

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Слуцького Олександра Васильовича
«Пакувальна фрактальна розмірність та її властивості»,
подану на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація О.В. Слуцького присвячена дослідженню властивостей пакувальної фрактальної розмірності та застосуванню отриманих результатів у теорії чисел і фрактальній геометрії.

Актуальність теми. Дослідження пакувальної фрактальної розмірності множини E $\dim_p(E)$ беруть свій початок з робіт С. Tricot, в яких основна увага приділялася базовим властивостям пакувальної фрактальної розмірності $\dim_p(E)$ та порівнянню її з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\dim_H(E)$. В цілому вивчення пакувальної фрактальної розмірності провадилось за такими трьома важливими напрямками. Перший напрям пов'язаний в основному з дослідженням властивостей самої пакувальної фрактальної розмірності. Крім того активно вивчалися властивості пакувальної міри P^f (де f — деяка хаусдорфова функція), яка сама по собі є нетривіальним об'єктом. При цьому намагалися отримати певний набір властивостей пакувальної міри та пакувальної розмірності з метою його використання як інструментарію в подальших дослідженнях. Активно в цьому напрямі працювали А. Berlinkov, С. Cutler, М. Das, Х. Duhalde, Т. Duquesne, G. Edgar, D.-J. Feng, J. Fraser, Н. Haase, Н. Joyce, D. Preiss, R. Mauldin, S. Meinershagen, М. Moran, Y. Peres, P. Shmerkin, Н. Qiu, S. Taylor, С. Tricot, Х. S.-Raimond та інші. У другому напрямі основна увага була зосереджена на тому, щоб довести для $\dim_p(E)$ ті властивості (або їх аналоги), які вже є доведеними для $\dim_H(E)$. Це дозволило в більшості випадків використати ті ж методи дослідження розмірності Хаусдорфа-Безиковича, які вже були розроблені, і для дослідження пакувальної фрактальної розмірності. Повна аналогія в методах доведення не завжди спрацьовує, оскільки існує низка проблем, як технічного, так і принципового характеру. Значний внесок в цьому напрямі зробили I. Baek, D. Beliaev, W. Bergweiler, А. Berlinkov, С. Bishop, E. Cheng, М. Das, К. Falconer, J. Howroyd, D.-J. Feng, J. Fraser, М. Holland, J. Howroyd, P. Humke, J. Hyde, Т. Jordan, Н. Joyce, D. Khoshnevisan, А. Koeller, J. Li, L. Olsen, Т. Orponen, Y. Peres, G.

Petruska, D. Preiss, M. Rams, H. Reeve, F. Rezakhanlou, P. Shmerkin, N. Snigireva, M. Talagrand, J. Wu, X. Wang, Y. Xiao, L. ben Yossef, Y. Zhang, X. Zhou, O. Zindulka та інші. Третій напрям пов'язаний в основному з дослідженням нових множин, їх мір та паралельним обчисленням для них величин $i \dim_H(E)$, $i \dim_p(E)$. Звісно, що ефективно працювати в цьому напрямі стає можливим лише за наявності великого арсеналу методів, який напрацьований в дослідженнях перших двох напрямів. В цьому напрямі слід зазначити роботи A. Anckar, N. Attia, J. Barral, R. Balka, K. Fassler, J. Fraser, J. Geronimo, D. Hardin, H. Haase, Y. Heurteaux, M. Holland, J. Howroyd, X. Hu, T. Jordan, J. Ma, M. Meershaert, M. Moran, F. Nazarov, O. Nielsen, L. Olsen, T. Orponen, Y. Peres, M. Rams, H. Rao, M. Roychowdhury, A. Rudas, N. Shieh, P. Shmerkin, S. Taylor, H. Qiu, Z. Wen, Y. Xiao, Y. Zhang та інших.

Отже, наявність багатьох нерозв'язаних задач та велика кількість публікацій у цьому напрямі свідчить про актуальність даної тематики.

Структурний аналіз змісту дисертації. Дисертаційна робота О.В.Слущького складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел із 117 найменувань і займає 129 сторінок машинописного тексту.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дослідження та охарактеризовано наукову новизну отриманих результатів. Проведено також огляд літератури, висвітлено особистий внесок здобувача, апробацію та публікацію результатів дисертації.

В *першому розділі* дисертаційної роботи наводяться відомі означення та відомості, що стосуються пакувальної фрактальної розмірності, а також (оглядово) розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Зокрема, у пункті 1.2.2 запропоновано нове поняття «нецентрована пакувальна розмірність», використання якого дає можливість ввести означення довірчості сім'ї множин для обчислення пакувальної розмірності.

Другий розділ дисертації присвячений в основному встановленню достатніх умов пакувальної довірчості для певних сімей куль. Для конкретного класу таких сімей встановлено критерій пакувальної довірчості, який є першим відомим критерієм довірчості для обчислення пакувальної фрактальної розмірності сімей куль з даного класу (теорема 2.6).

Крім того, розглядається поняття порівнянності сім'ї множин для обчислення пакувальної фрактальної розмірності та демонструється

принципова різниця між порівнянними та довірчими сім'ями пакувань. Слід зауважити, що до публікацій автора в даному напрямі не було відомо жодного прикладу сімей пакувань, які були б довірчі, але непорівнянні).

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню ймовірнісних мір, пов'язаних з випадковими величинами з незалежними \tilde{Q} -символами, а також перетворень, що зберігають пакувальну фрактальну розмірність (*PDP*-перетворень). Для розглядуваних випадкових величин доводиться критерій належності функції розподілу до *PDP*-класу за умови $\inf_{i,j} q_{ij} > 0$. Зокрема, базуючись на дослідженнях автора по пакувальній довірчості сім'ї циліндрів, породжених рядами Кантора, обчислюється пакувальна фрактальна розмірність ймовірнісної міри, пов'язаної з випадковою величиною з незалежними символами розкладу Кантора.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію міри, метричну теорію чисел, теорію функцій дійсної змінної та теорію сингулярних розподілів ймовірностей. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними при дослідженні математичних об'єктів зі складною локальною будовою, заданих за допомогою різних зображень чисел зі скінченним, змінним або нескінченним алфавітом.

Ступінь обґрунтованості та достовірності результатів дисертації. Усі результати, що виносяться на захист, є новими, строго математично обґрунтованими. Висновки відповідають змісту дисертації.

Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях. Основні результати дисертаційної роботи О.В. Слуцького доповідались та обговорювались на багатьох фахових наукових семінарах та конференціях. Вони опубліковані у п'яти статтях наукових видань, чотири з яких включено до переліку фахових видань МОН України, а п'ята стаття надрукована в науковому періодичному закордонному журналі, який внесений до міжнародних наукометричних баз. Матеріали дисертації також відображено у тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях. Особистий внесок дисертанта чітко окреслений в дисертації та авторефераті. Автореферат адекватно відображає зміст дисертації.

Зауваження.

- 1) У роботі відсутній список основних позначень та умовних скорочень, до якого варто було б включити, зокрема, такі позначення, як *PDP*-

перетворення і т.п., що ускладнює в певній мірі процес ознайомлення з дисертацією.

- 2) Слід уточнити, що науковими керівниками семінару «Сучасний аналіз» Київського національного університету імені Тараса Шевченка крім проф. І.О. Шевчука є також проф. О.О. Курченко та проф. В.М. Радченко. І в дисертації, і в авторефераті вказано лише прізвище І.О. Шевчука.
- 3) В зауваженні 1.4 (с.30) та в деяких інших місцях дисертації відсутні квантори загальності, хоча вони там доцільні.
- 4) В дисертаційній роботі зустрічаються описки, невдалі фразеологізми та похибки технічного характеру.

Зазначені зауваження та недоліки ні в якому разі не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

Враховуючи все вищесказане, вважаю, що дисертаційна робота Слуцького Олександра Васильовича «Пакувальна фрактальна розмірність та її властивості» є завершеним науковим дослідженням і задовольняє вимогам пп.9, 11-13 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Слуцький Олександр Васильович, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз.

Офіційний опонент

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
доцент кафедри математичного аналізу
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

М.О. Назаренко

