Інститут математики НАН України

Слуцький Олександр Васильович

УДК 517.538.72

Пакувальна фрактальна розмірність та її властивості

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук, професор **Торбін Григорій Мирославович**, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, проректор з наукової роботи.
Офіційні опоненти:	доктор фізико–математичних наук, професор **Загороднюк Андрій Васильович**, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, проректор з наукової роботи;
	кандидат фізико–математичних наук, доцент **Назаренко Микола Олексійович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, доцент кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться «5» жовтня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «___» ______________ 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради А.С. Романюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На сьогодні існує багато підходів до оцінки «малості» множин: потужність, міра Лебега, категорії Бера, метричні розмірності та міри дробових порядків тощо. «Фрактальний бум», що розпочався у природознавстві на початку 80–х років 20–го століття, суттєво простимулював розвиток математичного інструментарію дослідження фрактальних множин, функцій та мір зі складною локальною структурою. Починаючи з піонерських робіт К. Каратеодорі та Ф. Хаусдорфа, протягом більш як 60 років основним інструментом дослідження фракталів були міри Хаусдорфа (з різними вимірюючими функціями) та розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H$ (та її узагальнення). Знаходження розмірності Хаусдорфа–Безиковича — одна з базових і водночас досить нетривіальних задач фрактального аналізу, вирішенню якої для конкретних множин та класів множин присвячено тисячі дослідницьких статей. Тому розробка методів обчислення та оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича, яка триває вже майже століття, відіграє важливу роль у прогресі теорії фракталів та їх застосувань. Як стало зрозуміло після появи теорії мультифракталів, фрактальні множини можуть бути дуже неоднорідними за рівнем локальної складності. Тому для опису та дослідження тонких властивостей фрактальних множин однієї хаусдорфової розмірності недостатньо. Це стало одним із стимулів досліджень інших видів фрактальних розмірностей, особливу роль серед яких займає пакувальна фрактальна розмірність (окрім неї є багато інших «альтернативних» фрактальних розмірностей, таких як самоподібна розмірність, верхня та нижня клітинкові розмірності тощо. Пакувальна фрактальна розмірність $\dim_P$ була введена C. Tricot на початку 1980-х років у роботах, і є на 60 років «молодшою» за $\dim_H$. Постає питання, чим виділяється пакувальна фрактальна розмірність серед інших «альтернативних» розмірностей і чому її дослідження є актуальним завданням. Перед відповіддю на це питання нагадаємо означення $\dim_H$ та $\dim_P$.

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Нехай (M, ρ) є метричним простором. Діаметром множини E називають число $|E| = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$. Для додатного числа ε називатимемо ε-покриттям множини E таке сімейство підмножин $\{E_i\}$, що $E \subset \cup_i E_i \subset M$, причому $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$.

Означення. Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа називається

$$H^{\alpha}(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\inf_{|E_i|\leqslant\varepsilon}\left\{\sum_i |E_i|^{\alpha}\right\}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E),$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зліченних ε-покриттях $\{E_i\}$ множини E.

Величину H^{α}_{ε} називають також передмірою Хаусдорфа.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$ існує.

Означення. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E називається число

$$\dim_H(E) := \inf\{\alpha : H^{\alpha}(E)=0\}$$

Пакувальна фрактальна розмірність.

Означення. Нехай $E\subset M$, $\varepsilon>0$. Тоді не більш ніж зліченне сімейство $\{E_i\}$ куль називається ε-пакуванням множини E, якщо виконуються умови:

1. $|E_i|\leqslant\varepsilon, \forall i$;
2. центр кожної з куль E_i належить множині E;
3. $E_i\cap E_j=\varnothing,\ i\neq j$.

Означення. α-мірною пакувальною r-передмірою множини E називається величина

$$\mathcal{P}^{\alpha}_r(E)=\sup\left\{\sum_i |E_i|^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться по всеможливим r-пакуванням $\{E_i\}$ множини E.

Означення. α-мірною пакувальною квазі–мірою множини E називається величина

$$\mathcal{P}^{\alpha}_0(E)=\lim_{r\to 0}\mathcal{P}^{\alpha}_r(E).$$

Означення. α-мірною пакувальною мірою множини E називається величина

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E)=\inf\left\{\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_0(E_j)\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим покриттям $\{E_j\}$ множини E.

Означення. Пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_P(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = 0\}$$

Серед аргументів, що обгрунтовують корисність дослідження пакувальної фрактальної розмірності, варто виділити наступні.

1. Пакувальна розмірність (як і розмірність Хаусдорфа–Безиковича) має такі «стандартні» властивості фрактальної розмірності, як монотонність, зліченну стабільність та інваріантність при біліпшицевих перетвореннях (зазначимо, що самоподібна та верхня і нижня клітинкові розмірності не мають двох останніх властивостей) і є потужним інструментом дослідження фрактальних множин (повноцінною альтернативою хаусдорфовій розмірності).
2. Пакувальна розмірність є двоїстою до розмірності Хаусдорфа–Безиковича і одночасне використання обох цих розмірностей дозволяє значно глибше аналізувати особливості структури, тонкі властивості фрактальних множин та рівень їх нерегулярності, аніж використання лише однієї з розглядуваних розмірностей.
3. Властивості пакувальної розмірності та методи її обчислення розвинені значно менше, ніж для розмірності Хаусдорфа–Безиковича (що природньо, беручи до уваги час появи цих понять у математичній літературі та наявність одного додаткового граничного переходу в означенні пакувальної розмірності).
4. Широко відомою є нерівність $\dim_H E \leqslant \dim_P E$ (для довільної множини E). У деяких випадках ця нерівність дає точну верхню оцінку для $\dim_H E$.
5. Якщо вищевказана нерівність перетворюється на рівність (в такому разі множина E називається регулярною за Tricot), то дослідник отримує багато додаткової інформації про властивості даної множини. Зокрема, якщо хоча б одна з множин E чи F є регулярною за Tricot, то $\dim_H(E \times F) = \dim_H(E) + \dim_H(F)$, де під $E \times F$ мається на увазі декартовий добуток вказаних двох множин. Крім того, як випливатиме з результатів підрозділу 1.3.1, при обчисленні фрактальних розмірностей (як хаусдорфової, так і пакувальної) регулярних за Tricot множин можна обмежуватись довільним сімейством подрібнюючих розбиттів метричного простору, що суттєво спрощує процес обчислення розмірностей.

Варто зауважити, що відомі численні приклади множин, які не є регулярними за Tricot. Приклад такої множини можна побачити в роботі — це множина чисел з відрізка $[0;1]$, які є екстремально анормальними в s-адичному представленні за деякою фіксованою основою s.

Отже:

1. Вивчення пакувальної фрактальної розмірності дає можливість отримати додаткові результати, що стосуються розмірності Хаусдорфа–Безиковича;
2. Дослідження $\dim_H$ та $\dim_P$ певної множини дозволяє набагато краще зрозуміти геометричну природу множини, її регулярність та особливості структури, аніж при дослідженні лише однієї з розглядуваних розмірностей.

Дослідження $\dim_P$ можна розділити на три напрями:

1. У першому напрямі основна увага приділялася дослідженню властивостей пакувальної фрактальної розмірності. Також активно велися дослідження пакувальної міри $\mathcal{P}^f$ (де f — це деяка Хаусдорфова функція), яка сама по собі є нетривіальним об'єктом. Суть досліджень в цьому напрямі полягала в тому, щоб отримати певний набір властивостей пакувальної міри та пакувальної розмірності з метою використання цього набору як інструментарію в подальших дослідженнях. Роботи цього напряму є зазвичай ранніми роботами по $\dim_P$ (1980–2000 роки) і пов'язані з такими іменами, як: A. Berlinkov, C. Cutler, M. Das, X. Duhalde, T. Duquesne, G.Edgar, D.-J. Feng, J. Fraser, H. Haase, H. Joyce, D. Preiss, R. Mauldin, S. Meinershagen, M. Moran, Y. Peres, P. Shmerkin, H. Qiu, S. Taylor, C. Tricot, X. S.-Raimond та іншими;
2. У другому напрямі основна увага приділялася тому, щоб довести для $\dim_P$ ті властивості (або їх аналоги), які вже є доведеними для $\dim_H$. Це дозволить використати ті методи дослідження розмірності Хаусдорфа–Безиковича, які вже були розроблені, для дослідження пакувальної фрактальної розмірності. Часто повну аналогію в методах доведення не вдається використати, оскільки існує багато проблем, як технічних, так і принципових (наприклад, складності виконання переходу від покриттів до пакувань, а також від пакувальної квазі–міри до пакувальної міри). Роботи цього напряму можуть бути як ранніми (1980–2000 роки), так і пізніми (2000–2015), в залежності від складності властивостей та часу доведення відповідних властивостей $\dim_H$. Вказані дослідження пов'язані з такими іменами, як I. Baek, D. Beliaev, W. Bergweiler, A. Berlinkov, C. Bishop, E. Cheng, M. Das, K. Falconer, J. Howroyd, D.-J. Feng, J. Fraser, M. Holland, J.Howroyd, P. Humke, J. Hyde, T. Jordan, H. Joyce, D. Khoshnevisan, A.

Koeller, J. Li, L. Olsen, T. Orponen, Y. Peres, G. Petruska, D. Preiss, M. Rams, H. Reeve, F. Rezakhanlou, P. Shmerkin, N. Snigireva, M. Talagrand, J. Wu, X. Wang, Y. Xiao, L. ben Yossef, Y. Zhang, X. Zhou, O. Zindulka та іншими ;

3. Суть третього напряму полягає у дослідженні нових множин та мір та паралельному обчисленні для них і $\dim_H$, і $\dim_P$. Очевидним є той факт, що ефективно працювати в цьому напрямі стає можливим лише за наявності суттєвого арсеналу методів, а відповідний арсенал повинен бути напрацьований у роботах першого та другого напрямів. Саме тому більшість робіт цього напряму відносяться до пізнішого періоду дослідження пакувальної фрактальної розмірності (2000–2015 рр). Ці роботи пов'язані з такими іменами, як A. Anckar, N. Attia, J. Barral, R. Balka, K. Fassler, J. Fraser, J. Geronimo, D. Hardin, H. Haase, Y. Heurteaux, M. Holland, J. Howroyd, X. Hu, T. Jordan, J. Ma, M. Meershaert, M. Moran, F. Nazarov, O. Nielsen, L. Olsen, T. Orponen, Y. Peres, M. Rams, H. Rao, M. Roychowdhury, A. Rudas, N. Shieh, P. Shmerkin, S. Taylor, H. Qiu, Z. Wen, Y. Xiao, Y. Zhang та іншими . Часто дослідження в цьому напрямі роблять ті самі вчені, що розробили для них методи; цим пояснюється те, що велика кількість імен з цього напряму зустрічалася в попередніх двох напрямах.

На даний час для $\dim_H$ все ще розроблено суттєво більше методів дослідження та відомо суттєво більше теоретичних фактів та різноманітних властивостей, ніж для $\dim_P$. Зокрема, автором не було знайдено в літературі описаного поняття «довірчість сімейства куль для обчислення пакувальної фрактальної розмірності», незважаючи на те, що відповідне поняття «довірчість сімейства множин для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича» існує багато часу і успішно застосовується для розв'язання багатьох задач (для огляду див. роботу та посилання в ній).

Використання поняття довірчості сімейства куль для обчислення пакувальної фрактальної розмірності дає можливість суттєво збільшити рівень вивченості властивостей пакувальної розмірності, зокрема розвивати теорію перетворень, що зберігають пакувальну розмірність та обчислювати пакувальну розмірність багатьох мір.

Саме в цьому полягає актуальність теми даної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України та на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Автор дисертації брав участь у розробці держбюджетної теми «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (номер державної реєстрації 0113U003005) та науково–дослідного проекту STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розвиток загальної теорії пакувальної розмірності та її застосування при дослідженні фрактальних властивостей множин, функцій та мір.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

— дослідження проблеми еквівалентності різних підходів до означення пакувальної фрактальної розмірності;
— дослідження властивостей пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір;
— доведення аналогів теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності;
— дослідження проблеми довірчості сімейств куль для обчислення пакувальної розмірності;
— отримання умов довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімей циліндрів, породжених представленням дійсних чисел рядами Кантора та поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями дійсних чисел;
— дослідження мінімальних (у сенсі пакувальної розмірності) носіїв мір, пов'язаних з рядами Кантора;
— розвиток теорії перетворень, що зберігають пакувальну розмірність; детальне дослідження перетворень, що зберігають пакувальну розмірність та породжені розподілами випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$-символами та розкладами Кантора.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу та запропоновані автором конструктивні прийоми та методи дослідження пакувальної розмірності.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— досліджено проблему еквівалентності різних підходів до означення пакувальної фрактальної розмірності; введено в розгляд та досліджено властивості нецентрованої пакувальної розмірності;
— доведено, що для широкого класу метричних просторів нецентрована пакувальна розмірність співпадає з класичною пакувальною розмірністю;

— на основі поняття нецентрованої пакувальної розмірності введено в розгляд та вивчено властивості пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір;
— доведено аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності;
— знайдено загальні необхідні і достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейств циліндрів, породжених розкладами Кантора;
— показано принципову різницю між порівнянними сімействами куль та сімействами куль, які є довірчими для обчислення фрактальної пакувальної розмірності;
— знайдено широкі достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейства циліндрів, породжених поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями дійсних чисел;
— досліджено тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними символами розкладу Кантора; доведено явну формулу для обчислення пакувальної розмірності мінімальних розмірнісних носіїв таких мір;
— закладено основи теорії перетворень, що зберігають фрактальну пакувальну розмірність (PDP-перетворень); знайдено загальні необхідні умови належності перетворення до PDP-класу; для широкого класу перетворень, що породжені розподілами випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора та поліосновних $\tilde{Q}$-зображень, знайдено необхідні та достатні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію міри, метричну теорію чисел, теорію функцій дійсної змінної та теорію сингулярних розподілів ймовірностей. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними при дослідженні математичних об'єктів зі складною локальною будовою, заданих за допомогою різних представлень чисел зі скінченним, змінним або нескінченним алфавітом.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

— Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 19 квітня 2012 року;
— International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications 3», Київ, 10-14 вересня 2012 року;
— Третя міжуніверситетська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року;
— Четверта міжнародна конференція пам'яті Г.Вороного, Київ, 12-19 вересня 2013 року;
— Конференція «Методика викладання математики в середній та вищій школі» (присвячена 75-річчю лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, академіка Академії наук вищої освіти, професора Колесник Тамари Всеволодівни.), 04–05 грудня 2013 року;
— International Conference «Fractal geometry and Stochastics V», Jena, Germany, 24-29 березня 2014 року;
— П'ятнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 року;
— Четверта міжуніверситетська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2014 року;
— International Conference «Probability, Reliability and Stochastics Optimization», Київ, 07-10 квітня 2015 року;
— International Conference «Dynamical Systems and their Applications», Київ, 22-26 червня 2015 року;
— П'ята міжуніверситетська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2016 року.

Це такі наукові семінари:
— Київський семінар з функціонального аналізу (керівники Ю.М. Березанський, М.Л. Горбачук, Ю.С. Самойленко);
— семінар «Сучасний аналіз» (керівник І.О.Шевчук);
— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник А.С. Романюк);
— семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» (керівники О.І. Клесов, О.В. Іванов);
— семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник Г.М. Торбін);
— семінар з фрактального аналізу (керівник М.В. Працьовитий);

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 статтях.

З них чотири статті [1–4] опубліковано у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань МОН України. П'ята стаття [5] опублікована у науковому періодичному виданні іншої держави з напряму, з якого підготовлено дисертацію. Також результати роботи відображено в матеріалах конференцій [6–10, 12–15].

Зміст роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків.

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми, формулюється мета і завдання дослідження, проводиться огляд результатів з тематики дослідження, висвітлюються питання про наукову новизну, теоретичне і практичне значення, апробацію отриманих результатів та кількість публікацій.

У **розділі 1 «Розмірність Хаусдорфа–Безиковича та пакувальна фрактальна розмірність. Огляд відомих результатів. Порівняння фрактальних розмірностей»** наводяться необхідні для наступних розділів означення та факти, що стосуються пакувальної фрактальної розмірності, а також (оглядово) розмірності Хаусдорфа–Безиковича. В пункті 1.2.2 запропоновано нове поняття «Нецентрована пакувальна розмірність», використання якого дає можливість ввести для пакувальної фрактальної розмірності поняття «довірчість сімейства куль для обчислення $\dim_P$».

Нехай Φ є деяким сімейством куль, а μ — неперервною мірою, визначеною на M.

Означення 1.15. Нехай $E \subset M$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж злічене сімейство $\{E_i\}$ куль називається «нецентрованим ε-пакуванням множини E», якщо виконуються умови:

1. $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
2. $E_i \cap E \neq \varnothing$;
3. $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j$.

Означення 1.16. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді нецентрованою α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) = 0$).

Означення 1.17. α-мірною нецентрованою пакувальною квазімірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E).$$

Означення 1.18. α-мірною нецентрованою пакувальною мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 1.1. Якщо $M = \mathbb{R}^1$ і $\alpha = 1$, то α-мірна нецентрована пакувальна міра співпадає з α-мірною мірою Лебега.

Означення 1.19. Нецентрованою пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_{P(unc)}(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = 0\}.$$

У розділах 1.2.3 та 1.2.4 розглядаються узагальнення нецентрованої пакувальної розмірності, а саме пакувальна розмірність відносно сімейства куль та пакувальна розмірність відносно сімейства куль та міри. Ці узагальнення дозволяють вводити поняття «розмірність Біллінгслі» на відрізку $[0;1]$ та розглядати аналоги теорем Біллінгслі.

Означення 1.24. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε відносно сімейства Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu) := \sup\left\{\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням кулями з Φ множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu) = 0$).

Означення 1.25. α-мірною пакувальною квазімірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E, \Phi, \mu) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu).$$

Означення 1.26. α-мірною пакувальною мірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_j, \Phi, \mu) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Означення 1.27. Пакувальною розмірністю множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\dim_P(E,\Phi,\mu) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E,\Phi,\mu) = 0\}.$$

В пункті 1.3 «Порівняння фрактальних розмірностей» доводиться нерівність

$$\dim_H(E,\Phi,\mu) \leqslant \dim_P(E,\Phi,\mu)$$

для певного класу сімейств куль Φ та для довільної неперервної міри μ.

Крім того, вводиться поняття множин, регулярних за Tricot, та досліджуються їх властивості.

У **розділі 2 «Довірчість та порівнянність сімейств куль для обчислення пакувальної розмірності»** доводяться теореми про довірчість сімейств циліндрів s-адичного зображення дійсних чисел, $\tilde{Q}$-зображення (за певних умов), а також критерій довірчості сімейства циліндрів, породжених зображенням дійсних чисел рядами Кантора.

Отримані результати дають можливість використовувати аналоги теорем Біллінгслі для обчислення пакувальної розмірності; без інформації про довірчість сімейства Φ в переважній більшості випадків аналоги теорем Біллінгслі не є застосовними для обчислення пакувальної розмірності певної множини.

Означення 2.1. Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M : \dim_P(E,\Phi) = \dim_{P(unc)}(E).$$

Тоді Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Означення 2.2. Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M, \forall \alpha \geqslant 0 : \exists C > 0 : \mathcal{P}^\alpha(E,\Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^\alpha(E).$$

Тоді Φ називається порівнянним для обчислення пакувальної розмірності.

Зауваження 2.2. Очевидно, що будь-яке порівнянне сімейство є і довірчим (для обчислення пакувальної розмірності).

Теорема 2.1 (Достатня умова порівнянності для обчислення пакувальної розмірності). *Нехай* Φ *— деяке сімейство проміжків з відрізка* $[0;1]$. *Тоді для того, щоб* Φ *було порівнянним для* *обчислення пакувальної розмірності, достатньо, щоб існувала така константа $C > 0$, щоб для довільного проміжка $\langle a;b\rangle \subset [0;1]$ знайшовся проміжок $\Delta(a,b) \in \Phi$ такий, що:*

1. *$\Delta(a,b)$ містить точку $\frac{a+b}{2}$;*
2. *$\Delta(a,b) \subset (a;b)$;*
3. *$\frac{b-a}{|\Delta(a,b)|} \geqslant C$.*

Теорема 2.2. *Нехай $s \geqslant 2$ — це фіксоване натуральне число, Φ — сімейство всіх s-адичних циліндричних інтервалів. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.*

Теорема 2.3. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів деякого $\tilde{Q}$-представлення. Нехай*

$$\inf_{i,j} q_{ij} := q_{\min} > 0.$$

Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

В пункті **2.4 «Аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної фрактальної розмірності»** доводяться аналоги тих теорем, які P. Billingsley сформулював для розмірності Хаусдорфа–Безиковича, і які є одними з ключових результатів у теорії $\dim_H$:

Теорема 2.4. *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — дві неперервні ймовірнісні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-го рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо число $\delta > 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \geqslant \delta \right\} \tag{2.1}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

Теорема 2.5. *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — неперервні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-того рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо певне число $\delta > 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta \right\}. \tag{2.2}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

У **пункті 2.5 «Критерій довірчості сімейства циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора для обчислення пакувальної розмірності»** нагадується означення рядів Кантора та доводиться критерій довірчості відповідного сімейства циліндричних інтервалів.

Нагадаємо означення представлення дійсних чисел рядами Кантора.

Означення 2.3. Для заданої послідовності $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, де $n_k \in \mathbb{N} \setminus 1$, запис довільного числа $x \in [0;1]$ у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k} := \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}, \quad \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}$$

називається представленням числа x рядами Кантора.

Г. Кантор ввів такі представлення у 1869 році як природні узагальнення класичного s-адичного представлення дійсних чисел.

Ці представлення та їх властивості інтенсивно досліджувалися багатьма математиками. Незважаючи на це, багато питань (наприклад, критерій раціональності певного числа в термінах цифр його представлення рядом Кантора) залишаються відкритими.

Теорема 2.6. *Сімейство* Φ *циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора є довірчим для обчислення пакувальної розмірності тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} = 0.$$

Ця теорема є першим відомим критерієм довірчості (для обчислення $\dim_P$) сімейств куль з певного класу.

У **пункті 2.6 «Приклад сімейства куль, яке є довірчим, але не є порівнянним для обчислення пакувальної розмірності»** показується принципова різниця між порівнянними та довірчими сімействами пакувань (зауважимо, що до робіт автора не було відомо жодного прикладу сімейств пакувань, які були б довірчі, але непорівнянні).

Теорема 2.7. *Нехай* $n_k = 4^k$, *а* Φ *— сімейство циліндрів відповідного представлення дійсних чисел рядами Кантора. Тоді* Φ *є довірчим для обчислення пакувальної розмірності на* $[0;1]$, *але не є порівнянним.*

Розділ 3 «Тонкі фрактальні властивості мір, пов'язані з пакувальною розмірністю. PDP**–перетворення»** присвячено дослідженню ймовірнісних мір, пов'язаних з випадковими величинами з незалежними $\widetilde{Q}$-символами.

В **п. 3.1 «Основні означення та властивості»** наведено означення та основні властивості PDP–перетворень:

Означення 3.1. Нехай (M, ρ) — метричний простір, у якому визначена пакувальна розмірність. Нехай f є перетворенням цього метричного простору. Тоді ми будемо казати «f зберігає пакувальну розмірність», якщо виконується умова:

$$\forall E \subset M, \dim_P f(E) = \dim_P E.$$

Якщо f зберігає пакувальну розмірність, то його також називають PDP-перетворенням (від англійських слів «Packing dimension preserving»).

Дослідження PDP-перетворень є винятково важливим, оскільки дозволяє, знаючи пакувальну розмірність певної множини, дізнатися також пакувальну розмірність інших множин, які є образами даної множини при PDP-перетвореннях.

Означення 3.2. Нехай μ є деякою ймовірнісною мірою, визначеною на $[0;1]$. Тоді пакувальною розмірністю міри μ називається число

$$\dim_P \mu := \inf\{\dim_P E : \mu(E) = 1\}.$$

Лема 3.1. *Нехай ξ — неперервна випадкова величина, розподілена на $[0;1]$. Тоді для того, щоб F_ξ належала до PDP-класу, необхідно, щоб $\dim_P \mu_\xi = 1$.*

Пункт 3.2 присвячений дослідженню випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$-цифрами за умови, що $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$.

Для розглядуваних випадкових величин доводиться критерій належності функції розподілу в.в. з незалежними $\tilde{Q}$-символами до PDP–класу за умови $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$:

Теорема 3.3. *Нехай:*

$$p_j = \inf_i p_{ij}, \quad q_{\min} := \inf_{i,j} q_{ij}$$

$$T^{(1)} = \left\{k : k \in \mathbb{N}, p_k < \frac{1}{2} q_{\min}\right\}$$

$$T_k^{(1)} = T^{(1)} \cap \{1, 2, \dots, k\},$$

$$B = \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{j \in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_j}}{k}.$$

Припустимо, що $q_{\min} > 0$.

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{cases} \dim_P \mu_\xi = 1; \\ B = 0. \end{cases}$$

Наслідок 3.1. *Якщо* $\inf_{i,j} p_{ij} > 0$ *і* $q_{\min} > 0$, *то* F_ξ *є PDP-перетворенням тоді і тільки тоді, коли* $\dim_P \mu_\xi = 1$.

В **пункті 3.3 «Випадкова величина з незалежними символами розкладу Кантора»**, базуючись на дослідженнях автора по пакувальній довірчості сімейств циліндрів, породжених рядами Кантора, обчислюється пакувальна розмірність ймовірнісної міри, пов'язаної з випадковою величиною з незалежними символами розкладу Кантора:

Теорема 3.4. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} \right)^2 < \infty,$$

то пакувальна розмірність міри μ_ξ *в.в.* ξ *з незалежними символами розкладу Кантора дорівнює*

$$\dim_P(\mu_\xi) = \limsup_{k\to\infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}, \qquad \text{де } H_k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln p_{ij}$$

Якщо послідовність (n_k) є необмеженою, то проблема знаходження критерію збереження фрактальної пакувальної розмірності залишається відкритою. У той же час, використовуючи результати по обчисленню пакувальної розмірності міри з теореми **??**, можна отримати необхідні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними цифрами розкладу Кантора:

Теорема 3.5. *Нехай* ξ *є випадковою величиною з незалежними символами розкладу Кантора. Нехай відповідний розклад Кантора задано послідовністю* $\{n_k\}$, *для якої виконується умова:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} \right)^2 < +\infty.$$

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного від-

різка, необхідно, щоб

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij}\ln p_i j}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} = 1.$$

Подяка. Автор щиро вдячний науковому керівнику професору Григорію Мирославовичу Торбіну за постановку задач, допомогу, підтримку та терпіння.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії фрактальної пакувальної розмірності, яка, будучи двоїстою до розмірності Хаусдорфа–Безиковича і маючи всі ознаки класичної фрактальної розмірності (у тому числі зчисленну стабільність), дозволяє (у поєднанні з $\dim_H$) більш глибоко аналізувати фрактальну структуру множин, сингулярних функцій та мір.

У роботі здійснено розвиток загальної теорії пакувальної фрактальної розмірності (досліджено проблему еквівалентності різних підходів до означення пакувальної фрактальної розмірності; на основі запропонованого автором альтернативного означення пакувальної розмірності введено в розгляд та вивчено властивості пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір; доведено аналоги класичних (для розмірності Хаусдорфа–Безиковича) теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності (які є аналітичною основою для дослідження фрактальної пакувальної розмірності множин та мір); досліджено проблему довірчості сімейств куль при обчисленні пакувальної розмірності) та досліджено пакувальні фрактальні властивості множин, функцій та мір, що породжені зображеннями дійсних чисел за допомогою рядів Кантора та поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями.

В дисертаційній роботі отримано такі результати:

- введено в розгляд та досліджено властивості нецентрованої пакувальної розмірності; доведено, що в широкому класі метричних просторів нецентрована пакувальна розмірність співпадає з класичною пакувальною розмірністю;
- на основі поняття нецентрованої пакувальної розмірності введено в розгляд та вивчено властивості пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір;
- доведено аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності;
- знайдено загальні необхідні і достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейства циліндрів, породжених розклалами Кантора;

— показано принципову різницю між порівнянними системами пакувань та системами пакувань, які є довірчими для обчислення фрактальної пакувальної розмірності;
— знайдено широкі достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейства циліндрів, породжених поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями дійсних чисел;
— досліджено тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними символами розкладу Кантора; доведено явну формулу для обчислення пакувальної розмірності мінімальних розмірнісних носіїв таких мір;
— закладено основи теорії перетворень, що зберігають фрактальну пакувальну розмірність (PDP-перетворень); знайдено загальні необхідні умови належності перетворення до PDP-класу; для широкого класу перетворень, що породжені розподілами випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора та поліосновних $\tilde{Q}$-зображень, знайдено необхідні та достатні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Слуцький О. В., Торбін Г. М. Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 192–199.
2. Слуцький О. В., Торбін Г. М. Довірчість сімейств множин відносно пакувальної розмірності // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 268–277.
3. Слуцький О. В. Про пакувальну довірчість, порівнянність та розмірність міри об'єктів, пов'язаних з рядами Кантора // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 201–218.
4. Слуцький О. В. Про PDP-властивості деяких перетворень, пов'язаних з рядами Кантора // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 201–218.
5. Slutskyi O. On packing dimension preservation by distribution functions of random variables with independent $\tilde{Q}$-digits // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2015. — Vol. 2, no. 4. — P. 371–389.

6. Slutskyi O. Packing dimension and packing dimension preserving transformations. — Kyiv : International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications III, September 10–14, 2012, Kyiv, Ukraine: Abstracts, 2012. — P. 12–13.
7. Слуцький О. Теорема Біллінгслі для пакувальної розмірності. — Київ : Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80–річчю М.І.Шкіля, 2012. — С. 45–46.
8. Слуцький О. Критерій збереження пакувальної розмірності функціями, які задані випадковою величиною з незалежними s-адичними цифрами. — Київ : Збірник тез конференції «Методика викладання математики в середній та вищій школі (присвячена 75-річчю лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, академіка Академії наук вищої освіти, професора Колесник Тамари Всеволодівни)», 2013. — С. 55–57.
9. Слуцький О. Про аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності. — Київ : Збірник тез за матеріалами третьої міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, 2013. — С. 45–46.
10. Слуцький О. Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають пакувальну розмірність. — Київ : Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука: Матеріали конференції, 2014. — С. 100.
11. Слуцький О. Представлення дійсних чисел рядами Кантора та довірчість відповідного сімейства циліндрів для обчислення пакувальної розмірності. — Київ : Четверта міжуніверситетська конференція молодих вчених в галузях математики та фізики: тези доповідей, 2015. — С. 51–52.
12. Слуцький О. Довірчість систем множин відносно пакувальної розмірності. — Київ : П'ятнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука: Матеріали конференції, 2015. — С. 251–253.
13. Slutskyi O. About criteria of depending a probability function of random variable with independent s-adic digits to PDP-class. — Kyiv : Voronoi's Impact on Modern Science, Proceedings of 4thInternational Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tesselations, September 22–28, 2013, Kyiv, Ukraine. — P. 202–204.
14. Slutskyi O. On sharp condition for packing dimension preservation under transformations generated by random s-adic expansion. — Jena : International Conference Fractal Geometry and Stochastics V,March 22–28, 2014, Jena, Germany: Abstracts., 2014. — P. 198–199.

15. Slutskyi O. Faithfulness of families of sets for packing dimension calculation. — Kyiv : International Conference Probability, Reliability and Stochastics Optimisation, 7–10 April 2015, Kyiv: Abstracts, 2015. — P. 67–68.

АНОТАЦІЇ

Слуцький О.В. Пакувальна фрактальна розмірність та її властивості — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню властивостей пакувальної фрактальної розмірності та застосування отриманих результатів у теорії чисел та фрактальній геометрії. Основою цих досліджень є розвинений автором підхід, що полягає у введенні та використанні поняття нецентрованої пакувальної розмірності.

В дисертації досліджуються ймовірнісні, фрактальні та теоретико–числові феномени, пов'язані з $\tilde{Q}$-зображенням дійсних чисел, зокрема з рядами Кантора.

Знайдено достатні умови пакувальної довірчості сімейства циліндрів, породженого $\tilde{Q}$-зображенням дійсних чисел. Крім того, знайдено критерій пакувальної довірчості сімейства циліндрів, породженого рядами Кантора.

Досліджуються властивості ймовірнісної міри з незалежними символами представлення рядами Кантора. Знайдено точну формулу для обчислення пакувальної розмірності таких мір (за певних умов).

Досліджено випадкову величину з незалежними $\tilde{Q}$-символами. За умови $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$ знайдено критерій збереження функцією розподілу розглядуваної в.в. пакувальної розмірності будь-якої підмножини відрізка $[0;1]$.

Ключові слова: сингулярно неперервні розподіли ймовірностей, $\tilde{Q}$-розклади, довірчі сімейства куль, пакувальна розмірність множини, пакувальна розмірність міри, PDP-перетворення, фрактал.

Слуцкий А.В. Упаковочная фрактальная размерность и её свойства — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию свойств упаковочной фрактальной размерности и применению полученных результатов в теории чисел и фрактальной геометрии. Основой этих исследований является предложенный автором подход, который состоит из введения и использования понятия нецентрированной упаковочной размерности.

В диссертации исследуются вероятностные, фрактальные и теоретико-числовые феномены, связанные с Q_∞-представлением вещественных чисел.

Найдено достаточные условия упаковочной доверительности семейства цилиндров, порождённого $\tilde{Q}$-изображением действительных чисел. Кроме того, найдено критерий упаковочной доверительности семейства цилиндров, порождённого рядами Кантора.

Исследованы свойства вероятностной меры с независимыми символами представления действительных чисел рядами Кантора. Получена точная формула для нахождения упаковочной размерности таких мер (при определённых условиях).

Исследовано случайную величину с независимыми $\tilde{Q}$-символами. При условии $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$ найдено критерий сохранения функцией распределения рассматриваемой в.в. упаковочной размерности произвольного множества единичного отрезка.

Ключевые слова: сингулярно непрерывные вероятностные распределения, $\tilde{Q}$-представление, доверительные семейства шаров, упаковочная размерность множества, упаковочная размерность меры, PDP-преобразования, фрактал.

Slutskyi O.V. Packing fractal dimension and its properties — Manuscript.

PhD thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute for Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the investigation of properties of packing fractal dimension and to applications of the results to the number theory and fractal geometry. These investigations are based on the approach, introduced by author. This approach is based on using the notion of uncentered packing dimension.

Using the uncentered packing dimension, we introduce the notion of set family faithfulness for packing dimension calculation and use it for the development of the theories of packing faithfulness, packing dimension preserving transformations etc.

The main new results obtained in the work are the following:

— it has been proven that in some wide classof metric spaces including $\mathbb{R}^n$ the value of uncentered packing dimension is matching to the value of classical packing dimension;

— an analog of the Billingsley's theorem for packing dimension;

— it has been proven that the cylinders family of the $tildeQ$-expansion is faithful for packing dimension calculation under condition of $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$;

— the criteria for Cantor series cylinders family faithfulness for packing dimension calculation;
— an exact formula for packing dimension of the probabilistic measure generated by a random variable with independent digits of the Cantor expansion;
— an example of cylinders family which is faithful but not comparable for packing dimension calculation;
— the criteria for the packing dimension preservation by distribution functions of random variables with independent $\tilde{Q}$-digits.

We establish several new probabilistic, fractal and number theoretical phenomena connected with the $\tilde{Q}$-expansion and, partitionally, with the Cantor series.

The results provided in PhD thesis are important from the theoretical point of view for the packing dimension calculation and investigation of its properties for sets and measures constrtucted using $\tilde{Q}$-expansions, Cantor series, f-expansions and other expansions of real numbers.

Key words: singularly continuous probability measures, $\tilde{Q}$-expansions, faithful families of balls, the packing dimension of sets, the packing dimension of measures, PDP-transformations, fractal.

Підписано до друку . .2016. Формат $60 \times 84/16$. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. . Умовн. друк. арк. .
Тираж 100 пр. Зам. .

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.