ВІДГУК
офіційного опонента Нестеренка Олексія Никифоровича
на дисертацію Трофименко Ольги Дмитрівни
«Теореми про середнє для поліаналітичних функцій та їх узагальнень»,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація присвячена теорії гладких функцій $f(z)$ у крузі $B_R := \{|z| < R\}$ на комплексній площині, які для заданих чисел $m \in \mathbb{N}$ та $s \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $s < m$, задовольняють співвідношення виду

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!\,p!} \partial^{p-s} \overline{\partial}^{p} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta - z| \le r} f(\zeta)(\zeta - z)^{s} \, d\lambda_2(\zeta), \qquad (1)$$

де $r \in (0, R)$, $z \in B_{R-r}$, ∂ та $\overline{\partial}$ – формальні похідні Коші, а інтегрування ведеться по двовимірній мірі Лебега λ_2. Інакше кажучи, мова йде про дослідження розв'язків однорідного рівняння згортки, породженого конкретного виду розподілом з компактним носієм.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку літератури. У вступі дано загальну характеристику роботи. Перший і другий розділи присвячено, відповідно, історичному огляду робіт за обраною темою та викладу результатів інших авторів, які використовуються в дисертації і не є загальновідомими. Третій, четвертий і п'ятий розділи присвячені, відповідно, теоремам єдиності типу Йона, теоремам про два радіуси типу Дельсарта та теоремам про характеризацію класів поліномів типу Какутані-Нагумо-Уолша-Привалова. Згадані результати є класичними і викликали велику кількість робіт інших авторів, які з часом утворили новий напрям аналізу на перетині комплексного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, гармонічного аналізу, інтегральної геометрії та теорії спеціальних функцій. Свідченням його актуальності і самостійності є велика оглядова робота відомих американських математиків К. Беренстейна та Д. Струппи «Комплексный анализ и уравнения в свертках» у популярній енциклопедичній серії «Итоги науки и техники ВИНИТИ СССР. Современные проблемы математики» (1989, Т. 54, С. 5 – 111) з бібліографією з 496 назв, що відображала основні досягнення в цьому напрямку на момент її публікації (англійський переклад: Encyclopedia of Math. Sciences, Springer, 1993, V. 154, P. 1 – 108).

Обгрунтовуючи актуальність, варто також згадати наявність низки робіт, присвячених одновимірним теоремам про середнє значення, які дещо подібні за формою двовимірним теоремам з дисертації О. Д. Трофименко, але суттєво відрізняються за методами доведення. Зокрема, С. Харукі (Am. Math. Monthly, 1979, V. 86, № 7, P. 577-579) встановив, що клас дійсних функцій $f \in C^1(\mathbb{R})$, які для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, задовольняють умову

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, співпадає з класом квадратичних поліномів, тобто з класом розв'язків звичайного диференціального рівняння $\frac{d^3 f}{dx^3} = 0$. Цей результат отримав розвиток у роботах декількох авторів (див., наприклад, роботу Z. M. Balogh, O. O. Ibrogimov, B. S. Mityagin «Functional equations and the Cauchy mean value property» (Aequations Mathematicae, 2016, V. 90, P. 683 – 697), а також історію питання та список літератури в цій роботі).

Проведемо аналіз основних результатів дисертації.

У третьому розділі розглядаються нескінченно диференційовні функції f у крузі B_R, які задовольняють співвідношення (1) при фіксованому $r \in (0, R)$. Для таких функцій f у теоремі 3.4.1 встановлено, що якщо $f(z) = 0$ при всіх $z \in B_r$, то $f \equiv 0$ в B_R, а в наступній теоремі 3.4.2 показано, що теорема 3.4.1 є точною в тому сенсі, що для довільного $\varepsilon \in (0, r)$ з виконання умови $f(z) = 0$ при всіх $z \in B_{r-\varepsilon}$ не випливає рівність $f \equiv 0$ в B_R. У випадку $s = 0$ розподіл, що визначає відповідне рівняння згортки, є радіальним, тому твердження теорем 3.4.1 і 3.4.2 у цьому випадку вичерпуються відомими результатами В. В. Волчкова про рівняння згортки з радіальними розподілами. У випадку $s > 0$ теорія, розвинута в роботах В. В. Волчкова, безпосередньо незастосовна до рівняння (1), тому редукція теорем 3.4.1 і 3.4.2 до випадку рівнянь згортки з радіальним розподілом, яка фактично здійснюється у доведенні цих теорем, потребувала певних ідей і пов'язана з подоланням деяких технічних складнощів. У роботі ці складнощі подолані за допомогою застосування сферичного перетворення радіальних розподілів з компактним носієм і аналога теореми Пелі-Вінера-Шварца для цього перетворення, які в теорії рівнянь згорток з радіальними розподілами відіграють таку ж саму роль, яку перетворення Фур'є-Лапласа і класична теорема Пелі-Вінера-Шварца відіграють в теорії звичайних розподілів з компактним носієм. А саме, це дозволяє зводити питання існування розподілів з необхідними властивостями до питання існування цілих функцій експоненціального типу з певних класів.

Теорема 3.5.1 є, на мою думку, центральним результатом дисертації і дає в термінах спеціальних функцій повний опис нескінченно диференційовних у крузі B_R функцій f, які задовольняють співвідношення (1) при фіксованому $r \in (0, R)$. Використовуючи техніку роботи зі сферичним перетворенням, автор дисертації доводить, що функція $g(z) := \partial^{m-s} \overline{\partial}^{m} f(z)$ є розв'язком рівняння згортки з деяким радіальним розподілом W_r. Труднощі доведення цієї теореми пов'язані ще й з необхідністю додаткового тонкого аналізу асимптотичної поведінки на нескінченності нулів сферичного перетворення розподілу W_r. Такий аналіз гарантує приналежність цього перетворення до певного класу парних цілих функцій експоненціального типу (він є вужчим за клас тих функцій, які описуються теоремою Пелі-Вінера-Шварца для сферичного перетворення), а це дозволяє далі застосовувати відомі результати В. В. Волчкова про загальний вигляд розв'язків рівнянь згортки з радіальним розподілом. У дисертації згаданий аналіз здійснено у вигляді технічно доволі складної леми 3.5.2.

У четвертому розділі для двох чисел r_1 і r_2 з інтервалу $(0, R)$, $r_1 + r_2 \neq R$, розглядаються функції $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$, які задовольняють співвідношення (1) при всіх $r \in \{r_1, r_2\}$ та $z \in B_{R-r}$. Основний результат цього розділу – теорема 4.2.1 – дає в термінах функцій Бесселя умови на r_1 та r_2, які є необхідними і достатніми для того, щоб клас таких функцій f збігався з множиною розв'язків еліптичного диференціального рівняння

$$\partial^{m-s}\overline{\partial}^{m} f(z) = 0 \tag{2}$$

у крузі B_R. У випадку $R = +\infty$, $m = 1$ та $s = 0$ теорема 4.2.1 дає згаданий раніше класичний результат Дельсарта для розмірності $n = 2$. У доведенні цієї теореми суттєво використовується теорема 3.5.1.

У заключному п'ятому розділі дисертації розглянуто аналог співвідношення (1), побудований за допомогою усереднень по вершинах правильних многокутників. Така постановка походить від класичного результату Какутані-Нагумо-Уолша-Привалова про характеризацію гармонічних поліномів степеня $\leq n-1$ в класі неперервних функцій на комплексній площині умовою середнього значення по вершинах усіх правильних n-кутників при $n \geq 3$. Т. Ремзі та І. Вейт показали, що в цій характеризації досить розглядати лише n-кутники, які вписані в круги фіксованого радіуса r, а В. В. Волчков встановив локальний варіант теореми Ремзі і Вейта, в якому функція визначена не в усій комплексній площині, а лише у крузі заданого радіуса R $(r < R < +\infty)$, при цьому суттєвим вже є співвідношення між r, R та n. Основний результат цього розділу – теорема 5.2.1 – узагальнює згадану теорему В. В. Волчкова (як за формулюванням, так і за методом доведення) і описує поліноміальні розв'язки диференціального рівняння (2) у класі $f \in C^{2m-s-2}(B_R)$ умовою виконання аналога співвідношення (1), побудованого за допомогою усереднень по вершинах правильних многокутників. Хоча автор вважає, що теорема 5.2.1 не належить до основних результатів дисертації, але, на мою думку, вона становить безумовний інтерес для спеціалістів.

Таким чином, дисертація О. Д. Трофименко містить нові, цікаві та вагомі результати і є завершеною науковою працею, що становить помітний внесок у теорію функцій. Для отримання цих результатів автору довелось подолати низку серйозних технічних складнощів. Усі результати цілком обґрунтовані і супроводжуються коректними доведеннями. Результати дисертації можуть бути використані широким колом спеціалістів з теорії функцій.

Результати дисертації своєчасно і з належною повнотою опубліковані у 6 статтях у фахових виданнях і пройшли належну апробацію на конференціях і семінарах. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Зауваження. 1. Дисертація містить доволі велику кількість описок.

2. На стор.53, у 7-му рядку знизу, в означенні радіальних розподілів замість $f(\varphi)=f\left(e^{i\alpha}\varphi\right)$ має бути $f(\varphi)=f\left(\varphi\left(e^{i\alpha}\cdot\right)\right)$.

3. На стор. 73, у 10-му рядку знизу, замість $\Delta^m d(z)$, на стор. 73, у 6-му рядку знизу, та на стор. 74, у 7-му рядку зверху, замість $\partial^m d(z)$, має бути $4^{-m}\Delta^m d(z)$.

4. На стор. 83, у 3-му рядку знизу, на стор. 86, у 6-му рядку знизу, та на стор. 87, у 7-му рядку зверху, замість (5.6) має бути (4.5).

5. Варто було б значно розширити другий розділ і навести в ньому означення усіх понять та формулювання усіх результатів інших авторів, які використовуються в дисертації і не є загальновідомими, а в наступних розділах систематично посилатись на те, що сформульовано у другому розділі. Також слід було б доповнити список умовних позначень. Усе це значно полегшило б читання дисертації.

Як бачимо, наведені зауваження носять редакційний характер і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

Вважаю, що за обсягом проведених наукових досліджень, їх актуальністю та науковою новизною дисертаційна робота «Теореми про середнє для полі аналітичних функцій та їх узагальнень» повністю задовольняє вимоги пп. 9, 11, 12, 13 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 (зі змінами) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Трофименко Ольга Дмитрівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного аналізу
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка О. Н. Нестеренко

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 20.05.2016р.
секретар ради /Артемченко Ж.Я./

Канцелярія
Інститут математики Національної академії наук України

Підпис ... Вчений ... Караул...
20.05...

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944