Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

Слуцький Олександр Васильович

УДК 517.538.72

Пакувальна фрактальна розмірність та її властивості

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Торбін Григорій Мирославович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. На сьогодні існує багато підходів до оцінки «малості» множин: потужність, міра Лебега, категорії Бера, метричні розмірності та міри дробових порядків тощо. «Фрактальний бум», що розпочався у природознавстві на початку 80–х років 20–го століття, суттєво простимулював розвиток математичного інструментарію дослідження фрактальних множин, функцій та мір зі складною локальною структурою. Починаючи з піонерських робіт К. Каратеодорі [28] та Ф. Хаусдорфа [54], протягом більш як 60 років основним інструментом дослідження фракталів були міри Хаусдорфа (з різними вимірюючими функціями) та розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H$ (та її узагальнення). Знаходження розмірності Хаусдорфа–Безиковича — одна з базових і водночас досить нетривіальних задач фрактального аналізу, вирішенню якої для конкретних множин та класів множин присвячено тисячі дослідницьких статей. Тому розробка методів обчислення та оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича, яка триває вже майже століття, відіграє важливу роль у прогресі теорії фракталів та їх застосувань. Як стало зрозуміло після появи теорії мультифракталів, фрактальні множини можуть бути дуже неоднорідними за рівнем локальної складності. Тому для опису та дослідження тонких властивостей фрактальних множин однієї хаусдорфової розмірності недостатньо. Це стало одним із стимулів досліджень інших видів фрактальних розмірностей, особливу роль серед яких займає пакувальна фрактальна розмірність (окрім неї є багато інших «альтернативних» фрактальних розмірностей, таких як самоподібна розмірність, верхня та нижня клітинкові розмірності тощо (див. [39]). Пакувальна фрактальна розмірність $\dim_P$ була введена C. Tricot на початку 1980-х років у роботах [107, 109], і є на 60 років «молодшою» за $\dim_H$. Постає питання, чим виділяється пакувальна фрактальна розмірність серед інших «альтернативних» розмірностей і чому її дослідження є актуальним завданням. Перед відповіддю на це питання нагадаємо означення $\dim_H$ та $\dim_P$.

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Нехай (M, ρ) є метричним простором. Діаметром множини E називають число $|E| = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$. Для додатного числа ε називатимемо ε-покриттям множини E таке сімейство підмножин $\{E_i\}$, що $E \subset \cup_i E_i \subset M$, причому $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$.

Означення. Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа називається

$$H^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{|E_i| \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_i |E_i|^{\alpha} \right\} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E),$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зліченних ε-покриттях $\{E_i\}$ множини E.

Величину H^{α}_{ε} називають також передміроюХаусдорфа.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$ існує.

Означення. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E називається число

$$\dim_H(E) := \inf\{\alpha : H^{\alpha}(E) = 0\}$$

Пакувальна фрактальна розмірність.

Означення. Нехай $E \subset M$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж зліченне сімейство $\{E_i\}$ куль називається ε-пакуванням множини E, якщо виконуються умови:

1. $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
2. центр кожної з куль E_i належить множині E;

3. $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j.$

Означення. α-мірною пакувальною r-передмірою множини E називається величина

$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) = \sup\left\{\sum_i |E_i|^\alpha\right\},$$

де супремум береться по всеможливим r-пакуванням $\{E_i\}$ множини E.

Означення. α-мірною пакувальною квазі–мірою множини E називається величина

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) = \lim_{r\to 0} \mathcal{P}_r^\alpha(E).$$

Означення. α-мірною пакувальною мірою множини E називається величина

$$\mathcal{P}^\alpha(E) = \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j)\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим покриттям $\{E_j\}$ множини E.

Означення. Пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_P(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = 0\}$$

Серед аргументів, що обгрунтовують корисність дослідження пакувальної фрактальної розмірності, варто виділити наступні.

1. Пакувальна розмірність (як і розмірність Хаусдорфа–Безиковича) має такі «стандартні» властивості фрактальної розмірності, як монотонність, зліченну стабільність [38,39] та інваріантність при біліпшицевих перетвореннях [78] (зазначимо, що самоподібна та верхня і нижня клітинкові розмірності не мають двох останніх властивостей) і є потужним інструментом дослідження фрактальних множин (повноцінною альтернативою хаусдорфовій розмірності).
2. Пакувальна розмірність є двоїстою до розмірності Хаусдорфа–Безиковича [31,39] і одночасне використання обох цих розмірностей дозволяє значно глибше аналізувати особливості структури, тонкі

властивості фрактальних множин та рівень їх нерегулярності, аніж використання лише однієї з розглядуваних розмірностей.

3. Властивості пакувальної розмірності та методи її обчислення розвинені значно менше, ніж для розмірності Хаусдорфа–Безиковича (що природньо, беручи до уваги час появи цих понять у математичній літературі та наявність одного додаткового граничного переходу в означенні пакувальної розмірності).
4. Широко відомою є нерівність $\dim_H E \leqslant \dim_P E$ (для довільної множини E) [39]. У деяких випадках ця нерівність дає точну верхню оцінку для $\dim_H E$.
5. Якщо вищевказана нерівність перетворюється на рівність (в такому разі множина E називається регулярною за Tricot [92]), то дослідник отримує багато додаткової інформації про властивості даної множини. Зокрема, якщо хоча б одна з множин E чи F є регулярною за Tricot, то $\dim_H(E \times F) = \dim_H(E) + \dim_H(F)$ [109], де під $E \times F$ мається на увазі декартовий добуток вказаних двох множин. Крім того, як випливатиме з результатів підрозділу 1.3.1, при обчисленні фрактальних розмірностей (як хаусдорфової, так і пакувальної) регулярних за Tricot множин можна обмежуватись довільним сімейством подрібнюючих розбиттів метричного простору, що суттєво спрощує процес обчислення розмірностей.

Варто зауважити, що відомі численні приклади множин, які не є регулярними за Tricot. Приклад такої множини можна побачити в роботі [84] — це множина чисел з відрізка $[0; 1]$, які є екстремально анормальними в s-адичному представленні за деякою фіксованою основою s.

Отже:

1. Вивчення пакувальної фрактальної розмірності дає можливість отримати додаткові результати, що стосуються розмірності Хаусдорфа–Безиковича;

2. Дослідження $\dim_H$ та $\dim_P$ певної множини дозволяє набагато краще зрозуміти геометричну природу множини, її регулярність та особливості структури, аніж при дослідженні лише однієї з розглядуваних розмірностей.

Дослідження $\dim_P$ можна розділити на три напрями:

1. У першому напрямі основна увага приділялася дослідженню властивостей пакувальної фрактальної розмірності. Також активно велися дослідження пакувальної міри $\mathcal{P}^f$ (де f — це деяка Хаусдорфова функція), яка сама по собі є нетривіальним об'єктом. Суть досліджень в цьому напрямі полягала в тому, щоб отримати певний набір властивостей пакувальної міри та пакувальної розмірності з метою використання цього набору як інструментарію в подальших дослідженнях. Роботи цього напряму є зазвичай ранніми роботами по $\dim_P$ (1980–2000 роки) і пов'язані з такими іменами, як: A. Berlinkov, C. Cutler, M. Das, X. Duhalde, T. Duquesne, G.Edgar, D.-J. Feng, J. Fraser, H. Haase, H. Joyce, D. Preiss, R. Mauldin, S. Meinershagen, M. Moran, Y. Peres, P. Shmerkin, H. Qiu, S. Taylor, C. Tricot, X. S.-Raimond та іншими [24, 32, 33, 35–37, 43, 44, 47, 49, 50, 52, 67, 68, 80, 81, 89, 90, 92, 107, 108];
2. У другому напрямі основна увага приділялася тому, щоб довести для $\dim_P$ ті властивості (або їх аналоги), які вже є доведеними для $\dim_H$. Це дозволить використати ті методи дослідження розмірності Хаусдорфа–Безиковича, які вже були розроблені, для дослідження пакувальної фрактальної розмірності. Часто повну аналогію в методах доведення не вдається використати, оскільки існує багато проблем, як технічних, так і принципових (наприклад, складності виконання переходу від покриттів до пакувань, а також від пакувальної квазі–міри до пакувальної міри). Роботи цього напряму можуть бути як ранніми (1980–2000 роки), так і пізніми (2000–2015),

в залежності від складності властивостей та часу доведення відповідних властивостей $\dim_H$. Вказані дослідження пов'язані з такими іменами, як I. Baek, D. Beliaev, W. Bergweiler, A. Berlinkov, C. Bishop, E. Cheng, M. Das, K. Falconer, J. Howroyd, D.-J. Feng, J. Fraser, M. Holland, J.Howroyd, P. Humke, J. Hyde, T. Jordan, H. Joyce, D. Khoshnevisan, A. Koeller, J. Li, L. Olsen, T. Orponen, Y. Peres, G. Petruska, D. Preiss, M. Rams, H. Reeve, F. Rezakhanlou, P. Shmerkin, N. Snigireva, M. Talagrand, J. Wu, X. Wang, Y. Xiao, L. ben Yossef, Y. Zhang, X. Zhou, O. Zindulka та іншими [19, 21–23, 26, 34, 40, 41, 43, 45–47, 56, 57, 60, 62, 63, 65, 67, 69–74, 88, 89, 93, 94, 100, 106, 111–113, 115–117];

3. Суть третього напряму полягає у дослідженні нових множин та мір та паралельному обчисленні для них і $\dim_H$, і $\dim_P$. Очевидним є той факт, що ефективно працювати в цьому напрямі стає можливим лише за наявності суттєвого арсеналу методів, а відповідний арсенал повинен бути напрацьований у роботах першого та другого напрямів. Саме тому більшість робіт цього напряму відносяться до пізнішого періоду дослідження пакувальної фрактальної розмірності (2000–2015 рр). Ці роботи пов'язані з такими іменами, як A. Anckar, N. Attia, J. Barral, R. Balka, K. Fassler, J. Fraser, J. Geronimo, D. Hardin, H. Haase, Y. Heurteaux, M. Holland, J. Howroyd, X. Hu, T. Jordan, J. Ma, M. Meershaert, M. Moran, F. Nazarov, O. Nielsen, L. Olsen, T. Orponen, Y. Peres, M. Rams, H. Rao, M. Roychowdhury, A. Rudas, N. Shieh, P. Shmerkin, S. Taylor, H. Qiu, Z. Wen, Y. Xiao, Y. Zhang та іншими [17, 18, 20, 42, 48, 51, 55, 56, 58, 59, 61, 66, 79, 81–83, 85, 91, 96–98, 100, 114]. Часто дослідження в цьому напрямі роблять ті самі вчені, що розробили для них методи; цим пояснюється те, що велика кількість імен з цього напряму зустрічалася в попередніх двох напрямах.

На даний час для $\dim_H$ все ще розроблено суттєво більше методів дослідження та відомо суттєво більше теоретичних фактів та різноманітних властивостей, ніж для $\dim_P$. Зокрема, автором не було знайдено в літературі описаного поняття «довірчість сімейства куль для обчислення пакувальної фрактальної розмірності», незважаючи на те, що відповідне поняття «довірчість сімейства множин для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича» існує багато часу і успішно застосовується для розв'язання багатьох задач (для огляду див. роботу [87] та посилання в ній).

Використання поняття довірчості сімейства куль для обчислення пакувальної фрактальної розмірності дає можливість суттєво збільшити рівень вивченості властивостей пакувальної розмірності, зокрема розвивати теорію перетворень, що зберігають пакувальну розмірність та обчислювати пакувальну розмірність багатьох мір.

Саме в цьому полягає актуальність теми даної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України та на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Автор дисертації брав участь у розробці держбюджетної теми «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (номер державної реєстрації 0113U003005) та науково–дослідного проекту STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розвиток загальної теорії пакувальної розмірності та її застосування при дослідженні фрактальних властивостей множин, функцій та мір.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

— дослідження проблеми еквівалентності різних підходів до означення пакувальної фрактальної розмірності;

— дослідження властивостей пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір;

— доведення аналогів теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності;

— дослідження проблеми довірчості сімейств куль для обчислення пакувальної розмірності;

— отримання умов довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімей циліндрів, породжених представленням дійсних чисел рядами Кантора та поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями дійсних чисел;

— дослідження мінімальних (у сенсі пакувальної розмірності) носіїв мір, пов'язаних з рядами Кантора;

— розвиток теорії перетворень, що зберігають пакувальну розмірність; детальне дослідження перетворень, що зберігають пакувальну розмірність та породжені розподілами випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$-символами та розкладами Кантора.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу та запропоновані автором конструктивні прийоми та методи дослідження пакувальної розмірності.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— досліджено проблему еквівалентності різних підходів до означення пакувальної фрактальної розмірності; введено в розгляд та досліджено властивості нецентрованої пакувальної розмірності;

— доведено, що для широкого класу метричних просторів нецентрована пакувальна розмірність співпадає з класичною пакувальною розмірністю;

— на основі поняття нецентрованої пакувальної розмірності введено в розгляд та вивчено властивості пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір;

— доведено аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності;

— знайдено загальні необхідні і достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейств циліндрів, породжених розкладами Кантора;

— показано принципову різницю між порівнянними сімействами куль та сімействами куль, які є довірчими для обчислення фрактальної пакувальної розмірності;

— знайдено широкі достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейства циліндрів, породжених поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями дійсних чисел;

— досліджено тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними символами розкладу Кантора; доведено явну формулу для обчислення пакувальної розмірності мінімальних розмірнісних носіїв таких мір;

— закладено основи теорії перетворень, що зберігають фрактальну пакувальну розмірність (PDP-перетворень); знайдено загальні необхідні умови належності перетворення до PDP-класу; для широкого класу перетворень, що породжені розподілами випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора та поліосновних $\tilde{Q}$-зображень, знайдено необхідні та достатні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію міри, метричну теорію чисел, теорію функцій дійсної змінної та теорію сингулярних розподілів ймовірностей. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними при дослідженні математичних об'єктів зі складною локальною будовою, заданих за допомогою різних представлень чисел зі скінченним, змінним або нескінченним алфавітом.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

— Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 19 квітня 2012 року;

— International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications 3», Київ, 10-14 вересня 2012 року;

— Третя міжуніверситетська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року;

— Четверта міжнародна конференція пам'яті Г.Вороного, Київ, 12-19 вересня 2013 року;

— Конференція «Методика викладання математики в середній та вищій школі» (присвячена 75-річчю лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, академіка Академії наук вищої освіти, професора Колесник Тамари Всеволодівни.), 04–05 грудня 2013 року;

— International Conference «Fractal geometry and Stochastics V», Jena, Germany, 24-29 березня 2014 року;

— П'ятнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 року;

— Четверта міжуніверситетська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2014 року;

— International Conference «Probability, Reliability and Stochastics Optimization», Київ, 07-10 квітня 2015 року;

— International Conference «Dynamical Systems and their Applications», Київ, 22-26 червня 2015 року;
— П'ята міжуніверситетська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2016 року.

Це такі наукові семінари:

— Київський семінар з функціонального аналізу (керівники Ю.М. Березанський, М.Л. Горбачук, Ю.С. Самойленко);
— семінар «Сучасний аналіз» (керівник І.О.Шевчук);
— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник А.С. Романюк);
— семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» (керівники О.І. Клесов, О.В. Іванов);
— семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М.П. Драгоманова (керівник Г.М. Торбін);
— семінар з фрактального аналізу (керівник М.В. Працьовитий);

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 статтях.

З них чотири статті [3–6] опубліковано у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань МОН України. П'ята стаття [105] опублікована у науковому періодичному виданні іншої держави з напряму, з якого підготовлено дисертацію. Також результати роботи відображено в матеріалах конференцій [7–11, 101–104].

Зміст роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків.

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми, формулюється мета і завдання дослідження, проводиться огляд результатів з тематики дослідження, висвітлюються питання про наукову новизну, теоретичне і практичне значення, апробацію отриманих результатів та кількість публікацій.

У **розділі 1 «Розмірність Хаусдорфа–Безиковича та пакувальна фрактальна розмірність. Огляд відомих результатів. Порівняння фрактальних розмірностей»** наводяться необхідні для наступних розділів означення та факти, що стосуються пакувальної фрактальної розмірності, а також (оглядово) розмірності Хаусдорфа–Безиковича. В пункті 1.2.2 запропоновано нове поняття «Нецентрована пакувальна розмірність», використання якого дає можливість ввести для пакувальної фрактальної розмірності поняття «довірчість сімейства куль для обчислення $\dim_P$».

Нехай Φ є деяким сімейством куль, а μ — неперервною мірою, визначеною на M.

Означення 1.15. Нехай $E \subset M$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж зліченне сімейство $\{E_i\}$ куль називається «нецентрованим ε-пакуванням множини E», якщо виконуються умови:

1. $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
2. $E_i \cap E \neq \varnothing$;
3. $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j$.

Означення 1.16. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді нецентрованою α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) = 0$).

Означення 1.17. α-мірною нецентрованою пакувальною квазімірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E).$$

Означення 1.18. α-мірною нецентрованою пакувальною мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 1.1. Якщо $M = \mathbb{R}^1$ і $\alpha = 1$, то α-мірна нецентрована пакувальна міра співпадає з α-мірною мірою Лебега.

Означення 1.19. Нецентрованою пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_{P(unc)}(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = 0\}.$$

У розділах 1.2.3 та 1.2.4 розглядаються узагальнення нецентрованої пакувальної розмірності, а саме пакувальна розмірність відносно сімейства куль та пакувальна розмірність відносно сімейства куль та міри. Ці узагальнення дозволяють вводити поняття «розмірність Біллінгслі» на відрізку $[0;1]$ та розглядати аналоги теорем Біллінгслі.

Означення 1.24. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε відносно сімейства Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu) := \sup\left\{\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням кулями з Φ множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu) = 0$).

Означення 1.25. α-мірною пакувальною квазімірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E, \Phi, \mu) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu).$$

Означення 1.26. α-мірною пакувальною мірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j,\Phi,\mu) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Означення 1.27. Пакувальною розмірністю множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\dim_P(E,\Phi,\mu) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu) = 0\}.$$

В пункті 1.3 «Порівняння фрактальних розмірностей» доводиться нерівність

$$\dim_H(E,\Phi,\mu) \leqslant \dim_P(E,\Phi,\mu)$$

для певного класу сімейств куль Φ та для довільної неперервної міри μ.

Крім того, вводиться поняття множин, регулярних за Tricot, та досліджуються їх властивості.

У **розділі 2 «Довірчість та порівнянність сімейств куль для обчислення пакувальної розмірності»** доводяться теореми про довірчість сімейств циліндрів s-адичного зображення дійсних чисел, $\tilde{Q}$-зображення (за певних умов), а також критерій довірчості сімейства циліндрів, породжених зображенням дійсних чисел рядами Кантора.

Отримані результати дають можливість використовувати аналоги теорем Біллінгслі для обчислення пакувальної розмірності; без інформації про довірчість сімейства Φ в переважній більшості випадків аналоги теорем Біллінгслі не є застосовними для обчислення пакувальної розмірності певної множини.

Означення 2.1. Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M : \dim_P(E,\Phi) = \dim_{P(unc)}(E).$$

Тоді Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Означення 2.2. Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M, \forall \alpha \geqslant 0 : \exists C > 0 : \mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha}(E).$$

Тоді Φ називається порівнянним для обчислення пакувальної розмірності.

Зауваження 2.2. Очевидно, що будь-яке порівнянне сімейство є і довірчим (для обчислення пакувальної розмірності).

Теорема 2.1 (Достатня умова порівнянності для обчислення пакувальної розмірності). *Нехай Φ — деяке сімейство проміжків з відрізка $[0; 1]$. Тоді для того, щоб Φ було порівнянним для обчислення пакувальної розмірності, достатньо, щоб існувала така константа $C > 0$, щоб для довільного проміжка $\langle a; b\rangle \subset [0; 1]$ знайшовся проміжок $\Delta(a, b) \in \Phi$ такий, що:*

1. *$\Delta(a, b)$ містить точку $\frac{a+b}{2}$;*
2. *$\Delta(a, b) \subset (a; b)$;*
3. *$\frac{b-a}{|\Delta(a,b)|} \geqslant C$.*

Теорема 2.2. *Нехай $s \geqslant 2$ — це фіксоване натуральне число, Φ — сімейство всіх s-адичних циліндричних інтервалів. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.*

Теорема 2.3. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів деякого $\tilde{Q}$-представлення (див. [86]). Нехай*

$$\inf_{i,j} q_{ij} := q_{\min} > 0.$$

Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

В пункті **2.4 «Аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної фрактальної розмірності»** доводяться аналоги тих теорем, які P. Billingsley сформулював для розмірності Хаусдорфа–Безиковича, і які є одними з ключових результатів у теорії $\dim_H$:

Теорема 2.4. *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — дві неперервні ймовірнісні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-го рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо число $\delta > 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \geqslant \delta \right\} \tag{2.1}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

Теорема 2.5. *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — неперервні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-того рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо певне число $\delta > 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta \right\}. \tag{2.2}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

У **пункті 2.5 «Критерій довірчості сімейства циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора для обчислення пакувальної розмірності»** нагадується означення рядів Кантора та доводиться критерій довірчості відповідного сімейства циліндричних інтервалів.

Нагадаємо означення представлення дійсних чисел рядами Кантора.

Означення 2.3. Для заданої послідовності $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, де

$n_k \in \mathbb{N} \setminus 1$, запис довільного числа $x \in [0;1]$ у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k} := \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}, \quad \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}$$

називається представленням числа x рядами Кантора.

Г. Кантор ввів такі представлення у 1869 році [27] як природні узагальнення класичного s-адичного представлення дійсних чисел.

Ці представлення та їх властивості інтенсивно досліджувалися багатьма математиками (див., наприклад, роботи [75,77] та посилання в них). Незважаючи на це, багато питань (наприклад, критерій раціональності певного числа в термінах цифр його представлення рядом Кантора) залишаються відкритими.

Теорема 2.6. *Сімейство Φ циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора є довірчим для обчислення пакувальної розмірності тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} = 0.$$

Ця теорема є першим відомим критерієм довірчості (для обчислення $\dim_P$) сімейств куль з певного класу.

У **пункті 2.6 «Приклад сімейства куль, яке є довірчим, але не є порівнянним для обчислення пакувальної розмірності»** показується принципова різниця між порівнянними та довірчими сімействами пакувань (зауважимо, що до робіт автора не було відомо жодного прикладу сімейств пакувань, які були б довірчі, але непорівнянні).

Теорема 2.7. *Нехай $n_k = 4^k$, а Φ — сімейство циліндрів відповідного представлення дійсних чисел рядами Кантора. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності на $[0;1]$, але не є порівнянним.*

Розділ 3 «Тонкі фрактальні властивості мір, пов'язані з пакувальною розмірністю. PDP–перетворення» присвячено дослідженню ймовірнісних мір, пов'язаних з випадковими величинами з незалежними $\tilde{Q}$-символами.

В **п. 3.1 «Основні означення та властивості»** наведено означення та основні властивості PDP–перетворень:

Означення 3.1. Нехай (M, ρ) — метричний простір, у якому визначена пакувальна розмірність. Нехай f є перетворенням цього метричного простору. Тоді ми будемо казати «f зберігає пакувальну розмірність», якщо виконується умова:

$$\forall E \subset M, \dim_P f(E) = \dim_P E.$$

Якщо f зберігає пакувальну розмірність, то його також називають PDP-перетворенням (від англійських слів «Packing dimension preserving»).

Дослідження PDP-перетворень є винятково важливим, оскільки дозволяє, знаючи пакувальну розмірність певної множини, дізнатися також пакувальну розмірність інших множин, які є образами даної множини при PDP-перетвореннях.

Означення 3.2. Нехай μ є деякою ймовірнісною мірою, визначеною на $[0; 1]$. Тоді пакувальною розмірністю міри μ називається число

$$\dim_P \mu := \inf\{\dim_P E : \mu(E) = 1\}.$$

Лема 3.1. *Нехай ξ — неперервна випадкова величина, розподілена на $[0; 1]$. Тоді для того, щоб F_ξ належала до PDP-класу, необхідно, щоб $\dim_P \mu_\xi = 1$.*

Пункт 3.2 присвячений дослідженню випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$-цифрами за умови, що $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$.

Для розглядуваних випадкових величин доводиться критерій належності функції розподілу в.в. з незалежними $\tilde{Q}$-символами до PDP–класу за умови $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$:

Теорема 3.3. *Нехай:*

$$p_j = \inf_i p_{ij}, \quad q_{\min} := \inf_{i,j} q_{ij}$$

$$T^{(1)} = \left\{ k : k \in \mathbb{N}, p_k < \frac{1}{2} q_{\min} \right\}$$

$$T_k^{(1)} = T^{(1)} \cap \{1, 2, \dots, k\},$$

$$B = \limsup_{k \to \infty} \frac{\sum_{j \in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_j}}{k}.$$

Припустимо, що $q_{\min} > 0$.

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ *зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно й достатньо, щоб*

$$\begin{cases} \dim_P \mu_\xi = 1; \\ B = 0. \end{cases}$$

Наслідок 3.1. *Якщо* $\inf_{i,j} p_{ij} > 0$ *і* $q_{\min} > 0$, *то* F_ξ *є PDP-перетворенням тоді і тільки тоді, коли* $\dim_P \mu_\xi = 1$.

В **пункті 3.3 «Випадкова величина з незалежними символами розкладу Кантора»**, базуючись на дослідженнях автора по пакувальній довірчості сімейств циліндрів, породжених рядами Кантора, обчислюється пакувальна розмірність ймовірнісної міри, пов'язаної з випадковою величиною з незалежними символами розкладу Кантора:

Теорема 3.4. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} \right)^2 < \infty,$$

то пакувальна розмірність міри μ_ξ *в.в.* ξ *з незалежними символами розкладу Кантора дорівнює*

$$\dim_P(\mu_\xi) = \limsup_{k \to \infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}, \qquad \text{де } H_k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n_j - 1} p_{ij} \ln p_{ij}$$

Якщо послідовність (n_k) є необмеженою, то проблема знаходження критерію збереження фрактальної пакувальної розмірності залишається відкритою. У той же час, використовуючи результати по обчисленню пакувальної розмірності міри з теореми 3.4, можна отримати необхідні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними цифрами розкладу Кантора:

Теорема 3.5. *Нехай ξ є випадковою величиною з незалежними символами розкладу Кантора. Нехай відповідний розклад Кантора задано послідовністю $\{n_k\}$, для якої виконується умова:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}\right)^2 < +\infty.$$

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно, щоб

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij}\ln p_i j}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} = 1.$$

Подяка. Автор щиро вдячний науковому керівнику професору Григорію Мирославовичу Торбіну за постановку задач, допомогу, підтримку та терпіння.

РОЗДІЛ 1
РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА ТА ПАКУВАЛЬНА ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ. ОГЛЯД ВІДОМИХ РЕЗУЛЬТАТІВ. ПОРІВНЯННЯ ФРАКТАЛЬНИХ РОЗМІРНОСТЕЙ

1.1. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича

Найвідомішою фрактальною розмірністю є розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H(\cdot)$. Крім того, $\dim_H$ має ті властивості, які зазвичай є стандартними для фрактальної розмірності, і розглядається в абсолютній більшості статей, порівняно з іншими розмірностями. Тому ми будемо постійно порівнювати пакувальну фрактальну розмірність з нею. Нагадаємо означення $\dim_H(\cdot)$ [1,2,39]:

Нехай (M,ρ) є метричним простором. Діаметром множини E називають число $|E| = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in E\}$. Для додатного числа ε називатимемо ε-покриттям множини E таке не більш ніж зліченне сімейство підмножин $\{E_i\}$, що $E \subset \cup_i E_i \subset M$, причому $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$.

Означення 1.1. Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа називається

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\inf_{|E_i|\leqslant\varepsilon}\left\{\sum_i |E_i|^\alpha\right\}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E),$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зліченних ε-покриттях $\{E_i\}$ множини E.

Величину $H^\alpha_\varepsilon(E)$ називають також передмірою Хаусдорфа множини E.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E)$ існує.

Нагадаємо деякі властивості міри Хаусдорфа [39]:

1. Нехай $0 < \alpha < \beta$. Тоді якщо $H^\alpha(E) < \infty$, то $H^\beta(E) = 0$; якщо ж $H^\beta(E) > 0$, то $H^\alpha(E) = \infty$;
2. Якщо f — перетворення подібності простору (M, ρ) з коефіцієнтом $k > 0$, то
$$H^\alpha(f(E)) = k^\alpha H^\alpha(E);$$
3. Якщо f — таке, що
$$\exists c > 0, s > 0 : \rho(f(x), f(y)) \leqslant c(\rho(x, y))^s, \forall x, y \in E,$$
то
$$\forall \alpha \in [0; 1] : H^{\alpha/s}(f(E)) \leqslant c^{\alpha/s} H^\alpha(E).$$

У роботі [54] Ф. Хаусдорф у 1918 році ввів означення:

Означення 1.2. Розмірністю множини E називається таке число $\alpha \geqslant 0$, що
$$0 < H^\alpha(E) < \infty.$$

Але існують множини для яких не визначена розмірність Хаусдорфа. Міра Хаусдорфа таких множин дорівнює або нулю, або нескінченності при всіх невід'ємних значеннях α. Перший приклад такої множини побудував А. С. Безикович. Він же запропонував нове означення розмірності, яка в сучасній математиці називається розмірністю Хаусдорфа–Безиковича.

Означення 1.3. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E називається число
$$\dim_H(E) := \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\}.$$

Нагадаємо деякі властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича [2].

1. **Інваріантність при перетвореннях подібності**: Якщо E_1 та E_2 — подібні (геометрично) множини, то $\dim_H(E_1) = \dim_H(E_2)$.
2. **Монотонність**: Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1) \leqslant \dim_H(E_2)$.
3. **зліченна стабільність**: $\dim_H(\cup_n E_n) = \sup_n \dim_H(E_n)$.

1.1.1. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича відносно локально тонкої системи покриттів. Розглянемо узагальнення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Нехай $E \subset M$.

Означення 1.4. Сімейство Φ підмножин метричного простору (M, ρ) називається локально тонкою системою покриттів (ЛТСП) цього простору, якщо для довільної множини $E \subset M$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття множини E множинами з Φ.

Нехай Φ є ЛТСП на (M, ρ).

Означення 1.5. Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно ЛТСП Φ називається число

$$H^\alpha(E, \Phi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{|E_i| \leqslant \varepsilon, E_i \in \Phi} \left\{ \sum_i |E_i|^\alpha \right\} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi),$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зліченних ε-покриттях $\{E_i\}$ множини E множинами з Φ.

Величину $H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi)$ називають також передмірою Хаусдорфа множини E відносно ЛТСП Φ.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi)$ існує.

Означення 1.6. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно ЛТСП Φ називається число

$$\dim_H(E, \Phi) := \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi) = 0\}.$$

Нагадаємо деякі властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича відносно ЛТСП Φ.

1. **Монотонність**: Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1, \Phi) \leqslant \dim_H(E_2, \Phi)$.
2. **Зліченна стабільність**: $\dim_H(\cup_n E_n, \Phi) = \sup_n \dim_H(E_n, \Phi)$.
3. Для довільної ЛТСП Φ виконується нерівність

$$\forall E \subset M, \dim_H(E, \Phi) \geqslant \dim_H(E).$$

4. Якщо $\Phi = 2^M$, то

$$\forall E \subset M, \dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E).$$

Означення 1.7. Якщо для деякої ЛТСП Φ виконується рівність

$$\forall E \subset M, \dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E),$$

то Φ називається довірчою ЛТСП для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

1.1.2. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича відносно локально тонкої системи покриттів та міри. Розглянемо узагальнення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Нехай $E \subset M$.

Нехай Φ є ЛТСП на (M, ρ). Нехай μ є неперервною мірою.

Означення 1.8. Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно ЛТСП Φ та міри μ називається число

$$H^\alpha(E, \Phi, \mu) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{|E_i| \leqslant \varepsilon, E_i \in \Phi} \left\{ \sum_i (\mu(E_i))^\alpha \right\} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu),$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зліченних ε-покриттях $\{E_i\}$ множини E множинами з Φ.

Величину $H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu)$ називають також передмірою Хаусдорфа відносно ЛТСП Φ та міри μ.

Оскільки при зменшенні ε інфімум визначається за біднішим класом ε-покриттів, то границя (скінченна чи нескінченна) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu)$ існує.

Означення 1.9. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно ЛТСП Φ та міри μ називається число

$$\dim_H(E, \Phi, \mu) := \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi, \mu) = 0\}$$

Нагадаємо деякі властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича відносно ЛТСП Φ та міри μ.

1. **Монотонність**: Якщо $E_1 \subset E_2$, то
   $\dim_H(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \dim_H(E_2, \Phi, \mu)$.
2. **Зліченна стабільність**: $\dim_H(\cup_n E_n, \Phi, \mu) = \sup_n \dim_H(E_n, \Phi, \mu)$.
3. Якщо виконується умова

$$\forall A \in \Phi, |A| = \mu(A),$$

   то $\dim_H(E, \Phi, \mu) = \dim_H(E, \Phi)$.

Частковим випадком $\dim_H(E, \Phi, \mu)$ є розмірність Біллінгслі [25], де в ролі Φ виступає сімейство циліндрів деякого представлення дійсних чисел, зокрема s-адичних циліндрів.

1.2. Пакувальна розмірність та її узагальнення

1.2.1. Звичайна (центрована) пакувальна розмірність. Означення центрованої пакувальної розмірності дамо так, як це зроблено в [39].

Нехай (M, ρ) — деякий метричний простір.

Означення 1.10. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж зліченне сімейство $\{E_i\}$ куль називається ε-пакуванням множини E, якщо виконуються умови:

1. $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
2. центр кожної з куль E_i належить множині E;
3. кулі E_i попарно не перетинаються.

Зауваження 1.1. Порожня множина куль також вважається пакуванням.

Зауваження 1.2. В одному пакуванні можуть бути і відкриті, і замкнені кулі.

Зауваження 1.3. При означенні розмірності Хаусдорфа–Безиковича зазвичай [1] розглядають лише такі метричні простори, у яких для довільного

$\varepsilon > 0$ і для довільної множини E існує не більш ніж зліченне ε-покриття цієї множини.

При означенні пакувальної розмірності немає обмежень на метричний простір, оскільки у довільному метричному просторі для довільної непорожньої множини E та $\varepsilon > 0$ існує порожнє пакування.

Означення 1.11. Нехай $E \subset M$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром ε елементів пакування називається число

$$\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^\alpha\right\},$$

де супремум береться по всеможливим ε-пакуванням множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E) = 0$).

Зауваження 1.4. **Властивості пакувальної передміри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_1) \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_2)$;
2. **скінченна напівадитивність:** $\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_1) + \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_2)$;
3. $\forall \delta > 0 : \mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha+\delta}(E) \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E) \cdot \varepsilon^\delta$.

Доведення. **1)** Якщо $E_1 \subset E_2$, то будь-яке пакування множини E_1 є також пакуванням множини E_2. Отже,

$$\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_1) \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E_2).$$

2) Нехай $\{E_i\}$ — довільне ε-пакування множини $A \cup B$. Позначимо через $\mathcal{A}$ сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать A, а через $\mathcal{B}$ — сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать $B \setminus A$ (одне з цих сімейств може виявитись порожнім). Тоді

$$\sum_i |E_i|^\alpha = \sum_{i:E_i\in\mathcal{A}} |E_i|^\alpha + \sum_{i:E_i\in\mathcal{B}} |E_i|^\alpha \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(A) + \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(B).$$

Оскільки нерівність

$$\sum_i |E_i|^\alpha \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(A) + \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(B)$$

виконується для довільного пакування $\{E_i\}$ множини $A \cup B$, то

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(A \cup B) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(A) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(B)$$

3) Розглянемо довільне пакування множини E, яке складається з куль E_i. $(\alpha + \delta)$-об'єм цього пакування дорівнює

$$V_{\alpha+\delta} = \sum_i |E_i|^{\alpha+\delta} = \sum_i |E_i|^{\alpha} \cdot |E_i|^{\delta} \leqslant \sum_i |E_i|^{\alpha} \cdot \varepsilon^{\delta} = V_{\alpha} \cdot \varepsilon^{\delta}.$$

Оскільки отримана нерівність виконується для довільного пакування, то вона буде виконуватися і для супремума. Тобто

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{\varepsilon}(E) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E) \cdot \varepsilon^{\delta},$$

що й вимагалось довести. □

Означення 1.12. α-мірною пакувальною квазімірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E).$$

Зауваження 1.5. **Властивості пакувальної квазіміри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_1) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_2)$;
2. **скінченна напівадитивність:**$\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_1) + \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_2)$;
3. **відсутність зліченної напівадитивності:** існує зліченний набір множин $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ такий, що $\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(\cup_i E_i) > \sum_{i=0} \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_i)$;
4. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E) < \infty$, то $\forall \delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{0}(E) = 0$;
5. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall \delta \in (0; \alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{0}(E) = +\infty$.

Доведення. Перші два твердження отримуються з аналогічних тверджень для передміри за допомогою граничного переходу.

3) Нехай $(M, \rho) = \mathbb{R}^1$, $\alpha = 1$, а всі E_i є одноточковими множинами, а їх об'єднання співпадає з множиною $E = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$.

Очевидно, що $\alpha - \varepsilon$ пакувальна передміра одноточкової множини дорівнює ε^{α}, зокрема $\mathcal{P}^{1}_{0}(E_i) = 0, \forall i$. Також очевидно, що

$$\mathcal{P}^{1}_{\varepsilon}(E) = \mathcal{P}^{1}_{\varepsilon}([0; 1]),$$

і при достатньо малих ε останнє число практично не відрізняється від $1+\varepsilon$.

Спрямовуючи ε до нуля, маємо $\mathcal{P}_0^1(E_i) = 0, \forall i$. Але $\mathcal{P}_0^1(E) = 1 > \sum_i \mathcal{P}_0^1(E_i)$.

4) Нехай $\mathcal{P}_0^\alpha(E) < \infty$. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Як відомо з властивостей пакувальної передміри,

$$\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha+\delta}(E) \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E) \cdot \varepsilon^\delta.$$

Обчислюючи границю при $\varepsilon \to 0$ у обох частинах останньої нерівності, маємо:

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E) \leqslant \mathcal{P}_0^\alpha(E) \cdot 0 = 0,$$

що й вимагалось довести.

5) Нехай $\alpha > 0$, $\mathcal{P}_0^\alpha(E) > 0$, $\delta \in (0; \alpha)$. Від супротивного. Припустимо, що $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E) < \infty$. Тоді (згідно з властивістю 4) $\mathcal{P}_0^\alpha(E) = 0$, що суперечить умові. Отже, припущення невірне, і $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E) = \infty$, що й вимагалось довести. □

Означення 1.13. α-мірною пакувальною мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^\alpha(E) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 1.6. **Властивості пакувальної міри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^\alpha(E_1) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2)$;
2. **зліченна напівадитивність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\mathcal{P}^\alpha(\cup_i E_i) \leqslant \sum_i \mathcal{P}^\alpha(E_i);$$

3. якщо $\mathcal{P}^\alpha(E) < \infty$, то $\forall \delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E) = 0$;

4. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}(E) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall \delta \in (0; \alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E) = +\infty$.

Доведення. **1)**. Нехай $E_1 \subset E_2$, $m_1 = \mathcal{P}^{\alpha}(E_1)$, $m_2 = \mathcal{P}^{\alpha}(E_2)$. Від супротивного. Припустимо, що $m_1 > m_2$. Тоді існує таке покриття $\{E_{2j}\}$ множини E_2, що

$$m_1 > \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{2j}).$$

Оскільки $\{E_{2j}\}$ є покриттям множини E_1, то

$$m_1 \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{2j}).$$

Отримана суперечність показує, що припущення невірне. Отже, $m_1 \leqslant m_2$, що й вимагалось довести.

2). Введемо позначення:

$$m_i := \mathcal{P}^{\alpha}(E_i),$$
$$E := \bigcup_i E_i,$$
$$m := \mathcal{P}^{\alpha}(E).$$

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Оскільки

$$m_i = \mathcal{P}^{\alpha}(E_i) = \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{ij}) : E_i \subset \bigcup E_{ij}\right\},$$

то $\forall i \in \mathbb{N}$ існує таке покриття множини E_i множинами E_{ij}, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{ij}) \leqslant m_i + \frac{\delta}{2^i}.$$

Тому

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{ij}) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки набір множин $\{E_{ij} : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ є покриттям множини E, то

$$m = \mathcal{P}^{\alpha}(E) \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{ij}).$$

Отже,

$$m \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{ij}) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки остання нерівність виконується $\forall \delta > 0$, то $m \leqslant \sum_i m_i$, що й вимагалось довести.

3) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E) < \infty$. Тоді існує таке покриття $\{E_j\}$ множини E, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j) < \infty.$$

Тоді

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j) < \infty, \forall j \in \mathbb{N}.$$

З властивості 4 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j) = 0, \forall j \in \mathbb{N}, \forall \delta > 0.$$

Тому

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E) \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j) = 0.$$

Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E) = 0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E) > 0$ і $\alpha > 0$. Тоді для будь-якого покриття $\{E_j\}$ множини E існує така множина E_{j_0}, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{j_0}) > 0.$$

Зафіксуємо $\delta \in (0; \alpha)$. З властивості 5 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_{j_0}) = \infty.$$

Отже,

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_j) = \infty.$$

Оскільки остання рівність виконується для довільного покриття $\{E_j\}$ множини E, то

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E) = \infty,$$

що й вимагалось довести. $\square$

Зауваження 1.7. Якщо $M \subset \mathbb{R}^1$ і $\alpha = 1$, то α-мірна пакувальна міра співпадає з α-мірною мірою Лебега.

Означення 1.14. Пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_P(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = 0\}.$$

Зауваження 1.8. **Властивості пакувальної розмірності:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_P(E_1) \leqslant \dim_P(E_2)$;
2. **зліченна стабільність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\dim_P(\cup_i E_i) = \sup_i \dim_P(E_i).$$

Доведення. **1)** Введемо позначення: $\alpha_i := \dim_P(E_i)$, де $i \in \{1, 2\}$. Нехай $\alpha > \alpha_2$. Тоді

$$\mathcal{P}^\alpha(E_2) = 0,$$

а оскільки

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2),$$

то і

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1) = 0, \forall \alpha > \alpha_2$$

Отже,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2,$$

що й вимагалось довести.

2) Нехай $\dim_P(E_i) = \alpha_i$, а $\dim_P(E) = \alpha$. Оскільки

$$E_i \subset E, \forall i,$$

то і

$$\alpha_i \leqslant \alpha, \forall i.$$

Отже, ми показали, що

$$\alpha \geqslant \sup_i \alpha_i.$$

Покажемо, що

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Від супротивного. Нехай

$$\exists \delta > 0 : \alpha > \alpha_i + \delta, \forall i.$$

Тоді

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E_i) = 0 \forall i,$$

і тому

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E) = 0,$$

тобто

$$\dim_P(E) \leqslant \alpha - \delta/2,$$

що суперечить припущенню $\dim_P(E) = \alpha$. Отже,

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Тому $\alpha = \sup_i \alpha_i$, що й вимагалось довести. □

1.2.2. Нецентрована пакувальна розмірність. У розмірності Хаусдорфа–Безиковича є узагальнення «розмірність Хаусдорфа–Безиковича відносно сімейства множин» та «розмірність Біллінгслі». На цих узагальненнях засновані потужні підходи до обчислення $\dim_H$ багатьох множин та мір, зокрема підхід довірчості (детальніше цей підхід описаний, наприклад, в [87]).

Нагадаємо, що суть підходу довірчості коротко можна пояснити так: якщо при обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича використовувати лише покриття множини E лише множинами з деякого (наперед зафіксованого) сімейства Φ, то може бути отримане, взагалі кажучи, інше значення розмірності, яке позначають $\dim_H(E, \Phi)$. Але якщо $\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset M$, то сімейство множин Φ називається довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Використання підходу довірчості може суттєво спростити обчислення розмірності. Це спрощення досягається завдяки тому, що інфімум шукається по покриттям не всіма множинами, а множинами, взятими з деякого зручного і довірчого класу. Наприклад, знаючи, що сімейство трійкових циліндрів є довірчим, набагато зручніше шукати розмірність класичної множини Кантора, покриваючи її трійковими циліндрами, а не довільними множинами.

Повноцінному застосуванню аналогічних підходів у дослідженні пакувальної розмірності заважає умова «центри куль повинні належати множині, пакувальна передміра якої обчислюється» в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(\cdot)$.

Розглянемо приклад, щоб з'ясувати, як саме вищезгадана умова заважає ввести поняття довірчості для обчислення $\dim_P$ по аналогії з довірчістю для обчислення $\dim_H$.

Приклад 1.1. Нехай $M = [0; 1]$. Тоді жодне зчисленне сімейство інтервалів не є довірчим для обчислення пакувальної розмірності на M.

Доведення. Нехай $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k, \dots\}$ — деяке зчисленне сімейство інтервалів на $[0; 1]$. Позначимо центр інтервала Φ_k через c_k, а множину $\{c_1, c_2, \dots, c_k, \dots\}$ — через C. Розглянемо множину $E = [0; 1] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_k, \dots\}$. Оскільки $\dim_P([0; 1]) = 1$, а $\dim_P(C) = 0$ (розмірність будь-якої зліченної множини дорівнює нулю), то в силу зліченної стабільності $\dim_P(E) = 1$.

Розглянемо $\dim_P(E,\Phi)$. Оскільки множина E не містить жодного центру куль з Φ, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує лише порожнє ε-пакування множини E кулями з Φ. Тому $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\Phi) = 0, \forall\alpha > 0$.

Отже, $\mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E,\Phi) = 0, \forall\alpha > 0$, $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi) = 0, \forall\alpha > 0$, і тому $\dim_P(E,\Phi) = 0$.

Отже, зліченне сімейство інтервалів Φ не є довірчим на $[0;1]$ для обчислення пакувальної розмірності. □

Попередній приклад показує, що велика кількість результатів по довірчості зліченних сімейств покриттів, отриманих для $\dim_H$ (наприклад, результати про довірчість сімейства циліндрів s-адичного представлення та багатьох його узагальнень) є незастосовними для $\dim_P$. Також втрачається можливість використовувати аналоги теорем Біллінгслі, хоча в теорії $\dim_H$ теореми Біллінгслі посідають одне з ключових місць.

Щоб позбутися умови «центри куль повинні належати множині, пакувальна передміра якої обчислюється», введемо в розгляд поняття «нецентрована пакувальна розмірність».

Означення 1.15. Нехай $E \subset M$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж зліченне сімейство $\{E_i\}$ куль називається «нецентрованим ε-пакуванням множини E», якщо виконуються умови:

1. $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
2. $E_i \cap E \neq \varnothing$;
3. $E_i \cap E_j \neq \varnothing$.

Зауваження 1.9. Порожня множина куль також вважається нецентрованим пакуванням.

Означення 1.16. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді нецентрованою α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^\alpha\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) = 0$).

Зауваження 1.10. **Властивості нецентрованої пакувальної передміри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_1) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_2)$;
2. **скінченна напівадитивність:**

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_1) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_2)$$

3.

$$\forall \delta > 0 : \mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{\varepsilon(unc)}(E) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) \cdot \varepsilon^\delta$$

.

Доведення. **1)** Якщо $E_1 \subset E_2$, то будь-яке нецентроване пакування множини E_1 є також нецентрованим пакуванням множини E_2. Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_1) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E_2).$$

2) Нехай $\{E_i\}$ — довільне нецентроване ε-пакування множини $A \cup B$. Позначимо через $\mathcal{A}$ сімейство тих куль із вказаного пакування, які мають непустий перетин з A, а через $\mathcal{B}$ — сімейство тих куль із вказаного пакування, які мають непустий перетин з B, проте не перетинаються з A (одне з цих сімейств може виявитись порожнім). Тоді

$$\sum_i |E_i|^\alpha = \sum_{i:E_i\in\mathcal{A}} |E_i|^\alpha + \sum_{i:E_i\in\mathcal{B}} |E_i|^\alpha \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(A) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(B).$$

Оскільки нерівність

$$\sum_i |E_i|^\alpha \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(A) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(B)$$

виконується для довільного нецентрованого пакування $\{E_i\}$ множини $A \cup B$, то

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(A \cup B) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(A) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(B)$$

3) Розглянемо довільне нецентроване пакування множини E, яке складається з куль E_i. $(\alpha + \delta)$-об'єм цього пакування дорівнює

$$V_{\alpha+\delta} = \sum_i |E_i|^{\alpha+\delta} = \sum_i |E_i|^{\alpha} \cdot |E_i|^{\delta} \leqslant \sum_i |E_i|^{\alpha} \cdot \varepsilon^{\delta} = V_{\alpha} \cdot \varepsilon^{\delta}.$$

Оскільки отримана нерівність виконується для довільного пакування, то вона буде виконуватися і для супремума. Тобто

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{\varepsilon(unc)}(E) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) \cdot \varepsilon^{\delta},$$

що й вимагалось довести. □

Означення 1.17. α-мірною нецентрованою пакувальною квазімірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E).$$

Зауваження 1.11. **Властивості нецентрованої пакувальної квазіміри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_1) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_2)$;
2. **скінченна напівадитивність:**

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_1) + \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_2)$$

3. **відсутність зліченної напівадитивності:** існує зліченний набір множин $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ такий, що $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(\cup_i E_i) > \sum_{i=0} \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_i)$;
4. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) < \infty$, то $\forall \delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{0(unc)}(E) = 0$;
5. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall \delta \in (0; \alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{0(unc)}(E) = +\infty$.

Доведення. Перші два твердження отримуються з аналогічних тверджень для передміри за допомогою граничного переходу.

3) Нехай $(M,\rho) = \mathbb{R}^1$, $\alpha = 1$, а всі E_i є одноточковими множинами, а їх об'єднання співпадає з множиною $[0;1] \cap \mathbb{Q}$.

Тоді $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_i) = 0, \forall i$. Але $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(\cup_i E_i) = 1$.

4) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) < \infty$. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Як відомо з властивостей нецентрованої пакувальної передміри,

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{\varepsilon(unc)}(E) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon(unc)}(E) \cdot \varepsilon^{\delta}.$$

Обчислюючи границю при $\varepsilon \to 0$ у обох частинах останньої нерівності, маємо:

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{0(unc)}(E) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) \cdot 0 = 0,$$

що й вимагалось довести.

5) Нехай $\alpha > 0$, $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) > 0$, $\delta \in (0;\alpha)$. Від супротивного. Припустимо, що $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{0(unc)}(E) < \infty$. Тоді (згідно з властивістю 4) $\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) = 0$, що суперечить умові. Отже, припущення невірне, і $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{0(unc)}(E) = \infty$, що й вимагалось довести. □

Означення 1.18. α-мірною пакувальною мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 1.12. **Властивості нецентрованої пакувальної міри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_1) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_2)$;
2. **зліченна напівадитивність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(\cup_i E_i) \leqslant \sum_i \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_i).$$

3. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) < \infty$, то $\forall\delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{(unc)}(E) = 0$;
4. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall\delta \in (0;\alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{(unc)}(E) = +\infty$.

Доведення. **1)**. Нехай $E_1 \subset E_2$, $m_1 = \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_1)$, $m_2 = \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_2)$. Від супротивного. Припустимо, що $m_1 > m_2$. Тоді існує таке покриття $\{E_{2j}\}$ множини E_2, що

$$m_1 > \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{2j}).$$

Оскільки $\{E_{2j}\}$ є покриттям множини E_1, то

$$m_1 \leqslant \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{2j}).$$

Отримана суперечність показує, що припущення невірне. Отже, $m_1 \leqslant m_2$, що й вимагалось довести.

2). Введемо позначення:

$$m_i := \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_i),$$
$$E := \bigcup_i E_i,$$
$$m := \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E).$$

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Оскільки

$$m_i = \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_i) = \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{ij}) : E_i \subset \bigcup E_{ij}\right\},$$

то $\forall i \in \mathbb{N}$ існує таке покриття множини E_i множинами E_{ij}, що

$$\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{ij}) \leqslant m_i + \frac{\delta}{2^i}.$$

Тому

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_{ij}) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки набір множин $\{E_{ij} : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ є покриттям множини E, то

$$m = \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{ij}).$$

Отже,

$$m \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{ij}) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки остання нерівність виконується $\forall \delta > 0$, то $m \leqslant \sum_i m_i$, що й вимагалось довести.

3) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) < \infty$. Тоді існує таке покриття $\{E_j\}$ множини E, що

$$\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) < \infty.$$

Тому

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) < \infty, \forall j \in \mathbb{N}.$$

З властивості 4 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{0(unc)}(E_j) = 0, \forall j \in \mathbb{N}, \forall \delta > 0.$$

Тому

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{0(unc)}(E) \leqslant \sum_j \mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{0(unc)}(E_j) = 0.$$

Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{(unc)}(E) = 0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) > 0$ і $\alpha > 0$. Тоді для будь-якого покриття $\{E_j\}$ множини E існує така множина E_{j_0}, що

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_{j_0}) > 0.$$

Зафіксуємо $\delta \in (0; \alpha)$. З властивості 5 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{0(unc)}(E_{j_0}) = \infty.$$

Отже,

$$\sum_j \mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{0(unc)}(E_j) = \infty.$$

Оскільки остання рівність виконується для довільного покриття $\{E_j\}$ множини E, то

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta}_{(unc)}(E) = \infty,$$

що й вимагалось довести. $\square$

Зауваження 1.13. Якщо $M = \mathbb{R}^1$ і $\alpha = 1$, то α-мірна нецентрована пакувальна міра співпадає з одновимірною мірою Лебега (на вимірних за Лебегом множинах).

Означення 1.19. Нецентрованою пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_{P(unc)}(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = 0\}.$$

Зауваження 1.14. **Властивості нецентрованої пакувальної розмірності:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_{P(unc)}(E_1) \leqslant \dim_{P(unc)}(E_2)$;
2. **зліченна стабільність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\dim_{P(unc)}(\cup_i E_i) = \sup_i \dim_{P(unc)}(E_i).$$

Доведення. **1)** Введемо позначення: $\alpha_i := \dim_{P(unc)}(E_i)$, де $i \in \{1, 2\}$. Нехай $\alpha > \alpha_2$. Тоді

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_2) = 0,$$

а оскільки

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_1) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_2),$$

то і

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E_1) = 0, \forall \alpha > \alpha_2$$

Отже,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2,$$

що й вимагалось довести.

2) Нехай $\dim_{P(unc)}(E_i) = \alpha_i$, а $\dim_{P(unc)}(E) = \alpha$. Оскільки

$$E_i \subset E, \forall i,$$

то і

$$\alpha_i \leqslant \alpha, \forall i.$$

Отже, ми показали, що

$$\alpha \geqslant \sup_i \alpha_i.$$

Покажемо, що

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Від супротивного. Нехай

$$\exists \delta > 0 : \alpha > \alpha_i + \delta, \forall i.$$

Тоді

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}_{(unc)}(E_i) = 0, \forall i,$$

і тому

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}_{(unc)}(E) = 0,$$

тобто

$$\dim_{P(unc)}(E) \leqslant \alpha - \delta/2,$$

що суперечить припущенню $\dim_{P(unc)}(E) = \alpha$. Отже,

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Тому $\alpha = \sup_i \alpha_i$, що й вимагалось довести. □

Теорема 1.1. *Нехай для метричного простору (M, ρ) існує така константа C, що для довільного $r > 0$ у довільній кулі радіуса $8r$ міститься не більше, ніж C неперетинних куль радіуса r. Тоді*

$$\dim_{P(unc)}(E) = \dim_P(E), \forall E \subset M.$$

Доведення. **Крок 1:**Покажемо, що $\dim_{P(unc)}(E) \geqslant \dim_P(E)$.

Числа $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ та $\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E)$ є супремумами, причому перше з них — це супремум, взятий по більшій множині. Тому

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E).$$

Оскільки граничний перехід зберігає нестрогу нерівність, то

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E).$$

Розглянемо довільне покриття множини E множинами E_j. Проводячи міркування, аналогічні попереднім, отримаємо нерівності

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_j).$$

та

$$\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) \geqslant \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_j).$$

Для покриття $\{E_j\}$ виконується нерівність

$$\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_j) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}(E),$$

тому що $\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E)$ — це інфімум.

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття E_j, що

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{unc}(E) + \varepsilon \geqslant \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j).$$

Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{unc}(E) + \varepsilon \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}(E), \forall \varepsilon > 0.$$

Тому

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{unc}(E) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}(E).$$

Нехай $\dim_{P(unc)}(E) = \alpha_0$. За означенням $\dim_{P(unc)}(E)$ маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}_{(unc)}(E) = 0.$$

Звідси

$$\mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}(E) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}_{unc}(E) = 0,$$

а тому

$$\dim_P(E) \leqslant \alpha_0 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Отже, $\dim_{P(unc)}(E) \geqslant \dim_P(E)$, що й вимагалось довести.

Крок 2: Покажемо, що $\dim_{P(unc)}(E) \leqslant \dim_P(E)$.

Коли $\dim_{P(unc)}(E) = 0$, твердження очевидне.

Розглянемо випадок, коли $\dim_{P(unc)}(E) \neq 0$.

Нехай $0 < t < s < \dim_{P(unc)}(E)$.

Оскільки $s < \dim_{P(unc)}(E)$, то

$$\mathcal{P}^s_{(unc)}(E) = +\infty,$$
$$\mathcal{P}^s_{0(unc)}(E) = +\infty.$$

Отже,

$$\forall r > 0 : \mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) = +\infty,$$

а оскільки остання величина є супремумом, то існує нецентроване пакування $V := \{E_i\}$ множини E, для якого

$$\sum_i |E_i|^s > 1. \tag{1.1}$$

Розіб'ємо це пакування V на класи

$$V_k := \left\{E_i : 2^{-k-1} \leqslant |E_i| < 2^{-k}\right\}$$

Позначимо кількість куль у класі V_k через n_k і покажемо, що

$$\exists k_0 : n_{k_0} \geqslant 2^{k_0 t}(1 - 2^{t-s}).$$

Від супротивного. Припустимо, що

$$n_k < 2^{kt}(1 - 2^{t-s}).$$

Тоді

$$\sum_i |E_i|^s < \sum_k 2^{-ks} \cdot n_k < \sum_k 2^{-ks} \cdot 2^{kt}(1 - 2^{t-s}) = (1 - 2^{t-s}) \cdot \sum_k (2^{t-s})^k = 1,$$

що суперечить (1.1).

Отже, k_0, про яке говорилось вище, існує. Розглянемо набір V_{k_0}. Позначимо кулі в ньому так:

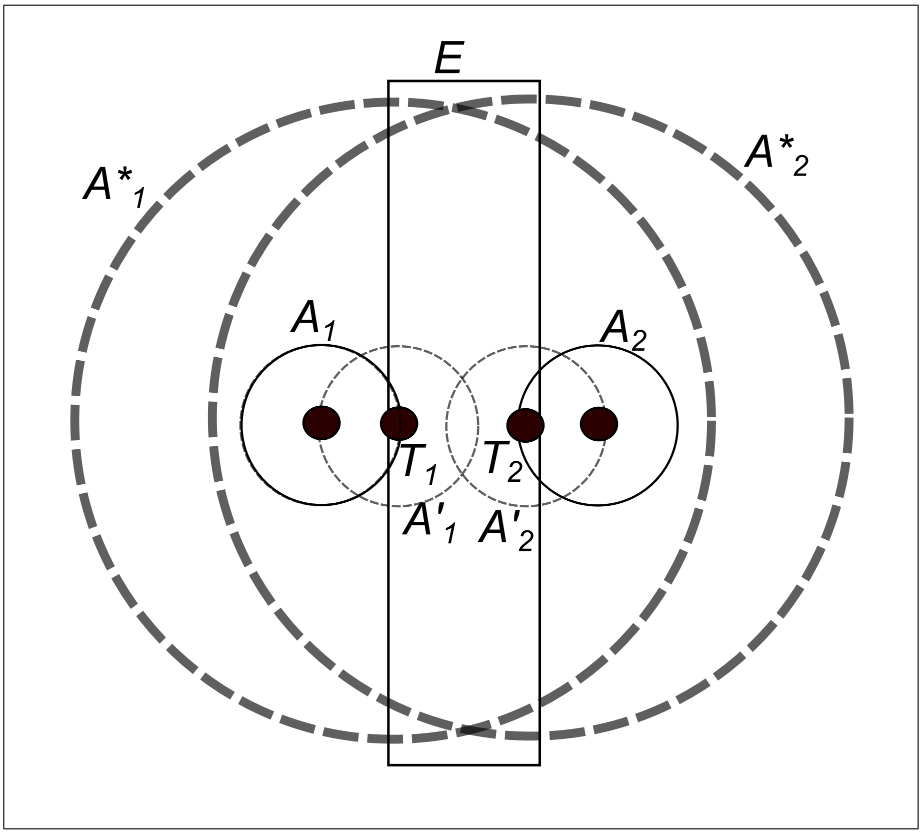
$$V_{k_0} = \left\{A_1, A_2, \ldots, A_{n_{k_0}}\right\}$$

Введемо позначення: $r = 2^{-k_0-1}$. Тоді радіус кожної з куль A_i менший за r. Нехай T_i — це одна з точок перетину кулі A_i з множиною E. Розглянемо множину V', яка складається з куль, центрами яких є точки T_i, а радіуси дорівнюють r:

$$V' = \{A'_i : A'_i = B(T_i, r)\}.$$

Також розглянемо ще одну множину куль:

$$V^* = \{A^*_i : A^*_i = B(T_i, 4r)\}.$$



Розділимо множину V' на класи $K_1, K_2, \ldots, K_l$ за таким принципом:

1. Візьмемо кулю $A'_{j_1} = A'_1$ і віднесемо до класу K_1 цю кулю, а також всі кулі з множини V', які з нею перетинаються.
2. Візьмемо довільну кулю $A'_{j_2} \in V' \setminus K_1$ і віднесемо до класу K_2 цю кулю, а також всі кулі з множини $V' \setminus K_1$, які з нею перетинаються.
3. Візьмемо довільну кулю $A'_{j_3} \in V' \setminus (K_1 \cup K_2)$ і віднесемо до класу K_3 цю кулю, а також всі кулі з множини $V' \setminus (K_1 \cup K_2)$, які з нею перетинаються.
4. Цей процес продовжимо до тих пір, поки кожна куля з V' не буде належати до якогось класу. Оскільки у V' скінченна кількість куль, то і процес буде скінченний.

Припустимо, що кулі A'_i та A'_j перетинаються. Це значить, що відстань між їх центрами не перевищує $2r$. Також це значить, що відстань між центрами куль A^*_i та A_j не перевищує $3r$. Отже, куля A_j міститься в кулі з центром T_i і радіусом $4r$, тобто в кулі A^*_i.

Радіус кулі A_j не менший за $r/2$. За умовою теореми, в кулі радіуса $4r$ може міститися не більше, ніж C неперетинних куль радіуса $r/2$ (і, зрозуміло, не більше, ніж C неперетинних куль радіуса $\geqslant r/2$). Отже, до кожного з класів K_i може належати не більше, ніж C куль.

Крім того, кулі виду A'_{j_i} та A'_{j_m} не перетинаються між собою при $i < m$. Справді, якби ці кулі перетиналися, то A'_{j_m} знаходилася б у класі K_i або у класі з номером, меншим за i.

Тому множина куль

$$V'' = \{A'_{j_1}, A'_{j_2}, \ldots, A'_{j_l}\}$$

є центрованим пакуванням множини E, причому t-об'єм цього пакування менший за t-об'єм нецентрованого пакування V_{k_0} не більше, ніж у C разів.

Отже,

$$\sum_{V''} |A'_{j_i}|^t \geqslant n_{k_0} \cdot \frac{2^{-k_0 t}}{C} \geqslant 2^{k_0 t}(1 - 2^{t-s}) \cdot \frac{2^{-k_0 t}}{C} = \frac{1 - 2^{t-s}}{C}.$$

Звідси випливає, що

$$\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geqslant \frac{1 - 2^{t-s}}{C},$$

а оскільки $2^{-k_0} < r$, то і

$$\mathcal{P}^t_r(E) \geqslant \frac{1 - 2^{t-s}}{C},$$

причому остання нерівність виконується для довільного $r > 0$.

Звідси випливає, що та сама нерівність виконується і для границі при $r \to 0$:

$$\mathcal{P}^t_0(E) \geqslant \frac{1 - 2^{t-s}}{C}.$$

Покажемо, що $\mathcal{P}^t(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C}$. Нагадаємо, що

$$\mathcal{P}^t(E) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}^t_0(E_j) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям множини E множинами E_j.

Розглянемо довільне не більш ніж зліченне покриття $\{E_j\}$ множини E. Оскільки $\dim_{P(unc)}(E) > s$, то серед множин E_j існує така множина E_{j_0}, для якої $\dim_{P(unc)}(E_{j_0}) > s$ (в силу зліченної стабільності $\dim_{P(unc)}$). Це значить, що для цієї множини E_{j_0} виконаються нерівності

$$\mathcal{P}^s_{(unc)}(E_{j_0}) = +\infty,$$
$$\mathcal{P}^s_{0(unc)}(E_{j_0}) = +\infty,$$

і, повторюючи для множини E_{j_0} ті міркування, які вище були проведені для E, ми приходимо до висновку, що

$$\mathcal{P}^t_0(E_{j_0}) \geqslant \frac{1 - 2^{t-s}}{C}$$

і

$$\sum_j \mathcal{P}_0^t(E_j) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C},$$

причому ця нерівність виконується для довільного покриття $\{E_j\}$ множини E, а отже, і для інфімуму по всім покриттям. Отже,

$$\mathcal{P}^t(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C}$$

і

$$\dim_P(E) \geqslant t.$$

Оскільки t може бути як завгодно близьким до $\dim_{P(unc)}(E)$, то $\dim_P(E) \geqslant \dim_{P(unc)}(E)$, що й вимагалось довести. □

Наслідок 1.1. *Якщо* $M = \mathbb{R}^n$, *то* $\dim_{P(unc)}(E) = \dim_P(E)$.

Доведення. Нехай B_{8r} — куля радіуса $8r$, B_r — куля радіуса r, а $\lambda(\cdot)$ — n-вимірна міра Лебега. Тоді

$$\lambda(B_{8r}) = 8^n \cdot \lambda(B_r).$$

Отже, у довільній кулі радіуса $8r$ може поміститися не більше, ніж $C = 8^n$ неперетинних куль радіуса r, і простір $\mathbb{R}^n$ задовольняє умови попередньої теореми. □

1.2.3. Пакувальна розмірність відносно сімейства множин. Зафіксуємо деяке сімейство Φ куль з простору M. ε-пакування множини $E \subset M$ кулями з Φ будемо називати $\varepsilon - \Phi$-пакуванням множини E.

Означення 1.20. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε відносно сімейства Φ називається число

$$\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E,\Phi) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^\alpha\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим $\varepsilon - \Phi$-пакуванням кулями з Φ множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi) = 0$).

Зауваження 1.15. **Властивості пакувальної передміри відносно сімейства куль:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_1, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_2, \Phi)$;
2. **скінченна напівадитивність:**

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_1 \cup E_2, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_1, \Phi) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_2, \Phi)$$

3. $\forall \delta > 0 : \mathcal{P}^{\alpha+\delta}_{\varepsilon}(E, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi) \cdot \varepsilon^{\delta}$.

Доведення. **1)** Якщо $E_1 \subset E_2$, то будь-яке $\varepsilon - \Phi$-пакування множини E_1 є також $\varepsilon - \Phi$-пакуванням множини E_2. Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_1, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E_2, \Phi).$$

2) Нехай $\{E_i\}$ — довільне ε-пакування множини $A \cup B$ кулями з Φ. Позначимо через $\mathcal{A}$ сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать A, а через $\mathcal{B}$ — сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать $B \setminus A$ (одне з цих сімейств може виявитись порожнім). Тоді

$$\sum_i |E_i|^{\alpha} = \sum_{i: E_i \in \mathcal{A}} |E_i|^{\alpha} + \sum_{i: E_i \in \mathcal{B}} |E_i|^{\alpha} \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(A, \Phi) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(B, \Phi).$$

Оскільки нерівність

$$\sum_i |E_i|^{\alpha} \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(A, \Phi) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(B, \Phi)$$

виконується для довільного пакування $\{E_i\}$ множини $A \cup B$, то

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(A \cup B, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(A, \Phi) + \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(B, \Phi).$$

3) Розглянемо довільне пакування множини E, яке складається з куль E_i з сімейства Φ. $(\alpha + \delta)$-об'єм цього пакування дорівнює

$$V_{\alpha+\delta} = \sum_i |E_i|^{\alpha+\delta} = \sum_i |E_i|^{\alpha} \cdot |E_i|^{\delta} \leqslant \sum_i |E_i|^{\alpha} \cdot \varepsilon^{\delta} = V_{\alpha} \cdot \varepsilon^{\delta}.$$

Оскільки отримана нерівність виконується для довільного пакування, то вона буде виконуватися і для супремума. Тобто

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha+\delta}(E,\Phi) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E,\Phi)\cdot\varepsilon^{\delta},$$

що й вимагалось довести. □

Означення 1.21. α-мірною пакувальною квазімірою множини E відносно сімейства куль Φ називається число

$$\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E,\Phi) := \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E,\Phi).$$

Зауваження 1.16. **Властивості пакувальної квазіміри відносно сімейства куль:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E_1,\Phi) \leqslant \mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E_2,\Phi)$;
2. **скінченна напівадитивність:**

$$\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E_1\cup E_2,\Phi) \leqslant \mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E_1,\Phi) + \mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E_2,\Phi);$$

3. якщо $\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E,\Phi) < \infty$, то $\forall\delta > 0$ $\mathcal{P}_{0}^{\alpha+\delta}(E,\Phi) = 0$;
4. якщо $\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall\delta\in(0;\alpha)$ $\mathcal{P}_{0}^{\alpha-\delta}(E,\Phi) = +\infty$.

Доведення. Перші два твердження отримуються з аналогічних тверджень для передміри за допомогою граничного переходу.

3) Нехай $\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E,\Phi) < \infty$. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Як відомо з властивостей пакувальної передміри,

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha+\delta}(E,\Phi) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E,\Phi)\cdot\varepsilon^{\delta}.$$

Обчислюючи границю при $\varepsilon \to 0$ у обох частинах останньої нерівності, маємо:

$$\mathcal{P}_{0}^{\alpha+\delta}(E,\Phi) \leqslant \mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E,\Phi)\cdot 0 = 0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\alpha > 0$, $\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E,\Phi) > 0$, $\delta\in(0;\alpha)$. Від супротивного. Припустимо, що $\mathcal{P}_{0}^{\alpha-\delta}(E,\Phi) < \infty$. Тоді (згідно з властивістю 4) $\mathcal{P}_{0}^{\alpha}(E,\Phi) = 0$, що суперечить умові. Отже, припущення невірне, і $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E,\Phi)=\infty$, що й вимагалось довести. $\square$

Означення 1.22. α-мірною пакувальною мірою множини E відносно сімейства куль Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi):=\inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j,\Phi): E\subset\bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 1.17. **Властивості пакувальної міри відносно сімейства куль:**

1. **монотонність:** якщо $E_1\subset E_2$, то $\mathcal{P}^{\alpha}(E_1,\Phi)\leqslant\mathcal{P}^{\alpha}(E_2,\Phi)$;
2. **злічення напівадитивність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$
$$\mathcal{P}^{\alpha}(\cup_i E_i,\Phi)\leqslant\sum_i \mathcal{P}^{\alpha}(E_i,\Phi).$$
3. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi)<\infty$, то $\forall\delta>0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E,\Phi)=0$;
4. якщо $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi)>0$ і $\alpha>0$, то $\forall\delta\in(0;\alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E,\Phi)=+\infty$.

Доведення. **1)**. Нехай $E_1\subset E_2$, $m_1=\mathcal{P}^{\alpha}(E_1,\Phi)$, $m_2=\mathcal{P}^{\alpha}(E_2,\Phi)$. Від супротивного. Припустимо, що $m_1>m_2$. Тоді існує таке покриття $\{E_{2j}\}$ множини E_2, що

$$m_1>\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{2j},\Phi).$$

Оскільки $\{E_{2j}\}$ є покриттям множини E_1, то

$$m_1\leqslant\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{2j},\Phi).$$

Отримана суперечність показує, що припущення невірне. Отже, $m_1\leqslant m_2$, що й вимагалось довести.

2). Введемо позначення:

$$m_i := \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi),$$
$$E := \bigcup_i E_i,$$
$$m := \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi).$$

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Оскільки

$$m_i = \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi) = \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi) : E_i \subset \bigcup E_{ij} \right\},$$

то $\forall i \in \mathbb{N}$ існує таке покриття множини E_i множинами E_{ij}, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi) \leqslant m_i + \frac{\delta}{2^i}.$$

Тому

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки набір множин $\{E_{ij} : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ є покриттям множини E, то

$$m = \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi) \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi).$$

Отже,

$$m \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки остання нерівність виконується $\forall \delta > 0$, то $m \leqslant \sum_i m_i$, що й вимагалось довести.

3) Нехай $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi) < \infty$. Тоді існує таке покриття $\{E_j\}$ множини E, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j, \Phi) < \infty,$$

і

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E_j, \Phi) < \infty, \forall j \in \mathbb{N}.$$

З властивості 3 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j, \Phi) = 0, \forall j \in \mathbb{N}, \forall \delta > 0.$$

Тому

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E, \Phi) \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j, \Phi) = 0.$$

Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E, \Phi) = 0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi) > 0$ і $\alpha > 0$. Тоді для будь-якого покриття $\{E_j\}$ множини E існує така множина E_{j_0}, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{j_0}, \Phi) > 0.$$

Зафіксуємо $\delta \in (0; \alpha)$. З властивості 4 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_{j_0}, \Phi) = \infty.$$

Отже,

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_j, \Phi) = \infty.$$

Оскільки остання рівність виконується для довільного покриття $\{E_j\}$ множини E, то

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E, \Phi) = \infty,$$

що й вимагалось довести. □

Означення 1.23. Пакувальною розмірністю множини E відносно сімейства куль Φ називається число

$$\dim_P(E, \Phi) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi) = 0\}.$$

Зауваження 1.18. **Властивості пакувальної розмірності відносно сімейства куль:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_P(E_1, \Phi) \leqslant \dim_P(E_2, \Phi)$;
2. **зліченна стабільність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\dim_P(\cup_i E_i, \Phi) = \sup_i \dim_P(E_i, \Phi).$$

Доведення. **1)** Введемо позначення: $\alpha_i := \dim_P(E_i, \Phi)$, де $i \in \{1, 2\}$. Нехай $\alpha > \alpha_2$. Тоді

$$\mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi) = 0,$$

а оскільки

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi),$$

то і

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi) = 0, \forall \alpha > \alpha_2$$

Отже,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2,$$

що й вимагалось довести.

2) Нехай $\dim_P(E_i, \Phi) = \alpha_i$, а $\dim_P(E, \Phi) = \alpha$. Оскільки

$$E_i \subset E, \forall i,$$

то і

$$\alpha_i \leqslant \alpha, \forall i.$$

Отже, ми показали, що

$$\alpha \geqslant \sup_i \alpha_i.$$

Покажемо, що

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Від супротивного. Нехай

$$\exists \delta > 0 : \alpha > \alpha_i + \delta, \forall i.$$

Тоді

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E_i, \Phi) = 0 \forall i,$$

і тому

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E, \Phi) = 0,$$

тобто

$$\dim_P(E, \Phi) \leqslant \alpha - \delta/2,$$

що суперечить припущенню $\dim_P(E, \Phi) = \alpha$. Отже,

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Тому $\alpha = \sup_i \alpha_i$, що й вимагалось довести. □

Теорема 1.2. *Для довільного сімейства куль* Φ *виконується нерівність*

$$\dim_P(E, \Phi) \leqslant \dim_{P(unc)}(E)$$

Доведення. Позначимо через Φ_0 множину всеможливих куль з простору M. Тоді очевидно, що

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) = \mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E, \Phi_0).$$

Оскільки $\Phi \subseteq \Phi_0$, то (згідно з властивостями супремума)

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E, \Phi_0).$$

З нестрогої нерівності між пакувальними передмірами випливає аналогічна нестрога нерівність між пакувальними розмірностями, тобто

$$\dim_P(E, \Phi) \leqslant \dim_{P(unc)}(E),$$

що й вимагалось довести. □

1.2.4. Пакувальна розмірність відносно сімейства множин та міри. Нехай Φ є деяким сімейством куль, а μ — неперервною мірою на M.

Означення 1.24. Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε відносно сімейства Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) := \sup \left\{ \sum_{i} (\mu(E_i))^{\alpha} \right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням кулями з Φ множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) = 0$).

Зауваження 1.19. **Властивості пакувальної передміри відносно сімейства куль та міри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu)$;
2. **скінченна напівадитивність:**

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1 \cup E_2, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) + \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu)$$

3. Ннехай $\varepsilon > 0$. Нехай $B(x, \varepsilon)$ — це куля з центром в x і діаметром ε. Введемо позначення:

$$c(\varepsilon) := \sup\{\mu(B(x, \varepsilon) : x \in M\}.$$

   Тоді

$$\forall \delta > 0 : \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) \cdot (c(\varepsilon))^{\delta}.$$

Доведення. **1)** Якщо $E_1 \subset E_2$, то будь-яке пакування множини E_1 є також пакуванням множини E_2. Отже,

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu).$$

2) Нехай $\{E_i\}$ — довільне ε-пакування множини $A \cup B$ кулями з Φ. Позначимо через $\mathcal{A}$ сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать A, а через $\mathcal{B}$ — сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать $B \setminus A$ (одне з цих сімейств може виявитись порожнім). Тоді

$$\sum_i (\mu(E_i))^\alpha = \sum_{i: E_i \in \mathcal{A}} (\mu(E_i))^\alpha + \sum_{i: E_i \in \mathcal{B}} (\mu(E_i))^\alpha \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(A, \Phi, \mu) + \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(B, \Phi, \mu).$$

Оскільки нерівність

$$\sum_i (\mu(E_i))^\alpha \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(A, \Phi, \mu) + \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(B, \Phi, \mu)$$

виконується для довільного пакування $\{E_i\}$ множини $A \cup B$, то

$$\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(A \cup B, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(A, \Phi, \mu) + \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(B, \Phi, \mu).$$

3) Розглянемо довільне пакування A множини E, яке складається з куль E_i з сімейства Φ. Тоді

$$\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha+\delta} = \sum_i (\mu(E_i))^\alpha \cdot (\mu(E_i))^\delta \leqslant \sum_i (\mu(E_i))^\alpha \cdot (c(\varepsilon))^\delta.$$

Оскільки отримана нерівність виконується для довільного пакування, то вона буде виконуватися і для супремума. Тобто

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}_\varepsilon(E, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu) \cdot (c(\varepsilon))^\delta,$$

що й вимагалось довести. □

Означення 1.25. α-мірною пакувальною квазімірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^\alpha_0(E, \Phi, \mu) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu).$$

Зауваження 1.20. **Властивості пакувальної квазіміри відносно сімейства куль та міри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^\alpha_0(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_0(E_2, \Phi, \mu)$;
2. **скінченна напівадитивність:**$\mathcal{P}^\alpha_0(E_1 \cup E_2, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_0(E_1, \Phi, \mu) + \mathcal{P}^\alpha_0(E_2, \Phi$

3. якщо $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E,\Phi,\mu)<\infty$, то $\forall\delta>0$ $\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu)=0$;
4. якщо $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E)>0$, то $\forall\delta\in(0;\alpha)$ $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu)=+\infty$.

Доведення. Перші два твердження отримуються з аналогічних тверджень для передміри за допомогою граничного переходу.

3) Нехай $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E,\Phi,\mu)<\infty$. Зафіксуємо довільне $\delta>0$. Як відомо з властивостей пакувальної передміри,

$$\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu)\leqslant\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha}(E,\Phi,\mu)\cdot(c(\varepsilon))^{\delta}.$$

Оскільки μ є неперервною мірою, то

$$\lim_{\varepsilon\to0}c(\varepsilon)=0.$$

Обчислюючи границю при $\varepsilon\to0$ у обох частинах останньої нерівності, маємо:

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu)\leqslant\mathcal{P}_0^{\alpha}(E,\Phi,\mu)\cdot0=0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\alpha>0$, $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E,\Phi,\mu)>0$, $\delta\in(0;\alpha)$. Від супротивного. Припустимо, що $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu)<\infty$. Тоді (згідно з властивістю 3) $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E,\Phi,\mu)=0$, що суперечить умові. Отже, припущення невірне, і $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu)=\infty$, що й вимагалось довести. □

Також важливою є ще одна властивість пакувальної квазіміри, яка буде сформульована як теорема.

Теорема 1.3. *Нехай $(M,\rho)=\mathbb{R}^n$, $E\subset M$, μ — неперервна міра. Тоді*

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E,\Phi,\mu)=\mathcal{P}_0^{\alpha}(\overline{E},\Phi,\mu).$$

(тут і далі через $\overline{E}$ позначатимемо замикання множини E).

Доведення. Зафіксуємо деяке число $\varepsilon>0$. Нехай $\{E_i\}$ є довільним нецентрованим ε-пакуванням множини $\overline{E}$ відкритими кулями з Φ. Тоді $\{E_i\}$

є нецентрованим ε-пакуванням множини E, оскільки якщо відкрита куля E_i має непустий перетин з $\overline{E}$, то вона має непустий перетин і з E. Отже,

$$\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E, \Phi, \mu) = \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(\overline{E}, \Phi, \mu),$$

а тому і

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E, \Phi, \mu) = \mathcal{P}_0^\alpha(\overline{E}, \Phi, \mu).$$

$\square$

Означення 1.26. α-мірною пакувальною мірою множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j, \Phi, \mu) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зліченним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 1.21. **Властивості пакувальної міри відносно сімейства куль:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu)$;
2. **зліченна напівадитивність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\mathcal{P}^\alpha(\cup_i E_i, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi, \mu);$$

3. якщо $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) < \infty$, то $\forall \delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) = 0$;
4. якщо $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) > 0$ і $\alpha > 0$, то $\forall \delta \in (0; \alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E, \Phi, \mu) = +\infty$.

Доведення. **1)**. Нехай $E_1 \subset E_2$, $m_1 = \mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu)$, $m_2 = \mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu)$. Від супротивного. Припустимо, що $m_1 > m_2$. Тоді існує таке покриття $\{E_{2j}\}$ множини E_2, що

$$m_1 > \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{2j}, \Phi, \mu).$$

Оскільки $\{E_{2j}\}$ є покриттям множини E_1, то

$$m_1 \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{2j}, \Phi, \mu).$$

Отримана суперечність показує, що припущення невірне. Отже, $m_1 \leqslant m_2$, що й вимагалось довести.

2). Введемо позначення:

$$m_i := \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi, \mu),$$
$$E := \bigcup_i E_i,$$
$$m := \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu).$$

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Оскільки

$$m_i = \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi, \mu) = \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) : E_i \subset \bigcup E_{ij} \right\},$$

то $\forall i \in \mathbb{N}$ існує таке покриття множини E_i множинами E_{ij}, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) \leqslant m_i + \frac{\delta}{2^i}.$$

Тому

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки набір множин $\{E_{ij} : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ є покриттям множини E, то

$$m = \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu).$$

Отже,

$$m \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки остання нерівність виконується $\forall \delta > 0$, то $m \leqslant \sum_i m_i$, що й вимагалось довести.

3) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu)<\infty$. Тоді існує таке покриття $\{E_j\}$ множини E, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j,\Phi,\mu)<\infty,$$

і

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j,\Phi,\mu)<\infty, \forall j\in\mathbb{N}.$$

З властивості 4 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j,\Phi,\mu)=0, \forall j\in\mathbb{N}, \forall\delta>0.$$

Тому

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu)\leqslant\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j,\Phi,\mu)=0.$$

Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu)=0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu)>0$ і $\alpha>0$. Тоді для будь-якого покриття $\{E_j\}$ множини E існує така множина E_{j_0}, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{j_0},\Phi,\mu)>0.$$

Зафіксуємо $\delta\in(0;\alpha)$. З властивості 5 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_{j_0},\Phi,\mu)=\infty.$$

Отже,

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_j,\Phi,\mu)=\infty.$$

Оскільки остання рівність виконується для довільного покриття $\{E_j\}$ множини E, то

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu)=\infty,$$

що й вимагалось довести. $\square$

Надалі буде використовуватися ще одна властивість пакувальної міри. Ця властивість є узагальненням леми 5.3 зі статті [107]:

Теорема 1.4. *Нехай* $(M, \rho) = \mathbb{R}^n$. *Нехай* μ *— неперервна на* M *міра. Нехай* E *є компактною множиною, яка задовольняє таку властивість:*

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E \cap V, \Phi, \mu) = +\infty,$$

$$(\textit{для } \forall \textit{ відкритої множини } V \textit{ такої, що } E \cap V \neq \varnothing).$$

Тоді $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) = +\infty$.

Доведення. Розглянемо довільне розбиття множини E на злічену кількість множин $\{E_n\}$. Оскільки E — замкнена, то повинна існувати відкрита множина V_0 і множина $E_k \in \{E_n\}$ така, що $E \cap V_0 \subset \overline{E_k}$. Покажемо це.

Від супротивного: нехай для кожної множини $E_k \in \{E_n\}$ не існує множини V_0, для якої виконується умова $E \cap V_0 \subset \overline{E_k}$. Покажемо, що в такому разі кожна з множин E_k є ніде не щільною в метричному просторі (E, ρ).

Зафіксуємо одну з множин E_k. Виберемо довільну відкриту кулю $B(O_1, r_1)$, де $O_1 \in E$. Позначимо $E \cap B$ через B^*. Очевидно, що B^* є відкритою кулею в метричному просторі (E, ρ). Оскільки $B^* \not\subset \overline{E_k}$, то в кулі B існує точка A така, що $A \notin \overline{E_k}$ і $\rho(A, \overline{E_k}) := r_A > 0$. Це означає, що всередині кулі B^* простору (E, ρ) існує відкрита куля $B_A^* = B(A, r_A) \cap E$ така, що не містить жодної точки з $\overline{E_k}$. Отже, всередині довільної відкритої кулі B^* простору (E, ρ) існує відкрита куля така B_A^*, що не містить жодної точки з $\overline{E_K}$. Це означає, що множина E_k є ніде не щільною в просторі (E, ρ).

Якщо ж усі множини з $\{E_n\}$ є ніде не щільними в (E, ρ), то множина E є об'єднанням зліченної кількості ніде не щільних множин. Але оскільки множина E — замкнена (в (M, ρ)), то метричний простір (E, ρ) є повним, а тому (за теоремою Бера) він не може бути об'єднанням зліченної кількості ніде не щільних множин.

Отже, для довільного розбиття множини E на зліченну кількість множин $\{E_n\}$ існує така відкрита множина V_0 і множина $E_k \in \{E_n\}$, що $E \cap V_0 \subset \overline{E_k}$, а тому і $\mathcal{P}_0^\alpha(\overline{E_k}, \Phi, \mu) \geqslant \mathcal{P}_0^\alpha(E \cap V_0, \Phi, \mu) = +\infty$.

З теореми 1.3 випливає, що $\mathcal{P}_0^\alpha(E_k, \Phi, \mu) = +\infty$. Отже, для довільного розбиття множини E, яка задовольняє умови теореми, на зліченну кількість множин E_k, серед них знайдеться така, для якої α-квазіміра відносно Φ та μ дорівнює $+\infty$.

Отже, $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) = +\infty$. □

Означення 1.27. Пакувальною розмірністю множини E відносно сімейства куль Φ та міри μ називається число

$$\dim_P(E, \Phi, \mu) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) = 0\}.$$

Зауваження 1.22. **Властивості пакувальної розмірності відносно сімейства куль та міри:**

1. **монотонність:** якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_P(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \dim_P(E_2, \Phi, \mu)$;
2. **зліченна стабільність:** для довільного не більш ніж зліченного набору множин $\{E_i\}$

$$\dim_P(\cup_i E_i, \Phi, \mu) = \sup_i \dim_P(E_i, \Phi, \mu).$$

Доведення. **1)** Введемо позначення: $\alpha_i := \dim_P(E_i, \Phi, \mu)$, де $i \in \{1, 2\}$. Нехай $\alpha > \alpha_2$. Тоді

$$\mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu) = 0,$$

а оскільки

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu),$$

то і

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu) = 0, \forall \alpha > \alpha_2$$

Отже,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2,$$

що й вимагалось довести.

2) Нехай $\dim_P(E_i, \Phi, \mu) = \alpha_i$, а $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \alpha$. Оскільки

$$E_i \subset E, \forall i,$$

то і

$$\alpha_i \leqslant \alpha, \forall i.$$

Отже,

$$\alpha \geqslant \sup_i \alpha_i.$$

Покажемо, що

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Від супротивного. Нехай

$$\exists \delta > 0 : \alpha > \alpha_i + \delta, \forall i.$$

Тоді

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E_i, \Phi, \mu) = 0, \forall i,$$

і тому

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E, \Phi, \mu) = 0,$$

тобто

$$\dim_P(E, \Phi, \mu) \leqslant \alpha - \delta/2,$$

що суперечить припущенню $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \alpha$. Отже,

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Тому $\alpha = \sup_i \alpha_i$, що й вимагалось довести. □

Зауваження 1.23. Якщо $M \subset \mathbb{R}^1$, а μ співпадає з одновимірною мірою Лебега (тобто $\mu = \lambda$), то $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \dim_P(E, \Phi)$. Це випливає з того, що для довільної кулі $E_i \subset \mathbb{R}^1$ виконується рівність $|E_i| = \lambda(E_i)$.

1.3. Порівняння фрактальних розмірностей

1.3.1. Нерівності між $\dim_H$ та $\dim_P$.

Теорема 1.5. *Нехай $E \subset M$. Нехай Φ — довільне сімейство куль з простору M таке, що $\forall \varepsilon > 0$ існує не більш ніж злічене ε-покриття множини E неперетинними кулями з Φ. Нехай μ — довільна неперервна міра на M. Тоді*

$$\dim_H(E, \Phi, \mu) \leqslant \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

Доведення. Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Розглянемо деяке не більш ніж злічене ε-покриття A множини E неперетинними кулями з Φ. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що кожна куля з вказаного покриття має непорожній перетин з E. Введемо позначення:

$$V(A) := \sum_{E_i \in A} (\mu(E_i))^{\alpha}.$$

З означення $\dim_H(E, \Phi, \mu)$ випливає, що

$$H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu) \leqslant V(A)$$

.

З іншого боку, A є нецентрованим пакуванням множини E. Тому

$$V(A) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu).$$

Отже,

$$H^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu) \leqslant V(A) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi, \mu).$$

Розглядаючи граничний перехід при $\varepsilon \to 0$, отримуємо

$$H^{\alpha}(E, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E, \Phi, \mu).$$

Нехай $\{E_j\}$ — довільне не більш ніж злічене покриття множини E. Тоді

$$H^{\alpha}(E_j, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E_j, \Phi, \mu), \forall j \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_j H^\alpha(E_j,\Phi,\mu) \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j,\Phi,\mu)$$

Ліва частина останньої нерівності дорівнює $H^\alpha(E,\Phi,\mu)$, оскільки $H^\alpha(\cdot)$ — зліченно адитивна функція множини. Отже,

$$H^\alpha(E,\Phi,\mu) \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j,\Phi,\mu)$$

для довільного не більш ніж зліченного покриття $\{E_j\}$ множини E, і тому

$$H^\alpha(E,\Phi,\mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_j,\Phi,\mu).$$

Нехай $\alpha = \dim_P(E,\Phi,\mu)$. Нехай $\delta > 0$. Тоді

$$H^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E_j,\Phi,\mu) = 0.$$

Отже, $H^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu) = 0$, а тому $\dim_H(E,\Phi,\mu) \leqslant \alpha+\delta$. З довільності $\delta > 0$ випливає, що $\dim_H(E,\Phi,\mu) \leqslant \alpha$, тобто

$$\dim_H(E,\Phi,\mu) \leqslant \dim_P(E,\Phi,\mu),$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 1.2. *Нехай $E \subset M$, нехай Φ задовольняє умови попередньої теореми. Тоді*

$$\dim_H(E) \leqslant \dim_H(E,\Phi) \leqslant \dim_P(E,\Phi) \leqslant \dim_P(E).$$

1.3.2. Регулярні множини. Tricot в [92] та [109] пропонує таке означення регулярності множин:

Означення 1.28. Множина E називається регулярною, якщо $\dim_H(E) = \dim_P(E)$.

Множини, які задовольняють це означення, ми будемо називати «регулярними за Tricot» або просто «регулярними».

Теорема 1.6. *Нехай* $E \subset M$ *— регулярна за Tricot. Нехай* Φ *задовольняє умови теореми 1.5. Тоді* $\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E)$ *і* $\dim_P(E, \Phi) = \dim_P(E)$.

Доведення. Згідно з наслідком теореми 1.5, має місце нерівність:

$$\dim_H(E) \leqslant \dim_H(E, \Phi) \leqslant \dim_P(E, \Phi) \leqslant \dim_P(E).$$

Оскільки $\dim_H(E) = \dim_P(E)$, то значення всіх членів нерівності співпадають, тобто $\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E)$ і $\dim_P(E, \Phi) = \dim_P(E)$, що й необхідно довести. □

Теорема 1.7. *Нехай* $E, F \subset \mathbb{R}^n$. *Тоді*

$$\dim_H(E) + \dim_H(F) \leqslant \dim_H(E \times F) \leqslant \dim_H(E) + \dim_P(F) \leqslant$$
$$\leqslant \dim_P(E \times F) \leqslant \dim_P(E) + \dim_P(F),$$

де знак «×» означає декартовий добуток множин.

Доведення теореми наведене в [109].

Наслідок 1.3. *Нехай* $E, F \subset \mathbb{R}^n$. *Нехай* F *є регулярною за Tricot. Тоді* $\dim_H(E \times F) = \dim_H(E) + \dim_H(F)$.

РОЗДІЛ 2
ДОВІРЧІСТЬ ТА ПОРІВНЯННІСТЬ СІМЕЙСТВ КУЛЬ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПАКУВАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ

2.1. Основні поняття

Означення 2.1. Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M : \dim_P(E, \Phi) = \dim_{P(unc)}(E).$$

Тоді Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Означення 2.2. Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall \alpha \geqslant 0 : \exists C = C(\alpha) > 0 : \forall E \subset M, C \cdot \mathcal{P}^\alpha(E) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E).$$

Тоді Φ називається порівнянним для обчислення пакувальної розмірності.

Зауваження 2.1. Очевидно, що будь-яке порівнянне сімейство є і довірчим (для обчислення пакувальної розмірності).

Поняття «довірчість сімейств куль для обчислення пакувальної розмірності», як і поняття «пакувальна розмірність», може бути введене у широкому класі метричних просторів. Проте багато задач (наприклад, доведення довірчості конкретного сімейства) ще не є розв'язаними навіть у відносно простому випадку — коли метричний простір є відрізком $[0; 1]$ з природньою метрикою.

Тому надалі будемо розглядати вказані поняття на відрізку $[0; 1]$.

Теорема 2.1 (Достатня умова порівнянності для обчислення пакувальної розмірності). *Нехай Φ — деяке сімейство проміжків з* *відрізка* $[0;1]$. *Тоді для того, щоб* Φ *було порівнянним для обчислення пакувальної розмірності, достатньо, щоб існувала така константа* $C > 0$, *щоб для довільного проміжка* $\langle a;b\rangle \subset [0;1]$ *знайшовся проміжок* $\Delta(a,b) \in \Phi$ *такий, що:*

1. $\Delta(a,b)$ *містить точку* $\frac{a+b}{2}$;
2. $\Delta(a,b) \subset (a;b)$;
3. $\frac{b-a}{|\Delta(a,b)|} \geqslant C$.

Доведення. Нехай E — довільна множина, $\alpha \geqslant 0$ та $r > 0$ - довільні числа, $\{E_i\} = \{\langle a_i;b_i\rangle\}$ — довільний набір неперетинних проміжків, причому $\frac{a_i+b_i}{2} \in E$, а $b_i - a_i < r$.

Тоді виконується нерівність:

$$\sum_i |E_i|^\alpha \leqslant \sum_i |\Delta(a_i,b_i)|^\alpha \cdot C^\alpha$$

Перейшовши до супремуму (по всеможливим наборам проміжків $\{E_i\}$, які задовольняють вищевказані умови), маємо:

$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) \leqslant \sup_{\{E_i\}} |\Delta(a_i,b_i)|^\alpha \cdot C^\alpha$$

Будь-який набір проміжків виду $\{\Delta(a_i,b_i)\}$ є нецентрованим r-пакуванням множини E. Тому

$$\sup_{\{E_i\}} |\Delta(a_i,b_i)|^\alpha \cdot C^\alpha \leqslant \mathcal{P}_{r(unc)}^\alpha(E,\Phi) \cdot C^\alpha,$$

отже,

$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) \leqslant \mathcal{P}_{r(unc)}^\alpha(E,\Phi) \cdot C^\alpha.$$

Беручи від обох частин границю при $r \to 0$, отримуємо

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) \leqslant \mathcal{P}_{0(unc)}^\alpha(E,\Phi) \cdot C^\alpha.$$

Переходячи до інфімуму по всеможливих покриттях множини E, отримуємо

$$\mathcal{P}^\alpha(E) \leqslant \mathcal{P}_{(unc)}^\alpha(E,\Phi) \cdot C^\alpha.$$

Отже, сімейство Φ є порівнянним для обчислення пакувальної розмірності.

$\square$

2.2. Довірчість сімейства s-адичних циліндрів

Означення 2.3. Нехай $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Нагадаємо, що s-адичним представленням дійсного числа $x \in [0;1]$ називається запис виду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}, \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}.$$

При цьому числа a_k називаються s-адичними цифрами числа x. Множина таких чисел x, у яких перші n цифр фіксовані, називається s-адичним циліндром n-го рангу і є відрізком для довільного натурального n. В подальшому ми будемо називати s-адичним циліндричним інтервалом множину внутрішніх точок відповідного s-адичного циліндра.

Теорема 2.2. *Нехай $s \geqslant 2$ — фіксоване натуральне число, Φ — множина всіх s-адичних циліндричних інтервалів. Тоді Φ є довірчою для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.*

Доведення. Нехай E' — довільна множина з відрізка $[0;1]$. Нехай S_0 — множина s-адично раціональних точок, тобто

$$S_0 := \left\{ \frac{m}{s^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, s^n - 1\} \right\}.$$

Нехай $E = E' \setminus S_0$. Оскільки S_0 — зліченна, то $\dim_P(S_0) = 0$. Отже,

$$\dim_P(E) = \dim_P(E' \setminus S_0) = \dim_P(E').$$

Зафіксуємо дійсні числа $\alpha \geqslant 0$ та $r > 0$ та розглянемо довільну не більш ніж зліченну сукупність неперетинних проміжків $\{E_i\}$, центри яких належать E, а діаметри не перевищують r.

Нехай Δ_i — s-адичний інтервал мінімального рангу, який міститься всередині проміжка E_i та містить його центр (зауважимо, що центр проміжка

E_i обов'язково міститься в певному s-адичному інтервалі, оскільки в множині E відсутні s-адично раціональні точки). Тоді всередині цього проміжка може міститися не більше, ніж $2s-1$ циліндричних інтервалів цього ж рангу (не більше, ніж $s-1$ інтервалів зліва від Δ_i, бо інакше E_i міститиме s-адичний інтервал попереднього рангу, і аналогічно не більше, ніж $s-1$ інтервалів справа від Δ_i). Звідси випливає, що

$$|E_i| \leqslant |\Delta_i| \cdot (2s-1),$$

тобто сімейство Φ циліндричних інтервалів задовольняє умови теореми 2.1. Отже,

$$\dim_P(E', \Phi) = \dim_P(E, \Phi) = \dim_P(E) = \dim_P(E'),$$

і тому сімейство Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності, що й вимагалось довести. $\square$

2.3. Достатні умови довірчості сімейства циліндричних інтервалів $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел для обчислення пакувальної розмірності.

$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел є узагальненням s-адичного представлення та Q-представлення дійсних чисел і було описане, наприклад, в [86].

Коротко нагадаємо його означення.

Нехай (n_k) є певною послідовністю натуральних чисел, причому $n_k \geqslant 2$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Введемо до розгляду «матрицю» $\tilde{Q} = \|q_{ik}\|$, де $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\}$, $q_{ik} > 0$, причому

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} q_{ik} = 1,$$
$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i q_{ik} = 0.$$

Кожна матриця $\tilde{Q}$, яка задовольняє описані властивості, однозначно задає розбиття відрізка $[0;1]$ таким чином:

Крок 1. Розбиваємо відрізок $[0;1]$ зліва направо на відрізки $\Delta_{i_1}^{\tilde{Q}}$, де $i_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ так, щоб виконувались умови:

1. $|\Delta_{i_1}^{\tilde{Q}}| = q_{i_1 1}$, $\forall i_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$;
2. $|\Delta_{i_1}^{\tilde{Q}}|$ та $|\Delta_{i_1+1}^{\tilde{Q}}|$ мають рівно одну спільну точку, $\forall i_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 2\}$.

Отримані відрізки $\Delta_0^{\tilde{Q}}, \Delta_1^{\tilde{Q}}, \dots, \Delta_{n_1-1}^{\tilde{Q}}$ називаємо «циліндричними відрізками першого рангу».

Крок $k \geqslant 2$. Розбиваємо кожен з відрізків рангу $k-1$ (тобто відрізків виду $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{\tilde{Q}}$) на відрізки $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}^{\tilde{Q}}$, де $i_k \in \{0, 1, \dots n_k - 1\}$ так, щоб виконувались умови:

1. $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}^{\tilde{Q}}| = q_{i_1 1} \cdot q_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{i_{k-1}(k-1)} \cdot q_{i_k k}$, $\forall i_1, i_2, \dots i_k$;
2. $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}^{\tilde{Q}}$ та $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k + 1}^{\tilde{Q}}$ мають рівно одну спільну точку, $\forall i_k \in \{0, 1, \dots, n_k - 2\}$.

Отримані відрізки виду $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}^{\tilde{Q}}$ називаємо «циліндричними відрізками k-го рангу».

Для довільної послідовності індексів (i_k), де $i_k \in \{0, 1, \dots, n_k\}$, існує відповідна послідовність вкладених відрізків $\Delta_{i_1}^{\tilde{Q}} \supset \Delta_{i_1 i_2}^{\tilde{Q}} \supset \dots \supset \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\tilde{Q}} \supset \dots$, причому довжина цих відрізків прямує до нуля (це випливає з $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i q_{ik} = 0$). Отже, довільна послідовність індексів вказаного виду задає єдине дійсне число x, яке є перерізом всіх вищевказаних відрізків. Це число x позначають так:

$$x = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}^{\tilde{Q}}.$$

З іншого боку, для довільної точки x (за винятком зліченної кількості точок, які є кінцями циліндричних відрізків) існує єдина послідовність індексів (i_k), для якої виконується попередня рівність. Якщо ж точка x є кінцем деякого циліндричного відрізка, то існує дві відповідних цій точці послідовностей індексів, причому в одній з цих послідовностей $i_k = 0$, починаючи з деякого k.

Описаний спосіб представлення дійсних чисел називають $\tilde{Q}$-представленням.

Зауважимо, що якщо $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$ є циліндричним відрізком деякого $\tilde{Q}$-представлення, то його внутрішність називають циліндричним інтервалом цього ж $\tilde{Q}$-представлення.

Теорема 2.3. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів деякого $\tilde{Q}$-представлення. Нехай*

$$\inf_{i,j} q_{ij} = q_{\min} > 0.$$

Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Доведення. Нехай $\tilde{Q}_0$ — множина $\tilde{Q}$-раціональних точок, а E' — довільна множина. Нехай $E = E' \setminus \tilde{Q}_0$. Тоді (в силу того, що $\tilde{Q}_0$ — зліченна) $\dim_{P(unc)}(\tilde{Q}_0) = 0$, $\dim_{P(unc)}(\tilde{Q}_0, \Phi) = 0$ і тому

$$\dim_{P(unc)}(E') = \dim_{P(unc)}(E), \quad \dim_{P(unc)}(E', \Phi) = \dim_{P(unc)}(E, \Phi).$$

Отже, для довірчості Φ досить довести, що

$$\dim_{P(unc)}(E) = \dim_{P(unc)}(E, \Phi)$$

для довільної множини E, яка не містить $\tilde{Q}$-раціональних точок.

Нехай $\langle a; b\rangle \subset [0;1]$ — довільний проміжок. Нехай $\Delta(a,b)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал мінімального рангу, який міститься всередині $(a;b)$ і містить в собі середину $(a;b)$.

Позначимо ранг $\Delta(a,b)$ через k. З мінімальності цього рангу випливає, що $(a;b)$ міститься щонайбільше у двох (а можливо, і в одному) циліндрах рангу $k-1$. Той циліндр рангу $k-1$, який містить циліндр $\Delta(a,b)$, позначимо як Δ'. Другий циліндр (якщо існує), позначимо як Δ''.

Розглянемо два випадки:

Випадок 1: Циліндра Δ'' не існує. Тоді

$$|\Delta(a, b)| \leqslant b - a \leqslant |\Delta'|,$$

і тому

$$|\Delta(a, b)| \geqslant (b - a) \cdot q_{\min}.$$

Випадок 2. Циліндр Δ'' існує. Тоді $\langle a; b\rangle$ можна розділити на дві частини: перша частина буде належати Δ', а друга — Δ''. Але оскільки середина $\langle a; b\rangle$ належить Δ' (адже саме цей циліндр містить $\Delta(a, b)$), то

$$|\Delta'| \cdot 2 \geqslant b - a \Rightarrow |\Delta(a, b)| \geqslant (b - a) \cdot \frac{q_{\min}}{2}.$$

Висновок з двох випадків: Який би не був проміжок $< a; b >$, знайдеться такий $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал $\Delta(a, b)$, який містить середину проміжка $< a; b >$ і задовольняє нерівність

$$|\Delta(a, b)| \geqslant (b - a) \cdot \frac{q_{\min}}{2}.$$

Отже, сімейство Φ задовольняє умови теореми 2.1 і тому є довірчим для обчислення пакувальної розмірності, що й вимагалось довести. □

Наслідок 2.1. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів деякого Q^*-представлення. Нехай*

$$\inf_{i,j} q_{ij} = q_{\min} > 0.$$

Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Наслідок 2.2. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів деякого Q-представлення. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності.*

Наслідок 2.3. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів деякого s-адичного представлення. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності.*

2.4. Аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної фрактальної розмірності

Теорема 2.4. *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — дві неперервні ймовірнісні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-го рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо число $\delta \geqslant 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta_n(x))}{\ln \nu(\Delta_n(x))} \geqslant \delta \right\}, \quad \mu(E) > 0. \tag{2.1}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta.$$

Доведення. Якщо $\delta = 0$, то твердження теореми є очевидним. Припустимо, що $\delta > 0$. Розглянемо довільну зростаючу послідовність множин $E_n \to E$.

Існує таке k, що $\mu(E_k) > \frac{\mu(E)}{2} > 0$. Розглянемо $\varepsilon \in (0; \delta)$.

Зафіксуємо довільне натуральне число n_0. Для довільного $x \in E_k$ позначимо через $n(x)$ найменше натуральне число, яке не менше за n_0 і при цьому

$$\mu(\Delta_n(x)) < (\lambda(\Delta_n(x)))^{\delta-\varepsilon}$$

(існування такого числа випливає з означення нижньої границі).

Нехай $B = \{\Delta_{n(x)}(x) : x \in E_k\}$. Тоді $E_k \subset \cap_{\Delta \in B} \Delta$ і два різні циліндри з B не мають спільних внутрішніх точок.

Зафіксуємо довільне число $r > 0$. Виберемо n_0 так, щоб всі циліндри рангу n_0 мали довжину, яка не перевищує r. Позначимо через B' множину внутрішностей циліндрів з B. Тоді B' буде нецентрованим r-пакуванням множини E_k. Отже,

$$\mathcal{P}_r^{\delta-\varepsilon}(E_k, \Phi, \nu) \geqslant \sum_{\Delta \in B'} \nu(\Delta)^{\delta-\varepsilon}.$$

З іншого боку,

$$\sum_{\Delta \in B'} (\nu(\Delta))^{\delta-\varepsilon} \geqslant \sum_{\Delta \in B'} \mu(\Delta) = \mu(\bigcup_{\Delta \in B'} \Delta) \geqslant \mu(E_k) \geqslant \frac{\mu(E)}{2} > 0.$$

З вищесказаного випливає, що $\mathcal{P}_r^{\delta-\varepsilon}(E_k, \Phi, \nu) > 0$, і ця нерівність виконується для всіх достатньо великих k. Тому

$$\mathcal{P}_r^{\delta-\varepsilon}(E, \Phi, \nu) > 0,$$

звідки випливає

$$\mathcal{P}_0^{\delta-\varepsilon}(E, \Phi, \nu) > 0.$$

Покажемо, що $\mathcal{P}^{\delta-\varepsilon}(E, \Phi, \nu) > 0$. Нехай $E \subset \cap_{i=1}^{\infty} E_i'$. Тоді серед множин E_i' знайдеться така множина E_{i_0}', що $\mu(E_{i_0}') > 0$. Ця множина задовольнятиме умови цієї теореми, і тому

$$\mathcal{P}_0^{\delta-\varepsilon}(E_{i_0}, \Phi, \nu) > 0.$$

Отже, для довільного покриття множини E множинами E_i буде виконуватись умова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_0^{\delta-\varepsilon}(E_i, \Phi, \nu) > 0.$$

Тому $\mathcal{P}^{\delta-\varepsilon}(E, \Phi, \nu) > 0$, а отже, $\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta - \varepsilon$. Оскільки остання нерівність виконується для довільного $\varepsilon > 0$, то $\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta$, що й вимагалось довести. □

Теорема 2.5. *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — неперервні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-того рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних *інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо певне число $\delta > 0$. Нехай*

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta \right\}. \tag{2.2}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

Доведення. Спочатку припустимо, що для числа δ, про яке говориться в умові теореми, виконується сильніша умова:

$$\exists n_0 : E \subset \left\{ x : \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta, \forall n > n_0 \right\} \tag{2.3}$$

і покажемо, що твердження теореми виконується за цієї умови.

Якщо

$$\frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta,$$

то

$$\ln \mu(c_n(x)) \geqslant \delta \cdot \ln \nu(c_n(x))$$

і

$$\mu(c_n(x)) \geqslant \nu^\delta(c_n(x)).$$

Отже,

$$(\mu(c_n(x)))^\alpha \geqslant (\nu(c_n(x)))^{\alpha\delta}.$$

Оскільки у величинах $\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu)$ та $\mathcal{P}^{\alpha\delta}_\varepsilon(E, \Phi, \nu)$ супремум береться по одному й тому ж класу пакувань, то з попередньої нерівності випливає

$$\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha\delta}_\varepsilon(E, \Phi, \nu).$$

Розглядаючи від обох частин нерівності границю при $\varepsilon \to 0$, маємо

$$\mathcal{P}^\alpha_0(E, \Phi, \mu) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha\delta}_0(E, \Phi, \nu).$$

Нагадаємо, що

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu)=\inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j,\Phi,\mu): E\subset \cup_j E_j\right\},$$
$$\mathcal{P}^{\alpha\delta}(E,\Phi,\nu)=\inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha\delta}(E_j,\Phi,\nu): E\subset \cup_j E_j\right\}.$$

Оскільки інфімум береться по одному й тому ж класу покриттів множинами $\{E_j\}$ множини E, то

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu)\geqslant \mathcal{P}^{\alpha\delta}(E,\Phi,\nu).$$

Нехай $\dim_P(E,\Phi,\mu)=\alpha_0$. Виберемо довільне число $\alpha>\alpha_0$. Тоді $\mathcal{P}^{\alpha}(E,\Phi,\mu)=0$, а тому і $\mathcal{P}^{\alpha\delta}(E,\Phi,\nu)=0$. Отже,

$$\dim_P(E,\Phi,\nu)\leqslant \delta\cdot \dim_P(E,\Phi,\mu),$$

якщо виконується умова (2.3).

Нехай виконується умова

$$E\subset\left\{x:\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_n(x))}{\ln\nu(\Delta_n(x))}\leqslant\delta\right\}.$$

Тоді

$$\forall x\in E, \forall\varepsilon>0, \exists N(x,\varepsilon):\forall n>N(x,\varepsilon), \frac{\ln\mu(\Delta_n(x))}{\ln\nu(\Delta_n(x))}\leqslant\delta+\varepsilon.$$

Зафіксуємо деяке $\varepsilon>0$. Розглянемо множини

$$E_m=\{x:N(x,\varepsilon)\leqslant m\},$$

де $m\in\mathbb{N}$.

З означення множин E_m випливає, що

$$E_m\subset\left\{x:\frac{\ln\mu(\Delta_n(x))}{\ln\nu(\Delta_n(x))}\leqslant\delta+\varepsilon, \forall n>m\right\}.$$

Тому

$$\dim_P(E_m, \Phi, \nu) \leqslant (\delta + \varepsilon) \cdot \dim_P(E_m, \Phi, \mu), \forall m \in \mathbb{N}.$$

Зі зліченної стабільності $\dim_P(\cdot, \Phi, \mu)$ та $\dim_P(\cdot, \Phi, \nu)$ випливає, що

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant (\delta + \varepsilon) \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

Оскільки ε може бути як завгодно малим додатнім числом, то

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu),$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 2.4. *Нехай μ, ν — неперервні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-того рангу, що містить точку x. Зафіксуємо певне число $\delta > 0$. Нехай*

$$E \subset \left\{ x : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \geqslant \delta \right\}. \tag{2.4}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

Доведення. Нехай $\nu_1 = \mu, \mu_1 = \nu, \delta_1 = \frac{1}{\delta}$. Тоді міри μ_1, ν_1 та число δ_1 задовольняють умови теореми 2.5. Отже,

$$\dim_P(E, \Phi, \nu_1) \leqslant \delta_1 \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu_1),$$

тобто

$$\dim_P(E, \Phi, \mu) \leqslant \frac{1}{\delta} \cdot \dim_P(E, \Phi, \nu),$$

звідки випливає

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

□

2.5. Критерій довірчості сімейства циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора для обчислення пакувальної розмірності

Нагадаємо означення представлення дійсних чисел рядами Кантора.

Означення 2.4. Для заданої послідовності $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, де $n_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, запис довільного числа $x \in [0; 1]$ у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k} := \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}, \quad \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}$$

називається представленням числа x рядами Кантора.

Г. Кантор ввів такі представлення у 1869 році [27] як природні узагальнення класичного s-адичного представлення дійсних чисел.

Ці представлення та їх властивості інтенсивно досліджувалися багатьма математиками (див., наприклад, роботи [75, 77] та посилання в них). Зауважимо, що незважаючи на певну «простоту» таких зображень (представлення чисел рядами Кантора є частковим випадком $\tilde{Q}$-представлення, а саме, коли $q_{ik} = \frac{1}{n_k}$), на сьогодні все ще невідомі необхідні та достатні умови раціональності дійсних чисел в термінах послідовності (n_k), хоча спроби знайти такі критерії раціональності тривають вже багато років (див., наприклад, [53, 76]).

Наступна теорема, яка є одним з основних результатів роботи, дає загальні необхідні і достатні умови довірчості сімейства циліндрів преставлення чисел рядами Кантора для обчислення пакувальної розмірності при довільному виборі послідовності $\{n_k\}$. Це є перший з відомих нам результатів, який дає необхідні і достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності для тих представлень дійсних чисел, які породжують як довірчі, так і не довірчі сімейства пакувань.

Теорема 2.6. *Сімейство Φ циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора є довірчим для обчислення пакувальної роз-*

мірності тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln n_k}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1})}=0. \tag{2.5}$$

Доведення. Домовимося сімейство всіх циліндричних інтервалів рангу k позначати як Φ_k.

Достатність. Нехай умова (2.5) виконується. Покажемо, що $\forall E\subset[0;1]$ виконується рівність $\dim_P(E,\Phi) = \dim_P E$. Оскільки нерівність $\dim_P(E,\Phi)\leqslant\dim_P E$ виконується для довільного сімейства Φ, то досить довести лише нерівність

$$\dim_P(E,\Phi)\geqslant\dim_P E.$$

Нехай $\{E_j\}=\{(a_j;b_j):j\in\mathbb{N}\}$ — довільне **центроване** ε-пакування деякої множини E.

Позначимо через Φ_k множину всіх циліндрів рангу k.

Тоді для кожного j існують ранг k_j та циліндр $\Delta_j\in\Phi_{k_j}$ такі, що:

1. $\Delta_j\subset E_j$;
2. $c_j\in\Delta_j$, де c_j — середина E_j;
3. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall\Delta\in\Phi_{k_j+k},\Delta\not\subset E_j$.

З вибору Δ_j випливає, що

$$\frac{1}{2n_{k_j}}\cdot|E_j|\leqslant|\Delta_j|\leqslant E_j.$$

Оцінимо знизу α-об'єм пакування множини E циліндрами Δ_j:

$$\sum_j|\Delta_j|^{\alpha}=\sum_j|\Delta_j|^{\alpha+\delta}\cdot|\Delta_j|^{-\delta}\geqslant\sum_j\left(\frac{1}{2n_{k_j}}|E_j|\right)^{\alpha+\delta}\cdot|\Delta_j|^{-\delta},$$

де δ — довільне число з інтервалу $(0;\alpha)$.

Розглянемо вираз

$$A_j:=|\Delta_j|^{-\delta}\cdot\left(\frac{1}{2n_{k_j}}\right)^{\alpha+\delta}=(n_1n_2\ldots n_{k_j-1})^{\delta}\cdot\left(\frac{1}{2n_{k_j}}\right)^{\alpha+\delta}.$$

Оцінимо вираз A_j знизу, розглянувши для цього $\ln A_j$:

$$\ln A_j = \delta \ln(n_1 n_2 \dots n_{k_j-1}) - (\delta+\alpha)(\ln 2 + \ln n_{k_j}) =$$
$$= \ln(n_1 n_2 \dots n_{k_j-1}) \left(\delta - \frac{(\delta+\alpha)(\ln 2 + \ln n_{k_j})}{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k_j-1})} \right)$$

Очевидно, що

$$\lim_{k_j \to \infty} \ln A_j = +\infty.$$

З того, що

$$\lim_{k_j \to \infty} \ln A_j = +\infty,$$

випливає, що існує константа $C > 0$ така, що $\ln A_j \geqslant \ln C$ при досить великому k_j.

Отже, при досить великому k_j (або, що рівносильно, при досить малому ε) виконуються нерівності

$$A_j \geqslant C \Rightarrow \sum_j |\Delta_j|^\alpha \geqslant C \sum |E_j|^{\alpha+\delta}.$$

Звідси випливає, що при досить малих ε аналогічні нерівності виконуються й між пакувальними передмірами:

$$\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha+\delta}_\varepsilon(E).$$

Спрямовуючи ε до нуля, маємо

$$\mathcal{P}^\alpha_0(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha+\delta}_0(E).$$

Оскільки пакувальна квазі-міра завжди є більшою або рівною за відповідну пакувальну міру (очевидний факт), то

$$\mathcal{P}^\alpha_0(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E).$$

Розглянемо довільне не більш ніж зчисленне покриття множини E множинами E_i. Для кожної з множин E_i виконується нерівність

$$\mathcal{P}^\alpha_0(E_i, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E_i).$$

Не порушуючи загальності можна вважати, що кожна з множин E_i є підмножиною E. Вважаючи так, знайдемо від обох сторін суму по i та врахуємо зчисленну адитивність $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}$:

$$\sum_i \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_i, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E)$$

З останньої нерівності випливає

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E).$$

Припустимо, що $\alpha + \delta < \dim_P E$. Тоді $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E) = +\infty$, і тому $\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi) = +\infty$, тобто $\alpha \geqslant \dim_P(E, \Phi)$. Отже,

$$\dim_P(E, \Phi) \geqslant \dim_P E - \delta.$$

Оскільки остання нерівність виконується для довільного $\delta > 0$, то $\dim_P(E, \Phi) \geqslant \dim_P E$, звідки й випливає довірчість Φ.

Необхідність. Покажемо, що умова (2.5) є необхідною для довірчості сімейства Φ для обчислення пакувальної розмірності.

Від супротивного. Нехай умова (2.5) не виконується. Тоді

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}} =: C > 0, \tag{2.6}$$

а отже, існує підпослідовність (n_{k_s}) послідовності (n_k) така, що

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\ln n_{k_s}}{\ln(n_1 n_2 \ldots n_{k_s - 1})} = C.$$

Задамо множину T^* наступним чином. Нехай

$$T^* = \left\{ \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} : \begin{array}{c} \alpha_j = 0, \text{ якщо } j \notin \{k_s\} \\ \alpha_j \in \{0, [\sqrt{n_j}], 2[\sqrt{n_j}], \ldots, ([\sqrt{n_j} - 1]) \cdot [\sqrt{n_j}]\}, \\ \text{якщо } j \in \{k_s\}. \end{array} \right\}$$

Покажемо, що

$$\dim_P(T^*, \Phi) < \dim_P(T^*). \tag{2.7}$$

Для цього спочатку доведемо, що $\dim_P(T^*) \geqslant \frac{C}{C+2}$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо таке m_0, що $\frac{1}{n_1 n_2 \dots n_{m_0}} < \varepsilon$. Тоді множина T^* може бути покрита

$$\left[\sqrt{n_{k_1}}\right] \cdot \left[\sqrt{n_{k_2}}\right] \cdot \dots \cdot \left[\sqrt{n_{k_s}}\right] =: Q_s$$

інтервалами, кожен з яких є об'єднанням $[\sqrt{n_k}]$ циліндрів з Φ_{k_s} для довільного $s > m_0$.

Довжина кожного з цих інтервалів дорівнює

$$\frac{\left[\sqrt{n_{k_s}}\right]}{n_1 n_2 \dots n_{k_s}} =: V_s.$$

Отже, α-об'єм ε-пакування, що складається з цих інтервалів, дорівнює

$$\begin{aligned} Q_s \cdot (V_s)^\alpha =& \\ &= \left(\exp\left(\frac{\ln Q_s}{\ln\left(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1}\right)} + \right.\right. \\ &+ \frac{\alpha \ln\left[\sqrt{n_{k_s}}\right]}{\ln\left(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1}\right)} - \\ &\left.\left. - \frac{\alpha \ln\left(n_1 n_2 \dots n_{k_s}\right)}{\ln\left(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1}\right)}\right)\right)^{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1})} \end{aligned}$$

Обчислимо величину

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to\infty} \frac{\ln Q_s}{\ln\left(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1}\right)} = \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{\ln\left[\sqrt{n_{k_1}}\right] + \ln\left[\sqrt{n_{k_2}}\right] + \dots \ln\left[\sqrt{n_{k_{s-1}}}\right] + \ln\left[\sqrt{n_k}\right]}{\ln\left(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1}\right)} = \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{s\to\infty} Q_s \cdot (V_s)^\alpha = (exp(C - 2\alpha - \alpha C))^{\frac{1}{2}\ln(n_1 n_2 \dots n_{k_s - 1})}.$$

Якщо $C - 2\alpha - \alpha C > 0$ ($\alpha > \frac{C}{2+C}$), то $Q_s (V_s)^\alpha \to +\infty$ при $s \to \infty$. Тому якщо $\alpha < \frac{C}{2+C}$, то $\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(T^*) = +\infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Покажемо, що T^* задовольняє умови теореми 1.4. Очевидно, що T^* — компактна.

Також очевидно, що T^* складається з $[\sqrt{k_1}]$ конгруентних між собою множин виду $T^* \cap \Delta_{k_1}$, а тому кожна з цих множин має нескінченну α-мірну пакувальну передміру.

Аналогічно можна довести, що $\forall s \in \mathbb{N}$ T^* складається з $[\sqrt{k_1}] \cdot \ldots \cdot [\sqrt{k_s}]$ множин виду $T^* \cap \Delta_{k_s}$, а тому кожна з цих множин також має нескінченну α-мірну пакувальну передміру.

Нехай V є довільною відкритою множиною, яка має непустий перетин з T^*. Тоді V складається з не більш зі зліченної кількості інтервалів, і тому деякий інтервал $V_0 \subset V$ має непустий перетин з T^*. Тоді $V_0 \cap T^*$ має в перетині одну з множин виду $T^* \cap \Delta_{k_s}$ для деякого досить великого $s \in \mathbb{N}$, і тому $\mathcal{P}_0^{\alpha}(T^* \cap V_0) = \infty$. Звідси випливає, що T^* задовольняє умови теореми 1.4, і тому $\mathcal{P}^{\alpha}(T^*) = \infty$, $\forall \alpha < \frac{C}{2+C}$.

Отже, ми показали, що

$$\dim_P T^* \geqslant \frac{C}{2+C}. \tag{2.8}$$

Тепер покажемо, що

$$\dim_P (T^*, \Phi) \leqslant \frac{C}{2C+2}.$$

Нехай μ_ξ є ймовірнісною мірою, яка породжена випадковою величиною

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\prod_{i=1}^{k} n_i},$$

де ξ_k є незалежними випадковими величинами з такими розподілами:

Якщо $k \notin \{k_s\}$, то $P(\xi_k = 0) = 1$;

Якщо $k \in \{k_s\}$, то

ξ_k	0	$[\sqrt{n_k}]$	$2 \cdot [\sqrt{n_k}]$	$\ldots$	$([\sqrt{n_k}] - 1) \cdot [\sqrt{n_k}]$
	$\frac{1}{[\sqrt{n_k}]}$	$\frac{1}{[\sqrt{n_k}]}$	$\frac{1}{[\sqrt{n_k}]}$	$\ldots$	$\frac{1}{[\sqrt{n_k}]}$

Нехай λ — це міра Лебега на $[0; 1]$, а $\Delta_k(x)$ — циліндр k-го рангу, який містить x. Тоді $\forall x \in T^*$:

$$\ln \mu_\xi(\Delta_{k_s}(x)) = -\ln Q_s;$$

$$\ln \lambda(\Delta_{k_s}(x)) = -\ln(n_1 n_2 \dots n_{k_s});$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{k_s}(x))}{\ln \lambda(\Delta_{k_s}(x))} =$$
$$= \lim_{s\to\infty} \frac{\ln\left[\sqrt{n_{k_1}}\right] + \ln\left[\sqrt{n_{k_2}}\right] + \dots \ln\left[\sqrt{n_{k_{s-1}}}\right] + \ln\left[\sqrt{n_k}\right]}{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k_{s-1}}) + \ln n_{k_s}} = \frac{C}{2C+2}.$$

Покажемо, що

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_l(x))}{\ln \lambda(\Delta_l(x))} = \frac{C}{2C+2}, \forall x \in T^*.$$

Для довільного $l \in \mathbb{N}$ існує число $s = s(l)$ таке, що $k_s \leqslant l < k_{s+1}$. Зафіксуємо $d_l := l - k_s$. Тоді $l = k_s + d_l$, де $d_l < k_{s+1} - k_s$. Отже,

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_l(x))}{\ln \lambda(\Delta_l(x))} = \frac{\ln\left(\mu_\xi(\Delta_{k_s}(x)) \cdot \overbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}^{d_l}\right)}{\ln\left(\lambda(\Delta_{k_s}(x)) \cdot \frac{1}{n_{k_s+1}} \cdot \frac{1}{n_{k_s+2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n_{k_s+d_l}}\right)} =$$
$$= \frac{\ln\left(\frac{1}{\mu_\xi(\Delta_{k_s}(x))}\right) + 0}{\ln\left(\frac{1}{\lambda(\Delta_{k_s}(x))}\right) + \sum_{i=1}^{d_l} \ln n_{k_s+i}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{\mu_\xi(\Delta_{k_s}(x))}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\lambda(\Delta_{k_s}(x))}\right)} = \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{k_s}(x))}{\ln \lambda(\Delta_{k_s}(x))}.$$

Таким чином, $\gamma_i := \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{k_s+i}(x))}{\ln \lambda(\Delta_{k_s+i}(x))}$ є монотонно спадною послідовністю при $i \in \{0, 1, 2, \dots k_{s+1} - k_s - 1\}$.

Звідси випливає, що

$$T^* \subset \left\{x : \limsup_{l\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_l(x))}{\ln \lambda(\Delta_l(x))} \leqslant \frac{C}{2C+2}\right\}.$$

Застосувавши аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності (тобто теорему 2.5), ми отримуємо

$$\dim_P(T^*, \Phi, \lambda) \leqslant \frac{C}{2C+2} \cdot \dim_P(T^*, \Phi, \mu_\xi).$$

Оскільки T^* є топологічним носієм міри μ_ξ, то $\dim_P(T^*, \Phi, \mu) = 1$. Враховуючи, що $\dim_P(T^*, \Phi, \lambda) = \dim_P(T^*, \Phi)$, маємо нерівність

$$\dim_P(T^*, \Phi) \leqslant \frac{C}{2C+2}. \tag{2.9}$$

З нерівностей (2.8) та (2.9) випливає, що

$$\dim_P(T^*, \Phi) \leqslant \frac{C}{2C+2} < \frac{C}{C+2} \leqslant \dim_P T^*,$$

що й вимагалось довести. □

Приклад 2.1. Нехай n_k є геометричною прогресією: $n_k = q^k$, де $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді $\Phi(n_k)$ є довірчим сімейством циліндрів.

Доведення.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k-1})} &= \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln q^k}{\ln(q^1 q^2 \dots q^{k-1})} = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln q}{(1+2+\dots+(k-1))\ln q} = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln q}{\frac{1}{2}k(k-1)\ln q} = 0.\end{aligned}$$

□

Приклад 2.2. Нехай $n_k = q^{k^2}$, де $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді $\Phi(n_k)$ є довірчим сімейством циліндрів.

Доведення.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k-1})} &= \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln q^{k^2}}{\ln(q^1 q^4 \dots q^{(k-1)^2})} = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2 \ln q}{(1^2+2^2+\dots+(k-1)^2)\ln q} = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln q}{\frac{1}{6}k(2k^2-3k+1)\ln q} = 0.\end{aligned}$$

□

Розглянутий щойно приклад показує, що навіть якщо послідовність n_k зростає швидше за будь-яку геометричну прогресію, то сімейство $\Phi(n_k)$ може бути довірчим.

Приклад 2.3. Нехай $n_k = q^{q^k}$, де $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді $\Phi(n_k)$ не є довірчим сімейством циліндрів.

Доведення.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k-1})} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln q^{q^k}}{\ln(q^q q^{q^2} \dots q^{q^{k-1}}} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{q^k \ln q}{(q + q^2 + \dots + q^{k-1}) \ln q} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{q^k \ln q}{\frac{1-q^k}{1-q} \ln q} = \frac{1}{q-1} \neq 0.$$

□

2.6. Приклад сімейства куль, яке є довірчим, але не є порівнянним для обчислення пакувальної розмірності

Теорема 2.7. *Нехай $n_k = 4^k$, а Φ — сімейство циліндрів відповідного представлення дійсних чисел рядами Кантора. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності на $[0;1]$, але не є порівнянним.*

Доведення. Обчислимо границю

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_{k-1})} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 4^k}{\ln(4^1 4^2 \dots 4^{k-1})} =$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{k \ln 4}{(1 + 2 + \dots + (k-1)) \ln 4} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k^2 + k} = 0. \quad (2.10)$$

Отже, сімейство Φ задовольняє умови теореми 2.6 і тому є довірчим.

Для доведення непорівнянності сімейства Φ розглянемо множину

$$A = \left\{\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots} : \alpha_k \in \{0, 2^k, 2\cdot 2^k, 3\cdot 2^k, \dots, (2^k - 1)\cdot 2^k\}\right\}$$

і покажемо, що $\dim_P A = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}(A, \Phi) \leqslant 1$, але $\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}(A) = \infty$.

Нехай λ є мірою Лебега на $[0;1]$, а μ_ξ є ймовірнісною мірою випадкової величини

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots},$$

де ξ_k — це незалежні дискретні випадкові величини з наступними розподілами:

ξ_k	0	2^k	$2 \cdot 2^k$	$\ldots$	$(2^k - 1) \cdot 2^k$
p_{ik}	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^k}$

Нехай $\Delta_n(x)$ — це циліндричний інтервал n-го рангу, який містить точку x. Тоді $\forall x \in A$ виконуються умови:

$$\mu_\xi(\Delta_n(x)) = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \lambda(\Delta_n(x)) = 4^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Отже,

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} = \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in A.$$

Очевидно, що $\mu_\xi(A) = 1$, і тому $\dim_P(A, \Phi, \mu_\xi) = 1$. Отже, за аналогом теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності (теоремою 2.5) маємо:

$$\dim_P(A, \Phi, \lambda) = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $\dim_P(A, \Phi, \lambda) = \dim_P(A, \Phi)$, причому Φ — довірча, то $\dim_P A = \frac{1}{2}$.

Зафіксуємо довільне число $r > 0$. Виберемо таке $k_0(r)$, що $2^{k_0} \cdot \lambda(\Delta_{k_0}) < r$, де Δ_{k_0} — це будь-який з циліндрів рангу k_0 (нагадаємо, що у представленні дійсних чисел рядами Кантора всі циліндри однакового рангу мають однакову міру Лебега).

Розглянемо множину циліндрів M_1, до якої входять всі циліндри рангу k_0, внутрішності яких мають непорожній перетин із множиною A. Розглянемо також множину відрізків M, до якої входять об'єднання по 2^{k_0} суміжних відрізків з множини M_1.

Нехай M^0 є множиною внутрішностей відрізків з M, тобто множиною інтервалів. Ці інтервали є попарно неперетинними, і кожен з них має довжину, яка не перевищує числа r. Тому M^0 є r-пакуванням (нецентрованим) множини A. Обчислимо α-об'єм цього пакування. Для цього врахуємо, що вказане пакування складається з інтервалів, кількість яких становить

$$2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0},$$

а довжина кожного з інтервалів дорівнює

$$2^{k_0} \cdot \left(4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0}\right)^{-1}.$$

Таким чином, α-об'єм вказаного пакування дорівнює

$$V_\alpha(M^0) = 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0} \cdot \left(\frac{2^{k_0}}{4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0-1} 4^{k_0}}\right)^\alpha.$$

Отже,

$$\begin{aligned} V_{1/2}(M^0) &= 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0} \cdot \left(\frac{2^{k_0}}{4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0-1} 4^{k_0}}\right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{2^{k_0}}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\mathcal{P}_r^{1/2}(A) \geqslant V_{1/2}(M^0),$$

і

$$\lim_{r \to 0} k_0(r) = \infty,$$

то

$$\mathcal{P}_0^{1/2}(A) = \lim_{k_0 \to \infty} V_{1/2}(M^0) = \infty.$$

Покажемо, що A задовольняє умови теореми 1.4. Очевидно, що A — компактна.

Нехай V — довільна відкрита множина. Тоді $A \cap V$ містить в собі множину $A_1 = A \cap \Delta_k$, де Δ_k — це деякий циліндр рангу k, який має непустий перетин з A.

З побудови множини A випливає, що A складається з 2^k множин, конгруентних множині A_1, і тому $\mathcal{P}_0^{1/2}(A_1) = \infty$.

Отже, A задовольняє умови теореми 1.4, і тому $\mathcal{P}^{1/2}(A) = \infty$.

Покажемо, що $\mathcal{P}^{1/2}(A, \Phi) \leqslant 1$.

Зафіксуємо деяке $r > 0$ і позначимо через $k_0(r)$ найменше таке k, що $|\Delta_k(x)| < r$. Тоді множину A можна покрити $2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{k_0}$ циліндрами рангу k_0. Довжина кожного такого циліндра дорівнює $(4^1 \cdot 4^2 \cdot \dots 4^{k_0})^{-1}$. Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$, то α-об'єм пакування множини A розглядуваними циліндрами дорівнює

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{k_0} \cdot \left(4^1 \cdot 4^2 \cdot \dots 4^{k_0}\right)^{-1/2} = 1.$$

Якщо розглянути один циліндр рангу k_0, то його α-об'єм (при $\alpha = \frac{1}{2}$) дорівнює

$$\left(4^1 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot 4^{k_0}\right)^{-1/2} = (2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{k_0})^{-1}.$$

Якщо замість цього циліндра розглядати 2^{k_0+1} циліндрів рангу (k_0+1), то їх сумарний α-об'єм буде дорівнювати

$$2^{k_0+1} \cdot \left(4^1 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot 4^{k_0} \cdot 4^{k_0+1}\right)^{-1/2} = (2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{k_0})^{-1}.$$

Отже, якщо у пакуванні множини A циліндрами рангу k_0 замінити один з циліндрів на циліндри наступного рангу, то α-об'єм пакування не зміниться. Це значить, що α-об'єм довільного пакування множини A циліндрами рангів $\geqslant k_0$ (не обов'язково рівних між собою) також дорівнює 1, а тому і $\mathcal{P}_r^{1/2}(A, \Phi) = 1$, і $\mathcal{P}_0^{1/2}(A, \Phi) = 1$.

Отже, $\mathcal{P}^{1/2}(A, \Phi) \leqslant 1$, що й вимагалось довести. $\square$

РОЗДІЛ 3
ТОНКІ ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МІР, ПОВ'ЯЗАНІ З ПАКУВАЛЬНОЮ РОЗМІРНІСТЮ. PDP-ПЕРЕТВОРЕННЯ.

3.1. Основні означення та властивості

3.1.1. PDP–перетворення.

Означення 3.1. Нехай (M, ρ) — метричний простір, у якому визначена пакувальна розмірність. Нехай f є перетворенням цього метричного простору (тобто взаємно однозначним відображенням простору на себе). Тоді ми будемо казати «f зберігає пакувальну розмірність», якщо виконується умова:

$$\forall E \subset M, \dim_P f(E) = \dim_P E.$$

Якщо f зберігає пакувальну розмірність, то його також називають PDP-перетворенням (від англійських слів «Packing dimension preserving»).

Поняття збереження розмірності було введене для розмірності Хаусдорфа–Безиковича (див., наприклад, [14, 15]). Перетворення, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича, називаються DP-перетвореннями. В роботах S. Albeverio, M. Працьовитого, Г. Торбіна [14, 15] показано, що біліпшицевість перетворень є лише грубою достатньою умовою для належності цих перетворень до DP-класу.

Це саме виконується і для пакувальної розмірності. Зокрема, доведення того, що біліпшицевість є достатньою умовою для належності перетворення до PDP-класу, можна знайти в [78].

Крім того, перевірка належності певного перетворення до DP-класу (при роботі в довільному метричному просторі) є дуже складною задачею. Більше того, навіть у $\mathbb{R}^n$ є зробленими лише перші кроки у дослідженні

DP-перетворень. Наприклад, у роботі [13] розглянуто про питання належність певних класів перетворень простору $\mathbb{R}^2$ до DP-перетворень.

І навіть перевірка на належність до DP-класу перетворень з $\mathbb{R}^1$ також є нетривіальною задачею. Тому надалі будуть розглядатися лише неперервні перетворення з $\mathbb{R}^1$.

Числову вісь $\mathbb{R}^1$ можна розбити на зліченну кількість відрізків $[k; k+1]$, де $k \in \mathbb{Z}$. Якщо перетворення зберігає пакувальну фрактальну розмірність на кожному з цих відрізків, то воно зберігатиме $\dim_P$ і на всій числовій осі (це випливає зі зліченної стабільності $\dim_P$). Отже, для дослідження неперервних PDP-перетворень на $\mathbb{R}^1$ достатньо розглядати лише неперервні перетворення певного відрізка, наприклад $[0; 1]$.

Неперервне перетворення відрізка є неперервною строго монотонною функцією, заданою на цьому відрізку. Якщо розглядуваний відрізок є відрізком $[0; 1]$, то вказана функція може бути або функцією F_ξ розподілу деякої випадкової величини ξ (у випадку, коли функція є зростаючою), або мати вигляд $1 - F_\xi$ (у іншому випадку).

У загальному випадку задача перевірки деякого неперервного перетворення відрізка $[0; 1]$ на належність до PDP-класу є нетривіальною проблемою. Тому розглядають часткові випадки цієї задачі.

Ми розглянемо задачу перевірки деякого перетворення відрізка $[0; 1]$, яке задане функцією розподілу F_ξ за умови, що ξ є випадковою величиною з незалежними $\tilde{Q}$-цифрами (строге означення цієї випадкової величини буде дано нижче).

3.1.2. Пакувальна розмірність міри та її зв'язок з PDP-перетвореннями.

Означення 3.2. Нехай μ є деякою ймовірнісною мірою, визначеною на $[0; 1]$. Тоді пакувальною розмірністю міри μ називається число

$$\dim_P \mu := \inf\{\dim_P E : \mu(E) = 1\}.$$

Для довільної неперервної випадкової величини ξ, визначеної на $[0;1]$, виконується така властивість:

Лема 3.1. *Нехай ξ — неперервна випадкова величина, розподілена на $[0;1]$. Тоді для того, щоб F_ξ належала до PDP-класу, необхідно, щоб $\dim_P \mu_\xi = 1$.*

Доведення. Припустимо, що $\dim_P(\mu_\xi) = \alpha \neq 1$. Тоді існує множина E_α така, що $\mu_\xi(E_\alpha) = 1$ і $\dim_P(E_\alpha) = \alpha$. Розглянемо $F_\xi(E_\alpha)$. Ця множина має міру Лебега 1 (тому що $\mu_\xi(E_\alpha) = 1$), а отже, і $\dim_P(F_\xi(E_\alpha)) = 1$. Отже,

$$\dim_P(F_\xi(E_\alpha)) = 1 \neq \alpha = \dim_P(E_\alpha),$$

що суперечить умові «F_ξ належить до PDP-класу». □

3.2. Випадкові величини з незалежними $\tilde{Q}$-символами

Нехай (ξ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \ldots, n_k - 1$ з імовірностями $p_{0j}, p_{1j}, \ldots, p_{(n_k-1)j}$ відповідно, причому $\sum_i p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Означення 3.3. Випадкова величина

$$\xi = \Delta^{\tilde{Q}}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

називається випадковою величиною з незалежними $\tilde{Q}$ цифрами.

При цьому через μ_ξ позначається ймовірнісна міра випадкової величини ξ, а через F_ξ — відповідна функція розподілу.

3.2.1. Пакувальна розмірність міри, що відповідає в.в. з незалежними $\tilde{Q}$-символами. Випадкова величина з незалежними $\tilde{Q}$-символами задається за допомогою двох матриць: $||q_{ij}||$ та $||p_{ij}||$. Формулу для пакувальної розмірності ймовірнісної міри, що відповідає випадковій величині ξ, навів J.Li:

Теорема 3.1 ([73]). *Якщо* $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$*, то*

$$\dim_P \mu = \limsup_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n},$$

де

$$H_n = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij}\ln p_{ij}, \qquad B_n = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij}\ln q_{ij}.$$

Варто зазначити, що аналогічну формулу для $\dim_H$ раніше довів Г. Торбін [86].

3.2.2. Умови збереження пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними $\tilde{Q}$-цифрами. Нагадаємо, що в.в. ξ з незалежними $\tilde{Q}$-цифрами задається двома матрицями: $||q_{ij}||$ та $||p_{ij}||$. Постає питання: які умови потрібно накласти на ці матриці, щоб функція F_ξ належала до множини PDP-перетворень відрізка $[0;1]$?

Часткову відповідь на це питання дав J. Li:

Теорема 3.2 ([72]). *Припустимо, що* $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$*,* $\inf_{i,j} p_{ij} > 0$*. Тоді* F_ξ *є* PDP*-перетворенням тоді і тільки тоді, коли* $\dim_P(\mu_\xi) = 1$*.*

Варто зазначити, що аналогічну теорему довів Г. Торбін на декілька років раніше для DP-перетворень [86].

Нижче буде розширено умови, вказані Li, а саме буде знято обмеження $\inf_{i,j} p_{ij} > 0$.

Лема 3.2. *Нехай задана матриця* $\tilde{Q} = ||q_{ij}||$*. Нехай*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln q_{i_k k}}{\ln(q_{i_1 1} q_{i_2 2} \dots q_{i_{k-1}(k-1)})} = 0$$

для довільної послідовності (i_k)*. Тоді сімейство* Φ *циліндричних інтервалів відповідного представлення є довірчим для пакувальної розмірності.*

Доведення. Виберемо довільну множину $E \subset [0;1]$. Для довільних чисел $m \in \mathbb{N}$ та $\delta > 0$ розглянемо множини

$$W_{m,\delta} = \left\{ x \in E : \frac{\ln q_{i_k k}(x)}{\ln(q_{i_1 1}(x) q_{i_2 2}(x) \dots q_{i_{k-1}(k-1)}(x))} < \delta, \quad \forall k \geqslant m \right\}.$$

Розглянемо множину $W_{m,\delta}$ при деякому фіксованому m. Зафіксуємо таке ε, яке не перевищує довжину жодного циліндричного інтервала рангу m (очевидно, що таке ε існує). Розглянемо центроване ε-пакування цієї множини проміжками E_j.

Для довільного проміжка E_j існує циліндричний інтервал $\Delta(E_j)$ мінімального рангу i_j, який міститься всередині E_j і містить в собі середину x_j інтервала E_j. Тоді «батько» цього циліндричного інтервала (тобто такий циліндричний інтервал $\Delta'(E_j)$, ранг якого дорівнює $i_j - 1$ і $\Delta'(E_j) \supset \Delta(E_j)$) матиме довжину не меншу, ніж $\frac{|E_j|}{2}$. Тому

$$|E_j| \leqslant \frac{2|\Delta(E_j)|}{q_{i_{k_j}k_j}(x_j)}, \text{ де } x_j \in W_{m,\delta}.$$

Оцінимо α-об'єм пакування множини E інтервалами E_j:

$$\sum_k |E_j|^\alpha \leqslant \sum_k |\Delta(E_j)|^\alpha \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j}k_j}(x_j)}\right)^\alpha.$$

Попередня нерівність рівносильна наступній:

$$\sum_k |E_j|^\alpha \leqslant \sum_k |\Delta(E_j)|^{\alpha-\delta} \cdot |\Delta(E_j)|^\delta \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j}k_j}(x_j)}\right)^\alpha.$$

Оцінимо вираз

$$\ln\left(|\Delta(E_j)|^\delta \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j}k_j}(x_j)}\right)^\alpha\right) =$$
$$= \delta \ln(q_{i_1 1}(x) q_{i_2 2}(x) \ldots q_{i_{k_j-1}(k_j-1)}(x)) + \alpha \ln 2 - \alpha \ln q_{i_{k_j}k_j}(x_j).$$

Оскільки $x_j \in W_{m,\delta}$, то

$$\delta \ln(q_{i_1 1}(x) q_{i_2 2}(x) \ldots q_{i_{k_j-1}(k_j-1)} \leqslant \ln q_{i_{k_j}k_j}(x_j)$$

і тому

$$ln\left(|\Delta(E_j)|^\delta \cdot \left(\frac{2}{q_{i_{k_j}k_j}(x_j)}\right)^\alpha\right) \leqslant \alpha \ln 2 + (1-\alpha) \ln q_{i_{k_j}k_j}(x_j) \leqslant \alpha \ln 2.$$

Отже,

$$\sum_j |E_j|^\alpha \leqslant 2\sum_j |\Delta(E_j)|^{\alpha-\delta}.$$

Візьмемо супремуми по всеможливим центрованим пакуванням $\{E_j\}$ від обох частин нерівності:

$$\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(W_{m,\delta}) \leqslant 2\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha-\delta}(W_{m,\delta},\Phi)$$

Візьмемо границю при $\varepsilon \to 0$ від обох частин нерівності:

$$\mathcal{P}_0^\alpha(W_{m,\delta}) \leqslant 2\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(W_{m,\delta},\Phi).$$

Враховуючи означення пакувальної міри, отримуємо таку нерівність:

$$\mathcal{P}^\alpha(W_{m,\delta}) \leqslant 2\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(W_{m,\delta},\Phi)$$

Нехай $\alpha_0 = \dim_P(W_{m,\delta})$. Тоді $\forall\alpha < \alpha_0$ ліва частина буде дорівнювати нескінченності, а отже, і права частина також дорівнюватиме нескінченності, і тому

$$\dim_P(W_{m,\delta},\Phi) \geqslant \alpha - \delta.$$

Отже,

$$\dim_P(W_{m,\delta},\Phi) \geqslant \dim_P(W_{m,\delta}) - \delta.$$

З означення $W_{m,\delta}$ випливає, що

$$E = \bigcup_{m=1}^\infty W_{m,\delta}.$$

Враховуючи властивість зліченної стабільності, маємо:

$$\dim_P(E,\Phi) \geqslant \dim_P(E) - \delta.$$

Враховуючи довільність δ, маємо:

$$\dim_P(E,\Phi) \geqslant \dim_P(E).$$

Оскільки це виконується для всіх E, то Φ є довірчим сімейством інтервалів, що й вимагалось довести. $\square$

Лема 3.3. *Нехай Φ — сімейство циліндричних інтервалів $\tilde{Q}$-представлення, для якого числа q_{ij} відділені від нуля. Нехай F_ξ — функція розподілу в.в. з незалежними $\tilde{Q}$-символами, для якої виконується рівність:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda(F(\Delta_n(x)))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}=1 \quad \forall x\in[0;1], \tag{3.1}$$

де Δ_n — це циліндр n-го рангу, який містить x. Нехай $\Phi'=F(\Phi)$. Тоді Φ' — довірча для пакувальної розмірності.

Доведення. Φ' є сімейством циліндрів для деякого $\tilde{Q}$-представлення, взагалі кажучи, не обов'язково з відділеними від нуля числами q_{ij}. Ми будемо позначати це представлення як $\tilde{Q}'$ і відповідні числа q_{ij} — як q'_{ij}. Покажемо, що для цього представлення виконуються умови попередньої теореми. Справді,

$$F(\Delta^{\tilde{Q}}_{a_1a_2\ldots a_n}(x))=\Delta^{\tilde{Q}'}_{a_1a_2\ldots a_n}(x),$$

$$\ln\lambda(F(\Delta_n(x)))=\ln(q'_{1a_1}q'_{2a_2}\ldots q'_{na_n}).$$

Введемо позначення:

$$M:=\limsup_{i\to\infty}\frac{\ln q'_{ij_i}}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}.$$

Оцінимо M. Для цього виконаємо деякі перетворення:

$$\lim_{n\to 0}\frac{\ln\lambda(F(\Delta_n(x)))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}=\lim_{n\to 0}\frac{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})+\ln q'_{ij_i}}{\ln(q_{1j_1}q_{2j_2}\ldots q_{(i-1)j_{i-1}})+\ln q_{ij_i}}.$$

Поділивши чисельник і знаменник на $\ln(q_{1j_1}q_{2j_2}\ldots q_{(i-1)j_{i-1}})$, отримаємо:

$$\lim_{n\to 0}\frac{1+\frac{\ln q'_{ij_i}}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}}{\frac{\ln(q_{1j_1}q_{2j_2}\ldots q_{(i-1)j_{i-1}})}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}+\frac{\ln q_{ij_i}}{\ln(q'_{1j_1}q'_{2j_2}\ldots q'_{(i-1)j_{i-1}})}}=\frac{1+M}{1+0}=1\Rightarrow M=0.$$

Отже, зображення $\tilde{Q}'$ задовольняє умови попередньої теореми і тому Φ' — довірча. $\square$

Введемо позначення:

$$
\begin{aligned}
&T^+_{\varepsilon,k} = \{1,2,\ldots,k\} \cap \{j : |p_{ij} - q_{ij}| \leqslant \varepsilon, \forall i \in \{0,1,\ldots,n_k-1\}\}\\
&T^-_{\varepsilon,k} = \{1,2,\ldots,k\} \setminus T^+_{\varepsilon,k}\\
&T_{\varepsilon,k} = T^-_{\varepsilon,k} \setminus T^{(1)}_k
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Лема 3.4. *Нехай ξ є в.в. з незалежними $\tilde{Q}$-символами,* $\dim_P \mu_\xi = 1$, *а*

$$\inf_{i,j} q_{ij} := q_{\min} > 0.$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} = 1,$$

де множина $T^+_{\varepsilon,k}$ визначена у рівностях (3.2), *а під $|\cdot|$ мається на увазі кількість елементів у множині.*

Доведення. Оскільки $|T^+_{\varepsilon,k}| + |T^-_{\varepsilon,k}| = k$, то $\frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} \leqslant 1$. Припустимо, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} \neq 1.$$

Нехай $s \geqslant 2$ — деяке натуральне число.

Легко довести, що для довільних двох стохастичних векторів з додатними координатами

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{p} &= (p_0; p_1; \ldots; p_{s-1}),\\
\overrightarrow{q} &= (q_0; q_1; \ldots; q_{s-1}).
\end{aligned}
$$

виконується нерівність

$$p_0^{p_0} \cdot p_1^{p_1} \cdot \cdots \cdot p_{s-1}^{p_{s-1}} \geqslant q_0^{p_0} \cdot q_1^{p_1} \cdot \cdots \cdot q_{s-1}^{p_{s-1}},$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $p_i = q_i, \forall i \in \{0,1,\ldots,s-1\}$.

Прологарифмуємо попередню нерівність:

$$
\begin{aligned}
&p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1 + \cdots + p_{s-1} \ln p_{s-1} \geqslant\\
&\geqslant p_0 \ln q_0 + p_1 \ln q_1 + \cdots + p_{s-1} \ln q_{s-1}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Розглянемо функцію

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{s-1}) = p_0 \ln x_0 + p_1 \ln x_1 + \dots + p_{s-1} \ln x_{s-1}$$

з накладеними умовами

$$x_i > 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \sum_i x_i = 1.$$

Ця функція є неперервною. Якщо

$$x_i \in (0; 1), \forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\},$$

то максимум функції (він є від'ємним числом, позначимо його через M) досягається при $x_i = p_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ (це випливає з нерівності (3.3)).

Зафіксуємо деяке натуральне число $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Припустимо, що

$$|p_j - q_j| \geqslant \varepsilon.$$

Тоді існує таке число $a_M < M$, що

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{s-1}) < a_M.$$

Введемо позначення:

$$h_j := -\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} \ln p_{ij},$$
$$b_j := -\sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} \ln q_{ij}.$$

З нерівності (3.3) випливає, що $h_j \leqslant b_j$.

Покладемо у розглядуваних функціях $s := n_j$, $p_i := p_{ij}$, $q_i := q_{ij}$.

З умови $j \notin T^+_{\varepsilon,k}$ випливає умова

$$|p_{ij} - q_{ij}| \geqslant \varepsilon,$$

а це значить, що існує таке число $a_M < M$, що $h_j = -M$, $b_j = -a_M$, і тому

$$\frac{h_j}{b_j} = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} p_{ij} \ln p_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_j} p_{ij} \ln q_{ij}} = \frac{M}{a_M}.$$

Отже, для довільного додатного ε існує така додатна константа $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, що

$$\frac{h_j}{b_j} \leqslant 1 - \delta_0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^{k} h_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} &= \frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} h_j + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{-}} h_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{+}} b_j + (1-\delta_0)\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{-}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} = \\ &= 1 - \delta_0 \frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{-}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j}. \end{aligned}$$

З умови $\dim_P \mu_\xi = 1$ випливає

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \delta_0 \frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{-}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} \right) = 1,$$

а тому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}^{-}} b_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j} = 0.$$

Введемо позначення:

$$\overrightarrow{p_j} = (p_{0j}, p_{1j}, \ldots, p_{(n_j-1)j}), \qquad \overrightarrow{r_j} = (-\ln q_{0j}, -\ln q_{1j}, \ldots, -\ln q_{(n_j-1)j}).$$

Оцінимо b_j зверху. Оскільки

$$-\ln q_{ij} \leqslant -\ln q_{\min},$$

то

$$\sum_{i=1}^{n_j-1} \Big(p_{ij} \cdot (-\ln q_{ij}) \Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n_j-1} \Big(p_{ij} \cdot (-\ln q_{\min}) \Big) = -\ln q_{\min}.$$

Оцінимо b_j знизу. Оскільки

$$q_{ij} \leqslant 1 - q_{\min},$$

то

$$-\ln q_{ij} \geqslant -\ln(1 - q_{\min}),$$

і тому

$$\sum_{i=1}^{n_j-1} \left(p_{ij} \cdot (-\ln q_{ij}) \right) \geqslant \sum_{i=1}^{n_j-1} \left(p_{ij} \cdot (-\ln(1 - q_{\min})) \right) = -\ln(1 - q_{\min}).$$

Отже, існують дві додатні константи $d_0 := -\ln(1 - q_{\min})$ та $d_1 := -\ln q_{\min}$ такі, що

$$d_0 \leqslant b_j \leqslant d_1,$$

і тому існують додатні константи $C_{\varepsilon,k} \in [d_0; d_1]$ та $D_{\varepsilon,k} \in [d_0; d_1]$ такі, що:

$$\sum_{j \in T^-_{\varepsilon,k}} b_j = |T^-_{\varepsilon,k}| \cdot C_{\varepsilon,k}; \qquad \sum_{j=1}^{k} b_j = k \cdot D_{\varepsilon,k}.$$

Таким чином,

$$\frac{\sum_{j=1}^{k_n} h_j}{\sum_{j=1}^{k_n} b_j} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{\sum_{j \in T^-_{\varepsilon,k_n}} b_j}{\sum_{j=1}^{k_n} b_j} = 1 - \delta_0 \frac{|T^-_{\varepsilon,k_n}| \cdot C_{\varepsilon,k_n}}{k_n \cdot D_{\varepsilon,k_n}} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{|T^-_{\varepsilon,k_n}| d_1}{k_n \cdot d_0}.$$

Отже,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{k_n}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{k_n}} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{|T^-_{\varepsilon,k_n}| d_1}{k_n \cdot d_0} \leqslant 1 - \delta_0 \frac{d_1}{d_0} \cdot (1 - a_0) < 1.$$

Отримана суперечність доводить лему. □

Теорема 3.3. *Нехай:*

$$p_j = \inf_i p_{ij}, \quad q_{\min} := \inf_{i,j} q_{ij}$$

$$T^{(1)} = \left\{ k : k \in \mathbb{N}, p_k < \frac{1}{2} q_{\min} \right\}$$

$$T^{(1)}_k = T^{(1)} \cap \{1, 2, \dots, k\},$$

$$B = \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{j \in T^{(1)}_k} \ln \frac{1}{p_j}}{k}.$$

Припустимо, що $q_{\min} > 0$.

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ *зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно й достатньо, щоб*

$$\begin{cases} \dim_P \mu_\xi = 1; \\ B = 0. \end{cases}$$

Доведення. З леми 3.1 випливає, що якщо $F_\xi - PDP$, то $\dim_P(\mu_\xi) = 1$. Отже, для доведення теореми достатньо довести два твердження:

1. Якщо $\dim_P(\mu_\xi) = 1$ і $B = 0$, то $F_\xi - PDP$;
2. Якщо $\dim_P(\mu_\xi) = 1$ і $B \neq 0$, то F_ξ — не PDP.

Нехай ε — довільне додатне число таке, що $\varepsilon < \frac{q_{\min}}{2}$.

1. Покажемо, що якщо $\dim_P(\mu_\xi) = 1$ і $B = 0$, то $F_\xi - PDP$.

З умови $B = 0$ випливає існування границі

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j \in T_k^{(1)}} \ln p_j}{k \ln q_{\min}} = 0.$$

Розглянемо відношення:

$$\frac{\ln \mu(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k(x)})} = \\ = \frac{\sum_{j \in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j \in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j \in T_k^{(1)}} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_j \ln q_{a_j(x)j}}$$

Розіб'ємо це відношення на три доданки. Розглянемо перший доданок:

$$\frac{\sum_{j \in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^k \ln q_{a_j(x)j}}.$$

Оцінимо його:

$$\sum_{j \in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} \leqslant \sum_{j \in T^+_{\varepsilon,k}} (\ln(q_{a_j(x)j}) - \varepsilon)) = \\ = \sum_{j \in T^+_{\varepsilon,k}} \ln q_{a_j(x)j} - \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)} - \varepsilon}\right) \geqslant \sum_{j \in T^+_{\varepsilon,k}} \ln q_{a_j(x)j} - |T^+_{\varepsilon,k}| \cdot \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}$$

та

$$\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} \leqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln q_{a_j(x)j} + |T^+_{\varepsilon,k}| \cdot \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}.$$

Розглянемо другий доданок вищезгаданого відношення

$$\frac{\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^{k} \ln q_{a_j(x)j}}.$$

Аналогічно до попереднього

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} (\ln q_{a_j(x)j}) - |T_{\varepsilon,k}| \cdot \ln \frac{2}{2-q_{\min}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} (\ln q_{a_j(x)j}) + |T_{\varepsilon,k}| \cdot \ln \frac{2}{2-q_{\min}}.$$

Розглянемо третій доданок:

$$\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j} \ln q_{a_j(x)j}}.$$

Його можна оцінити зверху величиною

$$\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_j}{k \ln q_{\min}},$$

а ця величина прямує до нуля при $k \to \infty$ (це випливає з умови $B = 0$).

Додавши три доданки та врахувавши їх оцінки, отримуємо нерівність:

$$\frac{\sum_{j=0}^{k} \ln q_{a_j(x)j} - |T^+_{\varepsilon,k}| \cdot \frac{2\varepsilon}{q_{\min}} - |T_{\varepsilon,k}| \cdot \ln \frac{2}{2-q_{\min}} - \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^{k} \ln q_{a_j(x)j}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{a_j(x)j} + \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j} \ln q_{a_j(x)j}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sum_{j=0}^{k} \ln q_{a_j(x)j} + |T^+_{\varepsilon,k}| \cdot \frac{2\varepsilon}{q_{\min}} + |T_{\varepsilon,k}| \cdot \ln \frac{2}{2-q_{\min}} + \sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{a_j(x)j}}{\sum_{j=0}^{k} \ln q_{a_j(x)j}}$$

Нагадаємо, що з леми 3.4 випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|T^{+}_{\varepsilon,k}|}{k}=1,\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{|T_{\varepsilon,k}|}{k}=0.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}{\lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}=1+0+0=1.$$

Позначимо сімейство циліндрів для заданого $\tilde{Q}$-представлення через Φ, а його образ через $\Phi'=F_\xi(\Phi)$.

Застосовуючи теорему 2.5, маємо

$$\dim_P(E,\Phi)=1\cdot\dim_P(F_\xi(E),\Phi')\quad\forall E\subset[0;1].$$

Для доведення того, що $\dim_P(E)=\dim_P(F_\xi(E))$, досить довести, що Φ та Φ' — довірчі.

Довірчість Φ була доведена у теоремі 2.3. Довірчість Φ' була доведена у лемах 3.2 та 3.3. Отже, $\dim_P(E)=\dim_P(F_\xi(E))$ і тому F_ξ є PDP-перетворенням.

2. Покажемо, що якщо $\dim_P(\mu_\xi)=1$ і $B>0$, то F_ξ —не PDP. Так само, як і в попередній частині доведення, випишемо відношення

$$\frac{\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}{\lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k(x)})}= \\ =\frac{\sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j}+\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}}\ln p_{a_j(x)j}+\sum_{j\in T^{(1)}_k}\ln p_{a_j(x)j}}{\sum_j \ln q_{a_j(x)j}}$$

і розіб'ємо його на три доданки. Аналогічно до попередньої частини доведення перший доданок прямує до 1, а другий — до 0 (при $k\to\infty$). Розглянемо третій доданок.

З умови $B>0$ випливає існування такої підпослідовності (k_m), що

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln\frac{1}{p_j}}{k_m}=B.$$

Розглянемо множину

$$L = \left\{ x : x = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots};\ \begin{array}{l} a_k \in \{0, 1, \ldots, s-1\} \text{ якщо } k \notin T^{(1)} \\ a_k = n_k, \text{ якщо } k \in T^{(1)}, \text{ де } p_{n_k k} = \min\limits_i p_{ik}. \end{array} \right\}$$

Оскільки заборона цифр у множині L зустрічається у нескінченній кількості місць, то $\lambda(L) = 0$. Але $\dim_P(L) = 1$ (це випливає з умови

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|T^{(1)}_{k_m}|}{k_m} = 0$$

і з теореми про пакувальну розмірність міри μ_ξ).

Отже, для довільного $x \in L$ виконується рівність:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_{k_m}(x)})} = 1 + B.$$

Тому для довільного $\delta > 0$ існує $m(\delta)$ таке, що $\forall m > m(\delta)$ виконується нерівність:

$$1 + B - \delta \leqslant \frac{\ln \mu(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_{k_m}(x)})} \leqslant 1 + B + \delta$$

Звідси випливає, що

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k(x)})} \geqslant 1 + B - \delta,$$

отже (за теоремою Біллінгслі для $\dim_P$),

$$\dim_{P-\mu}(L) \cdot (1 + B - \delta) \leqslant \dim_P(L),$$

тобто

$$\dim_P(F_\xi(L)) \leqslant \frac{1}{1 + B - \delta}.$$

З довільності δ випливає, що

$$\dim_P(F_\xi(L)) \leqslant \frac{1}{1 + B},$$

а це значить, що F_ξ не є PDP-перетворенням. $\square$

3.3. Випадкова величина ξ з незалежними символами розкладів Кантора

Означення 3.4. Зафіксуємо певний розклад C дійсних чисел у ряди Кантора, заданий послідовністю (n_k).

Нехай (ξ_k) є послідовністю незалежних дискретно розподілених випадкових величин, причому розподіл величини ξ_k задано таблицею:

x_m	0	1	$\dots$	$n_k - 1$
p_m	p_{0j}	p_{1j}	$\dots$	$p_{(n_k-1)j}$

Під випадковою величиною з незалежними символами розкладів Кантора будемо мати на увазі випадкову величину

$$\xi = \Delta^C_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

міру на відрізку $[0;1]$, яку породжує в.в. ξ, будемо позначати як μ_ξ, спектр цієї міри — як S_{μ_ξ}, а відповідну функцію розподілу — як F_ξ.

3.3.1. Пакувальна розмірність міри μ_ξ.

Покладемо $0\ln 0 := 0$ у наступних позначеннях. Нехай

$$h_j := -\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij}\ln p_{ij}, \qquad H_k = \sum_{j=1}^{k} h_j, \forall j,k\in\mathbb{N}.$$

Теорема 3.4. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1n_2\ldots n_k)}\right)^2 < \infty, \tag{3.4}$$

то пакувальна розмірність міри μ_ξ в.в. ξ з незалежними символами розкладу Кантора дорівнює

$$\dim_P(\mu_\xi) = \limsup_{k\to\infty}\frac{H_k}{\ln(n_1n_2\ldots n_k)}.$$

Доведення. За теоремою Джессена–Вінтнера [64] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто її функції розподілу буде або чисто дискретною, або чисто абсолютно неперервною, або чисто сингулярною. Не порушуючи загальності, ми будемо вважати, що μ_ξ є неперервною, оскільки в іншому випадку розмірність міри дорівнює 0 та рівність (3.4) виконується.

Нехай $x \in S_{\mu_\xi} \setminus \{1\}$. Тоді існує циліндричний півінтервал $\Delta_k(x) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}$ такий, що $x \in \Delta_k(x)$. Позначимо міру Лебега на $[0;1]$ через λ. Тоді

$$\mu_\xi(\Delta_k(x)) = p_{\alpha_1(x)1} \cdot p_{\alpha_2(x)2} \cdot \cdots \cdot p_{\alpha_k(x)k} > 0,$$
$$\lambda(\Delta_k(x)) = \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

Розглянемо вираз

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \ln p_{\alpha_j(x)j}}{-\ln(n_1 n_2 \ldots n_k)}$$

Побудуємо допоміжну послідовність дискретних незалежних випадкових величин на ймовірнісному просторі $([0;1], \mathcal{B}([0;1]), \mu_\xi)$, де $\mathcal{B}([0;1])$ є борелівською σ-алгеброю. Нехай η_k (при $k \in \mathbb{N}$) є незалежними випадковими величинами з наступними розподілами:

Значення	$\ln p_{0k}$	$\ln p_{1k}$	$\ldots$	$\ln p_{(n_k-1)k}$
Ймовірності	p_{0k}	p_{1k}	$\ldots$	$p_{(n_k-1)k}$

Тоді

$$M\eta_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik} \ln p_{ik} = -h_k,$$

причому

$$|M_{\eta_k}| \leqslant \ln n_k.$$

Легко довести, що

$$M((\eta_k)^2) \leqslant \max\{4, \ln^2 n_k\}.$$

Отже,

$$D(\eta_k) = M\eta_k^2 - (M\eta_k)^2 \leqslant 2\max\{4, \ln^2 n_k\}.$$

З посиленого закону великих чисел [99] та умови теореми (3.4) випливає, що для μ_ξ-майже всіх точок $x \in [0;1]$ виконується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\eta_1(x)+\eta_2(x)+\dots+\eta_k(x)) - M(\eta_1(x)+\eta_2(x)+\dots+\eta_k(x))}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} = 0. \tag{3.5}$$

Зазначимо, що

$$M(\eta_1(x)+\eta_2(x)+\dots+\eta_k(x)) = -H_k,$$

і

$$\lambda(\Delta_k(x)) = \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

Нехай

$$D := \limsup_{k\to\infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}.$$

Розглянемо множину

$$T = \left\{x : \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\dots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0\right\} =$$
$$= \left\{x : \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k - M(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k)}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}\right) = 0\right\}.$$

З $\mu_\xi(T) = 1$ маємо $\dim_P(T, \Phi, \mu_\xi) = 1$.

Введемо до розгляду такі множини:

$$T_1 = \left\{x : \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\dots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0\right\},$$
$$T_2 = \left\{x : \limsup_{k\to\infty}\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\dots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \leqslant \limsup_{k\to\infty}\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right\} =$$
$$= \left\{x : \limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \leqslant D\right\},$$
$$T_3 = \left\{x : \limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \geqslant D\right\}.$$

Очевидно, що $T \subset T_1$.

Доведемо, що $T_1 \subset T_2$. Для цього використаємо відому нерівність

$$\limsup_{k\to\infty}(x_k - y_k) \geqslant \limsup_{k\to\infty}(x_k) - \limsup_{k\to\infty}(y_k),$$

яка виконується для довільних дійсних послідовностей (x_k) та (y_k), для яких права частина нерівності не має вигляд «$\infty - \infty$» або «$-\infty + \infty$».

Якщо $x \in T_1$, то

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \cdots + \eta_k(x)}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln \lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0 \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{k\to\infty}\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} - D.$$

Отже,

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} - D \leqslant 0,$$

і тому $x \in T_3$.

Отже, $T \subset T_1 \subset T_2$. Звідси випливає, що

$$\dim_P(T, \Phi, \lambda) \leqslant D \cdot \dim_P(T, \Phi, \mu_\xi) = D \cdot 1$$

(за теоремою 2.5).

Тепер покажемо, що $T \subset T_3$. Справді: якщо $x \in T$, то

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \cdots + \eta_k(x)}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln \lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0,$$

звідси

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{H_k}{-\ln \lambda(\Delta_k(x))} - \frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \cdots + \eta_k(x)}{\ln \lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0,$$

тому

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{H_k}{-\ln \lambda(\Delta_k(x))} - \frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \cdots + \eta_k(x)}{\ln \lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0,$$

і тому (за вказаною вище нерівністю $\limsup_{k\to\infty}(x_k - y_k) \geqslant \limsup_{k\to\infty}(x_k) - \limsup$

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{H_k}{-\ln \lambda(\Delta_k(x))} - \frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \cdots + \eta_k(x)}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} \leqslant 0,$$

тобто

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} \geqslant D,$$

і $x \in T_3$.

Оскільки $T \subset T_3$ і $\mu_\xi(T) = 1 > 0$, то $\dim_P(T, \Phi, \lambda) \geqslant D$ (за теоремою 2.4).

Отже, $\dim_P(T, \Phi, \lambda) = D$. Оскільки λ є мірою Лебега на $[0; 1]$, то $\dim_P(T, \Phi) = D$. Оскільки Φ є довірчою (бо зі збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} \right)^2$$

випливає умова (2.5)), то $\dim_P T = D$.

Покажемо, що побудована множина T є «найменшим» носієм міри μ_ξ у сенсі пакувальної фрактальної розмірності. Нехай M — довільний носій міри μ_ξ. Тоді $M_1 := M \cap T$ теж є носієм міри μ_ξ, а тому $\dim_P M_1 \leqslant \dim_P M$.

З того, що $M_1 \subset T \subset T_3$, випливає, що M_1 задовольняє умови теореми 2.4, а отже, $\dim_P M_1 \geqslant D$.

Отже, $\dim_P M \geqslant D$, і T справді є «найменшим» носієм міри μ_ξ в сенсі $\dim_P$. Тому $\dim_P \mu_\xi = D$, що й вимагалось довести. □

3.3.2. Умови збереження пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними символами розкладу Кантора. Кожне представлення дійсних чисел рядами Кантора є частковим випадком $\tilde{Q}$-представлення. Якщо $\sup_k n_k < +\infty$, то представлення дійсних чисел рядами Кантора співпадає з $\tilde{Q}$-представленням, для якого виконуватиметься умова $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$. Тому для знаходження умов збереження пакувальної розмірності відповідною функцією розподілу можна скористатись результатами попередніх пунктів (теорема 3.3). Зокрема, має місце наступна теорема, яка дає критерії збереження фрактальної пакувальної розмірності функціями розподілу випадкових величин з незалежними символами розкладу Кантора при умові $\sup_k n_k < +\infty$.

Теорема 3.5. *Нехай:*

$$p_j = \inf_i p_{ij}, \quad n_{\max} := \sup_j n_j$$

$$T^{(1)} = \left\{ k : k \in \mathbb{N}, p_k < \frac{1}{2n_{\max}} \right\}$$

$$T_k^{(1)} = T^{(1)} \cap \{1, 2, \dots, k\},$$

$$B = \limsup_{k \to \infty} \frac{\sum_{j \in T_k^{(1)}} \ln \frac{1}{p_j}}{k}.$$

Припустимо, що $n_{\max} < +\infty$.

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ *зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно й достатньо, щоб*

$$\begin{cases} \dim_P \mu_\xi = 1; \\ B = 0. \end{cases}$$

Якщо послідовність (n_k) є необмеженою, то проблема знаходження критерію збереження фрактальної пакувальної розмірності залишається відкритою. У той же час, використовуючи результати по обчисленню пакувальної розмірності міри з теореми 3.4, можна отримати необхідні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними цифрами розкладу Кантора:

Теорема 3.6. *Нехай* ξ *є випадковою величиною з незалежними символами розкладу Кантора. Нехай відповідний розклад Кантора задано послідовністю* $\{n_k\}$, *для якої виконується умова:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} \right)^2 < +\infty.$$

Тоді для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ *зберігала пакувальну розмірність будь-якої множини одиничного відрізка, необхідно, щоб*

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{-\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n_j - 1} p_{ij} \ln p_i j}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} = 1.$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії фрактальної пакувальної розмірності, яка, будучи двоїстою до розмірності Хаусдорфа–Безиковича і маючи всі ознаки класичної фрактальної розмірності (у тому числі зчисленну стабільність), дозволяє (у поєднанні з $\dim_H$) більш глибоко аналізувати фрактальну структуру множин, сингулярних функцій та мір.

У роботі здійснено розвиток загальної теорії пакувальної фрактальної розмірності (досліджено проблему еквівалентності різних підходів до означення пакувальної фрактальної розмірності; на основі запропонованого автором альтернативного означення пакувальної розмірності введено в розгляд та вивчено властивості пакувальної розмірності відносно сімейств множин та мір; доведено аналоги класичних (для розмірності Хаусдорфа–Безиковича) теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності (які є аналітичною основою для дослідження фрактальної пакувальної розмірності множин та мір); досліджено проблему довірчості сімейств куль при обчисленні пакувальної розмірності) та досліджено пакувальні фрактальні властивості множин, функцій та мір, що породжені зображеннями дійсних чисел за допомогою рядів Кантора та поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями.

В дисертаційній роботі отримано такі результати:

- введено в розгляд та досліджено властивості нецентрованої пакувальної розмірності; доведено, що в широкому класі метричних просторів нецентрована пакувальна розмірність співпадає з класичною пакувальною розмірністю;
- на основі поняття нецентрованої пакувальної розмірності введено в розгляд та вивчено властивості пакувальної розмірності відносно

сімейств множин та мір;

— доведено аналоги теорем Біллінгслі для пакувальної розмірності;

— знайдено загальні необхідні і достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейства циліндрів, породжених розклалами Кантора;

— показано принципову різницю між порівнянними системами пакувань та системами пакувань, які є довірчими для обчислення фрактальної пакувальної розмірності;

— знайдено широкі достатні умови довірчості для обчислення пакувальної розмірності сімейства циліндрів, породжених поліосновними $\tilde{Q}$-зображеннями дійсних чисел;

— досліджено тонкі фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними символами розкладу Кантора; доведено явну формулу для обчислення пакувальної розмірності мінімальних розмірнісних носіїв таких мір;

— закладено основи теорії перетворень, що зберігають фрактальну пакувальну розмірність (PDP-перетворень); знайдено загальні необхідні умови належності перетворення до PDP-класу; для широкого класу перетворень, що породжені розподілами випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора та поліосновних $\tilde{Q}$-зображень, знайдено необхідні та достатні умови збереження фрактальної пакувальної розмірності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барановський О., Працьовитий М., Торбін Г. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. — Київ : Наукова думка, 2013. — 288 с.
2. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. Слуцький О. В., Торбін Г. М. Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 192–199.
4. Слуцький О. В., Торбін Г. М. Довірчість сімейств множин відносно пакувальної розмірності // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 268–277.
5. Слуцький О. В. Про пакувальну довірчість, порівнянність та розмірність міри об'єктів, пов'язаних з рядами Кантора // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 201–218.
6. Слуцький О. В. Про PDP-властивості деяких перетворень, пов'язаних з рядами Кантора // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 201–218.
7. Слуцький О. Теорема Біллінгслі для пакувальної розмірності. — Київ : Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80–річчю М.І.Шкіля, 2012. — С. 45–46.
8. Слуцький О. Критерій збереження пакувальної розмірності функціями, які задані випадковою величиною з незалежними s-адичними цифрами. — Київ : Збірник тез конференції «Методика викладання ма-

тематики в середній та вищій школі (присвячена 75-річчю лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, академіка Академії наук вищої освіти, професора Колесник Тамари Всеволодівни)», 2013. — С. 55–57.

9. Слуцький О. Про аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності. — Київ : Збірник тез за матеріалами третьої міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, 2013. — С. 45–46.
10. Слуцький О. Довірчість систем множин відносно пакувальної розмірності. — Київ : П'ятнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука: Матеріали конференції, 2014. — С. 251–253.
11. Слуцький О. Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають пакувальну розмірність. — Київ : Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука: Матеріали конференції, 2014. — С. 100.
12. Слуцький О. Представлення дійсних чисел рядами Кантора та довірчість відповідного сімейства циліндрів для обчислення пакувальної розмірності. — Київ : Четверта міжуніверситетська конференція молодих вчених в галузях математики та фізики: тези доповідей, 2015. — С. 51–52.
13. Albeverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G. On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in $\mathbb{R}^2$ // Random Oper. Stoch. Equ.. — 2008. — Vol. 16, no. 2. — P. 181–211.
14. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2004. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–16.
15. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Transformations preserving

the Hausdorff-Besicovitch dimension // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 6, no. 1. — P. 119–128.

16. Albeverio S., Torbin G. Fractal properties of singular probability distributions withindependent Q^*-digits // Bull. Sci.Math. — 2005. — Vol. 129, no. 1. — P. 356–367.
17. Anckar A. Dimension bounds for invariant measures of bi-Lipschitz iterated function systems // http://arxiv.org/abs/1410.5927.
18. Attia N., Barral J. Hausdorff and packing spectra, large deviations, and free energy for branching random walks in R^d // http://arxiv.org/pdf/1305.2034v2.pdf.
19. Baek I., Olsen L., Snigireva N. Diveregence points of self-similar measures and packing dimension // Adv. Math. — 2007. — Vol. 214, no. 1. — P. 267–287.
20. Balka R., Fraser J. M., Hyde J. T. Dimension and measure for generic continuous images // Annales Academi? Scientiarum Fennic? (Mathematica). — 2013. — Vol. 38, no. 1. — P. 389–404.
21. Beliaev D. Packing dimension of mean porous measures // J. London Math.Soc. — 2009. — Vol. 80, no. 2. — P. 514–530.
22. Bergweiler W. On the packing dimension of the Julia set and the escaping set of an entire function // Israel Journal of Mathematics. — 2012. — Vol. 192, no. 1. — P. 449–472.
23. Berlinkov A. On random fractals with infinite branching: definition, measurability, dimensions. // Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. — 2013. — Vol. 49, no. 4. — P. 1080–1089.
24. Berlinkov A., Mauldin R. D. Packing measure and dimension of random fractals. // J. Theoret. Probab. — 2002. — Vol. 15, no. 3. — P. 695–713.
25. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory II // Illinoys Journal of Mathematics. — 1961. — Vol. 5, no. 1. — P. 291–298.

26. Bishop C. J., Peres Y. Packing dimension and Cartesian products // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 11. — P. 4433–4445.
27. Cantor G. Über die einfachen Zahlensysteme // Zeitschrift f. Math. u. Physik. — 1869. — Vol. 14, no. 1. — P. 121–128.
28. Carateodory C. Uber das lineare Mass von Punktmengeneine Verallgemeinerung des Langenbegiffs // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen — 1914. — P. 400–426.
29. Chatterji S. Certain induced measures on the unit interval // Journal London Math. Soc. — 1963. — Vol. 38, no. 1. — P. 325–331.
30. Chatterji S. Certain induced measures and the fractional dimensions of their «supports» // Z.Wahrscheinlichkeitstheorie. — 1964. — Vol. 3, no. 1. — P. 184–192.
31. Cutler C. Strong and weak duality principles for fractal dimension in Euclidean space. // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1995. — Vol. 118, no. 3. — P. 393–410.
32. Cutler C. The density theorem and Hausdorff inequality for packing measure in general metric spaces // Illinois journal of mathematics. — 1995. — Vol. 39, no. 4. — P. 676–694.
33. Das M. Equality of the packing and pseudo-packing measures // Bull. Polish Acad. Sci. Math. — 2001. — Vol. 49, no. 1. — P. 73–79.
34. Das M. Billingsley's packing dimension // Proceedings of the American mathematical society. — 2008. — Vol. 136, no. 1. — P. 273–278.
35. Duhalde X., Duquesne T. Exact packing measure of of the range of ψ-Super Brownian motions // http://arxiv.org/pdf/1407.4913v1.pdf.
36. Duquesne T. Packing and Hausdorff measures of stable trees. — Paris : Levy Matters I., 2010. — 256 p.
37. Edgar G. Packing measure as a Gauge variation // Ohio state University proceedings. — 1993. — Vol. 17, no. 1. — P. 119–127.

38. Falconer K. The geometry of fractal sets. — London : Cambridge Unversity Press, 2002.

39. Falconer K. Fractal geometry: mathematical foundations and Applications. — Chichester : Wiley, 2003. — 367 p.

40. Falconer K., Howroyd J. Projection theorems for box and packing dimensions. // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1996. — Vol. 119, no. 1. — P. 287–295.

41. Falconer K., Howroyd J. Packing dimensions for projections and dimension profiles. // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1997. — Vol. 121, no. 1. — P. 269–286.

42. Fassler K., Orponen T. On restricted families of projections in R^3 // Proc. London Math. Soc. — 2014. — Vol. 109, no. 2. — P. 56.

43. Feng D.-J. Exact packing measure of Cantor sets // Math. Natchr. — 2003. — Vol. 248, no. 1. — P. 102–109.

44. Fraser J. M. The packing measure of a general subordinator // Probab. Theory and Related Fields. — 1992. — Vol. 92, no. 4. — P. 493–510.

45. Fraser J. M. On the packing dimension of box-like self-affine sets in the plane // Nonlinearity. — 2012. — Vol. 25, no. 7. — P. 2075–2092.

46. Fraser J. M., Hyde J. T. The Hausdorff dimension of graphs of prevalent continuous functions // Real Analysis Exchange. — 2012. — Vol. 37, no. 1. — P. 333–352.

47. Garcia I., Shmerkin P. On packing measures and a theorem of Besicovitch. // Proc. Amer. Math. Soc. — 2014. — Vol. 142, no. 8. — P. 2661–2669.

48. Geronimo J. S., Hardin D. An exact formula for the measure dimensions associated with a class of piecewise linear maps // Constr. Approx. — 1989. — Vol. 5, no. 1. — P. 89–98.

49. Haase H. Non-σ-finite sets for packing measure // Mathematatika. — 1986. — Vol. 33, no. 1. — P. 129–136.

50. Haase H. Packing measures on ultrametric-spaces // Studia Math. — 1988. — Vol. 91, no. 1. — P. 189–193.
51. Haase H. On the dimension of product measures // Mathematika. — 1990. — Vol. 37, no. 1. — P. 316–323.
52. Haase H. The packing theorem and packing measure // Math. Nachr. — 1990. — Vol. 146, no. 1. — P. 77–84.
53. Hancl Y., Tijdeman R. On the irrationality of factorial series II // J. Number Theory — 2010. — Vol. 130, no. 3. — P. 595–607.
54. Hausdorff F. Dimension und äußeres Maß // Math. Ann. — 1918. — Vol. 1, no. 79. — P. 157–179.
55. Heurteaux Y. Dimension of measures: the probabilistic approach // Publ.Mat. — 2007. — Vol. 51, no. 1. — P. 243–290.
56. Holland M., Zhang Y. Dimension results for inhomogeneous Moran set constructions // http://arxiv.org/pdf/1407.6597.pdf.
57. Howroyd J. Box and packing dimensions of projections and dimension profiles. // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1996. — Vol. 130, no. 1. — P. 135–160.
58. Howroyd J. On Hausdorff and packing dimension of product spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1996. — Vol. 119/td¿, no. 1. — P. 715–727.
59. Hu X., Taylor S. Fractal properties of products and projections of measures in $\mathbb{R}^d$ // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1994. — Vol. 115, no. 1. — P. 527–544.
60. Humke P., Petruska G. The packing dimension of a typical continuous function is 2. // Real Anal. Exchange. — 1988. — Vol. 14, no. 1.
61. J. Ma H. R., Wen Z. Dimensions of cookie-cutter-like sets // Science in China Series A: Mathematics. — 2010. — Vol. 44, no. 11. — P. 1400–1412.
62. Jarvenpaa E. Packing dimension and ahlfors regularity of porous sets in metric spaces // Math. Z.

63. Jarvenpaa M. On the upper Minkowski dimension, the packing dimension, and othogonal projections. // Annales Acad. Sci. — Vol. A Dissertat.
64. Jessen B. W. A. Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 38, no. 1. — P. 48–88.
65. Jordan T., Rams M. Packing spectra for Bernoulli measures supported on Bedford-mcMullen carpets // http://arxiv.org/pdf/1407.6597.pdf.
66. Jordan T., Rams M. Increasing digit subsystems of infinite iterated function systems // Proceedings of the American mathematical society. — 2012. — Vol. 140, no. 4. — P. 1267–1279.
67. Joyce H. Conditions for equality of Hausdorff and packing measures on $\mathbb{R}^n$ // Real Analysis Exchange. — 1996. — Vol. 22, no. 1. — P. 142–152.
68. Joyce H., Preiss D. On the existence of subsets of finite positive packing measure // Mathematika. — 1995. — Vol. 42, no. 1. — P. 15–24.
69. Khoshnevisan D., Xiao Y. Packing dimension profiles and fractional brownian motion // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. — 2007. — Vol. Cambridge, no. 37. — P. 182–194.
70. Khoshnevisan D., Xiao Y. Packing dimension of the range of a Levy process. // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 136, no. 1. — P. 2597–2607.
71. Koeller A. Minkowski and packing dimension comparisons for sets with reifenberg properties // http://arxiv.org/pdf/1101.3596v1.pdf.
72. Li J. A class of probability distribution functions preserving the packing dimension // Statistics and Probability Letters. — 2011. — Vol. 81, no. 1. — P. 1782–1791.
73. Li J. Packing Dimension of Measures Associatedwith $\tilde{Q}$-Representation // Mediterranean Journal of Mathematics. — 2011. — Vol. 18, no. 1. — P. 182–194.

74. Li W. An equivalent definition of packing dimension and its application // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2009. — Vol. 10, no. 3. — P. 1618–1626.
75. Mance B. Normal numbers with respect to Cantor series expansion // Thesis (Ph. D.). — Vol. The Ohio State University.
76. Mance B. Number theoretic applications of a class of Cantor series fractal functions I // Acta Math. Hungar. — 2014. — Vol. 144, no. 2. — P. 449–493.
77. Marstrand J. The dimension of Cartesian product sets // Proc. Cambridge Philosofical Society. — 1954. — Vol. 1, no. 50. — P. 198–202.
78. Mattila P. Geometry of sets and measures in euclidean spaces. — Cambridge : Cambridge university press, 1995. — 356 p.
79. m. Meerschaert M., Nane E., Xiao Y. Fractal dimensions for continuous time random walk limits // Statistics and Probability Letters. — 2013. — Vol. 83, no. 1. — P. 1083–1093.
80. Meinershagen S. The symmetric derivation basis measure and the packing measure // Proceedings of the American mathematical society. — 1998. — Vol. Misouri, no. 103. — P. 813–814.
81. Moran M. Computability of the Hausdorff and packing measures on self-similar sets and the self-similar tiling principle // Nonlinearity. — 2005. — Vol. 18, no. 1. — P. 559–570.
82. Nazarov F., Peres Y., Shmerkin P. Convolutions of Cantor measures without resonance // Israel journal of mathematics. — 2012. — Vol. 187, no. 1. — P. 93–116.
83. Nielsen O. A. The Hausdorff and packing dimensions of some sets related to Sierpinski carpets // Can. J. Math. — 1999. — Vol. 51, no. 1. — P. 1073–1088.
84. Olsen L. Extremely non-normal numbers // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. — 2004. — Vol. Cambridge, no. 137. —

P. 43–53.

85. Olsen L. Density theorems for Hausdorff and packing measures of self-similar sets // Aequationes Math. — 2008. — Vol. 75, no. 1. — P. 208–225.
86. Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\tilde{Q}$-symbols // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2011. — Vol. 2, no. 1. — P. 97–111.
87. Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion // http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf.
88. Orponen T. On the packing dimension and category of exceptional sets of orthogonal projections // Annali di Mathematica. — 2014. — Vol. Berlin, no. 194. — P. 843–880.
89. Peres Y. The packing measure of self-affine carpets // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. — 1994. — Vol. Cambridge, no. 115. — P. 437–450.
90. Qiu H. Continuity of packing measure function of self-similar iterated function systems // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2012. — Vol. 32, no. 3. — P. 1101–1115.
91. Qiu H. Exact Hausdorff and packing measures of linear Cantor sets with overlaps // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2012. — Vol. 7, no. 1. — P. 542–579.
92. Raimond X. S., Tricot C. Packing regularity of sets in n-space // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1988. — Vol. 103, no. 1. — P. 133–145.
93. Reeve H. The packing spectrum for Birkhoff averages on a self-affine repeller // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2012. — Vol. 32, no. 1. — P. 1444–1470.

94. Rezakhanlou F. The packing measure of the graphs and level sets of certain continuous functions // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. — 1988. — Vol. Cambridge, no. 104. — P. 347–360.
95. Rogers C. Hausdorff measures. — London : Cambridge Unversity Press, 1970.
96. Roychowdhury M. K. Topological pressure and fractal dimensions of cookie-cutter-like sets // http://arxiv.org/abs/1203.2724.
97. Rudas A., Toth I. P. Entropy and Hausdorff Dimension in Random Growing Trees // Stochastics and Dynamics. — 2013. — Vol. 13, no. 1. — P. 171–202.
98. Shieh N.-R., Xiao Y. Hausdorff and packing dimensions of the images of random fields // Bernoulli. — 2010. — Vol. 16, no. 4. — P. 926–952.
99. Shiryaev A. Probability. — New York : Springer-Verlag, 1996.
100. Shmerkin P. The dimension of weakly mean porous measures: a probabilistic approach // Int. Math. Res. Not. — 2012. — Vol. 9, no. 1. — P. 2010–2033.
101. Slutskyi O. Packing dimension and packing dimension preserving transformations. — Kyiv : International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications III, September 10–14, 2012, Kyiv, Ukraine: Abstracts, 2012. — P. 12–13.
102. Slutskyi O. About criteria of depending a probability function of random variable with independent s-adic digits to PDP-class. — Kyiv : Voronoi's Impact on Modern Science, Proceedings of 4thInternational Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tesselations, September 22–28, 2008, Kyiv, Ukraine, 2013. — P. 202–204.
103. Slutskyi O. On sharp condition for packing dimension preservation under transformations generated by random s-adic expansion. — Jena : International Conference Fractal Geometry and Stochastics V,March 22–28, 2014, Jena, Germany: Abstracts., 2014. — P. 198–199.

104. Slutskyi O. Faithfulness of families of sets for packing dimension calculation. — Kyiv : International Conference Probability, Reliability and Stochastics Optimisation, 7–10 April 2015, Kyiv: Abstracts, 2015. — P. 67–68.

105. Slutskyi O. On packing dimension preservation by distribution functions of random variables with independent $\tilde{Q}$-digits // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2015. — Vol. 2, no. 4. — P. 371–388.

106. Talagrand M., Xiao Y. Fractional Brownian motion and packing dimension. // J. Theoret. Probab. — 1996. — Vol. 9, no. 1. — P. 579–593.

107. Taylor S. J., Tricot C. Packing measure and its evaluation for a Brownian path // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 288, no. 1. — P. 679–699.

108. Taylor S. J., Tricot C. The packing measure of rectifiable subsets of the plane // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1986. — Vol. 99, no. 1. — P. 285–296.

109. Tricot C. Two definitions of fractional dimension // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1982. — Vol. 91, no. 1. — P. 57–74.

110. Turbin A., Pratsiovytyi N. Fractal sets, functions, and distributions. — Kyiv : Naukova dumka, 1992. — 208 c.

111. Wang X. Y., Wu J. Packing dimension of homogeneous perfect sets // Acta Mathematica Hungarica. — Vol. 118, no. 1.

112. Xiao Y. // A packing dimension theorem for Gaussian random fields. — 1. — Vol. Statistics and Probability Letters, no. 79. — P. 2009.

113. Xiao Y. Packing dimension of the image of fractional Brownian motion // Statistics and Probability Letters. — 1997. — Vol. 33, no. 4. — P. 379–387.

114. Xiao Y., Zheng X. Discrete Fractal Dimensions of the Ranges of Random Walks in Z^d Associate with Random Conductances // Probability Theory and Related Fields. — 2012. — Vol. 156, no. 1. — P. 1–26.

115. Youssef L. B. Upper bounding for packing dimension in vectorial multifractal formalism // http://arxiv.org/abs/1101.2410.

116. Zhou X., Chen E. Packing dimensions of the divergence points of self-similar measures with the open set condition // Monatshefte Math. — 2013. — Vol. 172, no. 2. — P. 233–246.

117. Zindulka O. Packing measures and dimensions on cartesian products // Publicacions Matematiques. — 2012. — Vol. 8, no. 1. — P. 320–341.