НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**Малоїд-Глєбова Марта Олександрівна**

УДК 512.553.2

# ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ СПЕКТРІВ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНИХ МОДУЛІВ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і логіки Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

**Наукові керівники:** доктор фізико-математичних наук, професор

**Комарницький Микола Ярославович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент
**Гаталевич Андрій Іванович**
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
доцент кафедри алгебри і логіки.

Офіційні опоненти**:** доктор фізико-математичних наук, професор,
**Петравчук Анатолій Петрович,**
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
завідувач кафедри алгебри та математичної логіки;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
**Щедрик Володимир Пантелеймонович,**
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри.

Захист відбудеться 04 жовтня 2016 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 у Інституті математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «1» вересня 2016 р.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Тематика кандидатської дисертації відноситься до теорії кілець та модулів. У роботі встановлені принципові взаємозв’язки різних типів спектрів модулів над некомутативними кільцями. Спектр комутативного кільця знаходиться в полі зору багатьох науковців найперше завдяки тому, що він дає можливість використати геометричні методи і прийоми для дослідження абстрактних кілець. Вперше ці ідеї започаткував Круль в 30-х роках минулого століття. Взявши довільне комутативне кільце можна розглянути множину його простих ідеалів, ввести на ній топологію Зариського і розвивати геометрію цих більш загальних об’єктів. В 1950-х роках Серр, Шевальє і Нагата з ціллю приблизитись до доведення гіпотез Вейля, використовували подібний підхід, який розглядає прості ідеали як точки. В більш загальній формі ці ідеї розвинув Гротендік, він надалі визначає спектр комутативного кільця як множину простих ідеалів з топологією Зариського, але також наділяє його пучком кілець: кожній відкритій множині спектру ставиться у відповідність комутативне кільце.

В останні десятиріччя з'явилося багато узагальнень конструкцій спектру, як для випадку некомутативних (диференціальних) кілець, так і для випадку модулів. В некомутативному випадку існують різні означення спектру кільця, котрі базуються на різних підходах до визначення первинних ідеалів. Проте і досі не достатньо глибоко досліджені та мало розкриті зв'язки між цими спектрами. Навіть важко розібратися у відмінностях між такими спектрами. Ця дисертаційна робота дає відповіді на питання про взаємозв'язки в найпростіших ситуаціях, котрі з'являються у розглядуваних в дисертації випадках. Вона є першою спробою систематизувати розрізнені результати в цьому напрямку, доповнити їх та вказати перспективні напрямки для подальшого дослідження.

Всі спектри модулів пов'язані з тим чи іншим поняттям первинного модуля. Багато запитань, котрі з'являються в цій дисертації, є аналогами тих проблем, що вже розв'язані при вивченні первинних ідеалів в некомутативних кільцях. Першу згадку про первинні модулі можна знайти в статті Джонсона[1] за 1953 рік. Незалежно, первинні модулі ввів та вивчав Андрунакієвич. Феллер та Своковскі[2] започаткували дослідження первинних підмодулів деякого фіксованого модуля над довільним кільцем, Каракас[3] вивчав первинні підмодулі довільного модуля над комутативним кільцем. Найбільш вдалий підхід до введення

---

[1] *Johnson R. E.,* Representations of prime rings, Trans. Amer. Math. Soc 74. №2, (1953), 351-357.

[2] *Feller E. H., Swokowski E. W.* Prime modules Can. J. Math., 17 (1965), 1041-1052.

[3] *Karakas H. I.* On Noetherian modules, Journal of Pure and Applied Science (1972), P. 165-168.

первинного модуля вперше запропонував Пейдж[4] в 1972 році. Автор називав модуль первинним, якщо анулятор кожного його ненульового підмодуля збігається з анулятором всього модуля. Пізніше таке саме означення використовували Вісбауер[5] та Даунс[6], при дослідженні взаємозв'язків між різними типами первинних модулів і систематизації теорії таких модулів. Також глибоко вивчався підхід до вивчення первинних модулів, котрий базується на теорії напередрадикалів в категорію R-Mod. Він був реалізований празькими алгебраїстами Біканом, Ямбором, Кепкою і Нємєцом[7] в 1980 році. А. В. Андрунакієвич в праці[8] використовував первинні модулі для опису первинних радикалів в категорії кілець. В сумісній роботі Андрунакієвич та Рябухін[9] довели, що кожен спеціальний радикал категорії кілець можна описати за допомогою повного підкласу класу первинних модулів. Деякі цікаві ідеї стосовно первинних модулів були реалізовані в статті японського математика Шігенага[10] в 1982 році. Він запропонував різні модифікації та узагальнення первинних модулів і розглядав схеми логічних взаємозв'язків між ними. Пізніше поняття первинного модуля та його узагальнень привертали увагу багатьох відомих алгебраїстів. В наші дні потік публікацій, в яких з'являються поняття первинного модуля чи первинного підмодуля стрімко зростає. При цьому беремо до уваги і публікації, котрі стосуються застосувань цих понять, наприклад в котрих досліджуються різні спектри кілець та модулів. Останнім часом широко використовуються означення первинних модулів, які грунтуються на глибоких властивостяхануляторних ідеалів підмодулів. Зокрема, розпочались і інтенсивно продовжуються дослідження класично-первинних підмодулів та строго-первинних модулів. Цікаві просування отримані стосовно цілком первинних модулів. В цьому напрямку можна виокремити ще роботи А. Розенберга[11] та А. Каучікаса[12]. З одного боку, це показує

---

4 *Page S.,* Properties of quotient rings, Can. J. Math. 24, №6, (1972), 1122-1128.

5 *Wisbauer R.* On prime modules and rings, Commun. Algebra, 11 (1983) 2249-2265.

6 *Dauns J.* Prime modules, Reine Angew. Math., 298 (1978), 156-181.

7 *Bican L., Jampor P., Kepka T., Nemec P.* Prime and coprime modules, Fund. Math 57, (1980), 33-45.

8 *Andrunakievich V. A.* Prime modules and Baer radical Siberian Mathematical Journalб 2, № 6., (1961), 801-806, (in Russian).

9 *Andrunakievich V. A., Riabuhin Yu. M.* Special modules and special radicals DAN SSSR, 147, № 6, (1962), 1274-1277. (in Russian)

10 *Shigenaga K.* On some prime modules, Res. Rep. Of U-be. Tech. Coll. №28 (1982), 1-8.

11 *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras, Kluwer Academic Publishers, (1995), 316.

важливість цих понять і постійну увагу до них, а з іншого підтверджує інтенсивність пошуку найбільш вдалого варіанту поняття первинного модуля, котре б дозволило сформулювати та довести аналоги найважливіших фактів, відомих з класичної алгебраїчної геометрії. Варто зауважити що некомутативна алгебраїчна геометрія активно розвивається~~,~~ і час від часу з'являються монографії, котрі підсумовують розвиток того чи іншого періоду. В загальному, тематика дисертаційної роботи відноситься до тих розділів математики, які бурхливо розвиваються і мають важливі застосування. Це дозволяє зробити висновок про актуальність дисертації.

***Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.*** Тематика дисертаційного дослідження Малоїд-Глєбової М. О. пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Отримані в дисертації результати складають частину досліджень держбюджетної теми: Мс-210Ф "Імовірносні та теоретико-модельні методи у випадкових еволюціях, лінійній та диференціальній алгебрі" (номер державної реєстрації 0108 U 004135).

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* дисертаційної роботи є дослідження різноманітних спектрів модулів над асоціативними кільцями та пошук взаємозв'язків між такими спектрами.

*Об'єктом* дослідження є різноманітні спектри мультиплікаційних модулів над різними класами асоціативних кілець, а саме первинний, цілком-первинний, лівий, максимальний, мінімальний, теоретико-скрутовий та розширений спектри модулів, а також спектр Розенберга і спектр Ціглера.

*Предметом* дослідження є первинні модулі, топології типу Зариського, порядкові та інші топології на спектрах модулів, гомоморфізми між різними спектрами, котрі виступають в якості взаємозв'язків між цими спектрами.

*Завданнями* дослідження є:

— дослідити різні означення спектрів некомутативних кілець;
— описати теоретико-скрутовий спектр модуля та дослідити його зв'язки з іншими спектрами модулів;

---

[12] *Kaucikas A.* On the left strongly prime modules and ideals, Liet.Mat. Rink, Special Issue, 41, (2001), 84–87.

- розглянути різні типи спектрів мультиплікаційних модулів та вивчити зв'язки між ними;
- довести узагальнення теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів;
- описати взаємозв'язки з тими типами спектрів модулів, котрі досліджуються в дисертації;

*Методи дослідження:* у дисертаційній роботі використано методи, які використовуються у теорії кілець та модулів, алгебраїчній геометрії та теорії категорій.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

У дисертаційній роботі вперше отримано такі наукові результати:

- подано означення двостороннього підмодуля та досліджено його властивості;
- розглянуто строгі дуо-модулі та слабкі дуо-модулі, досліджено їх властивості і взаємозв'язки з дуо-модулями та мультиплікаційними модулями;
- введено поняття класично-первинного та цілком первинного модульного спектру для некомутативного кільця а також розглянуто їх властивості;
- досліджено геометричні властивості різних спектрів і побудовано відображення між деякими типами спектрів;
- введено поняття лівого спектру (спектру Розенберга) для модуля, досліджено його властивості та взаємозв'язки з іншими модульними спектрами;
- доведено узагальнення теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів;
- досліджено теоретико-скрутовий спектр модуля та його топологічні властивості;
- введено поняття циклічного спектру модуля та досліджено його властивості;
- досліджено взаємозв'язки між різними типами спектрів модулів та показано ці взаємозв'язки у вигляді діаграми;

**Практичне значення отриманих результатів.** Дисертаційна робота має теоретичний характер. Розроблені методи та одержані результати можуть бути використані у подальших теоретичних дослідженнях та у задачах некомутативної алгебраїчної геометрії і теорії модулів, які пов'язані з поняттями спектрів модулів для некомутативного випадку.

**Особистий внесок здобувача.** Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Постановка задач, вибір методів дослідження, аналіз результатів та загальна координація роботи належать науковому керівнику. У спільних з науковим керівником (Комарницьким М. Я.) публікаціях за темою дисертації внески співавторів є рівними.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- 7-ій міжнародній алгебраїчній конференції (Харків, 18 - 23 серпня 2009 р.);
- конфенції молодих учених із сучасних проблем мех. і мат. ім. ак. Я. С. Підстригача (Львів, 25 - 27 трав. 2010 р.);
- 13-ій міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 13 - 15 травня 2010 р.);
- конфенції молодих учених із сучасних проблем мех. і мат. ім. ак. Я. С. Підстригача (Львів,24 - 27 трав. 2011 р.);
- 8-ій міжнародній алгебраїчній конференції (Луганськ, 5 - 12 липня 2011 р.);
- науковій конференції "Застосування математичних методів у науці і техніці" (Луцьк, 25 - 26 листопада 2011 р.);
- 14-ій міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 19 - 21 квітня 2012 р.);
- конфенції молодих учених із сучасних проблем мех. і мат. ім. ак. Я. С. Підстригача (Львів, 23 - 25 трав. 2012 р.);
- International conference, dedicated to the 70-th anniversary of Vladimir Kirichenko (Mykolayiv, 13 - 19 July, 2012);
- International conference, dedicated to the 120-th anniversary of Stephan Banach (Lviv, 17 - 21 September, 2012);
- конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 21 - 25 травня, 2013 р.);
- 9-ій міжнародній алгебраїчній конференції (Львів, 8 - 13 липня 2013 р.);
- International conference "Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory" (Bedlewo, Poland, 14 - 20 July, 2013 р.);
- 15-ій міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 15 - 17 травня 2014 р.);
- міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю з дня народження Л. А. Калужніна (Київ, 7 - 12 липня 2014 р.);
- 10-ій міжнародній алгебраїчній конференції (Одеса, 20 - 27 серпня 2015 р.);

та на семінарах:

- Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (Інститут математики НАН України, 2016 р.);
- Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет ім. І. Франка, керівник – проф. М. Я. Комарницький, 2010 – 2016 рр.).

**Публікації.** Результати дисертації опубліковано у 6 статтях [1–6] у фахових виданнях з переліку затвердженого МОН України, 5 без співавторства, з них одна праця [6] опублікована у виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази та в 15 тезах доповідей на наукових конференціях.

**Структура та об'єм дисертації.** Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів: «Попередні відомості та огляд літератури за темою», «Основні типи спектрів, засновані на узагальненнях первинних модулів та схема взаємозв'язків між ними», «Спектри мультиплікаційних модулів та зв'язки між ними», «Теоретико-скрутовий спектр модуля та його зв'язки з класичними спектрами», які розділені на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 115 сторінок. Список використаних джерел налічує 115 найменувань та займає 12 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано її мету, завдання та основні задачі, які розв'язуються в цій роботі, вказано наукову новизну отриманих результатів, їх застосування та наведено форми їх апробації.

У **першому розділі**, який є допоміжним, наведено огляд літератури за темою дисертації та сформульовано необхідні означення і факти, пов'язані з тематикою досліджень, що використовуються у дисертації, а також важливі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

В дисертаційній роботі використовуються такі позначення:

- $Spec(R)$ - первинний спектр кільця $R$ (множина всіх первинних ідеалів кільця);
- $Spec(M)$ - первинний спектр модуля $M$ (множина всіх первинних підмодулів модуля);
- $Max(M)$ - простір всіх максимальних підмодулів модуля $M$;
- $Min(M)$ - простір всіх мінімальних первинних підмодулів модуля $M$;
- $Spec_l(M)$ - спектр Розенберга модуля $M$;
- $Spec_{Zg}(M)$ - спектр Ціглера модуля $M$;
- $Cl.Spec(M)$ - класично-первинний спектр модуля $M$ (множина всіх класично-первинних підмодулів модуля);
- $Cl.Min(M)$ - простір всіх мінімальних класично-первинних підмодулів модуля $M$;
- $Cspec(M)$ - циклічний спектр модуля $M$;
- $R-Mod$ - категорія всіх лівих модулів над асоціативним кільцем $R$;
- $ComMod$ - категорія всіх модулів над комутативними кільцями;
- $R-prop$ - множина всіх власних скрутів категорії $R-Mod$;
- $R-Sp$ - теоретико-скрутовий спектр кільця $R$ (множина всіх первинних скрутів категорії $R-Mod$);
- $R-XSp$ - множина всіх локально-первинних скрутів категорії $R-Mod$;

- $R-Sp(M)$ - теоретико-скрутовий спектр модуля $M$ ;
- $MR-Sp$ - множина всіх максимальних скрутів категорії $R-Mod$ ;
- $MinR-Sp$ - множина всіх мінімальних первинних скрутів категорії $R-Mod$ ;

У **другому розділі** розглядаються двосторонні підмодулі і класичні дуо-модулі та досліджуються їх властивості. Вперше поняття дуо-модуля подав Патрік Сміт[13] та його учні. Підхід Сміта грунтується на використанні ідеї цілком-інваріантного підмодуля замість двостороннього підмодуля. Проте, означення дане Смітом не можна важати класичним узагальненням аналогічного поняття для кілець, оскільки багато властивостей, притаманних класичним дуо-кільцям, перестають виконуватися для дуо-модулів. Інший підхід до узагальнення двосторонніх ідеалів та дуо-кілець на модулі можна отримати, детально розглянувши так звану властивість вставки множників. Історично перше формулювання цієї властивості для кілець знаходимо в статті Белла[14]. Близькі до двосторонніх підмодулів вперше ввели в своїй роботі Грюнвальд і Ссевері[15].

**Означення 2.1. [15]** *Кажуть, що підмодуль N лівого* $R$ *-модуля M володіє властивістю вставки множників (IFP), якщо з умови* $am \in N$ *, де* $a \in R$ *і* $m \in M$ *випливає що* $aRm \subseteq N$ *.*

**Означення 2.2.** *Підмодуль N лівого модуля M називається двостороннім підмодулем, якщо кожний підмодуль K модуля N, розглядуваний як підмодуль модуля M володіє властивістю вставки множників (IFP).*

**Означення 2.3.** *Лівий модуль, всі підмодулі якого є двосторонніми, називається лівим дуо-модулем.*

Досліджено властивості двосторонніх підмодулів та дуо-модулів, більше того, справедливим є такий результат.

**Твердження 2.3.** *Двосторонні підмодулі довільного модуля утворюють повну гратку.*

Також в дисертації розглядаються строгі дуо-модулі та слабкі дуо-модулі і досліджуються їх взаємозв’язки з дуо-модулями і мультиплікаційними модулями.

---

13 *Ozcan A.C., Harmanci A. and Smith P.F.* Duo modules Glasgow Math. J., 48, (2006) 533-545.

14 *Bell H.E.* Near-rings in which each element is a power of inself Bull. Aust. Math. Soc., 2 (1970), 363 - 368.

15 *Groenewald N. J., SSevviiri D.* Completely prime submodules International Electronic Journal of Algebra, 13, №1 (2013), 1-14.

**Наслідок 2.3.** *Над асоціативним кільцем R такі властивості еквівалентні:*

1. $R_R$ *є дуо-модулем;*
2. $R_R$ *є мультиплікаційним модулем;*
3. *Кожен циклічний R-модуль є мультиплікаційним;*
4. *Кожен циклічний правий R-модуль є дуо-модулем.*

**Означення 2.4.** *Модуль M називається строгим дуо-модулем, якщо для кожного двостороннього підмодуля N модуля M виконується умова* $tr(N,M) = \cup_{f \in Hom(N,M)} f(N) = N$.

Одним з важливих результатів розділу є така теорема.

**Теорема 2.2.** *Нехай R асоціативне кільце, M проективний правий R-модуль. M є дуо-модулем тоді і лише тоді коли M є мультиплікаційним модулем.*

**Наслідок 2.4.** *Нехай R асоціативне кільце, де кожен ідеал є ідемпотентним і M проективний правий R-модуль. Тоді такі властивості еквівалентні:*

1. *M - мультиплікаційний модуль;*
2. *M - строгий дуо-модуль;*
3. *M - дуо-модуль;*

Також в другому розділі вивчаються різні узагальнення поняття первинного модуля та підмодуля, досліджуються їх властивості та встановлюються взаємозв'язки між різними типами спектрів модулів над асоціативними кільцями.

**Означення 2.8.** *Ненульовий правий (лівий) модуль M називається первинним модулем (в сенсі Пейджа), якщо* $Ann(K) = Ann(M)$ *для кожного ненульового підмодуля* $K$ *модуля M.*

**Означення 2.10.** *Модуль M називається первинним модулем (в сенсі Бікана), якщо* $k_N = k_M$ *для кожного ненульового підмодуля* $N$ *модуля M, де* $k_Q(M) = \{\ker f \mid f \in Hom(M,Q)\}$ *для кожного модуля M.*

**Означення 2.11.** *Власний підмодуль* $P$ *лівого модуля* $M$ *називається класично-первинним підмодулем, якщо з включення* $abRm \subseteq P$ *для* $a,b \in R$ *і* $m \in M$ *випливає, що або* $am \in P$ *або* $bm \in P$.

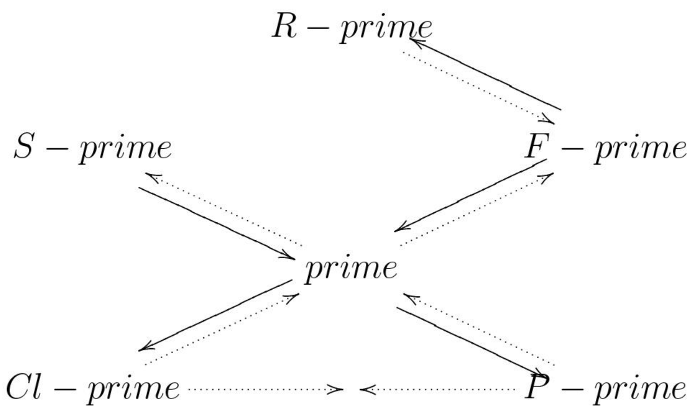
**Означення 2.12.** *Власний підмодуль* $P$ *лівого модуля* $M$ *називається цілком-первинним підмодулем, якщо з включення* $abm \subseteq P$ *для* $a,b \in R$ *і* $m \in M$ *випливає, що або* $am \in P$ *або* $bm \in P$.

**Означення 2.14.** *Ненульовий лівий модуль M над кільцем* $R$ *називається строго-первинним, якщо для довільних ненульових елементів* $x,y \in M$ *існує така скінченна* *підмножина* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq R$, *що* $Ann_R\{a_1x, a_2x, \ldots, a_nx\} \subseteq Ann_R\{y\}$, *тобто з того, що* ($ra_1x = ra_2x = \ldots = ra_nx = 0$), $r \in R$, *випливає, що* $ry = 0$.

Поняття спектру Розенберга модуля $M$ базується на відношенні напередпорядку, визначеному на множині підмодулів модуля. Якщо $N$, $L$ підмодулі модуля $M$, то вважаємо що $N \le L$, якщо $(N:\omega) \subseteq L$ для $\omega$ - скінченно-породженої підгрупи абелевої групи кільця $R$.

**Означення 4.7.** *Спектр Розенберга* $Spec_l(M)$ *модуля* $M$ *це множина усіх таких лівих підмодулів* $P$, *що* $(P:x) \le P$ *для деякого* $x \in R \setminus P$.

Наразі відомо близько десятка різноманітних узагальнень поняття первинного ідеалу для модульного випадку. Те чи інше означення первинного модуля і підмодуля дозволяє перенести найбільш важливі результати з комутативної алгебраїчної геометрії на модульний випадок. У дисертації вивчаються ці узагальнення і встановлюються взаємозв'язки між ними. Дані взаємозв'язки подаються у вигляді схеми, котра є узагальненням схеми Шігенаги.




*S-prime* – строго-первинні модулі;

*R-prime* – первинні модулі в сенсі Розенберга;

*F-prime* – цілком-первинні модулі;

*P-prime* – первинні модулі (в сенсі Пейджа);

*prime* – первинні модулі (в сенсі Бікана);

*Cl-prime* – класично-первинні модулі;

В діаграмі суцільні стрілки між типами спектрів показують те, що включення виконується, а штрих-пунктирні стрілки те, що включення не виконується.

Також в першому розділі досліджуються цілком-гільбертові та класично-гільбертові модулі, вивчаються їх властивості та взаємозв'язки з топологічними модулями.

**Означення 2.22.** *Модуль М називається класично-гільбертовим (цілком-гільбертовим), якщо кожен його класично-первинний (цілком-первинний) підмодуль є перетином максимальних підмодулів.*

**Теорема 2.4.** *R-модуль М є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) модулем тоді і лише тоді, коли кожен цілком-первинний (класично-первинний) підмодуль модуля М, що не є максимальним, є перетином власних більших цілком-первинних (класично-первинних) підмодулів.*

У **третьому розділі** розглядаються спектри мультиплікаційних модулів та їх категорно-алгебраїчні властивості. Зокрема, доводяться аналоги теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів. В 1971 Джузеппе Де Марко та Адальберто Орсатті[16] опублікували статтю під назвою "Комутативні кільця, в котрих кожен первинний ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі".

Одним з результатів статті стало доведення того факту, що відображення, котре кожному первинному ідеалу комутативного кільця ставить у відповідність єдиний максимальний ідеал цього ж кільця, є ретракцією. В цьому розділі дисертаційної роботи подаються узагальнення цієї теореми для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів.

**Означення 3.6.** *Модуль М називається lpm-модулем (лівим pm-модулем), якщо кожен первинний підмодуль цього модуля має, з точністю до ізоморфізму, один простий гомоморфний образ.*

**Теорема 3.2.** *Нехай М - лівий мультиплікаційний R-модуль, і Max(M) - ретракт простору Spec(M). Тоді М - lpm-модуль.*

І, як наслідок, отримано:

**Наслідок 3.1.** *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lpm-модуля М містить єдиний мінімальний первинний підмодуль.*

**Наслідок 3.2.** *Простір Min(M) мінімальних первинних підмодулів є ретрактом простору Spec(M).*

---

[16] *De Marco G., Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal Proc. Amer. Math. Soc., 30 (1971) 459-466.

Також в цьому розділі доводяться аналоги теореми Де Марко Орсатті для спектра Ціглера[17] мультиплікаційного модуля і для класично-первинного спектру.

**Означення 3.9. [17]** *Під точками спектру Ціглера мультиплікаційного модуля розуміємо класи ізоморфізму модулів вигляду $H(M/N)$, де $N$ пробігає чисто-нерозкладні підмодулі модуля M. Базою простору будуть множини вигляду* $\varphi/\psi = \{N \in Spec_{Zg}(M) : \varphi(N)/\psi(N) \neq 0\}$, *де $\varphi(N)$ та $\psi(N)$ формульні підгрупи.*

**Означення 3.10.** *Нехай M - мультиплікаційний модуль, N - його підмодуль. Модуль M називається pim-модулем, якщо кожен чисто-нерозкладний підмодуль міститься в єдиному максимальному підмодулі.*

**Теорема 3.3.** *Нехай M - лівий мультиплікаційний R-модуль, і Max(M) - ретракт простору $Spec_{Zg}(M)$. Тоді M - pim-модуль.*

**Означення 3.11.** *Лівий модуль M над кільцем R називається lcpm-модулем, якщо кожен класично-первинний підмодуль P цього модуля міститься в єдиному максимальному (двосторонньому) підмодулі.*

**Теорема 3.4.** *Нехай M мультиплікаційний R-модуль, і Max(M) ретракт простору Cl.Spec(M). Тоді M є lcpm-модулем.*

І, як наслідок, отримано такі факти:

**Наслідок 3.3.** *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lcpm-модуля M містить єдиний мінімальний класично-первинний підмодуль.*

**Наслідок 3.4.** *Простір Cl.Min(M) мінімальних класично-первинних підмодулів є ретрактом простору Cl.Spec(M).*

Далі в цьому розділі досліджуються розширені спектри модулів та їхній циклічний спектр. Зокрема, вводиться поняття циклічного спектру модуля як об'єднання спектрів його циклічних підмодулів і подається приклад.

**Приклад 3.1.** Нехай $M = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| a, b \in k \right\}$ деякий модуль зі стовпців другого порядку над кільцем $R = M_2(k)$, де $k$ це довільне поле. Такий модуль є циклічним з твірним

---

[17] *Prest M.* Topological and Geometric aspects of The Ziegler Spectrum, Department of Mathematics Univercity of Manchester, UK.

елементом $e=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, тобто $M=R\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Тоді $Ann\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}\| b,d\in k\right\}$, отже $M/Ann\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cong\left\{\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}\| a,c\in k\right\}$. Максимальний підмодуль має вигляд $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, тому циклічний спектр складається з однієї точки.

Також в цьому розділі доводиться теорема про розширення Кана контраваріантного функтору $C-Spec:R-Mod\to Set$ для циклічного спектру.

**Означення 3.13.** *Якщо дано функтори* $K:A\to B$ *і* $S:A\to C$, *(правим) розширенням Кана* $S$ *стосовно* $K$ *назвемо функтор* $L:B\to C$ *з таким природнім перетворенням* $\varepsilon:LK\to S$, *що для довільного іншого функтору* $F:B\to C$ *з природнім перетворенням* $\eta:FK\to S$ *існує таке єдине природнє перетворення* $\delta:F\to L$, *що* $\eta=\varepsilon\circ(\delta K)$.

**Теорема 3.6.** *Функтор* $C-Spec:R-Mod^{op}\to Set$ *разом з одиничним природнім перетворенням* $C-Spec\,|_{ComMod}\to Spec$ *є розширенням Кана для функтору* $Spec:ComMod\to Set$ *відносно вкладення* $ComMod^{op}\subseteq R-Mod^{op}$.

У **четвертому розділі** розглядаються теоретико-скрутовий спектр модуля та топології на ньому. Вперше поняття первинного скруту, на якому базується поняття теоретико-скрутового спектру ввів Голдман[18], проте називав його «ідемпотентним ядерним функтором». Вперше теоретико-скрутовий спектр некомутативного кільця під назвою "лівий спектр" досліджував Н. Попеску[19]. Означення скруту як класу еквівалентності ін’єктивних модулів та різні топологій на теоретико-скрутовому спектрі некомутативного нетерового кільця запровадив Дж. Голан[20]. В 1973 році Джон Бічі[21] опублікував статтю, в котрій досліджував максимальні скрути над не обов’язково комутативними кільцями. Максимальні скрути він розглядав з точки зору часткового порядку класу періодичних модулів. Існує інший підхід. Клас $R-tors$ всіх скрутів категорії $R-Mod$ можна розглядати як гратку над

---

18 *Goldman O.* Rings and modules of quotients Journal of Algebra, 13, (1969), 10-47.

19 *Popescu N.* Le spectre a gauche d'un anneau, Ann. Sc. Normal. Sup. di Pisa, 21, №1, (1967), 281-290.

20 *Golan J. S.* Topologies on the Torsion-Theoretic Spectrum of a Noncommutatie Ring, Pacific Journal of Mathematics, 51, № 2 (1974), 439-450.

21 *Beachy J.A.* On maximal torsion radicals, Can. J. Math., 25, №2, (1973), 712-726.

кільцем $R$. Максимальними елементами в цій гратці є максимальні скрути. Існування їх легко доводиться за допомогою леми Цорна.

**Означення 4.1.** *Кільце $R$, над котрим кожен первинний скрут має одну точну верхню межу називається $pm$-кільцем в теоретико-скрутовому сенсі.*

**Теорема 4.1.** *Нехай $MR-Sp$ є ретрактом простору $R-Sp$. Тоді кільце $R$ є $pm$-кільцем в теоретико-скрутовому сенсі.*

Ця теорема є аналогом теореми Де Марко Орсатті для теоретико-скрутового випадку. З неї прямо отримуються такі наслідки.

**Наслідок 4.1.** *Кожен максимальний скрут категорії $R-Mod$ $pm$-кільця в теоретико-скрутовому сенсі містить єдиний мінімальний первинний скрут.*

**Наслідок 4.2.** *Простір $MinR-Sp$ мінімальних первинних скрутів є ретрактом простору $R-Sp$.*

Позначимо $U(\tau)=\{\pi\in R-Sp|\tau\le\pi\}$. Тоді $Z(\tau)=R-Sp\setminus U(\tau)$. Через $L(R-tors)$ позначимо гратку всіх підмножин, породжених множинами вигляду $Z(\tau)$, де $\tau\in R-tors$, а через $\Pr imL(R-tors)$ множину всіх первинних фільтрів $\Im$ гратки $L(R-tors)$. Нехай $XU(\tau)=\{\sigma\in R-XSp|\tau\ge\sigma\}$, $XZ(\tau)=R-XSp\setminus XU(\tau)$. Через $XL(R-tors)$ позначимо гратку всіх підмножин, породжених $XZ(\tau)$ для всіх $\tau\in R-tors$, через $\Pr imXL(R-tors)$ множину всіх первинних фільтрів $\Im$ гратки $XL(R-tors)$.

**Лема 4.1.** *Відображення $X\Phi: R-XSp\to \Pr imXL(R-tors)$, визначене за правилом $\sigma\to\{S\in XL(R-tors\,|\,\sigma\in S)\}$ є бієктивним.*

Одним з основних результатів цього розділу є доведення комутативності діаграми.

**Твердження 4.3.** *Така діаграма є комутативною*

$$\begin{array}{ccc} R-XSp & \overset{\cong}{\underset{X\Phi}{\longrightarrow}} & \Pr imXL(R-tors) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Pr im\sigma}\,{\scriptstyle\cong} \\ R-Sp & \underset{\Phi}{\to} & \Pr imL(R-tors) \end{array}$$

**Теорема 4.2.** *Якщо $R-Sp$ спектральний простір, то для довільного локально-первинного скруту $\sigma$ з $R-tors$, скрут $\sqrt{\sigma}=\cap_i\pi_i$ (де $\pi_i$ первинний скрут і $\sigma\le\pi_i$ ) є* *первинним і відображення* $\Psi : R-XSp \to R-Sp$ *котре діє за правилом* $\sigma \to \sqrt{\sigma}$, *є спектральним ретрактом вкладення* $R-Sp \to R-XSp$.

В своїй роботі Голан ввів кілька топологій на теоретико-скрутовому спектрі кільця.

**Означення 1.23. [20]** *За Голаном, розглянемо функцію* $c : \tau \to \{\tau' \in R-prop \mid \tau \le \tau'\}$. *Відомо, що сім'я* $\{c(\tau) | \tau \in R-tors\}$ *підмножин з* $R-prop$ *утворює базу топології на* $R-prop$, *котра називається порядковою топологією. Сім'я підмножин* $\{c(\varsigma(R/I)) | I \subset R\}$ *множин з* $R-prop$, *де* $I$ *пробігає множину усіх лівих ідеалів кільця* $R$ *утворює базу топології на* $R-prop$, *що зветься топологією скінченного порядку.*

**Теорема 4.4.** *Нехай* $R$ *інваріантне зліва кільце, в якому кожен незвідний критичний лівий ідеал є первинним. Тоді простір* $R-Sp$ *з топологією скінченного порядку гомеоморфний простору* $spec(R)$ *з топологією Зариського.*

Також в цьому розділі вводиться поняття теоретико-скрутового спектру модуля як перетину двох множин: теоретико-скрутового спектру кільця та носія модуля.

**Означення 4.4.** *Теоретико-скрутовий спектр модуля M визначається як* $R-Sp(M) = R-Sp \cap \mathrm{supp}(M)$, *де* $\mathrm{supp}(M) = \{\sigma \mid \sigma(M) \ne 0\}$ *і* $\sigma(M)$ *це періодична частина модуля M.*

В четвертому розділі також показано зв'язки між теоретико-скрутовим, циклічним та спектром Розенберга модуля над асоціативним кільцем. Зокрема, ці зв'язки показано в таких лемах і теоремах.

**Теорема 4.5.** *Відображення* $\Phi : Cspec(M) \to R-Sp(M)$, *де* $\Phi(P) = \chi(M/P)$ *є неперервним і сюр'єктивним.*

**Лема 4.6.** *Для довільного підмодуля* $P \in Spec_l(M)$ *спектру Розенберга мультиплікаційного модуля, двосторонній підмодуль (P:M) є первинним.*

Очевидно, можна побудувати відображення, котре кожному первинному в сенсі Розенберга підмодулю ставить у відповідність двосторонній підмодуль $\varphi : P \to (P : M)$.

Одним з результатів розділу є така теорема.

**Теорема 4.6.** *Відображення* $\varphi : P \to (P : M)$ *є ретракцією, тобто Spec(M) є ретрактом* $Spec_l(M)$.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню різноманітних спектрів модулів над асоціативними кільцями: первинного, цілком-первинного, лівого, максимального, мінімального, теоретико-скрутового, розширеного спектрів модулів, а також спектру Розенберга і спектру Ціглера та взаємозв'язків між цими спектрами.

У дисертації автором отримано такі нові результати:

1. подано означення двостороннього підмодуля та досліджено його властивості;
2. розглянуто строгі дуо-модулі і слабкі дуо-модулі, досліджено їх властивості та взаємозв'язки з дуо-модулями і мультиплікаційними модулями;
3. введено поняття класично-первинного і цілком первинного модульного спектру для некомутативного кільця та розглянуто їх властивості;
4. досліджено геометричні властивості різних спектрів і побудовано відображення між деякими типами спектрів;
5. введено поняття лівого спектру (спектру Розенберга) для модуля, досліджено його властивості та взаємозв'язки з іншими модульними спектрами;
6. доведено узагальнення теореми Де-Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів;
7. досліджено теоретико-скрутовий спектр модуля та його топологічні властивості;
8. введено поняття циклічного спектру модуля і досліджено його властивості;
9. досліджено взаємозв'язки між різними типами спектрів модулів та показано ці взаємозв'язки у вигляді діаграми;

Автор висловлює щиру подяку науковим керівникам, доктору фізико-математичних наук, професору Миколі Ярославовичу Комарницькому та кандидату фізико-математичних наук, доценту Андрію Івановичу Гаталевичу за постановку задач та ідейне наповнення.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


*1.* *Комарницький М. Я., Малоїд М. О.* Теорема Де Марко і Орсатті для спектра Ціглера мультиплікаційного модуля // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 23 – 27.

*2.* *Малоїд-Глєбова М. О.* Про теоретико-скрутовий спектр інваріантного зліва кільця та слабко-мультиплікаційні і чисто-мультиплікаційні модулі // Прикл. проблеми мех. і мат. –2011. – Вип. 9. – С. 87 – 94.

*3.* *Малоїд-Глєбова М. О.* Деякі взаємозв'язки між різними типами спектрів мультиплікаційних модулів та спектральними просторами // Математичні студії – 2014. – 41, № 1. – P. 3 – 17.

*4.* *Малоїд-Глєбова М. О.* Про класично-первинний спектр цілком-Гільбертових мультиплікаційних модулів // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат – 2014. – 79. – P. 119 – 126.

*5.* *Малоїд-Глєбова М. О.* Класично-Гільбертові мультиплікаційні модулі та їх первинний спектр // Науковий вісник ужгородського університету – 2014. – 26, № 2. – P. 91 – 97.

6. *Maloid-Glebova M. O.* Cyclic left and torsion-theoretic spectrums of module and their relations // Algebra and Discrete Mathematics. – 2015. – V. 20, №2. – P. 286 – 296.

7. 7-th International Algebraic Conference in Ukraine, August 18-23, 2009, M. *Komarnytskyi, M. Maloyid*, "Multiplication modules, in which every prime submodule is contained in unique maximal submodule", p. 75-76;

8. Міжнародна конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях", 17-22 квітня 2011, Харків, "Про кільця, теоретико-скрутовий та первинний спектри яких гомеоморфні", стор. 130;

9. Конференція молодих учених зі сучасних проблем механіки та математики ім. академіка Я. С. Підстригача, 24-27 травня 2011, Львів, *Малоїд М. О.,* "Про мультиплікаційні модулі з дискретним спектром", стор. 263;

10. 8-th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of profesor Vitaliy Usenko, July 05-12, 2011, Lugansk, "Some properties of quasi multiplication modules over noncommutative rings", p. 212;

11. Всеукраїнська наукова конференція "Застосування математичних методів в науці і техніці", 25-26 листопада 2011, Луцьк, "Ліві спектри Розенберга та Попеску кілець Безу та деякі зв'язки між ними", стор. 38-39;

12. 14 міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ, *M. Ja. Komarnytskyi, M. O. Maloid-Glebova*, "About extended torsion-theoretic spectrum of semiprime ring", стор. 17;
13. International Conference, dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17-21, 2012, Lviv, *M. Ja. Komarnytskyi, M. O. Maloid-Glebova* "Some properties of extendedprime spectrum over commutative ring", p. 255;
14. International Conference, dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17-21, 2012, Lviv, "Prime and dusemiprime torsion theories in the category of regular modules", p. 258;
15. International mathematical conference on occasion to the 70-th year anniversary of professor Vladimir Kirichenko, June 13-19, 2012, Mykolayiv, "About rings, where extended torsion theoretic spectrum is retract of torsion theoretic spectrum with order topology", p. 107;
16. Конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", 21-25 травня 2013, Львів, "Про мінімальний первинний спектр модулів", стор. 189-190;
17. 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, July 08-13, 2013, Lviv, "Some relations between left and torsion-theoretic spectrums of rings and modules", p. 123;
18. International conference "Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory", July 14-20, 2013, Bedlewo, Poland, "Cyclic left and torsion-theoretic spectrums of a module and their relations", p. 68-70;
19. 15 міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ, "About essentially prime modules", стор. 22;
20. International algebraic conference, dedicated to the 100-th anniversary of L. A. Kaluzhnin, July 07-12, 2014, Kyiv, "About Hilbert and classical-Hilbert multiplication modules", p. 63;
21. X International Algebraic Conference in Ukraine, dedicated to the 70-th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20-27, 2015, Odesa, "About functoriality of cyclic spectrum of module", p. 77;

## АНОТАЦІЯ

**Малоїд-Глєбової М. О.** *Взаємозв'язки між різними типами спектрів мультиплікаційних модулів* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню різних типів спектрів модулів над асоціативними кільцями: первинного, цілком-первинного, класично-первинного, лівого, теоретико-скрутового, циклічного, спектрів Розенберга і Ціглера. Також досліджуються топологічні властивості спектрів та взаємозв'язки між цими спектрами. Зокрема, в дисертаційній роботі подано означення двостороннього підмодуля та досліджено його властивості, введено поняття класично-первинного та цілком первинного модульного спектру для некомутативного кільця та розглянуто їх властивості. Доведено узагальнення теореми Де-Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів. Також досліджено теоретико-скрутовий спектр модуля та його топологічні властивості, введено поняття лівого спектру (спектру Розенберга) для модуля, досліджено його властивості та взаємозв'язки з іншими модульними спектрами. В дисертаційній роботі введено поняття циклічного спектру модуля та досліджено його властивості, встановлено взаємозв'язки між різними типами спектрів модулів та показано ці взаємозв'язки у вигляді схеми-діаграми, аналогічній діаграмі Шігенаги.

**Ключові слова:** *первинний модуль, первинний підмодуль, спектр модуля, теорема Де-Марко Орсатті, мультиплікаційний модуль, теоретико-скрутовий спектр, лівий спектр, спектр Розенберга, спектр Ціглера, циклічний спектр, двосторонній підмодуль, дуо-модуль, топологія Зариського.*

## АННОТАЦИЯ

**Малоид-Глебова М. А.** *Взаимосвязи между различными типами спектров мультипликационных модулей.*– На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию различных видов спектров модулей над ассоциативными кольцами: первичного, вполне-первичного, классически первичного, левого, теоретико-скрутового, циклического, спектров Розенберга и Циглера. Также исследуются топологические свойства спектров и взаимосвязи между этими спектрами. В частности, в диссертационной работе представлены определения двустороннего подмодуля и исследованы его свойства, введено понятие классически первичного и вполне первичного модульного спектра для некоммутативными кольца и рассмотрены их свойства. Доказано обобщение теоремы Де Марко Орсатти для различных видов спектров мультипликационных модулей. Также исследованы теоретико-скрутовий спектр модуля и

его топологические свойства, введено понятие левого спектра (спектра Розенберга) для модуля, исследованы его свойства и взаимосвязи с другими модульными спектрами. В диссертационной работе введено понятие циклического спектра модуля и исследованы его свойства, установлены взаимосвязи между различными типами спектров модулей и показано эти взаимосвязи в виде схемы-диаграммы, аналогичной диаграмме Шигенагы.

**Ключевые слова:** *первичный модуль, первичный подмодуль, спектр модуля, теорема Де-Марко Орсатти, мультипликационный модуль, теоретико-скрутовий спектр, левый спектр, спектр Розенберга спектр Циглера, циклический спектр, двусторонний подмодуль, дуо-модуль, топология Зариського.*

## ABSTRACT

**Maloid-Hlyebova M. O.** *The relationship between different types of spectrum of multiplication modules.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the candidate of physical and mathematical sciences degree on the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

This thesis is devoted to the different types of spectrum of modules over associative rings: prime, completely-prime, classically-prime, left, torsion-theoretic, cyclic spectrums, Rosenberg spectrum and Zigler spectrum. Also are studied topological properties of the spectrums and the relationships between these spectrums.

In the second chapter are established relationships between different types of modules and their spectrums. These relationships are presented as a scheme-diagram, similar to the Shigenaga diagram. Especially, it is shown that strongly-prime modules and fully-prime modules are prime in the sense of Bikan, but not vice versa and prime in the sense of Bikan modules are classically-prime modules and prime modules in the sense of Page, but not vice versa. In particular, in the second chapter is presented definition of two-sided submodule and are studied its properties, are given notions of duo-module, strongly duo-module, fully-ordered module and are investigated their properties, are given relationships between duo-modules and multiplication modules. Also, in the second chapter are given the notions of classically-prime and fully-prime module spectrums noncommutative rings and are examined their properties, are studied classically-topological, topological, classically-Hilbert modules and are shown relationships between them, is shown connection between strongly-prime module and fully-invariant submodule of injective hull of the module.

In the third chapter of this thesis are given generalizations of the notion of multiplication module, especially quasi-multiplication module, purely-multiplication module and weakly-multiplication module and are investigated their properties. Also in this chapter are proved generalization of theorem of De Marco Orsatti for different types of spectrums over multiplication modules: prime spectrum, classically-prime spectrum and Zigler spectrum. In the third chapter is given the notion of cyclic spectrum, are examined it’s properties and is proved functoriality of cyclic spectrum.

In the forth chapter of this thesis are studied torsion-theoretical spectrums of ring and module and their topological properties. In particular, is given notion of maximal torsion theory and is proved relationship between that maximal torsion-theoretic spectrum and pm-rings and is proved generalization of theorem of De Marco Orsatti for maximal torsion-theoretic spectrum. Also in this chapter, are studied properties of prime and locally-prime torsion theories, their relationships are shown in diagram, is proved homemorphism between ring torsion-theoretic spectrum with finally-ordered topology and prime spectrum of ring with Zarisky topology. In this chapter also is given the notion of the left spectrum (Rosenberg spectrum) of module, the notion of cyclic module spectrum, are studied their properties, and relationships with other modular spectrums. In particular, is shown that Rosenberg spectrum is retract of prime spectrum of module.

**Keywords:** *prime module, prime submodule, module spectrum, De-Marco Orsatti theorem, multiplication module, torsion-theoretic spectrum, left spectrum, Rosenberg spectrum, Zigler spectrum, cyclic spectrum, two-sided submodule, duo-module, Zarisky topology.*