику

$$J_{s+2}(\lambda r) = (2/(\pi\lambda r))^{1/2}[\cos(\lambda r - (s+2)\pi/2 - \pi/4)$$
$$+\frac{4(s+2)^2-1}{8\lambda r}\sin(\lambda r - (s+2)\pi/2 - \pi/4)](1+o(1)), \qquad \lambda\to\infty,$$

ми встановлюємо, що

$$\begin{aligned}|J_{s+2}(\lambda r)| &= \left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2}\frac{1}{2}e^{|\mathrm{Im}(\lambda r)|}(1+o(1))\\ &= \left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2}(\pi|\lambda|r/2)^{1/2}|P(\lambda r)|(1+o(1))\\ &= |P(\lambda r)|(1+o(1)), \qquad \lambda\to\infty, \quad \lambda\in Z_r,\end{aligned}$$

Звідси випливає наступна оцінка:

$$\begin{aligned}|g_r'(\lambda)| &\geq \frac{|J_{s+2}(\lambda r)|}{|\lambda r|^{s+1}}r - |Q(\lambda r)|\\ &\geq |P(\lambda r)|(1+o(1)) - Q(\lambda r)\\ &= |P(\lambda r)|(1+o(1))\\ &= c|\lambda|^{2m-s+1}(1+o(1)), \qquad \lambda\to\infty, \quad \lambda\in Z_r,\end{aligned}$$

де

$$c = \frac{4}{m!(m-s-1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2m-s+1}$$

— коефіцієнт полінома $P(\lambda r)$ при $(\lambda r)^{2m-s+1}$ (ми скористались тим, що степені поліномів P і Q дорівнюють відповідно $2m-s+1$ та $2m-s$). Звідси маємо (3.16). □

3.5.3 Доведення основного результату

Доведення. Нехай функція $f \in C^\infty(B_R)$ задовольняє умову (3.4) при всіх $z \in B_{R-r}$, і нехай

$$G(z,\zeta) := \ln\left|\frac{R^2-\zeta\bar{z}}{R(\zeta-z)}\right|, \qquad z,\zeta \in B_R, \quad z \neq \zeta,$$

— функція Гріна для оператора Лапласа в крузі B_R. Тоді інтегральний оператор

$$Lf(z) := \int_{B_R} G(z,\zeta) f(\zeta)\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta)$$

переводить функцію f в функцію $h = Lf \in C^\infty(B_R)$, яка прямує до нуля при $|z| \to R$ і задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta h = f$$

в крузі B_R. Звідки випливає, що для функції

$$d(z) := 4^s \overline{\partial}^s (L^s f)(z)$$

із класу $C^\infty(B_R)$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} \partial^s d(z) &= 4^s \partial^s \overline{\partial}^s (L^s f)(z) = \Delta^s (L^s f)(z) \\ &= \Delta^{s-1}(L^{s-1} f)(z) = \ldots = \Delta(Lf)(z) = f(z) \qquad \forall\, z \in B_R. \end{aligned}$$

Тоді із результатів підрозідлу 3.4.3 випливає, що функція $f(z)$ задовольняє умову 3.4) при всіх $z \in B_{R-r}$ тоді і тількі тоді, коли функція d є в B_R розв'язком рівняння згортки $T_r * d = 0$, де радіальний розподіл T_r визначено у цьому підрозділі. З іншого боку, застосовуючи теорему Пелі–Вінера–Шварца для сферичного перетворення, ми бачимо, що виконання (3.4) при всіх $z \in B_{R-r}$

еквівалентно тому, що, функція d є в B_R розв'язком рівняння згортки $W_r * (\Delta^m d) = 0$, де W_r — радіальний розподіл із носієм в $\overline{B}_r$, сферичне перетворення якого має вигляд $\tilde{W}_r(z) \equiv z^{-2m} T_r(z)$. Звідки випливає, що

$$\tilde{W}_r(z) \equiv z^{-2m} T_r(z) \equiv z^{-2m} r^{2s+2} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^s g_r(z),$$

тому $\tilde{W}_r(0) \neq 0$. За попередньої леми випливає та з теореми 2.3 на с. 180 монграфії [60], де за деких загальних умов дано повний опис множини нескінченно диференційовних розв'язків рівнянь згортки з радіальним розподілом із компактним носієм, випливає, що розподіл W_r задовольняє умов цієї теореми, і тому для коефцієнтів Фур'є функції $g(z) = \Delta^m d(z)$ має місце представлення

$$g_k(\rho) = \sum_{\lambda \in Z_r} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,\eta,k} \Phi_{\lambda,\eta,k}(\rho), \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

в якому коефіцієнти $c_{\lambda,\eta,k}$ задовольняють умову (3.14). Враховуючи, що $g(z) = \partial^m d(z) = \partial^{m-s} \overline{\partial}^m f(z)$ для всіх $z \in B_R$, ми отримаємо заключення нашої теореми.

□

З доведення теореми 3.5.1 випливає новий метод доведення теореми 3.4.1. А саме, припустемо, що умови теорми 3.4.1 виконується. Розглянемо функцію

$$g(z) := \partial^{m-s} \overline{\partial}^m f(z).$$

Ця функція належить до класу $C^\infty(B_R)$, і з попередніх міркувань випливає що вона є розв'язком в B_R рівняння згортки

$$W_r * g = 0,$$

де W_r — радіальний розподіл з носієм в $\overline{B}_r$. Оскільки $f = 0$ в крузі B_r, то також і $g = 0$ в цьому крузі. Застосовучи до розподілу W_r теорему 2.2.2 ми маємо $g \equiv 0$ в B_R. Це означає що функція f задовольняє рівняння $\partial^m d(z) = \partial^{m-s}\overline{\partial}^m f = 0$ в B_R. Оскільки розв'язки такого рівняння є дійсно аналітичними функціями, а $f = 0$ в B_r, то за теоремою єдиності для дійсно аналітичних функцій маємо $f \equiv 0$ в B_R.

3.6 Висновки до розділу 3

У цьому розділі вивчено клас нескінченно диференійовних функцій в крузі на комплексній площині, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса, тобто є розв'язками однорідного рівняння згортки спеціального вигляду, що узагальнює класичну властивість середнього значення по кругах для гармонічних функцій.

Встановлено теорему єдиності типу Йона та побудовано приклади функцій, що демонструють її непокращуваність.

В термінах розкладу коефіцієнтів Фур'є в ряди по спеціальних функціях, що визначаються заданим оператором згортки, повністю описано клас нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса. З цього опису випливає, що розв'язки однорідних еліптичних рівнянь, ліва частина яких є добутком деяких натуральних степенів (які визначаються параметрами заданого рівняння згортки) формальних похідних Коші, задовольнють узагальнену умову середнього значення по кругах. Цей опис використовується в наступному підрозділі при дослідженні гладких функцій в крузі, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах з двома фіксованими радіусами.

Розділ 4

Теореми про два радіуси

З результатів попереднього розділу (теорема 3.5.1) випливає достатність того, що функція $f \in C^{\infty}(B_R)$ задовольняє еліптичному рівнянню $\partial^{m-s}\overline{\partial}^m f = 0$, для виконання узагальненої умови середнього значення по кругах довільного фіксованого радіуса. У той же час існують функції $f \in B_R$, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах довільного фіксованого радіуса в крузі B_R, але не є розв'язками цього рівняння. Тому вивникає питання: за яких додаткових умов функція така f буде його розв'язком. По аналогії з класичними результатами, природньо розглянути в якості такої умови узагальнену умову середнього значення по кругах з іншим фіксованим радіусом. Саме дослідженню цього випадку (теоремам про два радіуси) і присвячений цей розділ. У випадку $R = \infty$ також можливий інший тип додаткових умов, пов'язаний з накладанням певних обмежень на поведінку функції, що розглядається, на нескінченності. В дисертації обмеження такого типу не розглядаються, але наводиться декілька відомих результатів для їх порівняння з відповідними теоремами про два радіуси.

4.1 Теореми про два радіуси для поліномів, голоморфних та поліаналітичних функцій

Як вже згадувалось раніше перші теореми про два радіуси були встановлені Ж. Дельсартом у 1961 році для гармонічних функцій у багатовимірному евклідовому просторі. У цьому підрозділі ми сформулюємо низку інших відомих результатів такого типу.

Нехай $n \geq 1$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, і нехай $B(y,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$. Також позначимо через Λ_m $(m \in \mathbb{N})$ множину поліномів вигляду

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{k-1} c_{k,l}|x|^{2l}P_{m-k,l}(x),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $c_{k,l} \in \mathbb{C}$, а $P_{m-k,l}$ належить $\mathfrak{H}_{m-k}$ — простору однорідних гармонічних поліномів степеня $m-k$. Λ_0 складається за визначенням лише із функції, що тотожньо дорывнюэ нулю. Для цілого m позначимо через A_m множину всіх відношень додатних нулів функції Бесселя J_m.

Наступна теорема встановлена в [3] і є посилює відомий результат Л. Зальцмана [64].

Теорема 4.1.1. [3] Нехай $f \in L_{\mathrm{loc}}(B^n)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, і нехай для кожної кулі $B(y,r) \subset B^n$ з $r \in \{r_1, r_2\})$ і для всіх $P \in \mathfrak{H}_m$ виконується рівность

$$\int\limits_{B(y,r)} P(x-y)f(x)dx = 0.$$

Тоді

1) якщо $r_1 + r_2 < 1$ та $\frac{r_1}{r_2} \notin A_{n/2+m}$, то f співпадає майже всюди з поліномом із Λ_m;

2) якщо $r_1+r_2 > 1$ або $\frac{r_1}{r_2} \in A_{n/2+m}$, то існує відмінна від полінома функція зі вказаною умовою.

Розглянемо тепер випадок із двома функціями.

Теорема 4.1.2. *[3] Нехай $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ та*

$$\int\limits_{B(y,r_1)} P(x-y)f(x)dx = 0 = \int\limits_{B(y,r_2)} P(x-y)g(x)dx \tag{4.1}$$

для всіх $P \in \mathfrak{H}_m$ та всіх $y \in \mathbb{R}^n$.

Тоді

1) якщо $\frac{r_1}{r_2} \notin A_{n/2+m}$ та $f - g = o\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$ при $x \to \infty$, тоді виконується умова $f \equiv g \in \Lambda_m$;

2) $\frac{r_1}{r_2} \in A_{n/2+m}$ та $f - g = o\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$ при $x \to \infty$, то f, g є тотожньо рівними, але можуть не належати до Λ_m;

3) для будь-яких r_1 та r_2 існують різні функції f і g такі, які не належать Λ_m, але задовольняють умову (4.1), такі, що

$$f - g = O\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$$

при $x \to \infty$.

Якщо припустити, що $m = 0$ та $f \equiv g$, то знову отримаємо теорему Зальцмана [64].

Теорема 4.1.3. [3] Нехай $m < l$, $r > 0$ є фіксованим, $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$

та виконується

$$\int\limits_{B(y,r)} P(x-y)f(x)dx = 0 = \int\limits_{B(y,r)} Q(x-y)g(x)dx \tag{4.2}$$

при всіх $P \in \mathfrak{H}_m$, $Q \in \mathfrak{H}_l$ для будь-якого $y \in \mathbb{R}^n$.

Тоді

1) якщо $f - g = o\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$ при $x \to \infty$, то $f \equiv g \in \Lambda_m$;

2) існують різні функції f і g, що не належать Λ_m, які задовольняють умові (4.2) та

$$f - g = O\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$$

при $x \to \infty$.

При $m = 0$, $g \equiv 0$ ми маємо звідси теорему відому єдиності для функцій з нульовими середніми по кулях (див. [4]).

Розглянемо тепер теореми про два радіуси для функцій на комплексній площині, пов'язані з послабленням умов у відомій теоремі Морери–Карлемана про характеризацію голоморфних функції $f \in C(B)$ умовою рівності нулю інтегралів $\int f(z)\,dz$ по кожному колу, що належить одиничному кругу B, та аналогами цієї теореми для поліаналітичних функцій.

Теорема 4.1.4. [59] Нехай $f \in C(B)$ та нехай $f(z)\,dz = 0$ для інтегрування по кожному колу з B радіусів r_1 та r_2.

Тоді

1) f є голоморфною в B при $r_1 + r_2 < 1$ та $\frac{r_1}{r_2} \notin A_1$;

2) якщо $r_1 + r_2 > 1$ або $\frac{r_1}{r_2} \in A_1$, тоді існують неголоморфні функції із вище вказаними умовами інтегрування.

Нехай тепер n — фіксоване натуральне число, $f \in C(\mathbb{C})$, і нехай для деякого фіксованого $r > 0$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується рівність

$$\int\limits_{B(z,r)}\int f(\zeta)(\zeta - z)^n d\xi d\eta = 0. \tag{4.3}$$

Чи є вірним, що f — n-аналітична в $\mathbb{C}$? Аналогічне питання можна ставити, якщо у (4.3) розглядати інтеграли по колам (із заміною n на $n-1$).

У загальному випадку відповідь на обидва питання є негативною, однак, при деяких додаткових припущеннях n-аналітичність має місце. Одне з таких припущень пов'язано зі збільшенням кількості всіх можливих значень r в умові (4.3). Наприклад, якщо (4.3) має місце при всіх $r > 0$ та $z \in \mathbb{C}$, то f - n-аналітична (див. [50]). Найбільш яскравим результатом у цьому напрямку є теорема Л.Зальцмана [65], яка стверджує, що для n-аналітичності функції f достатньо виконання умови (4.3) лише для $r = r_1, r_2$, де r_1 та r_2 — фіксовані додатні числа, відношення яких не дорівнює відношенню нулів функції Бесселя J_{n+1}. Л.Зальцман вивчав також випадок, коли f задовольняє (4.3) при двух різних n (див. [64]).

У попередніх роботах суттєвим було те, що функція f з умовою (4.3) задана на всій площині $\mathbb{C}$ (див. [64], [65]). Якщо ж область визначення функції є обмеженою, то основні методи робіт, розроблені для випадку $\mathbb{C}$ і пов'язані з перетворенням Фур'є, стають вже непридатними. В. В. Волчков розглянув випадок, коли f задана в крузі B_R.

Теорема 4.1.5. [2] Нехай $0 < r_1 < r_2 < R$, $f \in C(B_R)$, і нехай при всіх $r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$ функція f задовольняє умову (4.3).

Тоді:

1) якщо $r_1 + r_2 < R$ та $\frac{r_1}{r_2} \notin A_{n+1}$, то f — n-аналітична в B_R;

2) якщо $r_1 + r_2 > R$ або $\frac{r_1}{r_2} \in A_{n+1}$, то існує $f \in C^\infty(B_R)$, яка задовольняє умову (4.3) $r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$ і не є n-аналітичною в $B_R r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$.

Тепер розглянемо випадок з двома значеннями n.

Теорема 4.1.6. [2] Нехай $r \in (0,\ R)$, n_1 та n_2 — натуральні числа, $f \in C(B_R)$, і нехай для всіх $z \in B_r$ та $n \in \{n_1, n_2\}$ функція f задовольняє умову (4.3).

Тоді при $n_1 < n_2$ маємо:

1) якщо $R > 2r$, то f — n_1-аналітична в B_R;

2) якщо $R < 2r$, то існує $f \in C^\infty(B_R)$ із вказаною умовою, яка не є n_1-аналітичною в крузі B_R.

Для цілих невід'ємних чисел μ та ν позначимо через $A(\mu, \nu)$ множину всіх чисел вигляду β/γ, де β та γ є відповідно додатними нулями функцій Бесселя J_μ та J_ν.

Означення 4.1.7. *Число $\tau > 0$ називаєтьcя цілком апроксимованим елементами з $A(\mu, \nu)$ (позначення $t \in WA(\mu, \nu)$), якщо для кожного $N > 0$ існують β та γ, які є відповідно додатними* *нулями функцій Бесселя* J_μ *та* J_ν *і такі, що*

$$\left|\tau - \frac{\beta}{\gamma}\right| < (2+\gamma)^{-N}.$$

Найбільш загальна форма локальних теорем про два радіуси для поліаналітичних функцій міститься у наступному результаті.

Теорема 4.1.8. ([60], с. 402) Нехай $r_1, r_2 > 0$, $R > max\{r_1, r_2\}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m = \min(m_1, m_2)$.

Тоді виконуються наступні твердження:

1) Нехай $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ та

$$\int\limits_{|z|=r_j} f(z+\zeta) z^{m_j-1} dz = 0 \tag{4.4}$$

для майже всіх $\zeta \in B_{R-r}$, $j = 1, 2$.

Тоді:

(a) якщо $r_1 + r_2 < R$ та $\frac{r_1}{r_2} \notin A(m_1, m_2)$, то функція f є m-аналітичною в B_R;

(b) якщо $r_1 + r_2 = R$, $\frac{r_1}{r_2} \notin A(m_1, m_2)$ та $f \in C^\infty(B_R)$, то f є m-аналітичною в B_R;

(c) якщо $r_1 + r_2 = R$, $\frac{r_1}{r_2} \in WA(m_1, m_2) \backslash A(m_1, m_2)$, то f є m-аналітичною в B_R.

(d) Якщо $r_1 + r_2 = R$ та $\frac{r_1}{r_2} \in WA(m_1, m_2)$, то для кожного $s \in \mathbb{N}_0$ існує $f \in C^s(B_R)$, що задовольняє (4.4), але не є m-аналітичною в B_R.

(e) Якщо $r_1 + r_2 > R$, то існує $\in C^\infty(B_R)$, що задовольняє (4.4), але не є m-аналітичною в B_R.

(f) Якщо $\frac{r_1}{r_2} \in A(m_1, m_2)$, тоді існує дійсно аналітична функція f на $\mathbb{C}$ така, що рівність (4.4) виконується для всіх $\zeta \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, але f не є m-аналітичною в B_R.

4.2 Локальна теорема про два радіуси для функцій, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах

Нагадаемо, що для $r > 0$ ми позначаємо через $Z(g_r)$ множину всіх нулів цілої функції

$$g_r(z) = g_{s,m,r}(z) := \frac{J_{s+1}(zr)}{(zr)^{s+1}} - \sum_{p=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(p-s)}(-1)^{p-s}}{(p+1)!(p-s)!2^{2p-s+1}},$$

$Z_r = Z_{r,m} := Z(g_r) \setminus \{0\}$.

Наступна теорема є основним результатом цього розділу і дисертації в цілому.

Теорема 4.2.1. *Нехай* $r_1, r_2 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s < m$. *Тоді:*
1) якщо $R > r_1 + r_2$, $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} = \varnothing$, $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$ *та при всіх* $r \in \{r_1, r_2\}$ *та* $z \in B_{R-r}$ *виконується рівність (3.4), то функція* f *належить до класу* $C^\infty(B_R)$ *та задовольняє в* B_R *рівняння*

$$\partial^{m-s}\bar{\partial}^m f = 0; \tag{4.5}$$

2) якщо $\max\{r_1, r_2\} < R < r_1 + r_2$ *або* $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} \neq \varnothing$, *то існує функція* $f \in C^\infty(B_R)$, *що задовольняє умову (3.4) при всіх* $r \in \{r_1, r_2\}$ *та* $z \in B_{R-r}$ *і не є розв'язком рівняння (5.6) в* B_R.

У випадку $m = 1$, $s = 0$ маємо

$$g_{s,m,r}(z) \equiv 2^{-1} d_2(zr),$$

де $d_n(z) := 2^{n/2}\Gamma(n/2+1)J_{n/2}(z)z^{-n/2}-1$. Тому умова $Z_{r_1}\cap Z_{r_2} = \varnothing$ еквівалентна тому, що r_1/r_2 не є відношенням нулів функції $d_2(z)$, і твердження 1) та 2) теореми 4.2.1 відновлюють відповідно твердження (1) та (4) теореми 5.4 на с. 399 монографії В. В. Волчкова[4] при $n = \dim \mathbb{R}^n = 2$, де представлена локальна версія згаданого раніше класичного результату Ж. Дельсарта [30]. У цій теоремі також досліджено випадок $R = r_1 + r_2$ і показано, що якщо r_1/r_2 не є відношенням нулів функції $d_n(z)$, то кожна функція $f \in C^\infty(B_R)$, яка співпадає зі своїми усередненнями (по мірі Лебега) по кулях радіусів r_1 та r_2 відповідно в B_{R-r_1} та B_{R-r_2}, є гармонічною в B_R, і для довільних $k \in \mathbb{N}$, $r_1 > 0$ та $r_2 > 0$, $r_1 + r_2 = R$, існує негармонічна функція $f \in C^k(B_R)$ з такою властивістю ($n \geq 2$). У теоремі 4.2.1 випадок $r_1+r_2 = R$ залишається відкритим.

Доведення. Нехай $R > r_1 + r_2$, $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} = \varnothing$, $f \in C^{2m-2-s}(B_R)$, і нехай рівність (3.4) виконується при всіх $r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$. Доведемо, що f задовольняє рівняння (5.6) в B_R.

Для цього зафіксуємо дійсну невід'ємну функцію $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$, для якої виконується рівність $\iint_{\mathbb{C}} \varphi(z)\,dxdy = 1$, і нехай,

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n} \iint_{\mathbb{C}} \varphi(z/\varepsilon)\,dxdy,$$

де $\varepsilon > 0$, $z \in \mathbb{C}$. Тоді, використовуючи стандартні властивості згортки, ми маємо, що для довільного $\varepsilon \in (0,\ R - r_1 - r_2)$ функція

$$f_\varepsilon(x) := f * \varphi_\varepsilon(x) = \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

визначена в крузі $B_{R-\varepsilon}$, належить до класу $C^\infty(B_{R-\varepsilon})$ та задовольняє умову (3.4) при всіх $r = \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-\varepsilon}$.

З іншого боку, викоритовуючи теорему Пелі–Вінера–Шварца для сферичного перетворення, ми бачимо, що виконання (3.4) при всіх $z \in B_{R-r}$ еквівалентно тому, що, функція

$$g(z) := \partial^{m-s}\bar{\partial}^m f$$

є в B_R розв'язком рівняння згортки

$$W_r * (g_\varepsilon) = 0,$$

де W_r — радіальний розподіл із носієм в $\overline{B}_r$, сферичне перетворення якого має вигляд

$$\tilde{W}_r(z) \equiv z^{-2m} T_r(z) \equiv z^{-2m} r^{2s+2} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^s g_r(z),$$

і тому $\tilde{W}_r(0) \neq 0$ (див. доведення теореми 3.5.1), а $g_\varepsilon(z) := \partial^{m-s}\bar{\partial}^m f_\varepsilon$ Застосовуючи до розподілу W_r теорему 4.8 на с. 204 монографії [60], ми звідси маємо, що

$$g_\varepsilon(z) \equiv 0$$

в $B_{R-\varepsilon}$ для довільного $\varepsilon \in (0,\ R - r_1 - r_2)$. Оскількі із властивостей згортки випливає, що $g_\varepsilon(z) \to g(z)$ рівномірно на компатних підмножинах круга B_R, то ми отримаємо перше твердження теореми.

Доведемо друге твердження. Якщо $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} \neq \varnothing$, то існує $\lambda \in Z_{r_1} \cap Z_{r_2}$. Тоді $\lambda \neq 0$ і за теоремою 3.5.1 маємо, що радіальна функція

$$J_0(\lambda|z|)$$

задовольняє рівняння (3.4) при всіх $r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$.

Залишилось розглянути випадок $Z_{r_1} \cap Z_{r_2} = \varnothing$, $\max\{r_1, r_2\} < R < r_1 + r_2$. Тоді функція

$$\frac{\tilde{W}_{r_1}(z)}{\tilde{W}_{r_2}(z)}$$

є цілою і не має нулів. Тому кожна з функцій $\tilde{W}_{r_1}(z)$ та $\tilde{W}_{r_2}(z)$ не має нулів. Використовуючи теорему 4.9 на с. 208 монографії [60], звідси маємо існування нетривіальної функції $g \in C^\infty(B_R)$, для якої $g * W_{r_1} \equiv 0$ в B_{R-r_1}, $g * W_{r_2} \equiv 0$ в B_{R-r_2}. Розглянемо оператор $L : C^\infty(B_R) \to C^\infty(B_R)$, визначений в підрозділі 3.5.3. Тоді функція

$$f(z) := \partial^s L^m g(z)$$

належить класу $C^\infty(B_R)$, задовольняє рівняння (3.4) при всіх $r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$, і не є розв'язком рівняння (5.6) в B_R (бо інакше було б $g(z) \equiv 0$ в B_R). $\square$

Розміровуючи так само, як і в доведенні теореми 4.2.1 можно встановити наступну теорему (в попередніх позначеннях).

Теорема 4.2.2. *Нехай* $0 < r < R$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2$, $s \in \{0, ..., m_1 - 1\}$.

Тоді

1) якщо $R > 2r$, $Z_{r,m_1} \cap Z_{r,m_2} = \emptyset$, $f \in C^{2m_2-2-s}(B_R)$ *та при всіх* $z \in B_{R-r}$ *та* $m \in \{m_1, m_2\}$ *виконується умова (3.4), то* $f \in C^{\infty}(B_R)$ *і* $\partial^{m_1-s}\bar{\partial}^m f \equiv 0$ *в* B_R.

2) якщо $r < R < 2r$ *або* $Z_{r,m_1} \cap Z_{r,m_2} \neq \emptyset$, *то існує функція* $f \in C^{\infty}(B_R)$, *що задовольняє умову (3.4) при всіх* $z \in B_{R-r}$ *та* $m \in \{m_1, m_2\}$ *і* $\partial^{m_1-s}\bar{\partial}^m f \not\equiv 0$ *в* B_R.

4.3 Висновки до розділу 4

У цьому розділі, встановлено локальну теорему про два радіуси для гладких функцій, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах (теорема 4.2.1). З цієї теореми та теореми 3.5.1 випливає, що гладка функція задовольняє узагальнену умову середнього значення по всіх кругах (будь-якого радіуса) в її області визначення тоді і тільки тоді коли ця функція є розв'язком еліптичного диференціального рівняння (5.6). В доведенні теореми 4.2.1 є суттєво використоуються результати та конструкції розділу 3.

Таким чином, для нового класу однорідних рівнянь згортки на комплексній площині із розподілом з компактним носієм, який, взагалі кажучі, не є радіальним розподілом, встановлено теорему про два радіуси, яка є аналогом раніше відомих теорем такого типу для рівнянь згортки із радіальним розподілом з компактним носієм.

Розділ 5

Теореми про середнє на правильних багатокутниках

У цьому розділі розглядаються модифікації умови узагальненного середьного значення по кругах, досліженої у попередніх розділах, в якій замість усереднень по кругах розглядаються усереднення по вершинах правильних багатокутників.

5.1 Деякі інтегральні тотожності для гармонічних поліномів

В даному підрозділі розглянаються інетегральні тотожності для гармонічних поліномів заданого степеня.

Теорема 5.1.1. *Нехай* $L \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $L < \frac{n+1}{2}$. *Тоді для кожного правильного* n*-кутника* $P_n(z, r)$ *із центром в точці* $z \in \mathbb{C}$ *і радіусом вписаного кола* r *та для кожного гармонічного полінома степеня не вище* $L - 1$ *виконується рівність*

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta = 0. \tag{5.1}$$

Доведення. Кожен гармонічний поліном степеня не вище $L - 1$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{L-1} \beta_k \bar{z}^k,$$

де $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, \dots, L - 1)$.

Розглянемо наступну низку перетворень:

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} (\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{L-1} \beta_k \bar{z}^k) d\xi d\eta =$$

$$= \iint\limits_{P_n(0,r)} w^{n-L} \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k (w+z)^k dudv +$$

$$= \iint\limits_{P_n(0,r)} w^{n-L} \sum_{k=0}^{L-1} \beta_k (\bar{w}+\bar{z})^k dudv.$$

Покладемо $m = n - L$. Тоді маємо

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta)\, d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{r}{\cos(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)}} \rho^m e^{im\varphi} \mathrm{C}_k^j \rho^j e^{i\varphi j} z^{k-j} \rho\, d\rho +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \beta_k \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{r}{\cos(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)}} \rho^m e^{im\varphi} \mathrm{C}_k^j \rho^j e^{-i\varphi j} \bar{z}^{k-j} \rho\, d\rho.$$

Нарешті, отримаємо

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta)\, d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \mathrm{C}_k^j z^{k-j} \frac{r^{m+j+2}}{m+j+2} \times$$

$$\times\int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n}\frac{e^{i(m+j)\varphi}}{\cos^{m+j+2}(\varphi-2\pi(\nu-1/2)/n)}\,d\varphi+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\beta_k\mathrm{C}_k^j\bar{z}^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\times$$

$$\int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n}\frac{e^{i(m-j)\varphi}}{\cos^{m+j+2}(\varphi-2\pi(\nu-1/2)/n)}\,d\varphi. \qquad (5.2)$$

В інтегралах зробимо заміну $t=\varphi-2\pi(\nu-1/2)/n$.

Тоді з (5.2) маємо

$$\iint\limits_{P_n(z,r)}(\zeta-z)^{n-L}f(\zeta)\,d\xi d\eta=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_k\mathrm{C}_k^j z^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m+j)(t+2\pi(\nu-1/2)/n)}}{\cos^{m+j+2}t}\,dt+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\beta_k\mathrm{C}_k^j\bar{z}^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m-j)(t+2\pi(\nu-1/2)/n)}}{\cos^{m+j+2}t}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_k\mathrm{C}_k^j z^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m+j)(t+2\pi(\nu-1/2)/n)}}{\cos^{m+j+2}t}\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\beta_k\mathrm{C}_k^j\bar{z}^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m-j)(t+2\pi(\nu-1/2)/n)}}{\cos^{m+j+2}t}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_k\mathrm{C}_k^j z^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\sum_{\nu=1}^{n}e^{i(m+j)2\pi(\nu-1/2)/n}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m+j)t}}{\cos^{m+j+2}t}\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{k}\beta_k C_k^j \bar{z}^{k-j}\frac{r^{m+j+2}}{m+j+2}\sum_{\nu=1}^{n} e^{i(m-j)2\pi(\nu-1/2)/n}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{e^{i(m-j)t}}{\cos^{m+j+2} t}\,dt = 0.$$

Ми скористались тим, що $2L < n+1$ і тоді

$$0 < n - L - (L-1) \leq m - j \leq m + j < n - 1$$

в попередніх співвідношеннях, звідки з формули для суми геометричної прогресії випливає

$$\sum_{\nu=1}^{n} e^{i(m+j)2\pi(\nu-1/2)/n} = \sum_{\nu=1}^{n} e^{i(m-j)2\pi(\nu-1/2)/n} = 0$$

(див., наприклад, [9], с. 56-57). Теорема доведена. □

5.2 Функції з узагальненою умовою середнього значення по вершинах правильного багатокутника

Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 3$, $s < m < n+1$, і нехай $d_n := 2(5 + 4\cos\frac{\pi}{n})^{-1/2}$ при непарному n, $d_n := 2(4 + 5\cos^2\frac{\pi}{n})^{-1/2}$ при парному n. Позначимо через $E(n,m,s)$ множину всіх пар цілих невід'ємних чисел (k,l), таких, що $k < m - s$ або $l < m$, $k < n + s$, $l < n - s$.

Основним результатом п'ятого розділу є наступна теорема.

Теорема 5.2.1. *Нехай* $R > 0$, $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$, $r \in (0,\ d_n R)$. *Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) для всіх $z \in B_R$ *і* $\alpha \in [0,\ 2\pi)$, *таких, що*

$\{z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \subset B_R$, виконується рівність

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{nr^{2p}}{(p-s)!p!} \partial^{p-s}\bar{\partial}^p f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}})^s f(z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}); \quad (5.3)$$

2) функція f має вигляд

$$f(z) = \sum_{(k,l)\in E(n,m,s)} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \quad c_{k,l} \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

З визначення множини $E(n, m, s)$ випливає, що функції вигляду (5.3) утворюють скінченновимірний лінійний простір над полем $\mathbb{C}$, елементи якого є поліноміальними розв'язками рівняння $\partial^{m-s}\overline{\partial}^m f = 0$.

Нехай $m = 1$ та $s = 0$. Тоді теорема 5.2.1 відновлює твердження (1) теореми 5.9 на с. 405 монографії В. В. Волчкова [60], яке співпадає при $R = \infty$ ($B_\infty := \mathbb{C}$) з відомим результатом Т. Ремзі і І. Вейта [49]. Ці результати містять в собі наступну класичну теорему, встановлену незалежно в роботах Ш. Какутані і М. Нагумо [43], Дж. Л. Уолша [61] та І. І. Прівалова [9] (розділ 3, §11): функція $f \in C(\mathbb{C})$ є гармонічним поліномом степеня не вище $n - 1$ тоді і тільки тоді, коли її середнє значення по вершинах будь-якого правильного n-кутника дорівнює значенню цієї функції в його центрі.

Доведення. Нехай $R > 0$, і нехай $r \in (0, R)$ вибрано таким чином, що множина точок $\cup_z(\{z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \cup \{z\})$, де об'єднання береться по усім таким $z \in B_R$ та $\alpha \in [0,\ 2\pi)$, що $\{z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \subset B_R$, співпадає с кругом B_R. Зрозуміло, що усі достатньо малі значення r задовольняють цю умову. Припустемо, що $f \in C^{\infty}(B_R)$ Нехай $F_q(z) = f_q(\rho)e^{iq\varphi}$ — q-й доданок ряду Фур'є функції $f(z)$ $(z = x + iy = re^{i\varphi}$, $0 < \rho < R$, $q \in \mathbb{Z})$. Тоді $F_q \in C^{\infty}(B_R)$, і за твердженням 5.6 на с. 34 монографії [60] функція $F_q(z)$ задовольняє узагальнену умову середнього значення по багатокутниках (5.3) при всіх $z \in B_R$ і $\alpha \in [0,\ 2\pi)$, таких, що $\{z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \subset B_R$.

Нехай $t_\nu = re^{i\frac{2\pi\nu}{n}}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $t_n = 0$. Визначемо функції

$$F_{q,\nu}(z) := t_\nu^s F_q(z), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$F_{q,n}(z) := -\sum_{p=s}^{m-1} \frac{nr^{2p}}{(p-s)!p!} \partial^{p-s}\bar{\partial}^p F_q(z).$$

Тоді з (5.3) випливає, що ці функції задовольняють умову

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^s F_{q,\nu}(z + t_\nu) \equiv 0$$

Застосовуючи до цих функцій теорему 3.1 на с. 250 монографії [60] аналогічно тому, як це зроблено на с. 406 цієї монографії, ми отримаємо, що $F_q(z)$ — поліном. Тому з теореми єдиності для дійсно аналітичних функцій випливає, що без зменшення загальності ми можемо далі розглядати випдок $R = \infty$. Використовуючи ще раз твердження 5.6 на с. 34 монографії [60], ми робимо висновок, що всі функції $\partial^k \overline{\partial}^l F_q(z)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, задовольняють узагальнену умову середнього значення по багатокутниках при всіх $z \in \mathbb{C}$ і $\alpha \in [0,\ 2\pi)$. Звідси випливає, що всі члени розкладу полінома $F_q(z)$ по степеням z, $\bar{z}$ також задовольняють рівняння (5.3) при всіх таких z і α.

Припустемо, що поліном $z^k\bar{z}^l$ задовольняє узагальнену умову середнього значення по багатокутниках. Тоді всі поліноми $z^j\bar{z}^q$, де $j \le k$, $q \le l$, також задовольняють цю умову. Звідси і з формули бінома Ньютона ми маємо, що поліном $z^k\bar{z}^l$ задовольняє узагальнену умову середнього значення по баготокутниках тоді і тільки тоді коли всі поліноми вигляду $f(z) = z^j\bar{z}^q$, де $j \le k$, $q \le l$, задовольняють умову

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{nr^{2p}}{(p-s)!p!} \partial^{p-s}\bar{\partial}^p f(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}})^s f(re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}). \qquad (5.5)$$

З цього випливає, що або $k < m - s$ або $l < m$, бо в супротивному випадку функція $z^{m-s}\bar{z}^m$ задовольняє узагальнену умову середнього значенн по багатокутниках, але ліва частина (5.5) дорівнює нулю, а права ні. З іншого боку, з (5.5) маємо, що всі функції $z^{p-s}\bar{z}^p$, $s \le p < m$, задовольняють цю умову.

Розглянемо випадок, коли $k+s \ne l$. У цьому випадку ліва частина (5.5) дорівнює нулю. Тоді з формули геометричної прогресії маємо, права частина (5.5) дорівнює нулю лише у тому випадку, коли $(k-l+s)/n$ є цілим числом. Звідки маємо $k+s < n$, $l-s < n$, бо інакше для функцій z^{n-s} та $\bar{z}^{n+s}$ ліва частина в (5.5) дорівнює нулю, а права ні. Таким чином, поліном $f(z) := z^k\bar{z}^l$ задовольняє узагальнену умову середнього значення по багатокутниках тоді і тільки тоді, коли $k < m - s$ або $l < m$, та $k < n - s$ і $l < n + s$.

З проведеного аналізу випливає твердження нашої теореми для функцій $f \in C^\infty(B_R)$ і для таких r, для яких

$A_r := \cup_z(\{z + re^{i\alpha + i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \cup \{z\} = B_R$, де об'єднання береться по усім таким $z \in B_R$ та $\alpha \in [0,\ 2\pi)$, що $\{z + re^{i\alpha+i\frac{2\pi\nu}{n}}\}_{\nu=0}^{n-1} \subset B_R$. Встановимо точну оцінку зверху для таких значень r.

Нехай правильний n-кутник $P_n \subset \overline{B}_R$ із центром O_1 і радіусом описного кола r є симетричним відносно вісі Ox і має дві вершини на колі $|z| = R$ у правій півплощині. Тоді з елементраних геометричних міркувань ми маємо, що умовою того, що $A_r = B_R$ є умова

$$r < 2|OO_1| \tag{5.6}$$

при непарному n, та умова

$$r \cos\frac{\pi}{n} < 2|OO_1| \tag{5.7}$$

де $|OO_1|$ — евклідова відстань між центром O_1 n-кутника P_n та початком координат O. Елементарне обчислення дає формулу

$$|OO_1| = R - (R - \cos\frac{\pi}{n} - \sqrt{R^2 - r^2 \sin\frac{\pi}{n}}).$$

Тому у виппадку непарного n послідовно маємо з (5.6):

$$2r < R - (R - \cos\frac{\pi}{n} - \sqrt{R^2 - r^2 \sin\frac{\pi}{n}}),$$

$$r(1 + 2\cos\frac{\pi}{n}) < \sqrt{R^2 - r^2 \sin\frac{\pi}{n}}),$$

$$r^2(1 + 4\cos\frac{\pi}{n} + 4\cos^2\frac{\pi}{n}) < 4R^2 - 4r^2 \sin\frac{\pi}{n},$$

$$r^2(5 + 4\cos\frac{\pi}{n}) < 4R^2,$$

$$r < d_n R, \qquad d_n = 2(5 + 4\cos\frac{\pi}{n})^{-1/2}.$$

Аналогічно, у випадку парного n ми послідовно маємо з (5.7) настуні співвідношення:

$$2r\cos\frac{\pi}{n} < R - (R - \cos\frac{\pi}{n} - \sqrt{R^2 - r^2\sin\frac{\pi}{n}}),$$

$$r^2(9\cos^2\frac{\pi}{n} + 4\sin^2\frac{\pi}{n}) < 4R^2,$$

$$r < d_nR, \qquad d_n = 2(4 + 5\cos\frac{\pi}{n})^{-1/2}.$$

Тим самим ми довели теорему 5.2.1 у випадку $f \in C^\infty(B_R)$.

Для того, щоб встановити цю теорему у загальному випадку, для заданих $R > 0$ та $r \in (0,\ d_nR)$ ми зафіксуємо $\varepsilon_0 \in (0, R)$ так, що $r < d_n(R - \varepsilon_0)$, і дійсну невід'ємну функцію $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$, для якої виконується рівність

$$\iint_{\mathbb{C}} \varphi(z)\,dxdy = 1.$$

Нехай

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n}\iint_{\mathbb{C}} \varphi(z/\varepsilon)\,dxdy \qquad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Тоді, використовуючи стандартні властивості згортки, ми маємо, що функція

$$f_\varepsilon(x) := f * \varphi_\varepsilon(x) = \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

визначена в крузі $B_{R-\varepsilon}$, належить до класу $C^\infty(B_{R-\varepsilon})$ та $f_\varepsilon \to f$ при $\varepsilon \to 0$ рівномірно на компактних пдмножинах круга B_R. З іншого боку, ми довели, що кожна з функцій f_ε має вигляд (5.4). Звідки випливає, що і функція f має такий вигляд. Теорему доведено. $\square$

5.3 Висновки до розділу 5

У розділі 5 в явному вигляді описано множнину гладких функційу у крузі на комлексній площині, що задовольняють узагальнену умову середнього значення по вершинах правильних багатокутників, вписаних у круги фіксованого радіуса. Ця множина є скінченновимірним простором і складається із поліноміальних розв'язків однорідного еліптичного диференціального рівняння, ліва частина якого є добутком деяких натуральних степенів формальних похідних Коші, де відповідні степені визначаються параметрами заданої умови. Основний результат цього розділу (теорема 5.2.1) є нетривіальним узагальненням низки відомих результатів інших авторів.

Висновки

Дисертація присвячена встановленню нових теорем про середнє значення для розв'язків однорідних еліптичних диференціальних рівнянь на комплексній площині, ліва частина яких є добутком деяких натуральних степенів формальних похідних Коші. Її основні результати такі:

1. Встановлено теорему єдиності для нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

2. Побудовано приклади функцій, що показують непокращуваність умов цієї теореми.

3. У термінах спеціальних функцій дано повний опис класу нескінченно диференційовних функцій у крузі, які задовольняють узагальнену умову середнього значення по кругах фіксованого радіуса.

4. У термінах функцій Бесселя отримано відповідну теорему про два радіуси.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані в теорії еліптичних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на комплексній площині та в теорії квазіаналітичних класів функцій.

В дисертації також встановлено теорему про повний опис розв'язків спеціального вигляду систем однорідних рівнянь згортки із розподілом з компактним носієм, яка містить в собі класичну теорему про характеризацію гармонічних поліномів заданого степеня умовою середнього значення по вершинах правильного баготокутника і її узагальнення, в яких присутні лише багатокутники із фіксованим радіусом описаного кола.

Більшість результатів дисертації носять завершений характер, що обгрунтовується побудовою відповідних прикладів.

В дисертації широко використовується техніка роботи зі сферичними перетвореннями радіальних розподілів з компактним носієм, яка грунтується на теоремі Пелі–Вінера–Шварца про їх характеризацію. Це дозволяє розв'язати задачу про загальний вигляд рівнянь згортки, шо розглядаються в дисертації, шляхом її редукції до такої же задачі, але вже із радіальним розподілом, після чого можливе застосування добре розробленої теорії рівнянь згортки для таких розподілів.

З технічної точки зору основні складноші дисертації подолані в лемі 3.5.2, де з використанням відомої асимптотики функцій Бесселя показано, що сферичне перетворення радіального розподілу з компактним носієм, який виникає після такої редукції, задовольняє умовам, за яких загальний розв'язок рівняння згортки, що відповідає такому розподілу, може бути описаний в термінах розкладу своїх коефіцієнтів Фур'є в ряди по спеціальним функціям.

В результаті співставлення результатів проведеного дослідження виникає низка природних задач, як конкретного, так і загального характеру. Зокрема, залишається відкритим випдок $r_1 + r_2 = R$ в теоремі 4.2.1. У той же час виникає задача про знаходження загальних умов на заданий розподіл на замкненій одиничній кулі, що представляється у вигляді суми розподілу з носієм в нулі і розподілу, який задається комплексною борелівською мірою на цій кулі, та на однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, за яких розв'язкі цього рівняння характеризуються заданим розподілом так, як це зроблено в дисертації.

Література

1. *Беренстейн К.* Комплексный анализ и уравнения в свертках / К. Беренстейн, Д. Струппа // Итоги науки и техники ВИНИТИ СССР. Современные проблемы математики. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111. – 596 с.

2. *Волчков В.В.* Новые теоремы о среднем для полианалитических функций / В. В. Волчков // Мат. заметки – 1994. – Т. 56, №3. – С. 20–28.

3. *Волчков В.В.* Теоремы о среднем для одного класса полиномов / В. В. Волчков // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, №4. – С. 737–745.

4. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 159 с.

5. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций / Б.Г. Коренев – М.: Наука, 1971. – 288 с.

6. *Купцов Л.П.* Об одном классе средних для решений уравнения теплопроводности / Л. П. Купцов // Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 2 — С. 201–220.

7. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах / В. В. Напалков – М.: Наука, 1982. – 240 с.

8. *Покровский А. В.* Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными / А. В. Покровский // Мат. заметки. – 1998. – Т. 64, № 2 — С. 260–272.

9. *Привалов И. И.* Субгармонические функции / И. И. Привалов – М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – 199 с.

10. *Трофименко О. Д.* Новая теорема о среднем для полианалитических функций / О. Д. Трофименко // Современные проблемы математики, механики, информатики (17 – 21 ноября 2008 года, Тула, Россия): материалы

международной научной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова. – Тула, 2008. – С. 98–100.

11. *Трофименко О. Д.* Теореми про середнє для поліаналітичних поліномів [Електронний ресурс] / О. Д. Трофименко // Український математичний конгрес, до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова. – Київ, 2009. – Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Trofimenko.pdf

12. *Трофименко О. Д.* Рівності із функціями спеціальних видів на багатокутних та кругових областях / О. Д. Трофименко // Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам'яті А.А. Гольдберга (1930–2008): тези доповідей, 31 травня – 5 червня, 2010р., Львів, Україна. – Львів, 2010. – С. 133–135.

13. *Трофименко О. Д.* Формулы среднего значения для функций специального вида / О. Д. Трофименко // International conference in modern analysis: сборник тезисов Международной конференции по Современному анализу, 20 – 23 июня 2011 г., Донецк, Украина. – Донецк, 2011.– С. 110.

14. *Трофименко О. Д.* Опис деяких класів функцій в термінах формули середніх значень / О. Д. Трофименко // Теорія наближення функцій та її застосування: тези доповідей міжнародної конференції, присвяченої 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 28 травня – 3 червня 2012 р., Кам'янець-Подільський, Україна. – Київ, 2012. – С. 107–108.

15. *Трофименко О. Д.* Опис деяких класів поліаналітичних функцій / О. Д. Трофименко // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге: тези доп., 1 – 4 липня 2015 р., Чернівці, Україна. – Чернівці, 2015. – С. 113–114.

16. *Трофименко О. Д.* Функціональні рівняння на обмежених областях / О. Д. Трофименко // Вісник ДонНУ. – 2008. – Сер. А: Природничі науки, Т. 1. — С. 18–22.

17. *Трофименко О. Д.* Узагальнення теореми про середнє для полianалітичних функцій у випадках кола та круга / О. Д. Трофименко // Вісник ДонНУ. – 2009. – Сер. А: Природничі науки, Т. 1. – С. 28–31.

18. *Трофименко О. Д.* Деякі інтегральні рівності для певних класів поліномів / О. Д. Трофименко // Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 184–188.

19. *Трофименко О. Д.* Теорема о среднем для полианалитических функций / О. Д. Трофименко // Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т. 17. – С. 194–196.

20. *Трофименко О. Д.* Аналог теореми про середнє для поліномів спеціального виду / О. Д. Трофименко // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63. – С. 699–707.

21. *Трофименко О. Д.* Теорема єдиності для розв'язків деяких рівнянь середніх значень / О. Д. Трофименко // Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 24. – С. 234–242. – 362 с.

22. *Aronszajn N.* Polyharmonic functions / N. Aronszajn, T. Creese, L. Lipkin – Oxford: Clarendon press, 1983. – 265 p.

23. *Beckenbach E. F.* Mean-values and harmonic polynomials/ E. F. Beckenbach, M. O. Reade // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 53 – P. 230–238.

24. *Beckenbach E. F.* Regular solids and harmonic polynomials/ E. F. Beckenbach, M. O. Reade // Duke Math. J. – 1945. – V. 12 – P. 629–644.

25. *Begehr H.* The Schwarz Problem for Polyanalytic Functions / H. Begehr, D. Schmersau // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. – 2005. – V. 24, № 2 – P. 341–351.

26. *Begehr H.* Polyharmonic Dirichlet problems / H. Begehr, T. N. H. Vu and Z. Zhang // Proc. Steklov Inst. Math. – 2006. – V. 255 – P. 13–34.

27. *Berenstein C. A.* A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein and R. Gay // Israel J.Math. – 1986. – V. 55 – P. 267–288.

28. *Bramble J. H.* Mean value theorems for polyharmonic functions / J. H. Bramble, L. E. Payne // Amer. Math. Monthly. – 1922. – V. 73. – P. 124–127.

29. *Burgatti P.* Sulla funzioni analitiche d'ordini / P. Burgatti // Boll. Unione math. ital. – 1966. – V. 1, № 1 – P. 8–12.

30. *Delsarte J.* Lectures on Topics in Mean Periodic Functions and the Two-Radius Theorem / J. Delsarte. – Bombay: Tata Institute, 1961. – 145 p.

31. *Du J.* On boundary value problem of polyanalytic functions on the real axis / J. Du, Y. Wang // Complex Variables, Theory Appl. – 2003. – V. 48. – P. 527–542.

32. *Iwasaki K.* Polytopes and the mean value property / K. Iwasaki // Discrete and Comput. Geometry – 1997. – V. 17. – P. 163–189.

33. *Iwasaki K.* Invariants of finite reflection groups and the mean value problem for polytopes / K. Iwasaki // Bull. London Math. Soc. – 1999. – V. 31. – P. 477–483.

34. *Iwasaki K.* Recent progress in polyhedral harmonics / K. Iwasaki // Acta Applicandae Math. – 2000. – V. 60. – P. 179–197.

35. *Fédoroff W.* Sur une propriété caractéristique des fonctions monogénes/ W. Fedoroff // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sci.: Paris. – 1931. – V. 193. – P. 512–513.

36. *Flatto L.* Functions with a mean value property / L. Flatto // J. Math. Mech. – 1961. – V. 10. – P. 11–18.

37. *Flatto L.* Functions with a mean value property II / L. Flatto // Amer. J. Math. – 1963. – V. 85. – P. 248–270.

38. *Flatto L.* Invariants of finite reflection groups and mean value problems / L. Flatto and Sister M. M. Wiener // Amer. J. Math. – 1969. – V. 91. – P. 591–598.

39. *Flatto L.* Regular polytopes and harmonic polynomials / L. Flatto and Sister M. M. Wiener // Canad. J. Math. – 1970. – V. 22. – P. 7–21.

40. *Friedman A.* Mean-values and polyharmonic polynomials / A. Friedman // Michigan Math. J. – 1957. – V. 4. – P. 67–74.

41. *Fulks W.* A mean value theorem for the heat equation / W. Fulks // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – V. 17. – P. 6–11.

42. *Haskell R. N.* Areolar monogenic functions / R. N. Haskell // Bull. Amer. Soc. – 1946. – V. 52. – P. 332–337.

43. *Kakutani S.* On the functional equation $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z + e^{2\nu\pi i/n}\xi) = nf(z)$ (in Japanese) / A. Kakutani and M. Nagumo // Zenkoku Sûgaku Danwakai. – 1935. – V. 66. – P. 10-12.

44. *Kriszten A.* Areolar monogene und polyanalytische Funktionen / A. Kriszten // Comment. math. Helvetici. – 1948. – V. 21. – P. 73–78.

45. *Ming-Jung Zhan* Polyanalytische und polyharmonische Funktionen / Ming-Jung Zhan // Sci. Record. – 1951. – V. 4, № 1 – P. 16–26.

46. *Netuka I.* Mean value property and harmonic functions / I.Netuka and J.Vesely // Classical and Modern Potential Theory and Applications, Gowri Sankaran et al., ed. – Kluwer acad. Publ., 1994. – P. 359–398.

47. *Nicolesco M.* Sur un théoréme de M. Pompeiu / M. Nicolesco, // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique. – 1930. – V. 16. – P. 817–822.

48. *Pizzetti P.* Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera/ P. Pizzetti // Rendiconti Lincei, serie V. – 1909. – V.18. – P. 182–185.

49. *Ramsey T.* Mean values and classes of harmonic functions / T.Ramsey and Y.Weit // Math. Proc. Camb. Dhil. Soc. – 1984. – V. 96. – P. 501–505.

50. *Reade M.* A theorem of Fédoroff / M. Reade // Duke Math. J. – 1951. – V. 18. – P. 105–109.

51. *Reade M.* On areol monogenic functions / M. Reade // Bulletin of the Amer. Math. Soc. – 1947. – V. 53. – P. 98–103.

52. *Sbrana F.* Sopra una proprieta caratteristica delle funzioni poliarmoniche e delle soluzioni dell'equazione delle membrane vibranti / F. Sbrana // Rendiconti Lincei, serie VI. – 1925. – V. 1. – P. 369–371.

53. *Sharma A.* Remark on a theorem of Cinquini / A. Sharma // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. – 1960. – V. 11, № 1-2. – P. 93–96.

54. *Teodorescu N.* La dérivée aréolaire et ses applications á la physique mathématique / N. Teodorescu. – Paris: Gauthier-Villars, 1931.

55. *Trofymenko O. D.* Two-radii theorems that characterize some special functions / O. D. Trofymenko // Complex analysis and related topics: abstracts of international conference, Septemder 23 – 28, 2013, Lviv, Ukraine. – Lviv, 2013. – P. 84–85.

56. *Trofymenko O. D.* A description of solutions for the integral equation of special type / O. D. Trofymenko // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези всеукраїнської наукової конференції, 25 лютого – 1 березня, 2015, Ворохта, Україна. – Івано-Франківськ, 2015. – С. 81.

57. *Trofymenko O. D.* Two-radii theorem for solutions of some mean value equations / O. D. Trofymenko // Мат. студії. – 2013. – Т 40, № 2. – С. 137–143.

58. *Volchkov V. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Series: Springer Monographs in Math., 2009. – 216 p.

59. *Volchkov V. V.* Morera type theorems on the unit disc / V. V. Volchkov // Analysis Math. – 1994. – V. 20 – P. 49–63.

60. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. 2003. – 454 p.

61. *Walsh J. L.* A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials / J. L. Walsh // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – V. 42 – P. 923–930.

62. *Weit Y.* A characterization of polynomials by convolution equations / Y. Weit // J. London Math. Soc. – 1981. – V. 23 – P. 455–459.

63. *Zalcman L.* Mean values and differential equations / L. Zalcman // Israel J.Math. – 1973. – V. 14 – P. 339–352.

64. *Zalcman L.* Offbeat integral geometry / L. Zalcman // Amer. Math. Monthly. – 1980. – V. 87, № 3. – P. 161–175.

65. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem / L. Zalcman // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1972. – V. 47. – P. 237–254.