# ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

про дисертацію О. Д. Трофименко ”Теореми про середнє для поліаналітичних функцій та їх узагальнень”, подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

Класична і дуже важлива теорема Морери стверджує, що якщо для функції, неперервної в області на комплексній площині, інтеграл по будь-якому замкненому спрямлюваному контуру дорівнює нулю, то ця функція голоморфна в області. В іншій класичній теоремі Гауса доводиться, що якщо середнє значення неперервної функції у багатовимірній області по будь-якій кулі дорівнює значенню функції в центрі кулі, то ця функція гармонічна. У зв'язку з цими теоремами природньо виникають питання: чи не можна зменшити попередню інформацію в цих теоремах, зберігаючи висновки теорем? Йдеться про те, щоб у теоремі Морери систему всіх спрямлюваних замкнених контурів, а в теоремі Гауса систему всіх куль замінити на значно більш вузькі множини контурів та куль. Розв'язок таких питань має загальноматематичне значення. Близькою до цього кола питань є відома проблема, яка запропонована наприкінці двадцятих років минулого сторіччя румунським математиком Д. Помпейю: знайти умови на компакт $K$ у скінченновимірному евклідовому просторі, щоб із обернення до нуля інтеграла від функції $H$ по всім компактам конгруентним $K$ випливало, що $H$ еквівалентна нулю. Дослідження у цьому напряму проводило багато математиків, вийшло декілька обзорних робіт та монографій.

Подальший широкий розвиток досліджень привів, зокрема, до вивчення періодичних у середньому функцій, мотивацією для розвитку теорії яких були потреби гармонічного аналізу і теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Тема дисертації О. Д. Трофименко поєднує вищезгадані напрями і є, таким чином, сучасною та актуальною.

Усі результати дисертаційної роботи є новими і вперше отримані автором дисертації. Перелічимо найважливіші досягнення у представленій роботі. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновку та списку використаних джерел.

У першому розділі подається огляд літератури за темою дисертації. У другому розділі автор описує основні методи дисертаційного дослідження.

У третьому розділі автор вивчає клас функцій, вагове середнє яких по кругах фіксованого радіуса $r$ співпадає зі значенням деякого диференціального оператора від функції в центрі круга. Виявляється, що такий клас функцій складається не тільки з нульової функції. Автор розв'язує низку задач, пов'язаних з властивостями цього класу функцій. Ми зупинимось на основних результатах розділу. Одним з них є теорема єдиності 3.4.1. В ній відіграють роль два фактори — приналежність функції до простору функцій деякого порядку гладкості і те, що функція обертається на нуль у крузі радіуса $r$. Доведена теорема точна, як показує наступний результат — теорема 3.4.2. Теореми 3.4.1 і 3.4.2 продовжують дослідження Ф. Йона, Д. Сміта та В. В. Волчкова у цьому напряму. У теоремі 3.5.1 автор описує нескінченно диференційовні функції із класу, що розглядається. Для цього застосовується апарат рядів Фур'є і ряди по спеціальним функціям.

У четвертому розділі, який присвячено теоремам про два радіуси, ми зустрічаємо нове яскраве твердження — теорему 4.2.1. Цей результат являє собою локальний варіант теореми про два радіуси. Локальність у данному випадку означає, що розглядається функція $f$, яка визначена не на всій комплексній площині, а тільки у крузі заданого радіуса $R$. У цьому випадку важливим є співвідношення між числами $r_1 + r_2$ та $R$. В теоремі здійснюється вивчення властивостей функції в залежності від співвідношення між числами $r_1 + r_2$ та $R$ і множини спільних коренів цілих функцій, пов'язаних з функцією Бесселя. Теорема 4.2.1 дає суттєве поглиблення відомих двовимірних результатів, отриманих Ж. Дельсартом і В. В. Волчковим.

П'ятий розділ присвячений теоремам про середє значення по вершинах правильних багатокутників. Основним результатом п'ятого розділу є теорема 5.2.1. Ця теорема дає опис деяких класів поліномів в термінах формули середнього значення, пов'язаної з правильними багатокутниками. При відповідних значеннях параметрів теорема 5.2.1 містить в собі низку добре відомих результатів.

## ЗАУВАЖЕННЯ

В дисертації є низка описок. Зокрема:

1) на стор. 31 у рядку 5 знизу пропущений знак інтеграла перед $f(x + r^M t)\, d\mu(t) = 0$;

2) на стор. 38 у рядку 3 знизу повинно бути $|g(z)| \leq c(1 + |z|^N)e^{R|\mathrm{Im}\, z|}$;

3) на стор. 46 у формулюванні леми 3.2.2 та на стор. 47 у формулюванні леми 3.2.4 замість $f(z) = z^k \bar{\zeta}^l$ повинно бути $f(z) = z^k \bar{z}^l$;

4) на стор. 49 формула (3.6) повинна бути такою —

$$\sum_{p=s+1}^{m-1} \frac{r_j^{2p}}{(p-s-1)!p!} w_{p-s} + w_{m-s}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=r_j} f(\zeta)(\zeta-z)^s d\zeta = 0;$$

5) у формулюванні теореми 3.5.1 на стор. 66 дисертації та в авторефераті слід було позначити функцію $\partial^{m-s}\bar{\partial}^m f(z)$ літерою, відмінною від $g$, щоб уникнути одночасно позначень $g_k(\rho)$ та $g_r(z)$, які використовуються у цій теоремі в різних сенсах;

6) на стор. 79 у формулюванні теореми 4.1.4 замість $f(z)\,dz = 0$ повинно бути $\int f(z)\,dz = 0$.

Теорему 5.2.1, яка є нетривіальним узагальненням низки добре відомих результатів, треба було сформулювати в авторефераті дисертації і включити до переліку її основних результатів.

В цілому ж дисертація добре оформлена, написана чіткою і зрозумілою мовою, викладення логічне та послідовне. Зміст автореферату ідентично відображає основні положення дисертації.

Дисертація має теоретичний характер і містить обгрунтовані та достовірні нові наукові результати, які у сукупності є важливими для розвитку сучасної теорії функцій та її застосувань. Усі наведені в тексті доведення є повними та строгими. Методи доведення основних результатів роботи є нетривіальними і свідчать про високий рівень математичної культури її автора. Оскільки питання стосуються загальної теорії функцій, то отримані результати мають загальноматематичне значення. Більшість з них вражають цілковитою завершеністю і можуть бути використані у наступних дослідженнях в теорії еліптичних диференціальних рівнянь з частинними похідними на комплексній площині. Усі основні результати дисертації відображені у вигляді 6 статтей у фахових виданнях. Окремі результати і дисертація в цілому доповідалися на представницьких міжнародних конференціях та провідних семінарах з аналізу в Україні. Все це дозволяє стверджувати, що в дисертації розроблені теоретичні положення, сукупність яких можна кваліфікувати як певне досягнення в теорії функцій.

Підводячи загальні підсумки, хочу відмітити, що дисертаційна робота О. Д. Трофименко є завершеним науковим дослідженням, що відповідає спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз, виконана на актуальну тему, містить роз'язки низки важливих задач теорії функцій та належним чином оформлена. Тому вважаю, що дисертаційна робота "Теореми про середнє для поліаналітичних функцій та їх узагальнень" повністю задовольняє вимогам пп. 9, 11-13 ”Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Трофименко Ольга Дмитрівна заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
професор кафедри
математичного аналізу
Житомирського державного
університету імені І. Франка — Є. О. Севостьянов

Підпис засвідчую:
заступник директора з наукової
і міжнародної роботи,
доктор пед. наук, професор — Н.А. Сейко

І.к. 02125208

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.01 14.09.2016р.
секретар ради Артемченко Ю.Я.