ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Малоїд-Глєбова Марта Олександрівна

УДК 512.553.2

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ СПЕКТРІВ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНИХ МОДУЛІВ

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

ДИСЕРТАЦІЯ

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Наукові керівники
Комарницький Микола Ярославович
доктор фізико-математичних
наук, професор
Гаталевич Андрій Іванович
кандидат фізико-математичних
наук, доцент

Львів – 2016

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

R — асоціативне кільце з $1 \neq 0$;

M — лівий унітальний R-модуль;

A — абелева група;

$I_l R$ — гратка всіх лівих ідеалів кільця R;

$I_l M$ — гратка всіх лівих підмодулів модуля M;

P(A) — множина всіх скінченно-породжених підгруп абелевої групи A;

$(m : w) = \{\lambda | \lambda \in R, \lambda w \subseteq m\}$, де $m \in I_l(R)$, $w \in P(R)$;

$fil - R$ — гратка усіх фільтрів лівих ідеалів кільця R;

$N \subseteq M$ — N є підмодулем модуля M;

$Ann(N)$ — анулятор підмодуля N модуля M;

$R - Mod$ — категорія всіх лівих модулів над асоціативним кільцем R;

$ComMod$ — категорія всіх модулів над комутативними кільцями;

τ — скрут категорії *R-Mod*;

$R - tors$ — сім'я всіх скрутів категорії *R-Mod*;

$\mathfrak{T}_\xi$ — клас всіх τ-періодичних модулів;

$\mathfrak{F}_\chi$ — клас всіх τ-напівпростих модулів;

$R - prop$ — множина всіх власних скрутів категорії *R-Mod*;

$R - Sp$ — теоретико-скрутовий спектр кільця R;

$R - Sp(M)$ — теоретико-скрутовий спектр модуля M;

$R - XSp$ — множина всіх локально-первинних скрутів категорії *R-Mod*;

$MR - Sp$ — множина всіх максимальних скрутів категорії *R-Mod*;

$MinR - Sp$ — множина всіх мінімальних первинних скрутів категорії *R-Mod*;

$Spec(R)$ — первинний спектр кільця R;

$Spec(M)$ — первинний спектр модуля M;

$Spec_l(M)$ — спектр Розенберга модуля M;

$Spec_l'(M)$ — цілком-первинний спектр модуля M;

$spec(R)$ — лівий спектр кільця R;

$spec(M)$ — лівий спектр модуля M;

$Spec_{Zg}(M)$ — Ціглерів спектр модуля M;

$Cspec(M)$ — циклічний спектр модуля M;

$Cl.Spec(M)$ — класично-первинний спектр модуля M;

$Max(M)$ — простір всіх максимальних підмодулів модуля M;

$Min(M)$ — простір всіх мінімальних первинних підмодулів модуля M;

$Cl.Min(M)$ — простір всіх мінімальних класично-первинних підмодулів модуля M;

ВСТУП

Спектр комутативного кільця знаходиться в полі зору багатьох науковців найперше завдяки тому, що його можна використати як для дослідження абстрактних кілець так і для задач алгебраїчної геометрії. В останні десятиріччя з'явилося багато узагальнень конструкцій спектру, як для випадку некомутативних (диференціальних) кілець, так і для випадку модулів. В некомутативному випадку існують різні означення спектру кільця, котрі базуються на різних підходах до визначення первинних ідеалів. Проте і досі не достатньо глибоко досліджені та мало розкриті зв'язки між цими спектрами. Навіть важко розібратися у відмінностях між такими спектрами. Ця дисертаційна робота дає відповіді на ці питання про взаємозв'язки в найпростіших ситуаціях, котрі з'являються у розглядуваних тут випадках. Вона є першою спробою систематизувати розрізнені результати в цьому напрямку, доповнити їх та вказати перспективні напрямки для подальшого дослідження. Для ознайомлення з різними спектрами некомутативних кілець та модулів над ними, потрібно познайомитися з основними поняттями та фактами стосовно первинних ідеалів та первинних модулів над асоціативними кільцями та встановити ієрархію між ними. Необхідна інформація буде наведена у першому розділі.

Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Отримані в дисертації результати складають частину досліджень держбюджетної теми: Мс-210Ф "Імовірносні та теоретико-модельні методи у випадкових еволюціях, лінійній та диференціальній алгебрі"(номер державної реєстрації 0108 U 004135).

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертації є дослідження різноманітних спектрів модулів над асоціативними кільцями та пошук взаємозв'язків між такими спектрами.

Об'єктом дослідження є різноманітні спектри мультиплікаційних модулів над різними асоціативними кільцями, а саме первинний, цілкомпервинний, лівий, максимальний, мінімальний, теоретико-скрутовий, розширений спектри модулів, а також спектр Розенберга і спектр Ціглера.

Предметом дослідження є первинні модулі, топології типу Зариського, порядкові та інші топології на спектрах модулів, гомоморфізми між різними спектрами, котрі виступають в якості взаємозв'язків між цими спектрами.

Задачі дослідження:

- дослідити різні означення спектрів некомутативних кілець;
- описати теоретико-скрутовий спектр модуля та дослідити його зв'язки з іншими спектрами модулів;
- розглянути різні типи спектрів мультиплікаційних модулів та вивчити зв'язки між ними;
- довести узагальнення теореми Де-Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів;
- описати взаємозв'язки з тими типами спектрів модулів, котрі досліджуються в дисертації;

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються методи з теорії кілець та модулів, алгебраїчної геометрії та лінійної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі наукові результати, які отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають у наступному:

- подано означення двостороннього підмодуля та досліджено його властивості;
- розглянуто строгі дуо-модулі та слабкі дуо-модулі, досліджено їх властивості та взаємозв'язки з дуо-модулями та мультиплікаційними модулями;
- введено поняття класично-первинного та цілком первинного модульного спектру для некомутативного кільця та розглянуто їх властивості;
- досліджено геометричні властивості різних спектрів і побудовано відображення між деякими типами спектрів;
- введено поняття лівого спектру (спектру Розенберга) для модуля, досліджено його властивості та взаємозв'язки з іншими модульними спектрами;
- доведено узагальнення теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів;
- досліджено теоретико-скрутовий спектр модуля та його топологічні властивості;
- введено поняття циклічного спектру модуля та досліджено його властивості;
- досліджено взаємозв'язки між різними типами спектрів модулів та показано ці взаємозв'язки у вигляді діаграми;

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Розроблені методи та одержані результати можуть бути використані у подальших теоретичних дослідженнях та у задачах некомутативної алгебраїчної геометрії і теорії модулів, які пов'язані з поняттями спектрів модулів для некомутативного випадку.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1) 7 міжнародна алгебраїчна конференція (Харків, 18 — 23 серпня 2009 р.);
2) конфенція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я. С. Підстригача (Львів, 25 – 27 трав. 2010 р.);
3) 13 міжнародна конференція ім. академіка М. Кравчука (Київ, 13 — 15 травня 2010 р.);
4) конфенція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я. С. Підстригача (Львів, 24 – 27 трав. 2011 р.);
5) 8 міжнародна алгебраїчна конференція (Луганськ, 5 — 12 липня 2011 р.);
6) наукова конференція "Застосування математичних методів у науці і техніці"(Луцьк, 25 — 26 листопада 2011 р.)
7) 14 міжнародна конференція ім. академіка М. Кравчука (Київ, 19 — 21 квітня 2012 р.)
8) конфенція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я. С. Підстригача (Львів, 23 – 25 трав. 2012 р.)
9) International conference, dedicated to the 70-th anniversary of Vladimir Kirichenko (Mykolayiv, 13 – 19 July, 2012)
10) International conference, dedicated to the 120-th anniversary of Stephan Banach (Lviv, 17 – 21 September, 2012)

11) "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 21 – 25 травня, 2013 р.)

12) 9 міжнародна алгебраїчна конференція (Львів, 8 — 13 липня 2013 р.)

13) International conference "Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory"(Bedlewo, Poland, 14 – 20 July, 2013 р.)

14) 15 міжнародна конференція ім. академіка М. Кравчука (Київ, 15 — 17 травня 2014 р.)

15) міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена 100-річчю з дня народження Л. А. Калужніна (Київ, 7 — 12 липня 2014 р.)

16) 10 міжнародна алгебраїчна конференція (Одеса, 20 — 27 серпня 2015 р.)

17) на львівському міському алгебраїчному семінарі (під керівництвом М.Я. Комарницького 2010 – 2016рр.)

18) на київському алгебраїчному семінарі (під керівництвом Ю. А. Дрозда 2014р., 2016р.)

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 6 роботах (5 без співавторів), з яких 6 (5 без співавторів) опубліковано у виданнях, включених до переліку ВАК України.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів: "Попередні відомості та огляд літератури за темою "Основні типи спектрів, засновані на узагальненнях первинних модулів та схема взаємозв'язків між ними "Спектри мультиплікаційних модулів та зв'язки між ними "Теоретико-скрутовий спектр модуля та його зв'язки з класичними спектрами які розділені на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 115 сторінок. Список використаних джерел налічує 115 найменувань та займає 12 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX.

Розділ 1
Попередні відомості та огляд літератури за темою дисертації

1.1. Історичні відомості

Всі спектри модулів пов'язані з тим чи іншим поняттям первинного модуля. Оскільки таких понять є багато, то необхідно розглянути процес їх запровадження в історичному плані. Спочатку зупинимося на первинних модулях над комутативними кільцями, оскільки вони мають безпосереднє відношення до алгебраїчної геометрії. Поняття первинного модуля є базовим для означення його первинного спектру. Багато запитань, котрі з'являються в цій дисертації, є аналогами тих проблем, що вже розв'язані при вивченні первинних ідеалів в некомутативних кільцях. (Дивись, наприклад, [66]).

Першу згадку про первинні модулі можна знайти в статті Джонсона [45]. Незалежно, первинні модулі ввів та вивчав Андрунакієвич в статті [2]. Феллер та Своковскі започаткували дослідження первинних підмодулів деякого фіксованого модуля над довільним кільцем [42]. Каракас вивчав первинні підмодулі довільного модуля над комутативним кільцем [49]. Пізніше такі модулі розглядали Мак- Касланд та Сміт [65]. Найбільш вдалий підхід до введення первинного модуля вперше запропонував Пейдж в 1972 році ([68]). Автор називав модуль первинним, якщо анулятор кожного його ненульового підмодуля збігається з анулятором всього модуля. Пізніше таке саме означення використовували Вісбауер ([93]) та Даунс ([26]), при дослідженні взаємозв'язків між різними типами первинних модулів і систематизації теорії таких модулів.

Підхід до вивчення первинних модулів, котрий базується на теорії напередрадикалів в категорії $R - Mod$ був реалізований празькими алгебраістами Біканом, Ямбором, Кепкою і Нємєцом в 1980 (Дивись [23]). А. В. Андрунакієвич в праці [2] використовував первинні модулі для опису первинних радикалів в категорії кілець. В сумісній роботі [3] Андрунакієвич та Рябухін довели, що кожен спеціальний радикал категорії кілець можна описати за допомогою повного підкласу класу первинних модулів. Деякі цікаві ідеї стосовно первинних модулів були реалізовані в статті [80] японського математика Шігенаги в 1982. Він запропонував різні модифікації та узагальнення первинних модулів: E-первинні модулі, E'-первинні модулі, E''-первинні модулі, строго-первинні модулі, слабко-первинні модулі (далі в літературі вони фігурують як класично-первинні модулі), модулі первинні за Біканом та модулі первинні за Пейджем і розглядав схеми логічних взаємозв'язків між ними.

Пізніше поняття первинного модуля та його узагальнень привертали увагу багатьох відомих алгебраїстів. В наші дні потік публікацій, в яких з'являються поняття первинного модуля чи первинного підмодуля стрімко зростає. При цьому беремо до уваги і статті, котрі стосуються застосувань цих понять, наприклад в котрих досліджуються різні спектри кілець та модулів. Останнім часом широко використовуються означення первинних модулів, які грунтуються на глибоких властивостях ануляторних ідеалів підмодулів. Зокрема, розпочались і інтенсивно продовжуються дослідження класично-первинних підмодулів [19], [7], [16] та строго-первинних модулів.

Цікаві просування були отримані стосовно цілком первинних модулів, і в цьому напрямку можна виокремити роботи О. Розенберга ([75]) та А. Каучікаса ([51], [49] [53], [50]). З одного боку, це показує важливість цих понять і постійну увагу до них, а з іншого підтверджує інтенсивність пошуку найбільш вдалого варіанту поняття первинного модуля, котре б дозволило сформулювати та довести аналоги найважливіших фактів, відомих з класичної алгебраїчної геометрії. Варто зауважити що некомутативна алгебраїчна геометрія активно розвивається, і час від часу з'являються монографії, котрі підсумовують розвиток того чи іншого періоду.

Існують більш радикальні підходи до проблеми точок некомутативних многовидів, котрі базуються на ідеях теорії категорій (найчастіше на понятті підкатегорії Серра категорії Гротендіка), або на нових, більш абстрактних поняттях некомутативних просторів (див. роботи М. Артіна, М. Преста ([72]), М. Ван-ден-Берга, Д. Лазарда ([60]), Е. Летцтера ([61]), групи китайських математиків ([89], [90], [91], [92]) та інших авторів, статті яких стосуються некомутативної алгебраїчної геометрії). Звичайно не всіх відмічених сторін проблем теорії первинних ідеалів і модулів ми торкаємось, але ми намагаємось окреслити хоча б широту основної проблеми, яку в такій постановці ми досліджуємо вперше.

Природно, що виникнення потреби досліджувати абстрактні алгебраїчні об'єкти на основі використання геометричних методів стало можливим лише після того, коли класичні підходи алгебраїчної геометрії в основному вичерпали свій потенціал, а в абстрактній алгебрі виникла потреба скористатись успіхами німецьких вчених з Гетінгена, які започаткували цю сучасну алгебру і вже прагнули впровадити її в повсякденну практику. Ця ідея стимулювала як саму алгебру, так і алгебраїчну геометрію. Підсумок класичної алгебраїчної геометрії(та спроба подати її в одежі сучасної алгебри) підведений в двотомнику Ходжа і Підо. Відмітимо ще, що бажання використовувати геометричну інтуіцію в абстрактній алгебрі згодом привело до виникнення цілком нових математичних теорій: теорії пучків та теорії категорій. Це зумовлює прискіпливіше проаналізувати витоки первинного спектру комутативних кілець.

Найперше варто не забути, що існує ще один виток теорії спектрів кілець - класична теорія чисел. Адже самі точки спектру – первинні ідеали – мають далекими прототипами саме прості числа. Першим розпочав систематично досліджувати первинні ідеали з абстрактної точки зору, якраз автор знаменитої книги "Сучасна алгебра Ван-дер-Варден. Цікаві результати для первинних модулів над комутативними кільцями отримані в роботах [10], [9], [46], [67] і [69].

1.2. Основні означення з теорії кілець та модулів

Означення 1.1. *[80] Для модуля Q означимо радикал k_Q як множину $k_Q(M) = \cup\{Kerf | f \in Hom(M, Q)\}$ для кожного модуля M.*

Означення 1.2. *[80] Модуль M називається E-первинним, якщо $k_{E(M)} = k_{E(N)}$ для кожного ненульового підмодуля N модуля M, де $E(M)$ це ін'єктивна оболонка модуля M.*

Означення 1.3. *[80] Модуль M називається E'-первинним, якщо $k_{E(M)} = k_N$ для кожного ненульового підмодуля N модуля M, де $E(M)$ це ін'єктивна оболонка модуля M.*

Означення 1.4. *[80] Модуль M називається E''-первинним, якщо $k_M = k_{E(N)}$ для кожного ненульового підмодуля N модуля M, де $E(M)$ це ін'єктивна оболонка модуля M.*

Нагадаємо принцип побудови топології Зариського для випадку простору первинних ідеалів кільця. Кожному ідеалу I кільця R поставимо у відповідність множину

$$V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$$

Тому множини $V(I)$, де I пробігає ідеали кільця R, задовольняють аксіомам замкнених множин деякої топології на $Spec(R)$, яку називають топологією Зариського на первинному спектрі кільця.
Тепер розглянемо модульний випадок. Нехай M лівий R-модуль, N його підмодуль. Нехай

$$U_l(N) = \{P \in Spec(M) | N \nsubseteq P\}$$

Через $\xi(M)$ позначимо сім'ю всіх підмножин $U = U_l(N) \subseteq Spec(M)$. Для кожної пари підмодулів L_1 і L_2 модуля M існує такий підмодуль

H, що $U_l(L_1) \cap U_l(L_2) = U_l(H)$, то $\xi(M)$ містить порожню множину і весь простір $Spec(M)$. Окрім того, $\xi(M)$ замкнена стосовно довільних об'єднань та скінченних перетинів. Отже, $Spec(M)$ буде топологічним простором з топологією Зариського.

Проте не для всіх спектрів модулів топологія будується так легко. Розглянемо, наприклад, класично-первинний спектр модуля.

Означення 1.5. *[19] Нехай M ненульовий лівий R-модуль. Для його підмодуля N означимо класичний многовид, як множину*

$$\mathbb{V}(N) = \{P \in Cl.Spec(M) | N \subseteq P\}$$

Множина всіх таких многовидів володіє властивостями:

(1) $\mathbb{V}(M) = \emptyset$ і $\mathbb{V}(0) = Cl.Spec(M)$;

(2) $\bigcap_{i \in I} \mathbb{V}(N_i) = \mathbb{V}(\sum_{i \in I} N_i)$ для довільної множини індексів I;

(3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) \subseteq \mathbb{V}(N \cap L)$ для підмодулів $N, L, N_i \subseteq M$.

Позначимо через $\mathbb{C}(M)$ сім'ю всіх підмножин вигляду $\mathbb{V}(N)$ з $Cl.Spec(M)$. Тоді $\mathbb{C}(M)$ містить порожню множину і весь простір $Cl.Spec(M)$, і $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно довільних перетинів, проте в загальному $\mathbb{C}(M)$ не замкнена стосовно скінченних об'єднань.

Означення 1.6. *[19] Лівий R-модуль M називається класично-топологічним модулем, якщо $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підмодулів N і L модуля M існує такий підмодуль K, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$.*

В такому разі сім'я $\mathbb{C}(M)$ задовольняє аксіомам замкнених підмножин топологічного простору, а отож визначає топологію на $Cl.Spec(M)$.

Означення 1.7. *[19] Нехай M довільний лівий R-модуль. Для кожного його підмодуля N позначимо $\mathbb{U}(N) = Cl.Spec(M) \setminus \mathbb{V}(N)$ і $\mathbb{B}(M) =$*

$\{\mathbb{U}(N) : N \subseteq M\}$. Через $\mathbb{T}(M)$ позначимо набір всіх об'єднань скінченних перетинів елементів з $\mathbb{B}(M)$. Тоді $\mathbb{T}(M)$ утворює топологію на $ClSpec(M)$ з підбазою $\mathbb{B}(M)$. В такому випадку $\mathbb{T}(M)$ називається топологією типу Зариського.

Для M довільного лівого R-модуля, сім'я множин $\{\mathbb{U}(N_1)\cap\ldots\cap\mathbb{U}(N_k) : N_i \subseteq M, 1 \leqslant i \leqslant k$ для деякого $k \in \mathbb{N}\}$ утворює базу топології типу Зариського на M.

Означення 1.8. *[19] Підмодуль C модуля M називається напівпервинним, якщо C є перетином первинних підмодулів.*

Означення 1.9. *[19] Підмодуль C модуля M називається класично-напівпервинним, якщо C є перетином класично-первинних підмодулів.*

Означення 1.10. *[19] Первинний (класично-первинний) підмодуль P лівого модуля M називається екстраординарним, якщо як тільки N і L є напівпервинними (класично-напівпервинними) підмодулями модуля M, то з умови $N \cap L \subseteq P$ випливає, що $N \subseteq P$ або $L \subseteq P$.*

Означення 1.11. *[65] Лівий модуль M називається топологічним модулем, якщо його первинний спектр задовольняє такі властивості: множина $\xi(M) := \{V(N)|N \subseteq M\}$ замкнена стосовно скінченних об'єднань.*

Означення 1.12. *Нехай $\mathcal{X}$ – топологічний простір, $\mathcal{A}$ – його підпростір, $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ – тотожне відображення. Якщо існує таке відображення $r : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$, що $r|_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то r називається ретракцією $\mathcal{X}$ на $\mathcal{A}$, а підпростір $\mathcal{A}$ називається ретрактом простору $\mathcal{X}$.*

Означення 1.13. *Покладемо $V^*(N) = \{P \in X|P \supseteq N\}$ і $\Omega^* = \{V^*(N)|N \subseteq M\}$. Тоді існує топологія τ^* на X, для якої Ω^* буде сім'єю замкнених підмножин на X тоді і лише тоді коли Ω^* буде замкненою* *відносно скінченних об'єднань. В цьому випадку τ^* називається квазі топологією Зариського.*

Задамо топологію на спектрі Розенберга, котрий буде означений пізніше.

Означення 1.14. *На множині $Spec_l(M)$ задається топологія: для довільного підмодуля $N \in I_l(M)$, $U_l(N) = \{\mathcal{P} \in Spec_l(M) | N \nleq \mathcal{P}\}$. Через $\zeta(M)$ позначимо сім'ю множин вигляду $U = U_l(N) \subseteq Spec_l(M)$. Тоді $\zeta(M)$ містить порожню множину і весь простір $Spec_l(M)$. Окрім цього, $\zeta(M)$ є замкненою стосовно довільних об'єднань та скінченних перетинів. Тому $Spec_l(M)$ буде топологічним простором з топологією типу Зариського.*

Означення 1.15. *[8] Підмодуль N називають відносно подільним (або RD-підмодулем), якщо $rN = N \cap rM$ для всіх $r \in R$.*

Означення 1.16. *[55] R-модуль M називається квазі-проективним тоді і лише тоді, коли для кожного R-модуля A, кожного R-епіморфізму $q : M \to A$ і кожного R-гомоморфізму $f : M \to A$ існує такий $f' \in End_R(M)$ що діаграма*
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "q"'] & A \end{tikzcd}$$
є комутативною, тобто $g \circ f' = f$.

Означення 1.17. *[55] R-модуль M називається квазі-ін'єктивним тоді і лише тоді, коли для кожного R-модуля A, кожного R-мономорфізму $j : A \to M$ і кожного R-гомоморфізму $f : A \to M$ існує такий $f' \in End_R(M)$ що діаграма*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "f'"] \\ M & \end{tikzcd}$$
є комутативною.

1.3. Основні поняття і конструкції теорії скрутів

Поняття первинного скруту в явному вигляді ввів О. Голдман у 1969 в роботі [37], проте поняття скруту у нього фігурувало під назвою "ідемпотентний ядерний функтор". Еквівалент цього поняття, який виник у межах теорії категорій Гротендіка, можна відшукати в працях, що належать школі П.Габріеля, див., наприклад, [70]. Відмітимо, що вперше теоретико-скрутовий спектр некомутативного кільця під назвою "лівий спектр"систематично досліджував Н. Попеску [71]. Суттєвий внесок в теорію первинних скрутів належить Н. Ламбеку та Дж. Міхлеру [59]. Застосування первинних скрутів до некомутативної алгебраїчної геометрії запропонували Ф. Ван Овстаієн та А.Вершорен в роботах, підсумованих у монографії [85], в якій також можна почерпнути цікаву інформацію про первинні скрути, зокрема багато уваги приділено симетричним скрутам.

Різні топології на теоретико-скрутовому спектрі некомутативного нетерового кільця запровадив Дж. Голан ([34], [35], [36]). Можна було б згадати ще чимало авторів, які так чи інакше використовували ідею первинного скруту, проте нас цікавила можливість перенесення деяких результатів про спектри кілець на модулі та, зокрема, мультиплікативні модулі. Голан означував скрути категорії $R-Mod$ як класи еквівалентності ін'єктивних модулів. Скористаємось означенням ін'єктивного модуля.

Означення 1.18. *Лівий модуль* Q *кільця* R*, називається ін'єктивним, якщо він задовольняє одну (а отже, всі) з таких еквівалентних умов:*

(1) якщо Q є підмодуль деякого лівого R-модуля M, то існує такий підмодуль K в M, що M є внутрішньою прямою сумою Q і K, тобто $Q+K=M$ і $Q\cap K=\{\emptyset\}$;

(2) довільна коротка точна послідовність $0 \to Q \to M \to K \to 0$ *лівих* R*-модулів розщеплюється;*

(3) якщо X *та* Y*-ліві* R*-модулі,* $f : X \to Y$ *- модульний мономорфізм і* $g : X \to Q$ *- довільний модульний гомоморфізм, то існує модульний гомоморфізм* $h : Y \to Q$*, для якого* $h \circ f = g$*;*

(4) контраваріантний функтор $Hom(-, Q)$ *з категорії лівих* R*-модулів у категорію абелевих груп є точним.*

Використовуватимемо означення скруту у формі запропонованій Голаном.

Означення 1.19. *Два ін'єктивні ліві* R*-модулі називають еквівалентними, якщо кожен з них можна вкласти у прямий добуток копій іншого модуля. Очевидно, це відношення є відношенням еквівалентності. Клас еквівалентності ін'єктивнох лівих* R*-модулів називають скрутом категорії* $R - Mod$*.*

Якщо $\mathfrak{A}$ довільна сім'я модулів, то через $\zeta(\mathfrak{A})$ позначимо найменший скрут стосовно якого кожен модуль $M \in \mathfrak{A}$ є періодичним, а через $\chi(\mathfrak{A})$ найбільший скрут, стосовно якого кожен модуль $M \in \mathfrak{A}$ є напівпростим модулем. Позначимо через $R - tors$ клас всіх скрутів категорії $R - Mod$. Він має мінімальний елемент ξ, що означується як $\mathfrak{T}_\xi = \{0\}$, тобто скрут, для якого клас періодичних модулів складається з одного нульового модуля. Також існує максимальний елемент χ, для якого напівпростий клас тривіальний, тобто $\mathfrak{F}_\chi = \{0\}$.

На мові класів еквівалентності ін'єктивних модулів клас модуля (0) є невласним скрутом і позначається як χ в $R - tors$. Клас еквівалентності всіх ін'єктивних котвірних категорії $R - Mod$ називають тривіальним скрутом і позначають ξ. Це найменший і найбільший елементи в гратці $R - tors$, стосовно порядку, визначеного включенням періодичних класів.

Означення 1.20. *[34] Якщо τ скрут категорії $R-Mod$, то лівий R-модуль M називається τ-періодичним модулем тоді і лише тоді, коли $Hom_R(M,E)=0$ для деякого (а отже, всіх) елемента E скруту τ. [34].*

Надалі $\mathfrak{T}_\tau$ періодичний клас скруту τ, а $\mathfrak{F}_\tau$ напівпростий клас скруту τ.

Означення 1.21. *[34] Якщо τ скрут категорії $R-Mod$, то лівий R-модуль M називається τ-напівпростим модулем тоді і лише тоді, коли існує R-мономорфізм з M у деякий член τ. [34].*

Означення 1.22. *[34] Скрут, не рівний максимальному елементу з $R-tors$ називають власним скрутом, а скрут, не рівний мінімальному елементу з $R-tors$ називають нетривіальним скрутом.*

Введемо топологію на теоретико-скрутовому спектрі кільця R.

Зауваження 1.1. *Множину всіх скрутів $R-tors$ можна перетворити у частково впорядковану, якщо ввести частковий порядок: $\tau \leq \tau'$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{T}_\tau \subseteq \mathfrak{T}_{\tau'}$, тобто клас періодичних модулів одного скруту міститься в класі періодичним модулів іншого скруту.*

Означення 1.23. *[34]*

(1) За Голаном, розглянемо функцію $\mathfrak{c}: \tau \mapsto \{\tau' \in R-prop | \tau \leq \tau'\}$. Відомо, що сім'я

$$\{\mathfrak{c}(\tau) | \tau \in R-tors\}$$

підмножин з $R-prop$ утворює базу топології на $R-prop$, котра називається порядковою топологією.

(2) сім'я підмножин

$$\{\mathfrak{c}(\zeta(R/I)) | I \subset R\}$$

множини $R-prop$ де I пробігає множину усіх лівих ідеалів кільця R, утворює базу топології на $R-prop$, що зветься топологією скінченного порядку.

Означення 1.24. *Порядкова топологія, в свою чергу, породжує нову топологію на $R - XSp$ з відкритих множин:*

$$\mathfrak{c}(\tau) = \mathfrak{c}(\tau) \cap R - XSp$$

для довільного $\tau \in R - tors$.

Означення 1.25. *Скрут τ називається редукованим, якщо кожен його τ-періодичний модуль є редукованим [35]. Загалом, клас τ-періодичних лівих R-модулів не замкнений стосовно взяття ін'єктивних оболонок. Якщо ж ця умова виконується, то скрут τ називається стабільним. Якщо стабільний скрут є редуковний, то він називається його стабільно-редукованим.*

Означення 1.26. *Дуальною квазіметричною фунцією (дуальною неперервною функцією) на множині $R - Sp$ зі значеннями з множини $R - tors$ є функція $d : R - Sp \times R - Sp \to R - tors$, котра задовольняє такі властивості:*

(P1) Якщо $\pi \in R - Sp$, то $d(\pi, \pi) = \chi$;

(P2) Якщо $\pi, \pi', \pi" \in R - Sp$, то $d(\pi, \pi") \geq d(\pi, \pi') \wedge d(\pi', \pi")$;

(P3) Якщо $\pi, \pi' \in R - Sp$, то $d(\pi, \pi') = d(\pi', \pi)$;

(P4) Якщо $\pi \neq \pi'$ в $R - Sp$, то $d(\pi, \pi') \neq \chi$.

Позначимо сім'ю всіх дуальних квазіметричних функцій множини $R - Sp$ через $DQ(R - Sp)$.

Нехай Y непорожня підмножина множини $R - tors$, замкнена стосовно скінченних об'єднань. Якщо $d \in DQ(R - Sp)$ і якщо $\tau \in Y$, то для кожного $\pi \in R - Sp$ покладемо $N_{d,\tau}(\pi) = \{\pi' \in R - Sp \mid d(\pi, \pi') \geq \tau\}$. Зауважимо, що $\pi \in N_{d,\tau}(\pi)$ для всіх $d \in DQ(R - Sp)$ і $\tau \in Y$. Більше того, якщо τ і σ є елементами Y, і якщо $\pi \in R - Sp$, то $N_{d,\tau \vee \sigma}(\pi) = N_{d,\tau}(\pi) \cap N_{d,\sigma}(\pi)$. Також якщо $\tau \leq \sigma$ в Y, то $N_{d,\sigma}(\pi) \subseteq N_{d,\tau}(\pi)$ для кожного $\pi \in R - Sp$.

Більше того, для довільної непорожньої підмножини множини $R-tors$, замкненої стосовно скінченних об'єднань і для довільної $d \in DQ(R-Sp)$, сім'я $\{N_{d,\tau}(\pi)|\tau \in Y; \pi \in R-sp\}$ утворює базу топології $\mathbf{T}(d,Y)$ на $R-Sp$: підмножина $U \subseteq R-Sp$ належить до $\mathbf{T}(d,Y)$ тоді і лише тоді, коли для кожного $\pi \in U$ існує елемент $\tau \in Y$, котрий задовольняє умову $N_{d,\tau}(\pi) \subseteq U$.

Якщо Y непорожня підмножина множини $R-tors$, замкнена стосовно скінченних об'єднань. Якщо $\{\mathbf{P}(\tau)|\tau \in Y\}$ замкнена стосовно скінченних перетинів і утворює базу топології на $R-Sp$, котра називається Y-порядковою топологією. Для кожної такої множини Y зауважимо, що $Y^* = \{\sigma \in R-tors|\sigma \leq \tau \text{ для деякого } \tau \in Y\}$ також замкнена стосовно скінченних об'єднань. В загальному Y^*-порядкова топологія є тоншою аніж Y-порядкова топологія. Нехай Y непорожня підмножина множини $R-tors$, замкнена стосовно скінченних об'єднань і нехай $e \in DQ(R-Sp)$ функція, означена вище. Якщо $\sigma \in Y^*$, то $\mathbf{P}(\sigma) = N_{e,\sigma}(\pi)$ для довільного $\pi \in \mathbf{P}(\sigma)$. Навпаки, якщо U непорожній член $T(e,Y^*)$ і якщо $\pi \in U$, то існує такий елемент σ множини Y^*, що $U \supseteq N_{e,\sigma}(\pi) = \{\pi' \in R-Sp|(\pi' : \pi) \geq \sigma\} = \{\pi' \in R-Sp|\pi \wedge \sigma \leq \pi'\} = \mathbf{P}(\pi \wedge \sigma)$, де $\pi \wedge \sigma \in Y^*$. Отже, $\mathbf{T}(e,Y^*)$ є Y^*-порядковою топологією на $R-Sp$. Аналогічно, використовуючи функцію $e' \in DQ(R-Sp)$, котра означена вище, отримуємо топологію зворотнього порядку, котра означена в роботах Голана [34] і [35].

Інший підхід до означення скрутів ввів Бічі в своїй роботі [14]. Під скрутом він розумів підфунктор $\rho : R-Mod \to R-Mod$ тотожнього функтора, котрий володіє властивостями:

(1) Довільне відображення $f \in Hom_R(M,N)$ переводить періодичну частину модуля в його періодичну частину;

(2) Якщо $N \subseteq M$, то $\rho(N) = N \cap \rho(M)$;

(3) $\rho(M/\rho(M)) = 0$;

Окрім того, для довільного модуля $N \in R-Mod$ означимо $rad_N(M) = \bigcap_{f\in Hom_R(M,N)} ker(f)$, котрий буде найменшим модулем, на якому всі гомоморфізми $M \to N$ анулюються.

Означення 1.27. *[14] Якщо ρ є скрутом категорії $R-Mod$, то модуль M називається ρ-періодичним, якщо $\rho(M) = M$ і ρ-напівпростим, якщо $\rho(M) = 0$.*

Означення 1.28. *[14] Якщо ρ є скрутом категорії $R-Mod$, то підмодуль $N \subseteq M$ називається ρ-щільним, якщо M/M_0 є ρ-періодичним модулем і ρ-замкеним, якщо M/M_0 є ρ-напівпростим модулем.*

Означення 1.29. *[14] Лівий ідеал A кільця R називається максимальним ρ-замкненим (лівим) ідеалом, якщо він є максимальним в множині всіх власних ρ-замкнених (лівих) ідеалів.*

Множина $R-tors$ всіх скрутів категорії $R-Mod$ утворює гратку скрутів над кільцем R. Максимальні елементи у цій гратці є максимальними скрутами. Іншими словами,

Означення 1.30. *[14] Скрут ρ називається максимальним, якщо з умови $\rho \leq \sigma$ випливає що або $\rho = \sigma$ або σ є тотожнім функтором модуля M.*

Теорема 1.1. *[14, Theorem 1.3] Нехай ρ такий скрут категорії $R-Mod$, що $\rho(R) = A$. Тоді ρ є максимальним скрутом тоді і лише тоді, коли $\rho = rad_{R/A}$ і A є первинним ідеалом.*

Наслідок 1.1. *[14, Corollary 1.4] Кожен власний скрут категорії $R-Mod$ міститься в максимальному скруті тоді і лише тоді, коли для кожного ненульового модуля M існує такий підмодуль $M_0 \subseteq M$, що $Ann(M_0)$ є первинним ідеалом.*

Означення 1.31. *[14] Скрут ρ називаеться насиченим, якщо $\rho \geq \alpha$ для кожного такого скруту α, що $\alpha(R) = \rho(R)$.*

Лема 1.1. *[14, Lemma 2.3] Нехай σ такий насичений скрут категорії $R - Mod$, що $\sigma(R) = K$. Тоді такі властивості еквівалентні для довільного модуля M:*

1. *Модуль M є σ-напівпростим ін'єктивним модулем;*
2. *Модуль M є напівпростим ін'єктивним R_σ-модулем;*
3. *Модуль M є напівпростим ін'єктивним R/K-модулем;*

Наслідок 1.2. *[14, Corollary 2.5] Кожен ненульовий напівпростий ін'єктивний лівий R-модуль є точним тоді і лише тоді, коли $rad_{E(R)}$ є максимальним скрутом категорії $R - Mod$.*

Наслідок 1.3. *[14, Corollary 2.6] Нехай σ скрут категорії $R - Mod$. Тоді, Якщо σ первинний скрут, тоді σ є максимальним скрутом тоді і лише тоді, коли для кожного ненульового σ-напівпростого ін'єктивного модуля M існує такий елемент $m \in M$, що $Ann(m)$ є критичним лівим ідеалом.*

1.4. Базові факти і твердження

Означення 1.32. *Нехай R - довільне асоціативне кільце, M - довільний правий R-модуль. Модуль M називається мультиплікаційним, якщо для довільного його підмодуля N існує такий ідеал B кільця R, що $N = MB$.*

Означення 1.33. *Нехай R - довільне асоціативне кільце. Ідеал A цього кільця називається мультиплікаційним, якщо для довільного такого ідеалу B кільця R, що $B \subseteq A$, існує такий ідеал C цього кільця, що $B = AC$.*

Очевидно, кожен мультиплікаційний ідеал є мультиплікаційним модулем.

Твердження 1.1. *[88, Note 1.2] Для правого модуля M над кільцем R, такі властивості еквівалентні:*

1. *M - мультиплікаційний модуль;*
2. *Для кожного такого ідеалу B кільця R, що $B \subseteq Ann(M)$, R/B-модуль M буде мультиплікаційним модулем;*
3. *Існує такий ідеал B кільця R, що $B \subseteq Ann(M)$, і M є мультиплікаційним R/B-модулем.*

Твердження 1.2. *[88, Note 1.3] Для правого R-модуля M, такі властивості еквівалентні:*

1. *M - мультиплікаційний модуль;*
2. *$N \subseteq M(N : M)$ для кожного підмодуля N модуля M;*
3. *$N = M(N : M) = M(Ann(M/N))$ для кожного підмодуля N модуля M;*

Твердження 1.3. *[88, Note 1.5]Для довільного мультиплікаційного модуля M над кільцем R істинні такі твердження:*

1. *Кожен підмодуль N модуля M є цілком інваріантним підмодулем цього модуля;*

2. *Якщо N є таким підмодулем модуля M, що $N \cap MB = NB$ для кожного ідеалу B кільця R, то N є мультиплікаційним модулем.*

Твердження 1.4. *[88, Note 1.9]Нехай M - довільний правий мультиплікаційний модуль над кільцем R і нехай P - такий ідеал кільця R, що $M \neq MP$. Тоді існує такий циклічний підмодуль X модуля M, що P не містить анулятора модуля M/X.*

Твердження 1.5. *[88, Note 1.10]Нехай M - правий мультиплікаційний модуль над кільцем R і нехай P - максимальний ідеал кільця R.*

1. *Якщо $M \neq MP$, то M/MP є простим модулем, та існує такий циклічний підмодуль X модуля M, що $R = P + Ann(M/X)$.*

2. *M/MP є циклічним модулем з двома підмодулями, причому $M = MP$ або ж MP є максимальними підмодулями модуля M.*

Твердження 1.6. *[88, Note 1.12]Нехай R - кільце з комутативним множенням ідеалів, M - мультиплікаційний R-модуль і B - такий ідеал кільця R, що $M = MB$. Тоді мають місце такі твердження:*

1. *$N = NB$ для кожного підмодуля N модуля M;*

2. *Для кожного елементу m модуля M існує такий елемент b ідеалу B, що $m(1 - b) = 0$.*

Твердження 1.7. *[88, Note 2.1]Для правого R-модуля M такі властивості еквівалентні:*

1. *M - мультиплікаційний модуль;*

2. *Для кожного циклічного підмодуля X модуля M існує такий правий ідеал B кільця R, що $X = MB$;*

3. *Для кожного підмодуля X модуля M існує така множина $\{X_i\}_{i\in I}$ підмодулів модуля X і множина $\{B_i\}_{i\in I}$ ідеалів кільця R, для котрих $X = \sum_{i\in I}$ та $X_i = MB_i$ для кожного $i \in I$.*

Теорема 1.2. *[88, Theorem 2.2] Нехай M правий модуль над кільцем R, і нехай $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Тоді такі властивості еквівалентні:*

1. *M - мультиплікаційний модуль;*

2. *Кожен підмодуль модуля M є цілком інваріантним в M, і всі підмодулі M_i є такими мультиплікаційними підмодулями, що існуватимуть ідеали B_i кільця R для яких виконуються рівності $M_i = MB_i$, $(i \in I)$;*

3. *$N = \bigoplus_{i\in I}(N \cap M_i)$ для кожного підмодуля N модуля M, і всі підмодулі M_i є такими мультиплікаційними модулями, для яких існують такі ідеали B_i кільця R, що $M_i = MB_i$, $(i \in I)$;*

4. *Для кожної скінченної підмножини J індексної множин I, модуль $\bigoplus_{j\in J} M_j$ є мультиплікаційним, і $\bigoplus_{j\in J} M_j = MB_J$ для деякого ідеалу B_J кільця R.*

Твердження 1.8. *[88, Note 2.13]Якщо M - правий мультиплікаційний модуль, котрий є сумою скінченної кількості циклічних модулів, то M - циклічний модуль.*

Теорема 1.3. *[88, Theorem 2.14] Нехай M - артінів мультиплікаційний модуль над кільцем R. Тоді істинні такі твердження:*

1. *Фактор-модуль $M/J(M)$ − циклічний модуль;*

2. *Якщо $J(M)$ є надлишковим підмодулем модуля M, то M є циклічним модулем;*

3. Якщо M - скінченно-породжений модуль, то M - циклічний модуль.

Наслідок 1.4. *[88, Corollary 2.27] Нехай M - правий модуль над кільцем R і нехай X та Y - такі мультиплікаційні підмодулі модуля M, що $R = (X : Y) + (Y : X)$. Тоді $X + Y$ є мультиплікаційним модулем.*

Твердження 1.9. *[88, Proposition 2.28]Нехай M - модуль над кільцем R, і нехай N - власний підмодуль модуля M. Тоді істинні такі твердження:*

1. *N - первинний підмодуль модуля M тоді і лише тоді коли $Ann(M/N)$ - первинний ідеал кільця R;*
2. *Якщо N - максимальний підмодуль модуля M, то N - первинний підмодуль модуля M і $N = MP$ для деякого правого примітивного ідеалу P кільця R;*
3. *Якщо R - кільце з комутативним множенням ідеалів, то для кожного власного підмодуля N модуля M існує такий правий примітивний ідеал P кільця R, що $M \neq MP + N$ і MP є первинними підмодулями модуля M.*

Твердження 1.10. *[88, Lema 2.2]Нехай M - ненульовий мультиплікаційний R-модуль. Тоді:*

(1) Кожен власний підмодуль модуля M міститься в деякому максимальному підмодулі модуля M.

(2) Підмодуль K є максимальним в M тоді і лише тоді, коли існує такий максимальний ідеал Q кільця R, що $K = QM \neq M$.

Основну теорему теорії абелевих груп можна сформулювати у вигляді твердження: довільний скінченно-породжений $\mathbb{Z}$-модуль є прямою сумою мультиплікаційних модулів [31]. Ця теорема стимулює вивчення мультиплікаційних модулів, котрі завдяки їй посідають важливе місце серед інших типів модулів.

Наводимо твердження, яке дозволяє вказувати природні приклади мультиплікаційних модулів.

Твердження 1.11. *1. Довільний циклічний модуль є мультиплікаційним модулем.*

2. Довільний простий модуль є мультиплікаційним.

3. Довільний ненульовий мультиплікаційний модуль над простим кільцем є простим модулем.

Доведення цього факту проводиться за аналогією з комутативним випадком.

Твердження 1.12. *Кожен гомоморфний образ мультиплікаційного модуля є мультиплікаційним.*

З попередніх тверджень очевидно випливає:

Твердження 1.13. *Мультиплікаційний модуль володіє такими властивостями:*

1. *Кожен ендоморфний образ мультиплікаційного модуля є цілком інваріантним мультиплікаційним підмодулем цього модуля;*

2. *Кожен прямий доданок мультиплікаційного модуля є цілком інваріантним мультиплікаційним підмодулем цього модуля.*

3. *В кільці ендоморфізмів кожного гомоморфного образу довільного мультиплікаційного модуля, всі ідемпотенти є центральними.*

Його доведення є комбінацією міркувань, використаних при доведенні вищесформульованих фактів.

Твердження 1.14. *Нехай R - кільце з комутативним множенням ідеалів, M - мультиплікаційний правий R-модуль і P - максимальний ідеал кільця R. Тоді виконуються такі властивості:*

1. *$M = MP$;*
2. *$N = NB$ для кожного підмодуля N модуля M;*
3. *$X = XB$ для кожного циклічного підмодуля X модуля M;*
4. *P не містить аннулятора жодного циклічного підмодуля модуля M.*

Очевидно, прості модулі є строго-первинними, тому максимальні ліві ідеали кільця є строго-первинними. Зауважимо також що деякі модулі M взагалі не мають первинних підмодулів, і вони називаються бідними на первинні підмодулі, чи, просто, модулями без первинних підмодулів. Деякі автори називають їх безпервинними. Тепер наведемо інформацію про деякі особливості строго-первинних підмодулів. Зокрема зупинимося на зв'язку властивостей ідеалів кільця коефіцієнтів та ідеалів кільця многочленів над ними. Можемо використати роботу [21] для означення основних властивостей модулів без первинних підмодулів над комутативними кільцями. Тепер цікаво розглянути співвідношення між лівим строго-первинним модулем M і його квазі-ін'єктивною оболонкою $Q(M)$. За теоремою 19.2 з [10], $Q(M) = \Lambda M \subseteq \hat{M}$, де (M) є ін'єктивною оболонкою M і $\Lambda = End_R\hat{M}$. Нехай $H = End_R Q(M)$, причому ендоморфізми записуються зліва від аргументів. Модуль $Q(M)$ канонічно перетворюється в лівий $R - H$-бімодуль. Тепер можемо сформулювати означення строго-первинного модуля в іншому вигляді.

Теорема 1.4. *[50, Theorem 1]Лівий R-модуль M є строго-первинним тоді і лише тоді, коли його квазі-ін'єктивна оболонка $Q(R)$ є простим $R - H$-бімодулем.*

Нехай $R\langle X_H\rangle$ кільце поліномів, котрі не комутують з X_h, $h \in H$,і комутують з елементами кільця R. Наділимо $Q(M)$ канонічною структурою $R\langle X_H\rangle$-модуля, означуючи $X_h x = hx$ для $h \in H$ and $x \in Q(M)$. Відомо, що $Q(M)$ є простим $R\langle X_H\rangle$-модулем для строго-первинного R-модуля M.

Теорема 1.5. *[50, Theorem 2]Для кожного лівого строго-первинного ідеалу $\mathfrak{p} \subset R$ існує такий максимальний лівий ідеал $\mathfrak{M} \subset R\langle X_H\rangle$, що $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$.*

Цей факт показує що, концептуально, ситуація в довільному некомутативному кільці, в деякому сенсі, нагадує стан справ в комутативного випадку, оскільки ліві строго-первинні ідеали отримуються з максимальних лівих ідеалів кілець поліномів природнім шляхом. Тепер можемо охарактеризувати модулі без первинних підмодулів. Нагадаємо що модуль, котрий не має максимальних підмодулів називається радикальним за Джекобсоном. Нехай $\mathbf{X}$ це довільна множина. Позначимо через $R\langle \mathbf{X}\rangle$ кільце поліномів над кільцем R, від множини $\mathbf{X}$ некомутативних змінних, які, тим не менше, комутують з елементами кільця R, і через $M\langle \mathbf{X}\rangle$ деякий R-модуль поліномів з коефецієнтами з модуля M. Очевидно, $M\langle \mathbf{X}\rangle$ є канонічними $R\langle \mathbf{X}\rangle$-модулем.

Теорема 1.6. *[50, Theorem 3]Модуль M над кільцем R є модулем без первинних підмодулів тоді і лише тоді, коли для довільної множини $\mathbf{X}$ змінних, $M\langle \mathbf{X}\rangle$ є радикальним за Джекобсоном як $R\langle \mathbf{X}\rangle$-модуль.*

Перетин всіх лівих строго-первинних підмодулів даного R-модуля M називається лівим строго-радикальним підмодулем модуля M, котрий позначається через $sp_l M$. За означенням, $sp_l M = M$, коли M не має строго-первинних підмодулів.

Твердження 1.15. *[80, Proposition 1.2]*

(1) Кожен первинний (в сенсі Бікана) модуль є первинним (в сенсі Пейджа) модулем;

(2) Кожен строго-первинний модуль є первинним в (сенсі Бікана) модулем, і кожен первинний (в сенсі Бікана) модуль є класично-первинним;

(3) Кожен строго-первинний модуль є E'-первинним;

(4) Кожен строго-первинний модуль є E-первинним, проте зворотнє твердження невірне.

Приклад 1.1. *[80, Example 1.1]*

(1) Модуль ${}_ZQ$ є первинним (в сенсі Пейджа) модулем, де Z означає кільце цілих чисел а Q адитивну групу раціональних чисел;

(2) Кожен простий модуль є первинним (в сенсі Бікана) модулем а також є E-первинним;

(3) Ін'єктивна оболонка кожного простого модуля є класично-первинним модулем;

(4) Простий ін'єктивний модуль є строго-первинним модулем, E'-первинним модулем і E''-первинним модулем.

Приклад 1.2. *[80, Example 7.1] Нехай Z кільце цілих чисел і Q адитивна група раціональних чисел. Тоді ${}_ZQ$ є первинним (в сенсі Пейджа) модулем і класично-первинним модулем, проте не є первинним (в сенсі Бікана) модулем.*

Приклад 1.3. *[80, Example 7.2] Нехай S простий модуль і $E(S) \neq S$. Тоді S є первинним (в сенсі Бікана) модулем, проте не є строго-первинним модулем.*

Приклад 1.4. *[80, Example 7.3] Нехай*

$$R = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in K \}$$

де K поле. Тоді модуль $_RR$ є класично-первинним модулем, проте не є первинним (в сенсі Пейджа) модулем.

Приклад 1.5. *[80, Example 7.4] Нехай Z кільце цілих чисел і нехай $M = Z \times Q$, де Q це адитивна група раціональних чисел. Тоді модуль M є первинним (в сенсі Пейджа) модулем, проте не є класично-первинним модулем.*

Розділ 2
Основні типи спектрів, засновані на узагальненнях первинних модулів та схема взаємозв'язків між ними

2.1. Двосторонні підмодулі та класичні дуо-модулі

Розпочнемо з класичного означення лівого і правого дуо кільця, запропонованого Феллером у 1958 році у роботі [41]. Асоціативне кільце з одиницею він називає дуо кільцем, якщо кожний лівий і кожний правий ідеали цього кільця є двосторонніми. Окрім інших питань, він досліджує такі проблеми:

(1) факторизація необоротніх елементів дуо кільця в добуток незвідних елементів;

(2) поведінка примарних ідеалів в поліноміальних кільцях над дуо кільцями;

(3) рівність радикала Джекобсона та первинного радикала поліноміального кільця з коефіцієнтами з дуо кільця.

Потім дослідження дуо кілець продовжив Тєрін. Систематичне дослідження дуо кілець він провів в роботі [87]. Ним встановлено, що всі первинні ідеали в дуо кільці є цілком первинними, та доведена теорема про існування вкладення дуо кільця в прямий добуток тіл, яке задає зображення цього дуо кільця у вигляді підпрямого добутку тіл.

Чергова робота, присвячена дуо кільцям, належить Чандрану В.Р., в якій автор узагальнює дві відомі теореми Коена, доведені ним для комутативних кілець, на ліві дуо кільця [24]. Перша стверджує, якщо в лівому дуо кільці всі первинні ідеали є головними як ліві ідеали, то це кільце є кільцем головних лівих і головних правих ідеалів. Друга отримується з першої, якщо головні ідели замінити скінченно породженими. Крім цього Чандран довів, що дуо кільце з одиницею є π-регулярним тоді і тільки тоді, коли кожний його первинний ідеал є максимальним. Артінові дуо кільця з самодуальністю вивчав Хуе в роботі [94]. Він показав, що кільце ендоморфізмів мінімального котвірного модуля в категорії модулів над артіновим дуо кільцем саме є артіновим дуо кільцем. Він вивчав дуо бімодулі, адже в них природньо ставиться питання коли всі ліві підмодулі є разом з тим і правим підмодулями. Основний результат Хуе показав, що якщо в артіновому дуо кільці радикал Джекобсона є прямою сумою колокальних ідеалів, то саме кільце є самодуальним. Між іншим зауважимо, що науковим керівником у Хуе був Фуллер, автор популярної книги з теорії кілець та модулів.

Самоінєктивні дуо кільця досліджував Кохлєр, а стаття Грега Маркса присвячена розширенням Оре дуо кілець. Деякі автори вивчали ширший клас за клас дуо кілець - це так звані ліві квазі-дуо кільця. Так називають кільця, в яких кожний лівий максимальний ідеал є двостороннім. Зауважимо, що ліві дуо області часто називають інваріантними зліва кільцями. Зокрема цієї термінології придержувався Туганбаєв і інші представники Московської алгебраїчної школи. Сафаеян вивчав строгі квазі-дуо кільця.

Пізніше з'явились узагальнення дуо кілець на випадок модулів. Знову свою виняткову властивість першим вводити найрізноманітніші природні алгебраїчні поняття виявив Патрік Смітт. Він разом з учнями у роботі [81] ввів поняття дуо модуля. Правда, його не можна вважати класичним узагальненням, оскільки багато властивостей притаманих класичним дуо кільцям перестають виконуватись для дуо модулів. Підхід Сміта грунтується на використанні ідеї цілком інваріантного підмодуля, замість двостороннього підмодуля.

Інший підхід до узагальнень двосторонніх ідеалів і дуо кілець на модулі можна підмітити, детально розглянувши так звану властивість вставки множника для підмодулів фіксованого модуля. Історично перше формулювання цієї властивості для кілець знаходимо у статті Белла [22] Він називав довільне майже кільце(кільце) кільцем з властивістю IFP, якщо в ньому з рівності $ab = 0$ випливає, що $aRb = 0$. Його цікавила ця властивість у звязку з дослідженням Армендаріцових напівкілець. Потім деякі автори вивчали ідеали кілець з властивістю IFP. Більш фундаментально підійшли до цієї властивості Грюнвальд і Ссеевверріі у статті [39].

При вивченні лівих модулів над некомутативними кільцями часто доводиться опиратись на добре розроблену теорію лівих ідеалів асоціативного кільця. Аналізуючи доведення багатьох фактів стосовно лівих ідеалів не важко помітити, що важливе місце в них часто відіграють двосторонні ідеали, зокрема тому, що вони єануляторами модулів. Викладений вище матеріал також про це свідчить. З цієї причини спеціалісти в галузі теорії кілець та модулів неодноразово вводили різні поняття підмодулів, близьких до двосторонніх ідеалів за основними властивостями [1].

З огляду на означення лівого модуля ми знаємо, що елементи лівого модуля не можна, взагалі кажучи, множити на скаляри (тобто елементи кільця) справа. Тому на перший погляд бажання вводити поняття двостороннього підмодуля лівого модуля виглядає не зовсім коректно, якщо опиратися лише на примітивну аналогію. Проте, потреба в цьому терміні часто виникає і немає нічого поганого, щоб спробувати відшукати природнє узагальнення двостороннього ідеалу на модульний випадок. Справа в тому, що при дослідженні модулів над некомутативними кільцями весь час виникає потреба мати аналог двостороннього ідеалу. Для підтвердження цієї думки часто посилаються на працю Грюнвальда та Ссевврері [39], де близькі до двосторонніх підмодулів вводяться з хитрою назвою: підмодулі "з властивістю вставки множників"(IFP). Очевидно, що назва використана зі згаданої роботи Белла.

Зараз також активно розвивається теорія двосторонніх полігонів, котрі застосовуються до побудови основ теорії класичних дуо-полігонів і класичних первинних підполігонів над моноїдом з нулем, про що свідчать такі нові публікації як [77] і [56].

Означення 2.1. *[39] Кажуть, що підмодуль N лівого R-модуля M володіє властивістю вставки множників (IFP), якщо з умови $am \in N$, де $a \in R$ і $m \in M$ випливає що $aRm \subseteq N$.*

На основі проведеного вище аналізу ми вводимо своє поняття дуо модуля.

Означення 2.2. *Підмодуль N лівого модуля M називається двостороннім підмодулем, якщо кожний підмодуль K модуля N, розглядуваний як підмодуль модуля M володіє властивістю вставки множників (IFP).*

Така назва має природнє обгрунтування: коли розглядати ліві ідеали кільця як підмодулі, то вони є двосторонніми тоді і тільки тоді, коли вони двосторонні як ідеали кільця.

Означення 2.3. *Лівий модуль, всі підмодулі якого є двосторонніми, називається лівим дуо-модулем.*

Зауважимо, що нульовий підмодуль модуля M не зобов'язаний бути двостороннім.

Твердження 2.1. *Нехай M модуль над асоціативним кільцем R. Тоді такі твердження еквівалентні:*

(1) кожен підмодуль $K \subseteq M$ володіє властивістю вставки множників IFP;

(2) кожен скінченно-породжений підмодуль $L \subseteq M$ володіє властивістю вставки множників IFP;

(3) кожен циклічний підмодуль $Q \subseteq M$ володіє властивістю вставки множників IFP;

(4) для кожного підмодуля $N \subseteq M$, фактор-модуль M/N володіє властивістю IFP, і правий анулятор M/N є двостороннім ідеалом.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидні. Доведемо імплікацію (3) $\Rightarrow$ (4). Нехай $N \subseteq M$ підмодуль і $\bar{m} \in M/N$. Потрібно довести, що правий ідеал $Ann_r(\bar{m})$ є і лівим ідеалом. Припустимо що $t \in Ann_r(m)$. Тоді $\bar{m}t = \bar{0}$, відповідно, $\bar{mt} = 0$ а тому $t \in M/N$. Далі, нехай $\bar{m}ut = 0$, звідки випливає що $ut \in Ann(m)$ для довільного елементу $u \in R$. Тому $Ann(\bar{m})$ є двостороннім ідеалом. Залишилося довести істинність імплікації (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Нехай $ms \in N$ для фіксованого підмодуля N модуля M і $m \in M$, $s \in M$. Перейдемо до елементів фактор-модуля M/N, $s \in Ann(\bar{m})$. Враховуючи двосторонність анулятора елемента $\bar{m} \in M/N$, очевидно, що $us \in Ann(\bar{m})$, що означає виконання умови $mus \in N$ для кожного елементу $u \in R$. Отже умова IFP виконується для підмодуля N, що завершує доведення. ■

Відповідно, модуль можна назвати двостороннім, якщо він задовольняє одну з умов, поданих вище.

Твердження 2.2. *Нехай M, S, P довільні модулі. Якщо M двосторонній підмодуль модуля S, а S двосторонній підмодуль модуля P, то M двосторонній підмодуль модуля P.*

Твердження 2.3. *Двосторонні підмодулі довільного модуля утворюють повну гратку.*

Доведення цього твердження проводиться безпосередньою перевіркою необхідних властивостей.

Означення 2.4. *Модуль M називається строгим дуо-модулем, якщо* *для кожного двостороннього підмодуля N модуля M виконується умова* $tr(N, M) = \cup_{f \in Hom(N,M)} f(N) = N$.

Для елементу $m \in M$ позначимо $a(m) := \{(s, t) \in R \times R | ms = mt\}$.

Теорема 2.1. *Нехай M модуль над асоціативним кільцем R. Такі властивості еквівалентні:*

(1) M є строгим дуо-модулем;

(2) Кожен підмодуль N модуля M є строгим дуо-модулем;

(3) Кожен скінченно-породжений підмодуль K модуля M є строгим дуо-модулем;

(4) Якщо S, Q підмодулі модуля M і S є гомоморфним образом Q, то $S \subseteq Q$;

(5) Якщо $a(m) \subseteq a(k)$ для деяких елементів $m, k \in M$, то $k \in mR$.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) і (2) $\Rightarrow$ (3) є очевидними.

(3) $\Rightarrow$ (1) Припустимо S є підмодулем модуля M і $f : S \to M$ є гомоморфізмом. Нехай s є елементом підмодуля S і нехай $Q = sR \cup f(s)R$. Якщо $g = f|_{sR}$. Тоді, очевидно, $f(s) \in tr(sR, Q) = sR$. З цього випливає що $tr(S, M) = S$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Якщо S, Q два підмодулі модуля M і $f : S \to Q$ деякий епіморфізм, то $S = Im(f) \subseteq tr(Q, M) = Q$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Припустимо що $a(m) \subseteq a(k)$ для деяких елементів m, k модуля M. Означимо відображення $f : mR \to kR$ як $f(mr) = kr$ для деякого елементу $r \in R$. Очевидно, відображення f є коректно означеним епіморфізмом, а тому $mR \subseteq kR$ за припущенням.

(5) $\Rightarrow$ (1) Припустимо що N є підмодулем модуля M і $f \in Hom(N, M)$. Якщо $n \in N$, то $a(n) \subseteq a(f(n))$, а отже, $f(n) \in nR \subseteq N$ за припущенням. А отже, $tr(N, M) = N$.

■

Наслідок 2.1. *Нехай R асоціативне кільце і M строгий дуо-модуль над R. Якщо R_R є підмодулем M, то $M_R = R_R$.*

Доведення. За умовою (2) Теореми 2.1, модуль R_R є строгим дуо-модулем. Також кожен циклічний R-модуль є гомоморфним образом R_R. А отже, результат виконується за умовою (4) попередньої теореми.

■

Означення 2.5. *R-модуль M називається цілком-впорядкованим, якщо для двох довільних підмодулів S, Q модуля M або $S \subseteq Q$ або $Q \subseteq S$.*

Твердження 2.4. *Нехай R довільне кільце і M цілком впорядкований модуль над цим кільцем. Тоді якщо M задовольняє умову обриву спадних ланцюгів на циклічних підмодулях, то M є строгим дуо-модулем. Зокрема, якщо R є областю головних ідеалів, то модуль R_R є строгим дуо-модулем.*

Доведення. Нехай для елементів $a, b \in M$ виконується умова $a(a) \subseteq a(b)$. Покажемо, що $b \in aR$. Якщо $b \notin aR$, то, за припущенням, $aR \subseteq bR$, а тому, $a = br$ для деякого елементу $r \in R$. Оскільки $brR \supseteq br^2R \supseteq \ldots$, за припущенням, існує такий номер $n \in N$, що $(br^n)R = (br^{n+1})R$, а тому $br^n = br^{n+1}t$ для деякого $t \in R$. Отже, $ar^{n-1} = ar^n t$. Оскільки $a(a) \subseteq a(b)$, то $br^{n-1} = br^n t$. Тому отримаємо той факт, що $a = art$. А отже, $b = brt = (br)t = at \in aR$, що є суперечністю. Як наслідок отримаємо те, що $bR \subseteq aR$, а модуль M є строго дуо-модулем за 2.1. У випадку коли R є областю головних ідеалів, R_R є цілком-впорядкованим модулем. Окрім того, з того факту що R є областю випливає що R_R є строгим дуо-модулем.

■

Наслідок 2.2. *Нехай R асоціативне кільце котре задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для головних ідеалів. Якщо модуль M є цілком-впорядкованим, то M є строгим дуо-модулем.*

Доведення. Покажемо, що модуль M задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для циклічних підмодулів. Якщо $a, b \in M$ і $bR \subseteq aR$, то існує такий елемнт $r \in R$, що $bR = arR$. Отже кожен спадний ланцюг циклічних підмодулів модуля M має вигляд $aR \supseteq ar_1R \supseteq ar_1r_2R \supseteq \dots$ Тепер розглянемо спадний ланцюг $R \supseteq r_1R \supseteq r_1r_2R \supseteq \dots$ За припущенням, існує такий номер $n \in N$, що $r_1 \dots r_nR = r_1 \dots r_{n+1}R$. Звідси випливає, що модуль M задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для циклічних підмодулів, і, за попереднім твердженням, модуль M є строгим дуо-модулем. ■

Твердження 2.5. *Нехай R асоціативне кільце і нехай M строгий дуо-модуль. Тоді кожен мономорфізм $f : M \to M$ є епіморфізмом.*

Доведення. Припустимо що $f : M \to M$ є мономорфізмом і означимо $g : f(M) \to M$ як $g(f(a)) = a$ для кожного елементу $a \in M$. Оскільки f є мономорфізмом, а g є коректно означеним гомоморфізмом, то очевидно, $g(f(M)) = M$. Оскільки M є строгим дуо-модулем і $g(f(M)) \subseteq tr(f(M), M) = f(M)$, а тому $f(M) = M$. Отже відображення f є епіморфізмом.

■

Лема 2.1. *Над асоціативним кільцем R виконуються такі властивості:*

(1) Правий R-модуль M є дуо-модулем тоді і лише тоді, коли для кожного ендоморфізму, що діє на M і для кожного елементу $m \in$

M, $f(m) = mt$ для деякого елементу $t \in R$. Зокрема, якщо R-комутативне кільце і M є дуо-модулем, то $End(M)$ є комутативним кільцем;

(2) *Нехай $N \subseteq Q$ підмодулі правого R-модуля M. Якщо N і Q/N цілком інваріантні підмодулі модулів M і M/N відповідно, то Q теж є цілком-інваріантним підмодулем модуля M;*

(3) *Якщо модуль R_R є дуо-модулем, то для двох елементів $s, t \in R$, $st = tx$ для деякого елементу $x \in R$;*

(4) *Модуль R_R є дуо-модулем тоді і лише тоді, коли кожен правий ідеал кільця R є двостороннім;*

(5) *Якщо модуль R_R є дуо-модулем, то кільце R є оборотним зліва кільцем;*

(6) *Кожен мультиплікаційний модуль є дуо-модулем.*

Доведення.

(1) Зауважимо, що якщо модуль M є дуо-модулем, то $f(mR) \subseteq mR$ для всіх $f \in End(M)$ і $m \in M$. Зокрема, якщо кільце R є комутативним і M є дуо-модулем, то з першої частини твердження випливає що кільце $End(M)$ є комутативним.

(2) Нехай $f \in End(M)$, означимо $\bar{f} : M/N \to M/N$ як $\bar{f}(\bar{m}) = \overline{f(m)}$. Оскільки підмодуль N є цілком-інваріантним в M, відображення $\bar{f}$ є коректно-означеним гомоморфізмом і $\overline{f(Q)} = \bar{f}(Q/N)$, а тому $f(Q) \subseteq Q$.

(3) Для кожного елементу $s \in R$ означимо відображення $\lambda_s : R \to R$ як $\lambda_s(t) = st$ для кожного елементу $t \in R$. Тоді, за твердженням (1) цієї леми, $\lambda_s(t) \in tR$ для кожного елементу $t \in R$, з чого отримуємо потрібний результат.

Твердження (4) і (5) очевидно випливають з частини (1) цієї леми.

(6) Якщо N є підмодулем мультиплікативного R-модуля M, то $N = BM$ для деякого ідеалу B кільця R, а тому для кожного ендоморфізму $f \in End(M)$, $f(N) = f(MB) = f(M)B \subseteq MB = N$.

■

Твердження 2.6. *Нехай R асоціативне кільце, M цілком-впорядкований правий R-модуль. Якщо модуль R_R є дуо-модулем і модуль M задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів на циклічних підмодулях, то модуль M є дуо-модулем.*

Доведення. Нехай $f : M \to M$ деякий ендоморфізм і нехай $m_1 \in M$. Припустимо що для деяких елементів $m_2, m_3, \ldots$ з M, $f(m_1) = m_2$, $f(m_2) = m_3, \ldots$ Оскільки модуль M є цілком-впорядкованим, для кожного $n \in N$ або $m_n \in m_{n+1}R$ або $m_{n+1} \in m_nR$. Якщо для кожного $n \in N$, $m_nR \subset m_{n+1}R$, то маємо зростаючий ланцюг $m_1R \subset m_2R \subset m_3R \subset \ldots$, що є суперечністю. Тому існує такий найменший номер $n \in N$, що $m_{n+1}R \subseteq m_nR$. Отже, $m_{n-1} \in m_nR$, $m_{n-2} \in m_{n-1}R, \ldots, m_1 \in m_2R$, а тому, $m_1 \in m_nR$. Якщо $m_1 = m_nr$ для деякого елементу $r \in R$, то $f(m_1) = f(m_n)r = m_{n+1}r$. Оскільки $m_{n+1} \in m_nR$, $m_{n+1} = m_nt$ для деякого $t \in R$, а тому $f(m_1) = m_ntr$. За пунктом (3) попередньої леми, $tr = rx$ для деякого елементу $x \in R$, а тому $f(m_1) = m_nrx = m_1x$. Потрібний результат випливає з пункту (1) попередньої леми.

■

З цієї леми прямо випливає такий наслідок.

Наслідок 2.3. *Над асоціативним кільцем R такі властивості еквівалентні:*

(1) R_R є дуо-модулем;

(2) R_R є мультиплікаційним модулем;

(3) Кожен циклічний R-модуль є мультиплікаційним;

(4) Кожен циклічний правий R-модуль є дуо-модулем.

Твердження 2.7. *Нехай R асоціативне кільце і M правий дуо-модуль над R. Тоді якщо M є квазі-ін'єктивним модулем, то кожен підмодуль M є квазі-ін'єктивним дуо-модулем.*

Доведення. Нехай N є підмодулем модуля M, Q є підмодулем N. Нехай f деякий ендоморфізм на N. Оскільки модуль M є квазі-ін'єктивним, ендоморфізм f можна розширити до ендоморфізму $\bar{f}$ на M. Отже $\bar{f}(Q) = f(Q)$ котрий міститься в Q, оскільки модуль M є дуо-модулем. Також легко побачити що N є квазі-ін'єктивним модулем.

■

Теорема 2.2. *Нехай R асоціативне кільце, M проективний правий R-модуль. M є дуо-модулем тоді і лише тоді, коли M є мультиплікаційним модулем.*

Доведення. Якщо модуль M є мультиплікаційним, то за лемою 2.1 модуль M є дуо-модулем. Навпаки, припустимо що M є дуо-модулем і N є підмодулем M. Нехай $M^* = Hom(M, R)$. Оскільки модуль M є проективним, то за Теоремою 1 з [6], існує така підмножина $T = \{(x_\alpha : f_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ з $M \times M^*$, що для кожного $x \in M$, $x = x_\alpha f_\alpha(x)$, де $(x_\alpha, f_\alpha) \in T$. Нехай I правий ідеал, породжений елементами вигляду $f_\alpha(x)$ для $x \in N$ і $\alpha \in \Lambda$. Покладемо що $N = MI$. Якщо $x \in N \subseteq M$, то $x = x_\alpha f_\alpha(x)$ для деякого $\alpha \in \Lambda$ і $(x_\alpha, f_\alpha) \in T$, а отже $x \in MI$. Тепер припустимо, що $x \in N$, $a \in M$ і $\alpha \in \Lambda$. Отже $\lambda_a \circ f_\alpha \in End(M)$, де $\lambda_a : R \to M$, котре визначається як $\lambda_a(r) = ar$ для кожного $r \in R$. Звідси випливає, що $af_\alpha(x) = \lambda_a(f_\alpha(x)) \in \lambda_a(f_\alpha(xR)) \subseteq xR$, оскільки M є дуо-модулем. Отже $MI \subseteq N$, а тому $N = MI$.

■

Наслідок 2.4. *Нехай R асоціативне кільце, де кожен ідеал є ідемпотентним і M проективний правий R-модуль. Тоді такі властивості еквівалентні:*

(1) M мультиплікаційний модуль;

(2) M строгий дуо-модуль;

(3) M дуо-модуль.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (3) виконується за попередньою теоремою.
(1) $\Rightarrow$ (2) Припустимо що для кожного ідеалу I кільця R виконується умова $N = MI$ для підмодуля N. Тоді для кожного $f \in Hom(N, M)$, $f(N) = f(MI) = f(MI^2) = f(MI)I \subseteq MI = N$, а тому M є строгим дуо-модулем.
(2) $\Rightarrow$ (3) Імплікація є очевидною.

■

Твердження 2.8. *Якщо R асоціативне кільце і M правий дуо-модуль над цим кільцем, то для кожного мономорфізму $f : M \to M$, $f(M)$ є суттєвим підмодулем модуля M.*

Доведення. Нехай $f : M \to M$ деякий мономорфізм і N такий ненульовий підмодуль модуля M, що $N \cap f(M) = 0$. Оскільки M є дуо-модулем, то $f(N) \subseteq N$, а тому $f(N) \subseteq N \cap f(M)$. А отже $f(N) = 0$, а тому $N = 0$, що є протиріччям.

■

Означення 2.6. *Нехай R асоціативне кільце, M правий R-модуль. M називається слабким дуо-модулем, якщо кожен ненульовий підмодуль N модуля M містить ненульовий підмодуль, котрий є цілком-інваріантним в M.*

Теорема 2.3. *Нехай R асоціативне кільце, M квазі-проективний правий R-модуль. Тоді такі властивості еквівалентні:*

(1) M є правим дуо-модулем;

(2) Кожен фактор-модуль M/N є слабким дуо-модулем.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) За твердженням 2.7, кожен фактор-модуль M/N є дуо-модулем, а тому є слабким дуо-модулем.
(2) $\Rightarrow$ (1) Припустимо що N є таким підмодулем модуля M, що N не є цілком-інваріантним. За припущенням, існує ненульовий підмодуль $Q \subset N$ котрий є цілком-інваріантним в M. Нехай $K = \bigcup\{L : L$ є цілком-інваріантним підодулем M і $L \subset N\}$. Очевидно підмодуль K є цілком-інваріантним в M і $K \neq N$. Отже N/K є ненульовим підмодулем модуля M/K, а тому за припущенням існує такий підмодуль $E \subseteq N$, що E/K є ненульовим цілком-інваріантним підмодулем модуля M. Отже $K \subset E \subseteq N$. За лемою 2.1, E є цілком-інваріантним підмодулем модуля M, а за вибором K отримуємо той факт, що $N = E$, що є протиріччям.

■

За цією теоремою отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 2.5. *Якщо R асоціативне кільце, то модуль R_R є дуо-модулем тоді і лише тоді, коли кожен циклічний правий R-модуль є слабким дуо-модулем.*

Наслідок 2.6. *Нехай R асоціативне кільце і M проективний правий R-модуль. Тоді такі властивості еквівалентні:*

(1) M є дуо-модулем;

(2) M є мультиплікаційним модулем;

(3) Кожен фактор-модуль M/N є слабким дуо-модулем.

2.2. Спектри модулів, близькі до первинного

Наразі існує кілька узагальнень поняття первинного ідеалу кільця для модульного випадку. Сформулюємо основні з цих узагальнень з метою подальшого порівняння та дослідження.

Означення 2.7. *Власний підмодуль P модуля M називається первинним підмодулем, якщо з того, що $aRm \subseteq P$ для $a \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $m \in P$ або $a \in (N : M)$, де $(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$.*

Це означення широко використовується у численних роботах, наприклад [11], [18], [26].

Означення 2.8. *Ненульовий правий (лівий) модуль M називається первинним модулем (в сенсі Пейджа), якщо $Ann(K) = Ann(M)$ для кожного ненульового підмодуля K модуля M.*

Більше інформації про це означення можна знайти в роботі [17].

Означення 2.9. *Власний підмодуль P модуля M називається первинним, якщо фактор-модуль M/P є первинним лівим модулем, іншими словами, якщо $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ для кожного ненульового підмодуля K/P модуля M/P.*

Це означення зустрічаєтья в роботах [68], [26], де отримані цікаві результати про такі модулі. Інший підхід до вивчення первинних підмодулів запропонували чеські математики Кепка та Нємєц в роботі [23].

Означення 2.10. *Модуль M називається первинним модулем (в сенсі Бікана), якщо $k_N = k_M$ для кожного ненульового підмодуля N модуля M, де $k_Q(M) = \cup\{Kerf | f \in Hom(M, Q)\}$ для кожного модуля M.*

Множину всіх первинних підмодулів модуля M називають первинним спектром модуля M.

Означення 2.11. *Власний підмодуль P лівого модуля M називається класично-первинним підмодулем, якщо з включення $abRm \subseteq P$ для $a, b \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $am \in P$ або $bm \in P$.*

В загальному кожен первинний підмодуль модуля M є класично-первинним, а у випадку коли $M = R$ є комутативним кільцем, класично-первинні підмодулі, первинні підмодулі і первинні ідеали збігаються (рівні) (див. [7]).
Вперше формулювання цього означення можна знайти в роботі Бехбуді і Кохі [18], де в оригіналі для таких модулів автори використовували термін "слабко-первинний підмодуль". Там встановлені основні властивості таких модулів та наведені яскраві приклади.
Потім це поняття (для комутативного випадку) всебічно вивчалося М. Бехбуді та його учнями, починаючи з 2006 року. В слід за ними назвемо множину класично-первинних підмодулів класично-первинним спектром модуля M. Цей спектр позначається через $Cl.Spec(M)$.

Зауваження 2.1. *Включення в іншу сторону невірне, тобто існує підмодуль N модуля M, що є класично-первинним підмодулем, але не є первинним підмодулем. Якщо R деяка область і P ненульовий первинний ідеал, то $P \oplus (0)$, $(0) \oplus P$ і $P(1,1)$ є класичними первинними підмодулями вільного модуля $M = R \oplus R$, проте всі вони не є первинними підмодулями (детальнішу інформацію можна знайти в роботі [7]).*

У 2015 році з'явилося ще одне поняття, пов'язане з первинністю, яке є узагальненням добре відомого поняття цілком первинного ідеалу.

Означення 2.12. *Власний підмодуль P лівого модуля M називається цілком-первинним, якщо з включення $abm \subseteq P$ для $a, b \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $am \in P$ або $bm \in P$.*

Множину всіх цілком-первинних підмодулів модуля M називають цілком-первинним спектром модуля M. Він позначається через

$Spec_l^{'}(M)$.

Строго-первинні модулі вивчалися цілим рядом вчених-алгебраїстів в цілому ряді країн світу.

Означення 2.13. *Лівий ідеал $\mathfrak{p}$ кільця R називається строго-первинним, якщо для кожного елементу $x \in R \backslash \mathfrak{p}$, існує така скінченна підмножина V кільця R, що*

$$(\mathfrak{p} : Vx) = \{r \in R | rVx \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Перша згадка про них є в роботі Бічі [15]. Множина всіх строго-первинних лівих ідеалів називається лівим спектром кільця R. Інший підхід до таких модулів запропонував А. Розенберг в роботі [75]. Багато уваги таким модулям приділили Вершорен та інші автори в роботі [85]

Означення 2.14. *Ненульовий лівий модуль M над кільцем R називається строго-первинним, якщо для довільних ненульових елементів $x, y \in M$ існує така скінченна підмножина*

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq R,$$

що

$$Ann_R\{a_1x, a_2x, \ldots, a_nx\} \subseteq Ann_R\{y\},$$

тобто з того, що ($ra_1x = ra_2x = \cdots = ra_nx = 0$), $r \in R$ випливає що $ry = 0$.

Введене тут означення строго-первинного модуля запозичене з праці Бічі [15], в якій використовуються глибинні результати теорії скрутів над асоціативними кільцями.

Означення 2.15. *Ненульовий лівий модуль M над кільцем R називається строго-первинним, якщо для довільного ненульового елементу $x \in M$ існує така скінченна підмножина*

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq R$$

що

$$Ann_R\{a_1x, a_2x, \ldots, a_nx\} = 0.$$

Таке означення строго-первинного модуля було введено авторами в роботі [28]. Якщо в цьому означенні покласти $M = R$, отримаємо поняття строго-первинного кільця. Такі строго-первинні кільця вивчалися також в роботах [26], [78] та [44]. Крім цих означень відомі ще два, котрі також варті уваги.

Означення 2.16. *Ненульовий правий модуль M називається строго-первинним, якщо M є первинним і для кожного ненульового правого підмодуля $N \subseteq M$ і для кожного елементу $y \in M$ існують такі елементи*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in N,$$

що

$$Ann(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq Ann(y).$$

Означення 2.17. *Підмодуль P деякого модуля M називається строго-первинним, якщо фактор-модуль M/P є строго-первинним R-модулем.*

Еквівалентність наведених вище означень випливає з результатів відмічених щойно робіт. Це дозволяє сформулювати таке означення.

Означення 2.18. *Множина всіх строго-первинних підмодулів модуля M називається лівим спектром M.*

В своїй роботі [80] Казуо Шігенага докладно досліджував відомі на той час поняття первинних модулів та близькі до таких. Зокрема, він подав докладні приклади взаємозв'язку між різними типами первинності, зокрема Приклад 1.1, Приклад 1.2, Приклад 1.3, Приклад 1.4, Приклад 1.5. Одним з результатів статті є також діаграма-зв'язок між різними типами спектрів модулів. В слід за автором позначимо:

$S - prime$ – строго-первинні модулі;

$R - prime$ – первинні модулі в сенсі Розенберга;

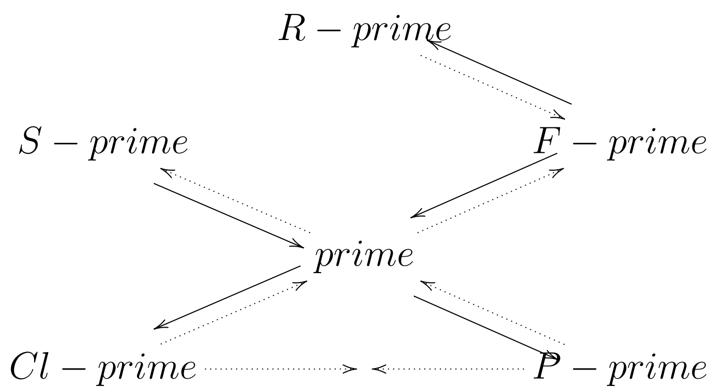
$F - prime$ – цілком-первинні модулі;

$P - prime$ – первинні модулі (за Пейджем);

$prime$ – первинні модулі (за Біканом);

$Cl - prime$ – класично-первинні модулі;

Отримаємо таку діаграму:



В діаграмі суцільні стрілки між типами спектрів показують те, що включення виконується, а штрих-пунктирні стрілки те, що включення не виконується.

2.3. Класично топологічні та зв'язані з ними гільбертово подібні модулі

Багато уваги алгебраїстами приділялося гільбертовим кільцям, гільбертовим модулям та їх спектральним узагальненням, про що свідчать роботи Хейнцера ([29]), Гілмера ([33]), Голдмана ([38]), Каучікаса ([51]), Круля ([57]), Процесі ([73]) і Фейса ([43]).

Означення 2.19. *Модуль називається цілком-гільбертовим, якщо кожен його цілком первинний підмодуль є перетином двосторонніх максимальних підмодулів.*

Означення 2.20. *[25] Кільце R називається кільцем Гільберта, якщо кожен первинний ідеал кільця є перетином максимальних ідеалів.*

Означення 2.21. *Модуль називається гільбертовим, якщо кожен первинний підмодуль є перетином максимальних підмодулів модуля.*

Означення 2.22. *Модуль M називається класично-гільбертовим, якщо кожен класично-первинний підмодуль є перетином максимальних підмодулів.*

Означення 2.23. *Лівий R-модуль M називається класично-топологічним модулем, якщо $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підмодулів N і L модуля M існує такий підмодуль K, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$.*

Означення 2.24. *Підмодуль C модуля M називається напівпервинним (класично-напівпервинним), якщо C є перетином первинних (класично-первинних) підмодулів.*

Означення 2.25. *Первинний (класично-первинний) підмодуль P лівого модуля M називається особливим, якщо як тільки N і L є напівпервинними (класично-напівпервинними) підмодулями модуля M, то з умови*

$N \cap L \subseteq P$ випливає, що $N \subseteq P$ і $L \subseteq P$.

Попередні означення активно використовувалися авторами в роботі [19], [20].

Твердження 2.9. *Нехай M лівий цілком-гільбертів (класично-гільбертів) дуо-модуль над кільцем R. Тоді кожен гомоморфний образ M є цілком-гільбертовим дуо-модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль цілком-гільбертового модуля M. Нехай $M' = M/N$. Припустимо, що множина цілком-первинних підмодулів модуля не є порожньою. Очевидно, що цілком-первинними підмодулями M' будуть підмодулі вигляду P/N, де P є цілком-первинним підмодулем модуля M і $N \subseteq P$. Отже, довільний напівпервинний підмодуль модуля M' набуде вигляду C/N, де C - цілком-напівпервинний підмодуль, що містить N. Використовуючи Лему 1 з роботи [19], отримаємо потрібний результат.

■

З твердження випливає такий наслідок.

Наслідок 2.7. *Нехай R кільце і M довільний лівий R-дуо-модуль. Тоді перелічені нижче твердження еквівалентні:*

(1) M цілком-гільбертів (класично-гільбертів) R-модуль;

(2) M/N цілком-гільбертів (класично-гільбертів) R-модуль для кожного підмодуля N модуля M.

Зауваження 2.2. *Мінімальні цілком-первинні підмодулі визначаються природньо. Очевидним є той факт, що якщо $\{P_i\}_{i \in I}$ довільний ланцюг цілком-первинних (класично-первинних) підмодулів R-модуля M, то $\cap_{i \in I} P_i$ очевидно буде цілком-первинним (класично-первинним) підмодулем. Тому за лемою Цорна кожен цілком-первинний (класично-первинний) підмодуль міститиме мінімальний цілком-первинний* *(класично-первинний) підмодуль.*

Твердження 2.10. *Кожен цілком-гільбертів дуо-модуль є класично-гільбертовим і гільбертовим модулем, проте зворотнє твердження хибне.*

Доведення. Нехай M цілком-гільбертів модуль. Відомо, що кожен цілком-первинний підмодуль є екстраординарним. Оскільки кожен цілком-первиниий підмодуль модуля M є первинним підмодулем, то відповідно, кожен первинний підмодуль-екстраординарний. Тому за ([96], Лема 2.1.), M гільбертів модуль.

■

Теорема 2.4. *R-модуль M є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) модулем тоді і лише тоді, коли кожен цілком-первинний (класично-первинний) підмодуль модуля M, що не є максимальним, є перетином власних більших цілком-первинних (класично-первинних) підмодулів.*

Доведення. Якщо M цілком-гільбертів модуль, то ця властивість очевидно виконується, оскільки всі максимальні підмодулі є цілком-первинними. Для доведення зворотнього твердження припустимо що N цілком-первинний підмодуль, що не є максимальним. Нехай $m \in M \backslash N$. Сформуємо множину всіх цілком-первинних підмодулів, котрі містять N, проте не елемент m. Ця множина містить підмодуль N. За Лемою Цорна, нехай K максимальний елемент у цій множині. Тому K є максимальним підмодулем. З іншого боку, підмодуль K є перетином власних більших цілком-первинних підмодулів. Оскільки підмодуль K максимальний у попередній множині первинних підмодулів, то всі власні більші цілком-первинні підмодулі повинні містити елемент m. Звідси випливає, що елемент m міститься в підмодулі K. Проте таке не виконується, з чого можна зробити висновок що K максимальний підмодуль. Отже, довели що перетин максимальних підмодулів, які містять N збігається з N, тому модуль M є цілком-гільбертовим.

■

Наслідок 2.8. *Нехай R – кільце і $\{M_i\}_{i\in I}$ набір R-модулів. Якщо $\bigoplus_{i\in I} M_i$ є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) модулем, то кожен $M_i (i \in I)$ є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) модулем.*

Зауваження 2.3. *Якщо M довільний R-модуль і $K \subseteq M$, то легко довести, що власний підмодуль P з M, де $K \subseteq P$ цілком-первинний (відповідно максимальний) підмодуль M, якщо P/K є цілком-первинним (максимальним) підмодулем M/K. Це зауваження можна використовувати як означення цілком-первинного підмодуля.*

Твердження 2.11. *Нехай R – область, M – цілком-гільбертів (класично-гільбертів) R-модуль. Якщо N є таким довільним підмодулем M, що M/N є напівпростим модулем, то N є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) R-модулем.*

Доведення. Припустимо, що R є областю і M є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) R-модулем. Припустимо, що $N \subset M$ і M/N є напівпростим модулем. Також припустимо, що $P \subset N$ є цілком-первинним (класично-первинним) підмодулем. Покажемо, що P є перетином максимальних підмодулів з N. Спершу покажемо, що P є цілком-первинним (класично-первинним) підмодулем M. Припустимо, що $rsRm \subseteq P$ для деякого $m \in M$ і $r, s \in R$. Якщо $m \in M$, оскільки P є цілком-первинним (класично-первинним) підмодулем N, покажемо, що або $rm \in P$ або $sm \in P$. Тепер припустимо, що $m \in M$. Нагадаємо, що $rsRm \subseteq P \subseteq N$. Оскільки M/N є напівпростим модулем і $m \notin N$, випливає, що $r = 0$ чи $s = 0$. Також в цьому випадку або $rm \in P$ або $sm \in P$. Отже P є цілком-первинним (класично-первинним) підмодулем

M. Оскільки P є цілком-первинним (класично-первинним) підмодулем M і $P = \cap_{i \in I} M_i$ де кожен M_i є максимальним підмодулем. M. Для кожного i нехай $P_i := M_i \cap N$. Оскільки $P \subseteq N$ легко побачити, що $P = \cap_{i \in I} P_i$. Окрім того, можемо припустити без втрати загальності, що кожен P_i повністю міститься в N. Припустимо, що $i \in I$ є довільним. Щоб завершити доведення, досить показати, що P_i є максимальним підмоделем N. Тому припустимо, що $m \in N \backslash P_i$. Покажемо, що $(P_i, m) \in N$. Отже $m_i \notin M_i$. Оскільки M_i є максимальними підмодулями M, маємо $(M_i, m) = M$. Нехай $x \in N$ є довільним елементом. Покажемо, що $x \in (P_i, m)$. Оскільки $M = (M_i, m)$, $x = m_i + rm$ для деяких елементів $m_i \in M$, $r \in R$. Оскільки $x \in N$ і $m \in N$ робимо висновок, що $m_i \in N$. Тому $m_i \in P_i$, з цього випливає, що $x \in (P_i, m)$. Ми показали, що $(P_i, m) \in N$, а це доводить, що P_i є максимальними підмодулями N.

■

Наслідок 2.9. *Нехай R область і M цілком-гільбертів (класично-гільбертів) R-модуль. Тоді якщо M — напівпростий модуль і N — чистий підмодуль модуля M, то N є цілком-гільбертовим (класично-гільбертовим) R-модулем.*

Доведення. Для доведення припустимо що N є чистим підмодулем цілком-гільбертового (класично-гільбертового) напівпростого модуля M. За попереднім твердженням, досить показати що якщо $m \in M \backslash N$ і $r \in R$, де $rRm \in N$, то $r = 0$. Тому припустимо що $m \in M \backslash N$ і $rRm \in N$. Оскільки N є чистим , то $rM \cap N = rN$. Отже $rRm \in rN$, тому існує деякий елемент $n \in N$ що $rRm = rRn$. Отже $rR(m - n) = 0$. Оскільки $m \notin N$, бачимо, що $m - n \neq 0$. Оскільки M є напівпростим модулем, робимо висновок, що $r = 0$.

■

Лема 2.2. *Для лівого R-модуля M такі твердження еквівалентні:*

(1) M є класично-топологічним модулем;

(2) Кожен класично-первинний підмодуль модуля M є екстраординарним;

(3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(N \cap L)$ для будь-яких класично-напівпервинних підмодулів N і L модуля M.

Доведення. Якщо $Cl.Spec(M) = \emptyset$ результат очевидно виконується. Припустимо що $Cl.Spec(M) \neq \emptyset$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Нехай P класично-первинний підмодуль модуля M і нехай N і L довільні класично-напівпервинні підмодулі модуля M, що $N \cap L \subseteq P$. За припущенням, існує такий підмодуль модуля M, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$. Тепер, $N = \bigcap_{i\in I} P_i$ для деякого набору класично-первинних підмодулів $P_i(i \in I)$. Для кожного $i \in I$, $P_i \in \mathbb{V}(N) \subseteq \mathbb{V}(K)$, оскільки $K \subseteq P_i$. Отже, $K \subseteq \bigcap_{i\in I} P_i = N$. Аналогічно, $K \subseteq L$. Отже, $K \subseteq N \cap L$. Тепер, $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) \subseteq \mathbb{V}(N \cap L) \subseteq \mathbb{V}(K) = \mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L)$. З цього випливає, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(N \cap L)$. Проте, $P \subseteq \mathbb{V}(N \cap L)$, з чого отримуємо той факт що $P \in \mathbb{V}(N)$ або $P \in \mathbb{V}(L)$, тобто $N \subseteq P$ або $L \subseteq P$ (2) $\Rightarrow$ (3) Нехай G і H класично-напівпервинні підмодулі модуля M. Очевидно, $\mathbb{V}(G) \cup \mathbb{V}(H) \subseteq \mathbb{V}(G \cap H)$. Нехай $P \in \mathbb{V}(G \cap H)$. Тоді, $G \cap H \subseteq P$, а отже, $G \subseteq P$ або $H \subseteq P$, тобто $P \in \mathbb{V}(G)$ чи $P \in \mathbb{V}(H)$. Це доводить, що $\mathbb{V}(G \cap H) \subseteq \mathbb{V}(G) \cup \mathbb{V}(H)$, а тому $\mathbb{V}(G) \cup \mathbb{V}(H) = \mathbb{V}(G \cap H)$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай S і T два підмодулі модуля M. Якщо $\mathbb{V}(S)$ порожня множина, то $\mathbb{V}(S) \cup \mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(T)$. Припустимо, що $\mathbb{V}(S)$ і $\mathbb{V}(T)$ обоє непорожні. Тоді $\mathbb{V}(S) \cup \mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(\sqrt[cl]{S}) \cup \mathbb{V}(\sqrt[cl]{T}) = \mathbb{V}(\sqrt[cl]{S} \cap \sqrt[cl]{T})$, за умовою (3). Це і доводить умову (1).

■

З цієї леми прямо випливає висновок:

Наслідок 2.10. *Кожен класично-топологічний модуль є топологічним модулем.*

Доведення. Нехай M довільний класично-топологічний модуль. За попередньою лемою кожен класично-первинний підмодуль M є екстраординарним. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль M є первинним, то первинний підмодуль M теж є екстраординарним. За попередньою лемою M буде топологічним модулем.

■

Відповідно, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.11. *Нехай M довільний R-модуль над комутативним кільцем. M є топологічним модулем в тому і лише в тому випадку, коли він є класично-топологічним модулем.*

Проте для випадку некомутативного кільця це твердження невірне.

Твердження 2.12. *Нехай M лівий класично-топологічний R-модуль. Тоді кожен гомоморфний образ M є класично-топологічним модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-топологічного модуля M. Нехай $M' = M/N$. Припустимо що $Cl.Spec(M') \neq \emptyset$. Очевидно, що класично-первинними підмодулями M' будуть підмодулі вигляду P/N, де P є класично-первинним підмодулем модуля M і $N \subseteq P$. Отже довільний класично-напівпервинний підмодуль модуля M' буде вигляду C/N де C є класично-напівпервинним підмодулем, що містить N. Використовуючи Лему 1 цього розділу, отримаємо потрібний результат.

■

Доведемо ще деякі властивості, пов'язані з класично-первинними модулями.

Твердження 2.13. *Кожен класично-первинний T-напівпростий підмодуль модуля M є первинним підмодулем.*

Доведення. Нехай N класично-первинний підмодуль модуля M, тобто з того, що $0 \neq rRm$ для $r \in R$, $m \in M$ випливає, що або $m \in M$

або $rM \subseteq N$. Припустимо, що $rRm \in N$ для $r \in R$, $m \in M$. Якщо $0 \neq rRm \in N$ і N класично-первинний, то $m \in N$ або $rM \subseteq N$. Якщо $rm = 0$, то $r = 0$ або $m = 0$, оскільки $T(M) = 0$. А отже, N первинний підмодуль.

■

Наслідок 2.12. *Нехай M слабко-мультиплікаційний R-модуль, де $T(M) = 0$. Тоді M є квазі-мультиплікаційним R-модулем.*

Твердження 2.14. *Нехай M модуль над локальним кільцем з максимальним ідеалом P і $PM = 0$. Тоді кожен підмодуль N модуля M є класично-первинним.*

Доведення. Нехай N підмодуль модуля M і $0 \neq rRm \in N$, де $r \in R$ і $m \in M$. Якщо r - одиниця, то $m \in N$. Якщо r не одиниця, то $rm \in PM = 0$ - суперечність.

■

Лема 2.3. *Припустимо, що N і K такі підмодулі M, що $K \nsubseteq N$ і $N \neq M$. Тоді виконуватиметься наступне:*

(1) якщо N - класично-первинний підмодуль модуля M, то N/K класично-первинний підмодуль модуля M/K;

(2) якщо K і N/K класично-первинні підмодулі, то N також класично-первинний підмодуль.

Доведення.

(1) Нехай $0 \neq rR(m+k) = rRm + k \in N/K$, де $r \in R$, $m \in M$. Якщо $rRm = 0$, то $rR(m+K) = 0$, і отримуємо суперечність. Якщо $rRm \neq 0$, N - класично-первинний, то маємо, що або $m \in M$, або $r \in (N : M)$. Тому або $m + K \in N/K$, або $r \in (N/K :_R M/K)$ (оскільки маємо, що $(N :_R M) = (N/K :_R M/K)$), що і слід було показати.

(2) Нехай $0 \neq rRm \in N$, де $r \in R$, $m \in M$, тому $rR(m+k) = rRm+k \in N/K$. Якщо $rRm \in K$, то з класичної первинності K маємо те, що або $m \in K \subseteq N$, або $r \in (K :_R M) \subseteq (N :_R M)$. Тому можемо припустити, що $rRm \notin K$. Тоді $0 \neq rR(m+K) \notin N/K$. Оскільки N/K є класично-первинним модулем, то отримаємо $m \in N$ або $r \in (N/K :_R M/K) = (N : M)$, що і слід було показати.

■

Означення 2.26. *[40] R-модуль M називається вторинним модулем, якщо для кожного елемента $r \in R$, R-ендоморфізм M, що задається множенням на r, є або нільпотентним, або сюр'єктивним*

Теорема 2.5. *Нехай M - вторинний R-модуль, N - ненульовий класично-первинний R-підмодуль у M. Тоді N теж є вторинним.*

Доведення. Нехай $r \in R$. За означенням вторинності: $r^n M = 0$ для деякого $n \in N$, а отже $r^n N \subseteq r^n 0$, тому r -нільпотентний в N. Припустимо, що r ділить N. Нехай $n \in N$. Тому $n = rRm$ для деякого $m \in M$. Можемо припустити, що $0 \neq rRm$. Отже, $0 \neq rRm \in N$, звідки за класичною первинністю N отримаємо $m \in N$. Тому $rN = N$, що і слід було показати.

■

2.4. Класи строго первинних кілець та модулів

Нехай $R - Mod$ - категорія лівих унітарних модулів над кільцем R.

Означення 2.27. *Функтор $r : R - Mod \to R - Mod$ називається напередрадикалом, якщо для довільних лівих R-модулів M і N і для довільного R-гомоморфізму $f : M \to N$ виконуються включення $r(M) \subseteq M$ і $f(r(M)) \subseteq r(N)$.*

Означення 2.28. *Напередрадикал r називається радикалом, якщо $r(M/r(M)) = 0$ для довільного лівого модуля M.*

Означення 2.29. *Правий модуль M називається r-радикальним якщо $r(M) = M$, і r-напівпростим, якщо $r(M) = 0$.*

Якщо для довільного лівого R-модуля M виконується включення $r_1(M) \subseteq r_2(M)$, то ми пишемо $r_1 \leq r_2$. Позначимо через R^N такий найменший напередрадикал r, що лівий полігон N є r-радикальним полігоном. Тоді $R^N(M) = \sum_{\alpha \in J} f_\alpha(N)$, де f_α пробігає всі гомоморфізми з $Hom(N, E(M))$, де $E(M)$ - ін'єктивна оболонка правого модуля M.

Твердження 2.15. *Для ненульового лівого полігону M такі висловлення є еквівалентними:*

1. *M - строго-первинний модуль;*
2. *Для довільного напередрадикалу r, або $r(M) = 0$ або $r(M) = M$;*
3. *M міститься в кожному цілком інваріантному підмодулі модуля $E(M)$;*
4. *Для кожного елемента $y \in M$ і для $0 \neq x \in M$ існують такі $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, що $Ann(xs_1, xs_2, \ldots, xs_n) \subseteq Ann(y)$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Якщо $r(M) \neq 0$ для деякого напередрадикалу r, то для $y \in M$ існують такі $x_1, x_2, \ldots, x_n \in r(M)$, що

$Ann(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq Ann(y)$. Тоді для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (r(M))^n$ образ $f : xS \to yS$, що подається за правилом $f(xa) = ya$ для всіх $a \in S$, є коректно визначеним, і тому xS є r-радикальним, а отже $yS \subseteq r(M)$. Тому $r(M) = M$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Якщо $0 \neq N \subseteq E(M)$ є цілком інваріантним, то $r^N(E(M)) = N$, більше того, $r^N(M) = M \cap R^N(E(M)) = M \cap N \neq 0$. Навпаки, $R^N(M) = M$ і $M \subseteq N$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай для ненульового елементу $x \in M$ модуль N міститься в $E(M)$, що є сумою гомоморфних образів модуля xS. Тоді N є цілком інваріантним, і тому за припущенням $M \subseteq N$, і, більше того, $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(xs_i)$ для $s_i \in S$ і $f_i \in Hom(xS, E(M))$. Тому $ya = 0$ якщо$xs_ia = 0$ для всіх i.

(4) $\Rightarrow$ (1). Якщо $0 \neq N \subseteq M$, нехай $0 \neq x \in N$. Також припустимо що для кожного $y \in M$ існують такі $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, що $Ann(xs_1, xs_2, \ldots, xs_n) \subseteq Ann(y)$. Оскільки для всіх i, $xs_i \in N$, позначимо $x_i = xs_i$. Тому $Ann(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq Ann(y)$, більше того, M є строго-первинним модулем.

■

2.5. Висновки до розділу 2

В даному розділі отримано такі результати:

(1) Дано означення двостороннього підмодуля, класичного дуо-модуля та досліджено їх властивості;

(2) Розглянуто узагальнення поняття первинного ідеалу для модульного випадку, зокрема поняття первинного модуля та підмодуля, класично-первинного і цілком первинного підмодуля, строго-первинного модуля та підмодуля;

(3) Досліджено різні типи спектрів модулів над асоціативними кільцями та показано їх взаємозв'язки у вигляді узагальнення діаграми Шигенаги;

(4) Досліджено класично-топологічні, топологічні, цілком-гільбертові та класично-гільбертові модулі і показано співвідношення між такими модулями;

(5) Подано взаємозв'язок між строго-первинним модулем та цілком-інваріантним підмодулем ін'єктивної оболонки цього модуля;

(6) Розглянуто поняття строгого дуо-модуля і слабкого дуо-модуля та досліджено їх взаємозв'язки з дуо-модулями та мультиплікаційними модулями.

Розділ 3
Спектри мультиплікаційних модулів та зв'язки між ними

3.1. Узагальнення мультиплікаційних модулів та їхні категорні і алгебро-топологічні властивості

Мультиплікаційні модулі вперше вивчав Барнар [12], який навів приклади та встановив елементарні їх властивості. Подальші результати мультиплікаційних модулів над некомутативними кільцями висвітлено в оглядовій статті Туганбаєва [88]. Багато інформації про мультиплікаційні модулі можна знайти в роботах [91], [92], [79] і [86].

Означення 3.1. *[62] Модуль M називаеться чисто-мультиплікаційним, якщо для кожного чистого підмодуля N з M, $N = IM$, де I ідеал кільця R, тобто якщо умова мультиплікаційності виконуеться лише для чистих підмодулів.*

Твердження 3.1. *Гомоморфний образ чисто-мультиплікаційного модуля є чисто-мультиплікаційним модулем.*

Доведення. Розглядатимемо ліві модулі. Нехай M - чисто-мультиплікаційний модуль над кільцем R, $h : M \to$ епіморфізм, $\bar{N}$ – чистий підмодуль в $\bar{M}$. Тоді існує чистий підмодуль N з M, для якого $h(N) = \bar{N}$. Окрім цього, знаємо, що існує такий ідеал B кільця R, що $N = BM$ - чистий підмодуль. Тоді $\bar{N} = h(N) = h(BM) = Bh(M) = B\bar{M}$, де $\bar{M}$ чисто-мультиплікаційний модуль.

■

Твердження 3.2. *Нехай R - кільце з комутативним множенням ідеалів, M - лівий чисто-мультиплікаційний модуль, B-такий ідеал кільця R, що $M = BM$. Тоді $N = BN$ для кожного чистого підмодуля N з M.*

Доведення. За припущенням $M = BM$, M - чисто-мультиплікаційний модуль. Тому існує такий ідеал C кільця R, що $N = CM = CBM$. За даними теореми $BC = CB$, $N = CBM = BCM = BN$.

■

Твердження 3.3. *Для лівого модуля M над кільцем R такі властивості еквівалентні:*

(1) M - чисто-мультиплікаційний модуль;

(2) Для кожного чистого циклічного підмодуля X модуля M існує такий лівий ідеал B, що $X = BM$;

(3) Для кожного чистого підмодуля X з M існує множина $\{X_i\}_{i\in I}$ чистих підмодулів з X та множина таких ідеалів $\{B_i\}_{i\in I}$, що $X = \sum_{i\in I} X_i$, $X_i = MB_i$ для кожного $i \in I$.

Доведення. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Нехай X - підмодуль модуля M, $\{X_i\}_{i\in I}$ множина чистих циклічних підмодулів X, і $B_i = (X_i : M)$, $(i \in I)$. За припущенням $X_i \subseteq MB_i \subseteq X_i$ для всіх i. Оскільки $X = \sum_{i\in I} X_i$, маємо $\{X_i\}$ і $\{B_i\}$ - відповідні множини.

(3) $\Rightarrow$ (1). Нехай X - чистий підмодуль модуля M. За припущенням, існує множина $\{X_i\}$ чистих підмодулів X та множина $\{B_i\}$ таких ідеалів кільця R, що $X = \sum_{i\in I} X_i$ і $X_i = MB_i$ для кожного $i \in I$. Позначимо через B ідеал $\sum_{i\in I} B_i$ кільця R. Тоді $X = \sum_{i\in I} X_i = \sum_{i\in I} MB_i =$

$M(\sum_{i\in I} B_i) = MB$, а це означає, що M чисто-мультиплікаційнй модуль і все доведено.

■

Означення 3.2. *R-модуль M називається квазі-мультиплікаційним, якщо для кожного класично-первинного підмодуля N модуля M, $N = IM$ для ідеалу I кільця R.*

Означення 3.3. *[40] Лівий R-модуль M називається слабко-мультиплікаційним, якщо або $Spec(M)$-порожня множина, або для кожного первинного підмодуля N з M, $N = IM$, де I ідеал кільця R.*

Зауваження 3.1. *Очевидно, що кожен мультиплікаційний модуль є квазі-мультиплікаційним, а кожен квазі-мультиплікаційний модуль є слабко-мультиплікаційним.*

Означення 3.4. *[63] Модуль M назививають RD-мультиплікаційним, якщо для кожного RD-підмодуля N з M, $N = IM$, де I - ідеал кільця R.*

Подані нижче твердження виконуються для комутативного випадку досить просто, про що свідчить, наприклад, робота [64]. Для некомутативного випадку на підмодуль потрібно накласти додаткову умову. Надалі розглядатимемо лише кільця та модулі, для яких виконується сформульована нижче умова.

(**) Підмодуль $N \subseteq M$ є чистим в M тоді і лише тоді, коли N_P є R_P-чистим підмодулем M_P для кожного максимального ідеалу P з R.

Твердження 3.4. *Нехай M - модуль над кільцем R.*

(1) Якщо M чисто-мультиплікаційний, то R_P-модуль M_P є чисто-мультиплікаційним для кожного максимального ідеалу P з R;

(2) Якщо M скінченно-породжений, то M є чисто-мультиплікаційним модулем тоді і лише тоді, коли R_P-модуль

M_P є чисто-мультиплікаційним для кожного максимального ідеалу M з R.

Доведення.

(1) Нехай N чистий підмодуль M_P, P - максимальний ідеал R. За накладеною умовою існує чистий підмодуль G з M, що $N = G_P$. Тому $G = IM$ для деякого ідеалу I з R, а отже, $N = G_P = (IM)_P = I_P M_P$.;

(2) Нехай M - чисто-мультиплікаційний модуль. Тоді умова 2 випливає з 1. Навпаки, нехай K чистий підмодуль з M. Покажемо, що $(K/(K : M)M)_P = 0$ для кожного ідеалу P з R. За введеною умовою K_P є чистим підмодулем M_P, тому $K_P = (K_P : M_P)M_P = ((K : M)M)_P$, оскільки M є скінченно-породженим. Отже, $(K/(K : M)M)_P = 0$, тому $K = (K : M)M$, що і слід було показати.

■

Твердження 3.5. *Нехай R кільце, M скінченно-породжений точний мультиплікаційний R-модуль. Тоді виконуються такі властивості:*

(1) підмодуль N з M є чистим тоді і лише тоді, коли $[N : M]$ є чистим ідеалом кільця R;

(2) ідеал I кільця R є чистим тоді і лише тоді, коли IM є чистим підмодулем M;

(3) якщо K є чистим підмодулем N, а N є чистим підмодулем M, то K є чистим підмодулем M;

(4) якщо R є кільцем, в якому кожен проективний ідеал є головним і N є чистим підмодулем M, то $ann(M)$ є чистим ідеалом R.

Твердження 3.6. *Нехай R кільце, M - лівий R-модуль, N - власний R-підмодуль M. Якщо M є чисто-мультиплікаційним модулем і N є чистим підмодулем в M, то N і M/N теж є чисто-мультиплікаційними модулями.*

Доведення. Нехай K власний чистий підмодуль в N. Тоді, за теоремою 3.5, K є чистим підмодулем M. Можемо записати $K = I_1M = K \cap I_1M = I_1K$ і $N = I_2M = I_2N$ для деяких ідеалів I_1, I_2 з R ($K = I_1M = K \cap I_1M = I_1K$ і $N = I_2M = I_2N$ випливає з означення чистоти підмодуля, $N = I_2M = I_2N$ - з означення мультиплікаційності, аналогічно попередньому). Звідси маємо, що $I_1N = I_1I_2M = I_2K = K \cap I_2M = K$. Отже, N є чисто-мультиплікаційним підмодулем. Припустимо, що L/N є власним чистим підмодулем M/N. Звідси L є чистим підмодулем в M, тому $L = JM$ для деякого ідеалу з R. Тоді $J(M/N) = (L + N)/N = L/N$, що і слід було показати.

■

Лема 3.1. *Скінченно-породжений R-модуль M є мультиплікаційним тоді і лише тоді, коли R_P-модуль M_P є мультиплікаційним модулем для всіх максимальних ідеалів P з R.*

Доведення. Для доведення цього факту досить згадати те, що якщо X є підмодулем M, то $X = IM$ для деякого ідеалу I з R тоді і лише тоді, коли $X = (X : M)M$.

■

Твердження 3.7. *Нехай R напівлокальне кільце. Тоді R-модуль є мультиплікаційним тоді і лише тоді, коли він є циклічним.*

Доведення. Досить показати, що кожен мультиплікаційний модуль над локальним кільцем є циклічним модулем (зворотне твердження очевидне). Нехай R локальне кільце з єдиним максимальним ідеалом P, M

ненульовий мультиплікаційний модуль над R. Тоді згідно з працею [12] можемо вибрати елемент $x \in M - PM$. Тоді $Rx = IM$, де I ідеал кільця R, і $I \nsubseteq P$. Більше того, $I = R$, тому $M = Rx$.

■

Твердження 3.8. *Нехай R інваріантне зліва кільце, M - R-модуль, N - власний R-підмодуль M. Тоді виконується той факт, що якщо I є таким ідеалом R, що $I \subseteq (0 : M)$, то M є чисто-мультиплікаційним R-модулем тоді і лише тоді, коли M є чисто-мультиплікаційним R/I-модулем.*

Наступне твердження прямо випливає з попередніх.

Твердження 3.9. *Скінченно-породжений модуль буде мультиплікаційним тоді і лише тоді, коли він є локально-циклічним.*

Твердження 3.10. *Якщо M буде RD-мультиплікаційним модулем над областю цілісності R, тоді якщо M буде модулем без скруту, то $rank_R(M) = 1$.*

Теорема 3.1. *Нехай R кільце. Тоді кожен скінченно-породжений чистий мультиплікаційний модуль буде мультиплікаційним модулем.*

Доведення. Скористаємося твердженням 3.9. Досить показати, що модуль є локально-циклічним. За твердженням 3.8 можемо припустити, що M є скінченно-породженим чистим мультиплікаційним модулем над локальним кільцем з єдиним максимальним ідеалом P. За твердженням 3.8 отримуємо, що M є чисто-мультиплікаційним, як R/P-модуль. Оскільки PM є чистим R/P-підмодулем M, і за твердженням 3.5 і [10] отримаємо те, що M/PM є скінченно-породженим чистиомультиплікаційним R/P-модулем. Якщо $M = PM$, то $M = 0$, M - мультиплікаційний. Якщо $M \neq PM$, то $rank_{R/P}(M/PM) = 1$, за твердженням 3.10. Отже, M є циклічним (за [10]), що і слід було показати.

■

Твердження 3.11. *Нехай R кільце, M - лівий R-модуль, N - власний R-підмодуль M. Якщо M є слабко-мультиплікаційним модулем і N є первинним підмодулем в M, то N і M/N теж будуть слабко-мультиплікаційними модулями.*

Доведення. Нехай K підмодуль в N. Тоді, його можемо записати у вигляді $K = I_1M = K \cap I_1M = I_1K$ і $N = I_2M = I_2N$ для деяких ідеалів I_1, I_2 кільця R ($K = I_1M = K \cap I_1M = I_1K$ і $N = I_2M = I_2N$ випливає з означення первинності підмодуля, $N = I_2M = I_2N$ - з означення мультиплікаційності, аналогічно попередньому). Звідси маємо, що $I_1N = I_1I_2M = I_2K = K \cap I_2M = K$. Отже, N є слабко-мультиплікаційним підмодулем. Припустимо, що L/N є власним первинним підмодулем M/N. Звідси L є первинним підмодулем в M, тому $L = JM$ для деякого ідеалу з R. Тоді $J(M/N) = (L + N)/N = L/N$, що і слід було показати.

■

3.2. Теореми типу Де Марко Орсатті для мультиплікаційних модулів

В 1971 Джузеппе Де Марко та Адальберто Орсатті опублікували статтю під назвою "Комутативні кільця, в котрих кожен первинний ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі" [27]. Метою цієї статті було вивчення деяких властивостей первинного спектру $\mathfrak{P}$ та максимального спектру $\mathfrak{M}$ pm-кільця R.
Основним результатом цієї статті було те, що відображення μ з $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{M}$, котре кожному первинному ідеалу $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ кільця R ставить у відповідність єдиний ідеал $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$, в котрому цей первинний ідеал міститься, є ретракцією. Окрім цього pm-кільця яскраво характеризуються існуванням ретракції з $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{M}$. Ця ретракція є єдиною і співпадає з відображенням μ.
Основним результатом цього розділу є узагальнення теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів над некомутативними кільцями.

Означення 3.5. *Модуль M називається lpm-модулем (лівим pm-модулем), якщо кожен первинний підмодуль цього модуля міститься, з точністю до відносності, в єдиному максимальному підмодулі модуля M.*

Означення 3.6. *Модуль M називається lpm-модулем (лівим pm-модулем), якщо кожен первинний підмодуль цього модуля має, з точністю до ізоморфізму, один простий гомоморфний образ.*

Властивість 3.1. *Означення 3.5 та 3.6 еквівалентні.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай маємо модуль M, котрий є lpm-модулем (в сенсі означення 3.5). Розглянемо первинний підмодуль P модуля M. Пригадаємо означення: P є первинним підмодулем модуля M, тоді і лише тоді, коли фактор-модуль M/P є первинним модулем. Ненульовий лівий модуль M називається первинним модулем, якщо $Ann(K) = Ann(M)$ для довільного ненульового підмодуля K модуля M. Тоді означення первинного підмодуля можемо переписати інакше: власне підмодуль P ненульового модуля M називається первинним, якщо $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ для довільного ненульового підмодуля K/P модуля M/P. Припустимо, що не виконується умова другого означення, тобто існують такі два різні максимальні підмодулі M_1 та M_2 модуля M, що $P \subseteq M_1$ і $P \subseteq M_2$. Оскільки M_1 та M_2 – різні максимальні підмодулі, то $M_1 + M_2 = M$, і M/M_i, $i = 1, 2$ є простими підмодулями. Окрім цього, $P \subset M_1 \Rightarrow P \subset M$. Тоді $M_1/P \subseteq M/P$. Побудуємо гомоморфізми: $f : M/P \longrightarrow M/M_1$ та $g : M/P \longrightarrow M/M_2$. Оскільки M є lpm-модулем, то за означенням 3.5, $M/M_1 \cong M/M_2$. Таке виконується лише коли $M_1 = M_2$. Суперечність. // ($\Leftarrow$) Нехай M – мультиплікаційний lpm-модуль (в сенсі означення 3.6), P – первинний підмодуль цього модуля. Розглянемо два довільні модульні гомоморфізми: $f : P \longrightarrow S_1$, $g : P \longrightarrow S_2$, де S_i, $(i = 1, 2)$ – прості підмодулі модуля M. Тоді $Ker(f) = M_1$ та $Ker(g) = M_2$ будуть максимальними підмодулями модуля M, при цьому існуватимуть такі ідеали I та J, для котрих $Kerf = IP$ та $Kerg = JP$. Відповідно, ідеали I та J є максимальними. Окрім цього, $P \subseteq I$ та $P \subseteq J$. З іншого боку, P – первинний підмодуль мультиплікаційного модуля M, а отже існує такий первинний ідеал Q кільця R, що $P = QM$. Тоді $Q \subseteq I$ та $Q \subseteq J$, $QP \subseteq IP = M_1$, $QP \subseteq JP = M_2$. Тому первинний підмодуль P міститься в двох різних максимальних підмодулях. Суперечність.

■

Теорема 3.2. *Нехай M – лівий мультиплікаційний R-модуль, і $Max(M)$ – ретракт простору $Spec(M)$. Тоді M – lpm-модуль.*

Доведення. Нехай

$$\mu : Spec(M) \longrightarrow Max(M)$$

є неперервною ретракцією, і $\mu(K) = H$ для первинного підмодуля K і максимального підмодуля H модуля M. Тоді замкнена множина $\mu^{-1}(H)$ міститиме $\overline{\{K\}}$, тобто довільний максимальний підмодуль H', що міститиме K. Оскільки відображення μ – неперервна ретракція, то $H = \mu(H') = H'$. Тому $H' = H$ є єдиним максимальним підмодулем, що містить K.

■

З цієї теореми отримуємо очевидні наслідки

Наслідок 3.1. *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lpm-модуля M містить єдиний мінімальний первинний підмодуль.*

Наслідок 3.2. *Простір $Min(M)$ мінімальних первинних підмодулів є ретрактом простору $Spec(M)$.*

Більше інформації про мінімальні первинні підмодулі можна почерпнути в роботах [83], [83] та [32].

Означення 3.7. *Модуль N називають чисто-ін'єктивним, якщо він є інєктивним над чистими вкладеннями, тобто як тільки $f : A \to B$ – чисте вкладення, $g : A \to N$- довільний морфізм, то існує такий морфізм $h : A \to N$, що $h \circ f = g$.*

Означення 3.8. *Нехай M - довільний модуль, N - його підмодуль. Підмодуль N називається чисто-нерозкладним, якщо чисто-ін'єктивна оболонка фактор-модуля M/N є нерозкладним модулем.*

Означення 3.9. *[72] Під точками спектру Ціглера мультиплікаційного модуля розумітимемо класи ізоморфізму модулів вигляду $H(M/N)$, де N пробігає чисто-нерозкладні підмодулі модуля M. Базою простору* *будуть всі множини такого вигляду:*

$$\varphi/\psi = \{N \in Spec_{Zg}(M) : \varphi(N)/\psi(N) \neq 0\},$$

де $\varphi(N)$ та $\psi(N)$ формульні підгрупи.

Означення 3.10. *Нехай M - мультиплікаційний модуль, N - його підмодуль. Модуль M називається pіт-модулем, якщо кожен чисто-нерозкладний підмодуль міститься в єдиному максимальному підмодулі.*

Теорема 3.3. *Нехай M - лівий мультиплікаційний R-модуль, і Max(M) - ретракт простору $Spec_{Zg}(M)$. Тоді M - pіт-модуль.*

Доведення. Відомо, що $Spec_{Zg}(M)$ множина всіх чистих первинних підмодулів модуля M. Нехай

$$\mu : Spec_{Zg}(M) \to Max(M)$$

неперервна ретракція. Існує властивість для мультиплікаційних підмодулів, що кожен власний підмодуль модуля M міститься в максимальному підмодулі M. Якби виконувалося попереднє припущення і для мультиплікаційного модуля, то $\mu(K) = H$, K - довільний чисто-первинний підмодуль, H - максимальний підмодуль модуля M. Тоді $\mu^{-1}(H)$ міститиме $\{\bar{K}\}$ - довільний максимальний підмодуль H', що міститиме K. Оскільки μ неперервна ретракція, то $H = \mu(H') = H'$. Тому $H' = H$ є єдиним максимальним підмодулем, що містить K. Теорема доведена.

■

Означення 3.11. *Лівий модуль M над кільцем R називається lcpm-модулем якщо кожен класично-первинний підмодуль P міститься в єдиному максимальному (двосторонньому) підмодулі модуля M.*

Теорема 3.4. *Нехай M мультиплікаційний R-модуль, і $Max(M)$ ретракт простору $Cl.Spec(M)$. Тоді M є lcpm-модулем.*

Доведення. Припустимо що

$$\varphi : Cl.Spec(M) \to Max(M)$$

неперервна ретракція і $\varphi(K) = H$ для деякого класично-первинного підмодуля P і максимального підмодуля H модуля M. Тоді замкнена множина $\varphi^{-1}(H)$ є містити $\{\bar{P}\}$, тобто довільний максимальний підмодуль H' що міститиме P. Оскільки відображення φ буде неперервною ретракцією, тому $H = \varphi(H') = H'$. Отже $H' = H$ є єдиним максимальним підмодулем що міститиме P.

■

Наслідок 3.3. *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lcpm-модуля M містить єдиний мінімальний класично-первинний підмодуль.*

Наслідок 3.4. *Простір $Cl.Min(M)$ мінімальних класично-первинних підмодулів є ретрактом простору $Cl.Spec(M)$.*

3.3. Розширені спектри модулів та їхній циклічний спектр

Олександр Розенберг в своїй книзі [75] ввів напередпорядок $\leq$ на множині всіх лівих ідеалів наступним чином: $K \leq L$ для пари лівих R-ідеалів L і K тоді і лише тоді, коли існує така скінченна підмножина V кільця R, що $(K : V) \subseteq L$. Це дозволило йому ввести змістовне означення лівого спектру кільця.

Введемо аналог цього напередпорядку на модулях. Нехай R_R кільце, розглядуване як регулярний модуль над собою з твірним елементом 1. Тоді $M = R \times 1$-циклічний модуль. Добре відома теорема, яка описує циклічні модулі, як фактор-модулі регулярного модуля $_RR$. Циклічні модулі є мультиплікаційними, тому даний тип результатів стосується головної теми дисертації.

Теорема 3.5. *[13] Кожен циклічний модуль є ізоморфним фактор-модулю регулярного модуля за анулятором твірного елемента.*

Добре відомий опис всіх підмодулів циклічного модуля. А саме, підмодуль R/I має вигляд K/I, де K-лівий ідеал кільця. Для введення спектру Розенберга циклічного модуля введемо відношення напередпорядку на підмодулях:

$$N = K/I \leq Q = L/I \Longleftrightarrow K \leq L,$$

як ідеалів в сенсі Розенберга. Мінімальні підмодулі стосовно цього порядку задають спектр циклічного модуля. Це множина ідеалів L, що є в спектрі Розенберга кільця R, для яких L/I є максимальним підмодулем стосовно введеного порядку.

Означення 3.12. *Відомо, що довільний модуль є сумою своїх циклічних підмодулів. Тому циклічним спектром M буде об'єднання всіх циклічних лівих спектрів для підмодулів модуля M.*

Розглянемо приклад.

Приклад 3.1. *Нехай*

$$M = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} |a, b \in k\}$$

деякий модуль зі стовпців другого порядку над кільцем $R = M_2(k)$, *де* k *це довільне поле. Такий модуль є циклічним з твірним елементом*

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто,

$$M = R \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Ann(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} |b, d \in k\},$$

отже

$$M/Ann(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \cong \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} |a, c \in k\}.$$

Максимальний підмодуль має вигляд

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

тому циклічний спектр складається з однієї точки.

Подамо деякі властивості строго-первинних модулів та циклічного спектру.

Лема 3.2. *Нехай* L *та* K *ліві циклічні* R*-модулі.* $L \leq K$ *тоді і лише тоді коли існують циклічний лівий* R*-модуль* X, *мономорфізм* $X \leftarrow L^n$ *та епіморфізм* $X \to K$. *Іншими словами, існує діаграма*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (L)^n & & K \end{tikzcd}$$

Доведення. Нагадаємо означення напередпорядку для підмодулів циклічного модуля. Нехай L, K деякі підмодулі. Можемо подати їх у вигляді $L = \mathfrak{A}/Ann(m)$ і $K = \mathfrak{B}/Ann(m)$ для деяких лівих ідеалів $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{B}$ кільця R. Зазначимо, що $L = \mathfrak{A}/Ann(m) \leq K = \mathfrak{B}/Ann(m)$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ як ідеали в сенсі Розенберга. Тепер означимо два циклічні модулі L та K. Вони цілком описуються їхніми ідеалами $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{B}$. Тоді якщо $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ за означенням, тоді існує така скінченна підмножина $V \subseteq R$, що $(\mathfrak{A} : V) \leq \mathfrak{B}$. Покладемо $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, і нехай $X = R\vec{v}$ то циклічний модуль, де $\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} \in (L)^n$. Тому отримали рівність

$$(0 : \vec{v}) = \cap_{i=1}^{n}(\mathfrak{A} : v_i) = (\mathfrak{A} : V) \subseteq \mathfrak{B},$$

з котрої випливає що існує сюр'єктивне відображення $X \twoheadrightarrow K$.
З іншого боку, припустимо що існує діаграма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ (L)^n & & K \end{tikzcd}$$

Тому можемо знайти такий елемент $x \in X$, що $\beta(x) = \vec{1}$. Покладемо $\alpha(x) = (\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}) \in (L)^n$, де $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}) \in \mathfrak{A}$ для деякого $v_i \in R$. Покладемо $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ і тоді отримаємо

$$(\mathfrak{A} : V) = \cap_{i=1}^{n}(\mathfrak{A} : v_i) = (0 : \vec{v}) = (0 : x) \subseteq \mathfrak{B},$$

тому $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ і $L \leq K$.

■

Зазвичай з напередпорядку $\leq$ отримуємо відношення еквівалентності "$\sim$" наступним чином: $K \sim L$ тоді і лише тоді, коли $K \leq L$ and $L \leq K$. Клас еквівалентності підмодуля L позначимо через $[L]$. З попередніх результатів отримуємо таку лему:

Лема 3.3. *Якщо $\mathfrak{P}$ строго-первинний модуль, тоді для довільного елементу $x \in M$ такі властивості еквівалентні:*

(1) $x \notin \mathfrak{P}$;

(2) $(\mathfrak{P} : x) \leq \mathfrak{P}$;

(3) $(\mathfrak{P} : x) \in [\mathfrak{P}]$.

Лема 3.4. *Нехай M циклічний модуль. Якщо $\mathfrak{P} \in Cspec(M)$ і якщо L та K такі підмодулі, що $L \cap K \leq \mathfrak{P}$, то або $L \leq \mathfrak{P}$ або $K \leq \mathfrak{P}$.*

Доведення. Нехай $L \nleq \mathfrak{P}$ і $K \nleq \mathfrak{P}$, і нехай $L \cap K \leq \mathfrak{P}$. Тому, за означенням, існують такі ідеали $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{p}$ кільця R, що $L = \mathfrak{A}/Ann(m)$, $K = \mathfrak{B}/Ann(m)$ і $P = \mathfrak{p}/Ann(m)$. Тоді існує скінченна підмножина V кільця R, що $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} : V) \subseteq \mathfrak{p}$. Оскільки $\mathfrak{A} \nleq \mathfrak{p}$, то з даного факту випливає, що $(\mathfrak{A} : F) \nsubseteq \mathfrak{p}$ для деякої скінченної підмножини F кільця R. Тому, якщо покласти $F = V$, отримуємо той факт що $(\mathfrak{A} : V) \nsubseteq \mathfrak{p}$. Тепер, якщо $x \in (\mathfrak{A} : V) - \mathfrak{p}$, то існує скінченна множина $W \subseteq R$ з властивістю $(\mathfrak{p} : Wx) \subseteq \mathfrak{p}$. Оскільки $K \nleq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{b} \nleq \mathfrak{p}$, і отримуємо той факт що $(\mathfrak{B} : F) \nleq \mathfrak{p}$ для довільної скінченної множини $F \subseteq R$. Зокрема, це виконується і для випадку $F = WxV$, тому можемо відшукати елемент $y \in (\mathfrak{B} : WxV) - \mathfrak{p}$. Нарешті, з факту $x \in (\mathfrak{A} : V)$ випливає що $yWxV \subseteq \mathfrak{B}$, і y належить множині $(\mathfrak{B} : WxV)$. Очевидно що $yWxV \subseteq \mathfrak{B}$, тобто $yWxV \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ і $yWx \subseteq (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} : V) \subseteq \mathfrak{p}$. Отже $y \in (\mathfrak{p} : Wx) \subseteq \mathfrak{p}$, що суперечить тому факту, що $y \notin \mathfrak{p}$.

■

Аналогічно, виконується наступний факт:

Лема 3.5. *Якщо $\mathfrak{P} \in Cspec(R)$ і якщо L та K такі підмодулі, що $LK \leq \mathfrak{P}$, то або $L \leq \mathfrak{P}$ або $K \leq \mathfrak{P}$.*

Доведення. Припустимо що або $L \nleq \mathfrak{P}$ або $K \nleq \mathfrak{P}$. Якщо $LK \leq \mathfrak{P}$, то існує така скінченна підмножина $U \subseteq R$, що $(LK : U) \subseteq \mathfrak{P}$. Оскільки $K \nleq \mathfrak{P}$, отримуємо той факт, що $(K : U) \nsubseteq \mathfrak{P}$, і нехай $r \in (K : U) - \mathfrak{P}$, тоді існує скінчена підмножина $V \nsubseteq R$, де $(\mathfrak{P} : Vr) \subset \mathfrak{P}$. З іншого боку, $L \nleq \mathfrak{P}$, тому $(L : V) \nsubseteq \mathfrak{P}$. Проте, якщо $t \in (L : V) - \mathfrak{P}$, то $(tV)(rU) \subseteq LK$, а отже $tVr \subseteq (LK : U) \subseteq \mathfrak{P}$. Проте, $t \in (\mathfrak{P} : Vr) \subseteq \mathfrak{P}$, що є протиріччям. Це і доводить наше припущення.

■

Нагадаємо означення множення циклічних модулів: довільний циклічний модуль можна розглядати як фактор-модуль по лівому ідеалу. Розгялянемо два такі модулі $L \cong R/\mathfrak{a}$ і $K \cong R/\mathfrak{b}$. Тоді

$$L \cdot K = R/\mathfrak{a} \cdot R/\mathfrak{b} =^{def} R/\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Лема 3.6. *Нехай $\mathfrak{P}$ і $\mathfrak{Q}$ строго-первинні підмодулі циклічного модуля M. Тоді виконуються такі властивості:*

(1) Якщо $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$, то $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$ строго-первинний модуль і $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$;

(2) Якщо $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$ строго-первинний модуль, то або $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$ або $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{Q}$ або $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{P}$ і $\mathfrak{Q}$ строго-первинні підмодулі циклічного модуля M. Тому для кожного підмодуля циклічного модуля існують ідеали $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}/Ann(m)$ і $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}/Ann(m)$, де $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{Q}$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ як ідеали Розенберга. Аналогічно, можемо подати означення відношення еквівалентності. Припустимо що $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$ і $x \notin \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Нехай $x \notin \mathfrak{p}$, тому існує така скінченна підмножина $V \subseteq R$, що $(\mathfrak{p} : Vx) \subseteq \mathfrak{p}$. Якщо $x \notin \mathfrak{q}$, то $(\mathfrak{q} : Wx) \subseteq \mathfrak{q}$ дл деякої скінченної підмножини W кільця R. Нехай $U = V \cup W$, тоді $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : Ux) \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Якщо $x \in \mathfrak{q}$, то $(\mathfrak{q} : Vx) = R$, а отже $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : Vx) \subseteq \mathfrak{p}$. Оскільки $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$ за припущенням, то очевидно виконується той факт що $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$, а отже $(\mathfrak{p} : U) \subseteq \mathfrak{q}$ для деякої скінченної підмножини $U \subseteq R$, і, оскільки можемо припустити що $1 \in U$, отримуємо те, що

$$(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : UVx) = ((\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : Vx) : U) \subseteq (\mathfrak{p} : U) \subseteq \mathfrak{q};$$

Більше того, оскільки $V \subseteq UV$, також маємо те, що

$$(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : UVx) \subseteq (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : Vx) \subseteq \mathfrak{p},$$

а тому $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : UVx) \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, з чого випливає те, що $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ є строго-первинним ідеалом. Очевидно, $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \leq \mathfrak{p}$.З іного боку, оскільки $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$, існує скінченна підмножина $V \subseteq R$, для котрої виконується $(\mathfrak{p} : V) \subseteq \mathfrak{q}$. Очевидно можемо припустити що $1 \in V$, тому маємо те що $(\mathfrak{p} : V) \subseteq \mathfrak{p}$. Звідси, $(\mathfrak{p} : V) \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, а отже $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ і $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.
Тепер припустимо що $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ такі строго-первинні ідеали, що $\mathfrak{p} \nleq \mathfrak{q}$ і $\mathfrak{p} \ngeq \mathfrak{q}$. Оскільки $\mathfrak{p} \nleq \mathfrak{q}$, то існує елемент $x \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$. Тому $x \notin \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ і можемо знайти таку скінченну підмножину $V \subseteq R$ що $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} : Vx) \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Оскільки $(\mathfrak{p} : Vx) = R$, з цього випливає що $(\mathfrak{q} : Vx) \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, а отже $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$. За симетрією, $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$, а тому $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$.

■

З попередніх лем випливає такий висновок.

Наслідок 3.5. *Нехай $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ така скінченна сім'я строго-первинних модулів, що $\mathfrak{P}_1 \sim \cdots \sim \mathfrak{P}_n$. Тоді $\cap_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$ є строго-первинним модулем і $\mathfrak{P}_1 \sim \cap_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$.*

Твердження 3.12. *Нехай $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ така скінчення сім'я максимальних підмодулів, що перетин $\cap_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ є незвідним. Тоді $\cap_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ є строго-первинним підмодулем тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{M}_1 \sim \ldots \sim \mathfrak{M}_n$.*

Доведення. Якщо $n = 2$, то припущення очевидно виконується. Тому припустимо що $n \geq 3$. Якщо $\mathfrak{M}_1 \sim \ldots \sim \mathfrak{M}_n$, то очевидно, $\cap_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ є строго-первинним підмодулем.
Навпаки, скористаємося припущенням індукції, тобто припустимо що якщо незвідний перетин $\cap_{i=1}^k \mathfrak{N}_i$ максимальних підмодулів для $k < n$ є строго-первинним підмодулем, то $\mathfrak{N}_1 \sim \ldots \sim \mathfrak{N}_k$. Розглянемо незвідний перетин $\cap_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ максимальних підмодулів, і припустимо що $\cap_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ є строго-первинним підмодулем. Якщо $n-1$ з таких максимальних підмодулів є еквівалентними, наприклад, $\mathfrak{M}_1 \sim \ldots \sim \mathfrak{M}_{n-1}$, то перетин

$\cap_{i=1}^{n-1}\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_n$ є строго-первинним підмодулем, і $\cap_{i=1}^{n-1}\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}_n$. Тому, за припущенням індукції, такі підмодулі є еквівалентними. З іншого боку, якщо жоден з $n-1$ максимальних підмодулів не еквівалентний, то можемо припустити що $\mathfrak{M}_1 \nsim \mathfrak{M}_2$ і $\mathfrak{M}_2 \nsim \mathfrak{M}_3$. Нехай $\mathfrak{P} = \cap_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_i$ і $L = \cap_{i=2}^{n}\mathfrak{M}_i$. За припущенням індукції, маємо те, що $L \notin spec(M)$, а отже, існує такий елемент $x \notin L$, що $(L : Vx) \nsubseteq L$ для довільної скінченної підмножини V кільця R. Тому, очевидно, $x \notin \mathfrak{M}_1 \cap L = \mathfrak{P}$ і тому можна знайти таку скінченну підмножину $W \subseteq R$, що $(\mathfrak{P} : Wx) \subseteq \mathfrak{P}$. Якщо $x \in \mathfrak{M}_1$, то $(L : Wx) = (L \cap \mathfrak{M}_1 : Wx) \subseteq L \cap \mathfrak{M}_1 \subseteq L$, з чого отримуємо протиріччя. Тому можемо припустити що для довільного елементу $y \in \mathfrak{M}_1 - L$ існує така скінченна підмножина $U \subseteq R$, що $(L : U) \subseteq L$. Оскільки $L + \mathfrak{M}_1 = R$, отримаємо те що $x = l + m$ для деяких елементів $l \in L$ і $m \in \mathfrak{M}_1 - L$. Нехай $U \subseteq R$ така скінченна підмножина, що $(L : Um) \subseteq L$, то $(L : Ux) = (L : Um) \subseteq L$, що є суперечністю. Отже всі максимальні підмодулі $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ еквівалентні.

■

Твердження 3.13. *Нехай $\mathfrak{M}$ максимальний підмодуль і нехай L такий підмодуль, що $\mathfrak{M} \leq L$. Тоді $\mathfrak{M} \sim L$ і M/L є напівпростим лівим R-модулем, ізоморфним скінченній прямій сумі копій $M/\mathfrak{M}$.*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{M} \sim L$, то за існує діаграма $(M/\mathfrak{M})^n \hookleftarrow X \twoheadrightarrow M/L$. Отже, M/L є напівпервинним та ізоморфним до $(M/\mathfrak{M})^m$ для деякого додатнього цілого числа m. Тому можемо побудувати тривіальну діаграму $M/L \hookleftarrow M/\mathfrak{M} = M/$

Для лівого модуля M, його підмодуль N називається строго-двостороннім, якщо лівий анулятор кожного елемента підмодуля N

є двостороннім ідеалом. Іншими словами це підмодуль, який є дуомодулем. Очевидно множина всіх елементів модуля M, які мають двосторонній лівий анулятор і отриманий підмодуль є двостороннім. Отже множина таких підмодулів не є порожньою, оскільки сума строго-двосторонніх підмодулів є строго-двостороннім підмодулем. Ця сума називається межею підмодуля N. Іншими словами, межею підмодуля є найбільший підмодуль з-поміж таких, що мають двосторонні ліві анулятори. Це означає що це найбільший підмодуль з класу тих, що містяться в модулі M. У випадку, коли $M = N$, говоримо про поняття межі модуля. З цього випливає що межею модуля M є найбільший строго-двосторонній підмодуль модуля M. Позначимо межу підмодуля N через $b(N)$, а межу модуля M через $b(M)$. Для підмодуля N запишемо що $b(N) = (N : M) = \{r \in R; mM \subseteq N\}$.

Лема 3.7. *Для кожного строго-первинного лівого підмодуля $\mathfrak{P}$ модуля M виконується те, що $b(\mathfrak{p}) \in Cspec(M)$.*

Доведення. Нехай $x, y \in M$ такі елементи, що $xRy \subseteq b(\mathfrak{P})$. Припустимо, що $y \notin b(\mathfrak{P})$. Тоді існує такий елемент $s \in R$ що $ys \notin \mathfrak{P}$. Для кожного $r \in R$, $(xr)R(ys) \subseteq (xRy)s \subseteq b(\mathfrak{P})s \subseteq b(\mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{P}$. Отже $rx \in \mathfrak{P}$. Тому $xR \subseteq b(\mathfrak{P})$, що і доводить наше припущення.

■

Лема 3.8. *Якщо $L \leq K$ це ліві R-модулі, то $b(L) \subseteq b(K)$. Навпаки, якщо R нетерове зліва цілком обмежене кільце і якщо $b(L) \subseteq b(K)$, то $L \leq K$.*

Доведення. Оскільки $L \leq K$, тоді існує таке зображення $L = \mathfrak{A}/Ann(m)$ і $K = \mathfrak{B}/Ann(m)$ для деяких лівих ідеалів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ кільця R. Тоді $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$. Тому існує така скінченна підмножина $V \subseteq R$, що $(\mathfrak{A} : V) \subseteq \mathfrak{B}$. Тоді для всіх елементів $r \in b(L)$ і $s \in R$, отримуємо

$rs \in \mathfrak{A}$, тому $r \in (\mathfrak{A} : s)$. Отже $r \in (\mathfrak{A} : V) = \cap_{s \in V}(\mathfrak{A} : s)$. Оскільки твірний елемент міститься в $\mathfrak{B}$, маємо те, що $b(L) \subseteq K$, а отже $b(L) \subseteq b(K)$. З іншого боку, якщо R нетерове зліва цілком обмежене кільце, існує така скінченна підмножина $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq R$, що $b(L) = \cap_{i=1}^{n}(\mathfrak{A} : v_i) = (\mathfrak{A} : V)$. Отже $(\mathfrak{A} : V) = b(\mathfrak{A}) \subseteq b(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}$, і $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, тому отримуємо те, що $L \leq K$.

■

З попередніх лем отримуємо такий висновок.

Наслідок 3.6. *Нехай L та K такі ліві модулі, що $L \sim K$. Тоді $b(L) = b(K)$. Більше того, якщо R нетерове зліва цілком обмежене кільце, то виконується і зворотнє твердження.*

Базуючись на результатах, отриманих Рісом в роботі [74], розглянемо принцип побудови контраваріантного функтору для циклічного спектру. Для цього введемо правило, котре кожному модулю ставить у відповідність множину $Cspec(M)$ як циклічний спектр. Отримали контраваріантний функтор котрий діє

$$Cspec(M_1) \to Cspec(M_2)$$

$$P \mapsto f^{-1}(P).$$

Функтор позначимо як $C - Spec : Mod \to Set$.

Означення 3.13. *Якщо дано функтори $K : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ і $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, (правим) розширенням Кана S стосовно K назвемо функтор $L : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ з таким природнім перетворенням $\varepsilon : LK \to S$, що для довільного іншого функтору $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ з природнім перетворенням $\eta : FK \to S$ існує таке єдине природє перетворення $\delta : F \to L$, що $\eta = \varepsilon \circ (\delta K)$.*

Теорема 3.6. *Функтор $C - Spec : Mod^{op} \to Set$ разом з одиничним природнім перетворенням $C - Spec|_{ComMod} \to Spec$ є розширенням Кана* *для функтору* $Spec : ComMod \to Set$ *відносно вкладення* $ComMod^{op} \subseteq Mod^{op}$.

Доведення. Нехай $F : Mod \to Set$ це контраваріантний функтор з фіксованим природнім перетворенням $\eta : F|_{ComMod} \to Spec$. Розглянемо функтор $C - Spec : ComMod \to CSpec$. Потрібно показати що існує єдине природнє перетворення $\delta : F \to CSpec$, котре породжує $\eta : F|_{ComMod} \to CSpec$ на обмеження $ComMod \subseteq Mod$. Для побудови, розглянемо кільце R і модуль M над ним. Для кожного підмодуля $N \subseteq M$ над комутативним кільцем R включення $N \subseteq M$ породжує морфізм на множинах $F(M) \to F(N)$, і η породжує морфізм $\eta_N : F(N) \to CSpec(N)$; це дозволяє отримати морфізми $F(M) \to CSpec(N)$. За природністю даних морфізмів, такі відображення $F(M)$ разом формують конус над діаграмою, отриманою для підмодулів модуля над комутативним кільцем. За універсальною властивістю границі, існує єдина стрілка, котра робить діаграму комутативною для всіх підмодулів $N \subseteq M$.
Такі морфізми δ_M утворюють природнє перетворення $\delta : F \to CSec$. за побудовою, δ породжує η при розширенні до $ComMod$. Єдиність δ гарантується єдиністю стрілки, котра використовується для означенного вище δ_M.

■

3.4. Висновки до розділу 3

В даному розділі отримано такі результати:

(1) Введені різні узагальнення поняття мультиплікаційного модуля, зокрема квазі-мультиплікаційного, чисто-мультиплікаційного, слабко-мультиплікаційного модуля та досліджено їх властивості;

(2) Доведено аналоги теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів: первинного спектру, Ціглерового спектру та класично-первинного спектру;

(3) Введено поняття циклічного спектру модуля і розглянуто його властивості;

(4) Доведено функторіальність циклічного спектру модуля.

Розділ 4
Теоретико-скрутовий спектр модуля та його зв'язки з класичними спектрами

4.1. Первинні, максимальні та мінімальні скрути

В 1973 році Джон Бічі опублікував статтю [14], в котрій досліджував максимальні скрути над не обов'язково комутативними кільцями. Максимальні скрути він розглядав з токи зору часткового порядку класу періодичних модулів. Існує інший підхід. Клас $R - tors$ всіх скрутів категорії $R - Mod$ можна розглядати як гратку над кільцем R. Максимальними елементами в цій гратці є максимальні скрути. Існування їх легко доводиться за допомогою леми Цорна. Точною верхньою межею гратки є об'днання максимальних скрутів, котрі є первинними. Таким чином отримуємо максимальний теоретико-скрутовий спектр. Множину всіх максимальних скрутів категорії $R - Mod$ позначимо через $MR - Sp$.

Означення 4.1. *Кільце R, над котрим кожен первинний скрут має одну точну верхню межу називається pm-кільцем в теоретико-скрутовому сенсі.*

Таким чином кожному первинному скруту ставимо у відповідність єдиний максимальний скрут як точну верхню межу в гратці скрутів. Можемо довести теорему Де Марко Орсатті для теоретико-скрутового випадку.

Теорема 4.1. *Нехай $MR - Sp$ є ретрактом простору $R - Sp$. Тоді кільце R є pm-кільцем в теоретико-скрутовому сенсі.*

Доведення. Найперше побудуємо відображення $\mu : R - Sp \to MR - Sp$, котре діє як $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$, тобто кожному первинному скруту ставить у відповідність точну верхню межу, котра є максимальним скрутом. Нехай відображення μ є неперервною ретракцією і $\mu(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$ для первинного скруту $\mathfrak{p}$ і максимального скруту $\mathfrak{m}$. Тоді замкнена множина $\mu^{-1}(\mathfrak{m})$ міститиме $\{\bar{\mathfrak{p}}\}$, тобто довільний максимальний скрут $\mathfrak{m}'$, що міститиме $\mathfrak{p}$. Оскільки відображення μ це неперервна ретракція, то $\mathfrak{m} = \mu(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}'$. Тому $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ є єдиним максимальним скрутом, що містить $\mathfrak{p}$.

■

На базі доведеної вище теореми отримуємо такі наслідки:

Наслідок 4.1. *Кожен максимальний скрут категорії $R - Mod$ рт-кільця в теоретико-скрутовому сенсі містить єдиний мінімальний первинний скрут.*

Наслідок 4.2. *Простір $MinR - Sp$ мінімальних первинних скрутів є ретрактом простору $R - Sp$.*

4.2. Теоретико-скрутовий спектр модуля та топології на ньому

Означення 4.2. *Лівий ідеал I кільця R називають критичним тоді і лише тоді, коли для довільного лівого ідеалу H, що строго містить I, $R/H \in \mathfrak{T}_{\chi(R/I)}$. Окрім того, для комутативного кільця ідеал є критичним тоді і лише тоді, коли він є первинним. [34].*

Означення 4.3. *Первинний скрут $\tau \in R - tors$ це скрут для якого $\tau = \chi(R/I)$ для деякого критичного ідеалу I кільця R.*

Сім'я всіх первинних скрутів з множини $R - tors$ називається лівим теоретико-скрутовим спектром кільця R і позначається через $R - Sp$. Введемо поняття теоретико-скрутового спектру модуля M.

Означення 4.4. *Використавши введені вище поняття теоретико-скрутового спектру кільця R, введемо поняття $supp(M) = \{\sigma \mid \sigma(M) \neq 0\}$, де $\sigma(M)$ – τ-періодична частина модуля M. Теоретико-скрутовий спектр модуля M, який позначається $R - Sp(M)$ визначається як $R - Sp \cap supp(M)$.*

Означення 4.5. *Скрут $\sigma \in R - tors$ називається локально-первинним скрутом, якщо $\forall \chi, \tau \in R - tors$ з умови $\tau(R - tors)\chi \leq \sqrt{\theta} \leq \sigma$, де θ є скінченнопородженим в двосторонньому сенсі випливає що $\tau \leq \sigma$ або $\chi \leq \sigma$. Множина всіх локально-первинних скрутів позачається через $R - XSp$.*

Зазначимо, що $\sqrt{\theta} = \bigcap_i \pi_i$, де π_i-первинний скрут і $\theta \leq \pi_i$. θ є скінченно-породженим $\Leftrightarrow$ θ має базу зі скінченно-породжених (в двосторонньому сенсі) ідеалів.

Позначимо $U(\tau) = \{\pi \in R - Sp | \tau \nleq \pi\}$. Тоді $Z(\tau) = R - Sp \backslash U(\tau)$. Через $L(R - tors)$ позначимо гратку всіх підмножин, породжених множинами

вигляду $Z(\tau)$, де $\tau \in R-tors$, а через $PrimL(R-tors)$ множину всіх первинних фільтрів $\mathfrak{F}$ гратки $L(R-tors)$.
Нехай $XU(\tau) = \{\sigma \in R-XSp | \tau \nleq \sigma\}$, $XZ(\tau) = R-XSp \backslash XU(\tau)$. Через $XL(R-tors)$ позначимо гратку всіх підмножин, породжених $XZ(\tau)$ для всіх $\tau \in R-tors$, через $PrimXL(R-tors)$ множину всіх первинних фільтрів $\mathfrak{F}$ гратки $XL(R-tors)$. Нехай також $\mathfrak{J} = \{\tau \in R-tors | XZ(\tau) \in \mathfrak{F}\}$, де $\mathfrak{F}$-первинний фільтр на гратці $XL(R-tors)$ (див. [10]).

Твердження 4.1. *Якщо π є первинним скрутом категорії R-Mod, то він є локально-первининним.*

Доведення. Нехай $\chi, \tau \in R-tors$ – довільні скрути, що задовольняють умові $\tau\chi \leq \sqrt{\theta}$, де θ скінченнопороджений в двосторонньому сенсі. Тоді $\theta \leq \pi$, з чого випливає, що $\sqrt{\theta} \leq \pi$. Також $\tau\chi \leq \pi$, з чого випливає що $\tau \leq \pi$ (або $\chi \leq \pi$). Це, в свою чергу означає, що $\mathfrak{T}_\tau \subseteq \mathfrak{T}_\pi$, де $\mathfrak{T}_\tau$ і $\mathfrak{T}_\pi$ класи періодичних модулів відповідних скрутів. З іншого боку, якщо $\chi \leq \pi$, то $\mathfrak{T}_\chi \subseteq \mathfrak{T}_\pi$. Це означає, що π є локально-первинним скрутом. Твердження доведено.

■

З цього можна зробити висновок, що клас локально-первинних скрутів є ширшим, ніж множина первинних скрутів.

Твердження 4.2. *Якщо $\tau_1, \tau_2 \in XSp-R$, то $\mathfrak{c}(\tau_1\tau_2) = \mathfrak{c}(\tau_1) \cup \mathfrak{c}(\tau_2)$.*

Доведення. Те, що $\mathfrak{c}'(\tau_1) \cup \mathfrak{c}(\tau_2) \subseteq \mathfrak{c}'(\tau_1\tau_2)$ випливає з ([3], Lemma 2.1). Зворотнє включення випливає з означенням локально-первинного скруту.

■

Лема 4.1. *Відображення $X\Phi : R-XSp \to PrimXL(R-tors)$, визначене за правилом $\sigma \mapsto \{S \in XL(R-tors) | \sigma \in S\}$ є бієктивним.*

Доведення. Перевіримо, що $X\Phi$ є коректно визначеним та ін'єктивним відображенням. Кожному локально-первинному скруту π ставимо у відповідність первинний фільтр $\mathfrak{F}$. Для того щоб показати що відображення є сюр'єктивним, візьмемо первинний фільтр $\mathfrak{F} \in PrimXL(R - tors)$ і означимо множину скрутів $\mathfrak{J} := \{\chi \in R - tors | XZ(\chi) \in \mathfrak{F}\}$. Тоді $\mathfrak{J}$ є локально-первинним скрутом. Справді, якщо $\chi, \tau \in \mathfrak{J}$, то $XZ(\chi - \tau) \supseteq XZ(\chi) \cap XZ(\tau)$. Оскільки $\mathfrak{F}$ є фільтром, то $\chi - \tau \in \mathfrak{J}$. Більше того, якщо $\alpha, \beta \in R - tors$, то $XZ(\alpha\chi\beta) \supseteq XZ(\chi)$, отже $\alpha\chi\beta \in \mathfrak{J}$. Тепер з того, що $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ маємо $1 \notin \mathfrak{F}$. Отже $\mathfrak{J}$ є власним скрутом. Припустимо, що $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}$ і $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathfrak{J}$. Оскільки $\mathfrak{F}$ є первинним фільтром, то $\bigcup_j XZ(b_j) \notin \mathfrak{F}$. З умови $\bigcap_i XZ(a_i) \in \mathfrak{F}$, враховуючи, що $\mathfrak{F}$ є власним фільтром, отримаємо $(\bigcap_i XZ(a_i)) \backslash (\bigcup_j XZ(b_j) \notin \mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Отже існує локально первинний скрут з фільтром Габріеля, який містить елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}$, але не містить $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathfrak{J}$. За означеням існує такий первинний скрут π, що $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}_{pi}$ і $b_1, b_2, \ldots, b_m \notin \mathfrak{J}_{pi}$. Тому $\mathfrak{J} \in R - XSp$ а звідси випливає, що $\mathfrak{F} = X\Phi(\mathfrak{J})$.

■

Твердження 4.3. *Така діаграма є комутативною:*

$$\begin{tikzcd}
R - XSp \arrow[r, "\cong", "X\Phi"'] & PrimXL(R - tors) \\
R - Sp \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"'] & PrimL(R - tors) \arrow[u, "\cong"', "Prim\sigma"]
\end{tikzcd}$$

Доведення. Перший рядок діаграми задається ізоморфізмом, як показано в статті [54]. Про нижній рядок вже говорилося вище. Вертикальні гомоморфізми задаються безпосередньо. Перевірка комутативності діаграми тепер не складає жодних труднощів.

■

Твердження 4.4 ([54], Proposition 1)**.** *Нехай X топологічний простір* *і $Y \subseteq X$ підмножина, котра є щільною в конструктивній топології X. Припустимо, що Y, наділена топологією, котра індукується на X, є спектральним простором. Якщо $x \in X$, то замикання $\{\overline{x}\}$ для $\{x\}$ в перетині $X \cap Y$ і $\{\overline{x}\} \cap Y$ має загальну точку в Y. Спектральне відображення $\Phi : X \to Y$, породжене гратковим гомоморфізмом $\overline{\mathcal{K}}(Y) \to \overline{\mathcal{K}}(X)$, $C \mapsto C_X$, відображає точку $x \in X$ в загальну точку $\{\overline{x}\} \cap Y$. Зокрема, Φ є ретрактом вкладення $Y \hookrightarrow X$ (котре не є спектральним, якщо $Y \neq X$).*

Теорема 4.2. *Якщо $R - Sp$ спектральний простір, то для довільного локально-первинного скруту σ з $R - tors$, скрут $\sqrt{\sigma}$ є первинним і відображення $\Psi : R - XSp \to R - Sp$ котре діє за правилом $\sigma \mapsto \sqrt{\sigma}$, є спектральним ретрактом вкладення $R - Sp \hookrightarrow R - XSp$.*

Доведення. За попередньою теоремою $Y := R - Sp$ є щільним в конструктивній топології на $X := R - XSp$ і топологія на $R - Sp$ індукується з $R - XSp$. Тепер досить застосувати попереднє твердження та інформацію з роботи [30] до відповідних топологічних просторів.

■

Теорема 4.3. *Якщо τ - стабільно-редукований скрут і M - ненульовий лівий R-модуль, що має мінімальну ін'єктивну резольвенту $(0) \to M \to E_0 \to E_1 \to \ldots$, то модуль M є τ-періодичним і редукованим тоді і лише тоді, коли E_i є τ-періодичним і редукованим для всіх $i \geq 0$.*

Доведення. Якщо модуль M редукований і τ-періодичний, то за редукованою стабільністю таким буде і $E_0 = E(M)$, де символ E позначає перехід до ін'єктивної оболонки. Оскільки E_i є τ-періодичним, а $M^{(i+1)}$ є гомоморфним образом E_i, що теж є τ-періодичним і редукованим, то за редукованою стабільністю маємо $E_{i+1} = E(M^{i+1})$. Навпаки, якщо кожен E_i буде τ-періодичним і редукованим модулем, то очевидно, що E_0 також є таким, а отже, і модуль M, як підмодуль в E_0, також є τ-періодичним і редукованим.

■

Аналог поданого нижче твердження довів Голан для комутативних кілець [34]. Щоб довести його в некомутативній дуо-ситуації накладемо на основне кільце додаткову умову:

(*) В кільці R кожен незвідний критичний лівий ідеал є первинним ідеалом.

Теорема 4.4. *Нехай R інваріантне зліва кільце, в якому кожен незвідний критичний лівий ідеал є первинним. Тоді простір $R-sp$ з топологією скінченного порядку гомеоморфний простору $spec(R)$ з топологією Зариського.*

Доведення. Означимо функцію $h : spec(R) \to R - sp$ за правилом $P \mapsto \chi(R/P)$. За вказаною вище умовою, кожен критичний ідеал є первинним ідеалом в R, тому h очевидно є сюр'єктивним відображенням. Більше того, $T_{\chi(R/P)}(M) = \{m \in M | r^n m = 0$ для деякого $r \in R \backslash P$ і деякого цілого $n\}$. Це показує, що h бієкція. Якщо I ідеал кільця R, і $V(I) = \{P \in Spec(R) | I \subseteq P\}$ підмножина в $spec(R)$, замкнена в топології Зариського, то $h(V(I)) = \{\chi(R/P) \in R - Sp | \chi(R/P) \leq \chi(R/I)\}$ є замкнена в топології скінченного порядку. Навпаки, прообрази за відображення h підмножин з $R - Sp$ замкнені в топології скінченного порядку, тому, очевидно, замкнені і в $spec(R)$. Отже h - гомеоморфізм.

■

4.3. Зв'язки між теоретико-скрутовим, циклічним та Розенберговим спектрами

Означення 4.6. *Два підмодулі N і L модуля M називаються M-зв'язаними, якщо $M/N \cong M/L$. Це відношення, легко побачити, є відношенням еквівалентності. Очевидно також, що ліві ідеали A і B є зв'язаними тоді і лише тоді коли існують такі елементи λ і μ кільця* R*, що* $(A : \lambda)$=$(B : \mu)$.

(***) Тепер можна ввести відношення напередпорядку на множині I_lM вважаючи, що $N \leq_M L$ тоді і лише тоді, коли існують такі $N_1, ..., N_k \in I_lM$, що:

1. для кожного $i = 1, ..., k$ модуль N_i є M-зв'язним з N;
2. $\bigcap_{i=1}^{k} N_i \subseteq L$.

Коректність означення доводиться наступною лемою:

Лема 4.2. *Введене відношення (***) є рефлексивним і транзитивним.*

Доведення. Рефлексивність є очевидною, оскільки коли взяти за систему підмодулів $N_1, ..., N_k \in I_lM$ систему з одного підмодуля N, перевірка потрібного не складає жодних труднощів. Для доведення транзитивності, припустимо що $N \leq_M L$ і $L \leq_M K$. Тоді $N = \mathfrak{a}M$, $L = \mathfrak{b}M$ і $K = \mathfrak{d}M$, де $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ ідеали кільця R. Зрозуміло, що $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{d}$, отже $N \leq K$, що й потрібно було довести.

■

Поняття спектру Розенберга модуля M, базується на відношенні напередпорядку, визначеному на множині I_lM. Якщо $N, L \in I_l(M)$, то вважаємо що $N \leq L$, коли $(N : w) \subseteq L$ для деякого $w \in P(R)$.

Означення 4.7. *Спектр Розенберга $Spec_l(M)$ модуля* M *це множина усіх таких лівих підмодулів P, що: $(P : x) \leq P$ для кожного $x \in R \setminus P$.*

На множині $Spec_l(M)$ задається топологія: для довільного підмодуля $N \in I_l(M)$, $U_l(N) = \{\mathcal{P} \in Spec_l(M) | N \nleq \mathcal{P}\}$. Через $\zeta(M)$ позначимо сім'ю множин вигляду $U = U_l(N) \subseteq Spec_l(M)$. Тоді $\zeta(M)$ містить порожню множину і весь простір $Spec_l(M)$. Окрім цього, $\zeta(M)$ є замкненою стосовно довільних об'єднань та скінченних перетинів. Тому $Spec_l(M)$ є топологічним простором з топологією типу Зариського.

Спектр Розенберга мультиплікаційного модуля завжди буде непорожнім, бо підмодуль вигляду PM модуля M, де P - первинний ідеал кільця R, є первинним підмодулем. Окрім того максимальні підмодулі теж належатимуть спектру Розенберга. Тому, якщо модуль M має максимальні підмодулі, його спектр Розенберга є непорожнім. Зокрема, кожен V-модуль має непорожній спектр Розенберга.

Лема 4.3. *(1) $Spec'_l(N) \subseteq Spec_l(M)$;*

(2) Лівий максимальний підмодуль N модуля M є цілком первинним тоді і лише тоді N є двостороннім підмодулем;

(3) Якщо кожен підмодуль N модуля M є двостороннім, то $Spec'_l(M) = Spec_l(M)$.

Доведення.

(1) Зауважимо що підмодуль N' буде цілком первинним тоді і лише тоді коли $(N' : x) \leq N'$ для довільного $x \in R \backslash N'$, бо кожен цілком первинний підмодуль є первинним підмодулем. Тобто $Spec'_l(N) \subseteq Spec_l(M)$.

(2) Якщо N є двостороннім підмодулем то $N \leq (N : x)$ для довільного елементу $x \in M$. Більше того, якщо N є максимальним підмодулем, то $(N : x) = N$ для довільного $x \in M \backslash N$, тобто N належить $Spec'_l(M)$. Навпаки, припустимо що лівий підмодуль N' є цілком первинним. Це означає що $(N' : x) \leq N$ для всіх $x \in M \backslash N'$. Оскільки

$(N' : x)$ є максимальним підмодулем для довільного $x \in M$, з вкладення $(N' : x) \leq N$ випливає що $(N' : x)$ співпадає з N'. ТомуN' є двостороннім підмодулем.

(3) Для двосторонніх підмодулів напередпорядок співпадає з включенням.

■

Твердження 4.5. *Нехай $\{\mathfrak{p}_i\}$ - ланцюг первинних (в сенсі Розенберга) підмодулів модуля M. Тоді $\bigcap \mathfrak{p}_i$ і $\bigcup \mathfrak{p}_i$ є первинними (в сенсі Розенберга) підмодулями.*

Лема 4.4. *Нехай $\mathfrak{p}$ і $\mathfrak{q}$ різні ліві первинні (в сенсі Розенберга) підмодулі модуля M. Тоді існують різні первинні (в сенсі Розенберга) підмодулі $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$, для яких $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}_1 \leq \mathfrak{q}_1 \leq \mathfrak{q}$ і не існує первинного (в сенсі Розенберга) підмодуля, що стоїть між $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$.*

Доведення. Вкладемо (за лемою Цорна) максимальний ланцюг $\{\mathfrak{p}_i\}$ первинних (в сенсі Розенберга) підмодулів M між $\mathfrak{p}$ і $\mathfrak{q}$. Візьмемо елемент x, що належить $\mathfrak{q}$ і не належить $\mathfrak{p}$. Означимо $\mathfrak{q}_1$ як перетин всіх тих $\mathfrak{p}_i$-х, що містять x, а $\mathfrak{p}_1$ як об'єднання всіх $\mathfrak{p}_i$-х, що не містять x. За попередньою теоремою $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$ є первинними (в сенсі Розенберга) підмодулями модуля M. Жоден з $\mathfrak{p}_i$-х не може бути строго між $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$. Якщо $x \in \mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{q}_1 \leq \mathfrak{p}_i$, і якщо $x \notin \mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{p}_i \leq \mathfrak{p}_1$. За максимальністю $\{\mathfrak{p}_i\}$ жоден первинний (в сенсі Розенберга) підмодуль не може лежати точно між $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$.

■

Лема 4.5. *Якщо σ є скрутом категорії $R - Mod$ і $\mathfrak{P}$ є лівою точкою спектра Розенберга циклічного модуля M, тоді модуль $M/\mathfrak{P}$ є або σ-періодичим модулем або σ-напівпростим модулем.*

Доведення. Припустимо що $M/\mathfrak{P} \notin \mathfrak{F}_\sigma$. Якщо $\mathfrak{P}$ є лівою точкою спектра Розенберга, то існує такий ідеал $\mathfrak{p}$ кільця R, що $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}/Ann(m)$. Виберемо елемент $0 = \bar{x} \in \sigma(R/\mathfrak{p})$. Отже, існує така скінченна підмножина V кільця R, що $(\mathfrak{p} : Vx) \subseteq \mathfrak{p}$. Очевидно, $V\bar{x} \subseteq \sigma(R/\mathfrak{p})$, а отже, для кожного елементу $v \in V$ існує такий лівий ідеал $L_v \in \mathcal{L}(\sigma)$, що $L_v vx \subseteq \mathfrak{p}$. Нехай $L = \cap_{v \in L} L_v$, тоді $L \in \mathcal{L}(\sigma)$ і $LVx \subseteq \mathfrak{p}$. Отже, $L \subseteq (\mathfrak{p} : Vx) \subseteq \mathfrak{p}$ і $\mathfrak{p} \in \mathcal{L}(\sigma)$, а тому $M/\mathfrak{P}$ є σ-періодичним модулем.

■

Твердження 4.6. *Якщо M є цілком-обмеженим лівим нетеровим модулем і $\mathfrak{P} \in Cspec(M)$, то скрут $\tau_{\mathfrak{P}} = \chi(M/\mathfrak{P})$, копороджений модулем $M/\mathfrak{P}$, є первинним.*

Доведення. Очевидно, $\mathfrak{P} \notin \mathcal{L}(\tau_{\mathfrak{P}})$, тому $M/\mathfrak{P}$ є $\tau_{\mathfrak{P}}$-напівпростим модулем. Тому, оскільки $\chi(M/\mathfrak{P})$ є найбільшим скрутом, для якого $M/\mathfrak{P}$ є напівпростим модулем. Отже, $\chi(M/\mathfrak{P}) \leq \tau_{\mathfrak{P}}$. Навпаки, припустимо що $\mathcal{L}(\chi(M/\mathfrak{P})) \nsubseteq \mathcal{L}(\tau_{\mathfrak{P}})$. Покладемо $L \in \mathcal{L}(\chi(M/\mathfrak{P})) - \mathcal{L}(\tau_{\mathfrak{P}})$, тоді $L \leq \mathfrak{P}$. Тому, за означенням, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{p}$ для деяких ідеалів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{p}$ кільця R. Тому існує така скінченна підмножина $U \subseteq R$, що $\cap_{u \in U}(\mathfrak{A} : u) = (\mathfrak{A} : U) \subseteq \mathfrak{p}$. Отже, $\mathfrak{p} \in \mathcal{L}(\chi(M/\mathfrak{P}))$, що заперечує означення $\chi(M/\mathfrak{P})$. ■

Теорема 4.5. *Відображення $\Phi : Cspec(M) \to R - Sp(M)$, де $\Phi(\mathfrak{P}) = \chi(M/\mathfrak{P})$, є неперервним та сюр'єктивним.*

Доведення. Неперервність даного відображення очевидно випливає з попереднього твердження. Сюр'єктивність відображення випливає з того що фактор-модуль $M/\mathfrak{P}$ є $\tau_{\mathfrak{P}}$-напівпростим модулем.

■

Лема 4.6. *Для довільного підмодуля $P \in Spec_l(M)$ спектру Розенберга мультиплікаційного модуля, двосторонній підмодуль $(P : M)$ є первинним.*

Доведення. Нехай N, K такі двосторонні підмодулі модуля M, що $K \nleq P$, але $NK \nleq P$. Оскільки підмодуль K є двостороннім, то $K \leq \langle P \rangle$, де $\langle P \rangle = \{Q \in I_l(M) \mid Q \leq P\}$. Тому за означенням двостороннього підмодуля $(NK : \omega) \in \langle P \rangle$, для $\omega \in P(M)$. З цього випливає що $N \leq P$. Оскільки підмодуль N є двостороннім і $(P : M)$ є максимальним з-поміж двосторонніх підмодулів, то з вкладення $N \leq P$ випливає той факт що $N \leq (P : M)$.

■

За попередньою лемою можна побудувати відображення, котре кожному первинному в сенсі Розенберга підмодулю ставить у відповідність двосторонній підмодуль $\varphi : P \to (P : M)$.

Теорема 4.6. *Відображення $\varphi : P \to (P : M)$ є ретракцією, тобто $Spec(M)$ є ретрактом простору $Spec_l(M)$.*

Доведення. Маємо відображення з лівого спектру Розенбурга в класичний спектр: $\varphi : Spec_l(M) \to Spec(M)$. Очевидно, що класичний спектр є підпростором спектру Розенберга, адже всі первинні підмодулі є точками лівого спектру, а класичний спектр це множина всіх первинних підмодулів модуля M. За означенням ретракції, існують потрібні гомоморфізми $1_{Spec(M)} : Spec(M) \to Spec(M)$, і $\varphi \mid_{Spec(M)} = 1_{Spec(M)}$. Тому відображення φ є ретракцією, а $Spec(M)$ є ретрактом $Spec_l(M)$.

■

4.4. Висновки до розділу 4

В даному розділі отримано такі результати:

(1) Введено поняття максимального скруту як максимального елементу в гратці всіх скрутів над кільцем та максимального теоретико-скрутового спектру;

(2) Введено означення *pm*-кільця в теоретико-скрутовому сенсі та доведено аналоги теореми Де Марко Орсатті для максимального теоретико-скрутового спектру;

(3) Досліджено властивості первинних і локально-первинних скрутів та показано їх взаємозв'язки у вигляді діаграми;

(4) Доведено гомеоморфність теоретико-скрутового спектру кільця з топологією скінченного порядку та первинного спектру кільця з топологією Зариського;

(5) Показано взаємозв'язки між теоретико-скрутовим, циклічним та Розенберговим спектрами модулів.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню різноманітних спектрів модулів над асоціативними кільцями: первинного спектру, цілком-первинного спектру, лівого спектру, циклічного спектру, максимального та мінімального спектрів, теоретико-скрутового спектрів кільця та модуля, а також спектру Розенберга і спектру Ціглера та встановленню взаємозв'язків між цими спектрами. Окрім того досліджуються топологічні властивості спектрів та взаємозв'язки між цими спектрами.

Автором, зокрема, подано означення двостороннього підмодуля та досліджено його властивості. Це дозволило отримати аналог поняття двостороннього ідеалу кільця і на його базі будувати подальші доведення теорем.

В процесі дослідження було введено поняття класично-первинного та цілком первинного модульного спектру для некомутативного кільця, розглянуто їх алгебраїчні та топологічні властивості. Також було введено поняття лівого спектру (спектру Розенберга) для модуля, досліджено його властивості та взаємозв'язки з іншими модульними спектрами. Дані спектри широко використовуються в дослідженнях і отримані результати дозволяють сформулювати та довести аналоги найважливіших фактів, відомих з класичної алгебраїчної геометрії.

Друга задача, яка розглядається у роботі, стосувалася геометричних властивостей різних спектрів. Було досліджено ці властивості та побудовано відображення між деякими типами спектрів. Також було доведено узагальнення теореми Де Марко Орсатті для різних типів спектрів мультиплікаційних модулів.

В дисертаційній роботі було введено поняття циклічного спектру модуля та розглянуто його властивості, досліджено теоретико-скрутовий спектр модуля та його топологічні властивості та показано зв'язки між цими спектрами.

На основі отриманих результатів було розглянуто взаємозв'язки між різними типами спектрів модулів та показано ці взаємозв'язки у вигляді діаграми.

Розроблені методи у цій дисертаційній роботі можна використати при подальшому дослідженні спектрів модулів над асоціативними кільцями та при дослідженнях взаємозв'язків між цими спектрами. Результати даних досліджень можуть бути використані при читанні лекцій або спецкурсів на механіко-математичних і фізико-математичних факультетах навчальних закладів України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Abuhlail J. *A dual Zariski Topology for module* // Topology and its applications. –2011.– 158. – P. 457–467.

[2] Andrunakievich V. A. *Prime modules and Baer radical* // Siberian Mathematical Journal – 1961. – 2, № 6. – P. 801-806. (in Russian)

[3] Andrunakievich V. A., Riabuhin Yu. M. *Special modules and special radicals* // DAN SSSR – 1962. – 147, №6 – P. 1274-1277. (in Russian)

[4] Amitsur S. A. *A generalization of Hilbert's Nullstellensatz* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – 8. – P. 649-656.

[5] Amitsur S. A., Procesi C. *Jacobson rings and Hilbert algebras with polinomial identities* // Annali di Mat (IV). – 1966. – LXXI. – P. 61-72.

[6] ANJANEYULU A. *Structure and ideal theory of duo semigroups* // Semigroup forum. –1981.– 22. – P. 257–276.

[7] Arabi-Kakavand M., Behboodi M. *Modules Whose Classical Prime Submodules Are Intersections of Maximal Submodules* // Glasgow Math. Journal. – 2006. – 48. – P. 343-346.

[8] Atani S. E. *Indecomposable Weak Multiplication Modules over Dedekind Domain* // Demonstratio Mathematica. – 2008 – XLI, №1.

[9] Azizi A. *Prime submodules of artinian modules* // Journal of Algebra. –2007.– 307. – P. 454–460.

[10] Azizi A. *Radical formula and prime submodules* // Journal of Algebra. –2007.– 307. – P. 454–460.

[11] Azizi A. *Weak Multiplication Modules* // Taiwanese Journal, received June 29, 2000.

[12] Barnard A. *Multiplication Modules* // Journal of Algebra. – 1981. – – 71, №1. – P. 174-178.

[13] Бурбакi В., *Коммутативная алгебра* // М.: Мир, 1971.

[14] Beachy J.A. *On maximal torsion radicals* // Can. J. Math. – 1973. – 25, №2 – P. 712-726.

[15] Beachy J.A. *Some aspects of noncommutative localization. In book: Noncommutative Ring Theory* // Spriger-Verlag, Berlin, LNM. – 1975. – 545. – P. 2-31.

[16] Behboodi M. R. *Classical prime submodules* // Ph.D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran – 2004.

[17] Behboodi M. R., Haddadi M. R. *Classical Zarisky topology of modules and spectral spaces I* // International Electronic Journal of Algebra. – 2008. – 4. – P. 104-130.

[18] Behboodi M., Koohy H. *Weakly prime modules* // Vietnam J. Math. – 2004. – 32, №2 – P. 185-195.

[19] Behboodi M., Noori M. J. *Zariski-like topology on the classical prime spectrum of a module* // Bulletian of the Iranian Mathematical society – 2009. – 35, №1 – P. 253-269.

[20] Behboodi M. R., Shojaee S. *On divins of classical prime submodules and dimension theory of modules* // Bulletian of the Iranian Mathematical society – 2010. – 36, №1. – P. 149-166.

[21] Belluce L. P. *Spectral closure for non-commutative rings* // Communications in Algebra – 1997. – 25, №5 – P. 1513-1536;

[22] Bell H.E. *Near-rings in which each element is a power of inself* // Bull. Aust. Math. Soc. – 1970.– 2. – P. 363 - 368.

[23] Bican L., Jampor P., Kepka T., Nemec P. *Prime and coprime modules* // Fund. Math – 1980 – 57. – P. 33-45.

[24] Chandran V.R. *On two analogues of Cohen's theorem* //Indian J. Pure Appl. Math. 8 (1977), 54-59

[25] Curtis C. W. *Noncommutative extensions of Hilbert rings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – 4. – P. 945-955.

[26] Dauns J. *Prime modules* // Reine Angew. Math. – 1978. – 298. – P. 156-181.

[27] De Marco G., Orsatti A. *Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – 30. – P. 459-466.

[28] Handelman D., Lawrence J. *Strongly prime rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – 211. – P. 209-223.

[29] Heinzer W. *Polinomial rings over a Hilbert ring* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – 211. – P. 209-223.

[30] Hochster M. *Prime ideal structure in commutative rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – 137. –P. 43-60

[31] Gabriel, P., *Des Categories Abeliennes*, // Bull. Soc. Math. France – 1962. – 90 – P. 323-448.

[32] Gaur A., AlokKuwar Maloo *Minimal prime submodules*, // International Journal of Algebra. – 2008. – 2, №120. – P. 953-956.

[33] Gilmer R. *On polynomial rings over a Hilbert ring* // Michigan Math. J. – 1971. – 18, №3. – P. 205-212.

[34] Golan J. S. *Topologies on the Torsion-Theoretic Spectrum of a Noncommutatie Ring* // Pacific Journal of Mathematics. – 1974. – 51, №2. – P. 439-450.

[35] Golan J. S. *On topology on $R - sp$* // Pacific Journal of Mathematics. – 1974. – 51, №2. – P. 439-450.

[36] Golan J. S. *Torsion theories* // Longman Scientific & Technical, Harlow – 1986. – P. 651.

[37] Goldman O. *Rings and modules of quotients* // Journal of Algebra. – 1969. – 13. – P. 10-47.

[38] Goldman O. *Hilbert rings and the Hilbert Nullstensatz* // Math. Zeit. – 1969. – 54. – P. 136-140.

[39] Groenewald N. J., SSevviiri D. *Completely prime submodules* // International Electronic Journal of Algebra. – 2013. – 13, №1. – P. 1-14.

[40] Farzalipour F. and Ghiasvand P. *Quasi Multiplication Modules* // Thai Journal of Mathematics, – 2009 – 7, №2, P. 361–366.

[41] Feller E.H., *Properties of primary noncommutative rings* // Trans. Amer. Math. Soc. 89, 1958, 79-91.

[42] Feller E. H., Swokowski E. W. *Prime modules* // Can. J. Math. – 1965. – 17 – P. 1041-1052.

[43] Faith C. *Polinomial rings over Jacobson-Hilbert rings* // Publications Mathematiques. – 1989. – 33. – P. 85-97.

[44] Jara P., Verhaeghe P., Verschoren A. *On the left spectrum of a ring* // Comm. Algebra, - 1994 – 22, №8. – P. 2983-3002.

[45] Johnson R. E. *Representations of prime rings* // Trans. Amer. Math. Soc – 1953. – 74. №2. – P. 351-357.

[46] Kaplansky Irving *Commutative rings* // Univ of Chicago Pr (Tx). – 1974 – 187 p.

[47] Karakas H. I. *On Noetherian modules* // Journal of Pure and Applied Science – 1972. – P. 165-168.

[48] Kaučikas A., Wisbauer D. *Noncomutative Hilbert rings* // Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universitat (preprint).

[49] Kaučikas A. *On the left strongly prime modules and ideals* // Liet.Mat. Rink, Special Issue – 2001. – 41. – P. 84–87.

[50] Kaučikas A. *On the left strongly prime modules and their radicals* // Lietuvos matematikos rinkinys – 2010. –51. – P. 31–34.

[51] Kaučikas A. *On the left strongly prime modules and ideals* // Liet.Mat. Rink, Special Issue – 2001. – 41. – P. 84–87.

[52] Kash F. *Moduln und Ringe* // Stuttgart, 1977; Переклад з німецької під редакцією В. А. Андрунакієвича, Издательство "Мир 1981, 369с.

[53] Kaučikas A., Wisbauer R. *On strongly prime rings and ideals* // Comm. Algebra – 2000. – 28., №11. – P. 5461–5473.

[54] Klept I., Tressl M. *The Prime Spectrum and Extended Prime Spectrum of Noncommutative Rings* // Algebr Represent Theor. – 2007. – 10.–P. 257-270.

[55] Anne Bramble Searle Koehler *Quasi-projective and quasi-injective modules* // Pacific Journal of Mathematics. – 1971. – 36, №3. – P. 713-720.

[56] Комарницький М., Зеліско Г. *Про класичні дуо полігони та деякі їхні застосування* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2015. – 54.–P. 1-7.

[57] Krull W. *Jacobsonsche Rings, Hilbertscher Nullstellengate Dimensibistheorie* // Math. Zeit. – 1951. – 54.–P. 354-387.

[58] Lam T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings* // Graduate Texts in Mathematics, – 2001, 131.

[59] Lambek J., Michler G. *The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring* // Journal of Algebra. – 1974. – 25. – P. 364-389.

[60] Lazard D. *Disconnexities des spectres d'anneaux et de preshemas.* // Bull de la S. M. F. – 1967. – 95. – P. 95-108.

[61] Letzter E.S. *On continuous and adjoint morphisms between non-commutative prime spectra* // Proc. Edinbourgh Math. Soc., – 2006. – 49. – P. 367-381.

[62] Lu C.P. *Spectra of modules* // Comm. Algebra – 1995. – 23. – P. 3741-3752.

[63] Lu C.P. *Prime Submodules of Modules* // Comment. Math. – 1984. – 33. – P. 61-69.

[64] Majid M. Ali, David J. Smith *Pure Submodules of Multiplication Modules* // Contribution to Algebra and Geometry, – 2004. – 4, №1, P. 61-74;

[65] McCasland R., Moore M., Smith P. *On the spectrum of the module over a commutative ring* // Comm. Algebra – 1997. – 25, №1. – P. 79–103.

[66] McCoy N. H. *Rings and ideals* // Carus Mathematical Monographs, Math. Assoc. Amer., Menasha, WI: George Banta – 1962. – №8.

[67] Nishitani I. *A generalized principal ideal theorem for modules over a commutative rings* // Comm. Algebra – 1999-2005. – 26.

[68] Page S. *Properties of quotient rings* // Can. J. Math. – 1972 – 24, №6 – P. 1122-1128.

[69] Pham-Pierrejean M.L. *Anneaux absolument plat, don't le spectre a un nombre fini de points d'accumulation* // C. R. Acad. Sc. Paris, - Ser. A., – 1977 – 284, P. 927-929.

[70] Popescu N. *Abelian cathegories with applications to rings and modules* // Academic press, London - New York, – 1973. – P. 357.

[71] Popescu N. *Le spectre à gauche d'un anneau* // Ann. Sc. Normal. Sup. di Pisa. – 1967. – 21, №1. – P. 281-290.

[72] Prest M. *Topological and Geometric aspects of The Ziegler Spectrum* // Department of Mathematics Univercity of Manchester, UK.

[73] Procesi C. *Noncommutative Jacobson rings* // Can. J. Math. – 1972 – 24, №6 – P. 1122-1128.

[74] Reyes M.L. *Obstructing extensions of the functors Spec to noncommutative rings* // Israel J. Math. – 2012. – 192. – P. 667-698.

[75] Rosenberg A. *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras* // Kluwer Academic Publishers – 1995. – P. 316.

[76] Rosenberg A.L. *The left spectrum, the Levitski radical, and noncommutative schemes* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1990. – 87. – P. 8583-8586.

[77] Roueentan M., Ershad M. *Strongly duo and duo right S-acts* // Italian Journal of pure and applied mathematics Acad. Sci. USA. – 2014. – 32. – P. 143-154.

[78] Rush D.E. *Strongly prime submodules, G-submodules and Jacobson modules* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 2012. – 87. – P. 8583-8586.

[79] Samei K. *Reduced multiplication modules* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 2011. – 87. – P. 8583-8586.

[80] Shigenaga K. *On some prime modules* // Res. Rep. of U-be. Tech. Coll. – 1982. – №28 – P. 1-8.

[81] Ozcan A.C., Harmanci A. and Smith P.F. *Duo modules* // Glasgow Math. J. – 2006. – 48. – P. 533-545.

[82] Shu-Hao Sun *Noncommutative rings in Which Every Prime Ideal Is Contained in a Unique Maximal Ideal* // Journal of Pure and Applied Algebra, – 1991 – 76, P. 179-192.

[83] Shu-Hao Sun *Rings in Which Every Prime Ideal Is Contained in a Unique Maximal Right Ideal* // Journal of Pure and Applied Algebra, – 1992 – 78, P. 183-194.

[84] Stenström Bo *Lectures on rings and modules* // Matematiska institutionen – November 2001 – 47 p.

[85] Van Oystaeyen F., Verschoren A. *Noncommutative algebraic geometry. An introduction* // Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. – 1981. – 887. – P. 404.

[86] Tekir U. *On Multiplication Modules* // International Mathematical Forum, – 2007 – 2, №29. P. 1415 - 1420;

[87] Thierrin G. *On duo rings.* // Can. Math. Bull. vol. 3, no. 2, May 1960.

[88] Tuganbaev A. A. *Multiplication Modules* // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – 123, №2. – P. 3839-3905.

[89] Zang G., Tong W., Fanggui W. *Spectra of maximal 1-sided ideals and primitive ideals* // Commun. Algebra – 2006. – 34. – P. 2879-2898.

[90] Zang G., Wang F., Xu W. *Gelfand factor rings and weak Zariski topologies* // Commun. Algebra – 2007. – 35. – P. 2628-2645.

[91] Zhang Guoyin, Tong Wenting, Wang Fanggui *Multiplication Modules, in Which Every Prime Submodule Is Contained in a Unique Maximal*

Submodule // Communications in algebra. – 2004 – 32, Issue 5, P. 1945-1959.

[92] Zhang Guoyin, Tong Wenting, Wang Fanggui *Spectrum of noncomutative ring* // Communications in algebra, – 2006 – 34, Issue 8, P. 2795-2810.

[93] Wisbauer R. *On prime modules and rings* // Commun. Algebra – 1983. – 11. – P. 2249-2265.

[94] Xue W. Artinian duo rings i self-duality. //Proceedings of the american mathematical society – 1989– 105, №2, P. 309 – 313.

[95] Комарницький М. Я., Малоїд М. О. *Теорема Де Марко і Орсатті для спектра Ціглера мультиплікаційного модуля* // Прикл. проблеми мех. і мат. - 2010. - Вип. 8. - С. 23-27.

[96] Малоїд-Глєбова М. О. *Про теоретико-скрутовий спектр інваріантного зліва кільця та слабко-мультиплікаційні і чисто-мультиплікаційні модулі* // Прикл. проблеми мех. і мат. - 2011. - Вип. 9. - С. 87-94.

[97] Малоїд-Глєбова М. О. *Деякі взаємозв'язки між різними типами спектрів мультиплікаційних модулів та спектральними просторами* // Математичні студії – 2014. – 41, № 1. – P. 3-17.

[98] Малоїд-Глєбова М. О. *Про класично-первинний спектр цілком-Гільбертових мультиплікаційних модулів* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат – 2014. – 79. – P. 119-126.

[99] Малоїд-Глєбова М. О. *Класично-Гільбертові мультиплікаційні модулі та їх первинний спектр* // Науковий вісник ужгородського університету – 2014. – 26, № 2. – P. 91-97.

[100] Maloid-Glebova M. O. *Cyclic left and torsion-theoretic spectrums of module and their relations* // Algebra and Discrete Mathematics. - 2015. - V. 20, №2. - P. 286-296.

[101] M. Komarnytskyi, M. Maloyid *Multiplication modules, in which every prime submodule is contained in unique maximal submodule* // 7-th International Algebraic Conference in Ukraine, August 18-23, 2009, Book of abstracts, p. 75-76;

[102] Малоїд М. О. *Про кільця, теоретико-скрутовий та первинний спектри яких гомеоморфні* // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях 17-22 квітня 2011, Харків, стор. 130;

[103] Малоїд М. О. *Про мультиплікаційні модулі з дискретним спектром* // Конференція молодих учених зі сучасних проблем механіки та математики ім. академіка Я. С. Підстригача, 24-27 травня 2011, Львів, стор. 263;

[104] M. O. Maloid-Glebova *Some properties of quasi multiplication modules over noncommutative rings* // 8-th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of profesor Vitaliy Usenko, July 05-12, 2011, Lugansk, p. 212;

[105] Малоїд-Глєбова М. О. *Ліві спектри Розенберга та Попеску кілець Безу та деякі зв'язки між ними* // Всеукраїнська наукова конференція "Застосування математичних методів в науці і техніці 25-26 листопада 2011, Луцьк, стор. 38-39;

[106] M. Ja. Komarnytskyi, M. O. Maloid-Glebova *About extended torsion-theoretic spectrum of semiprime ring* // 14 міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ, стор. 17;

[107] M. Ja. Komarnytskyi, M. O. Maloid-Glebova *Some properties of extendedprime spectrum over commutative ring* // International Conference, dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17-21, 2012, Lviv, p. 255;

[108] M. O. Maloid-Glebova *Prime and dusemiprime torsion theories in the category of regular modules* // International Conference, dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17-21, 2012, Lviv, p. 258;

[109] M. O. Maloid-Glebova *About rings, where extended torsion theoretic spectrum is retract of torsion theoretic spectrum with order topology* // International mathematical conference on occasion to the 70-th year anniversary of professor Vladimir Kirichenko, June 13-19, 2012, Mykolayiv, p. 107;

[110] Малоїд-Глєбова М. О. *Про мінімальний первинний спектр модулів* // Конференція "Сучасні проблеми механіки та математики 21-25 травня 2013, Львів, стор. 189-190;

[111] M. O. Maloid-Glebova *Some relations between left and torsion-theoretic spectrums of rings and modules* // 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, July 08-13, 2013, Lviv, p. 123;

[112] M. O. Maloid-Glebova *Cyclic left and torsion-theoretic spectrums of a module and their relations* // International conference "Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory July 14-20, 2013, Bedlewo, Poland, p. 68-70;

[113] Малоїд-Глєбова М. О. *About essentially prime modules* // 15 міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ, стор. 22;

[114] M. O. Maloid-Glebova *About Hilbert and classical-Hilbert multiplication modules* // International algebraic conference, dedicated to the 100-th anniversary of L. A. Kaluzhnin, July 07-12, 2014. Book of abstracts. Kyiv, p. 63;

[115] M. O. Maloid-Glebova *About functoriality of cyclic spectrum of module* // X International Algebraic Conference in Ukraine, dedicated to the 70-th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20-27, 2015, Odesa, p. 77;