НАЦІОНАЛЬНА АКДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЄРЬОМІНА ТЕТЯНА ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 517.9

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут" МОН України.

Науковий керівник:

академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
САМОЙЛЕНКО Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, директор.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
ЧЕРЕВКО Ігор Михайлович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
декан факультету математики та інформатики;

кандидат фізико-математичних наук,
САМУСЕНКО Петро Федорович,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
доцент кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист відбудеться "5" жовтня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "9" серпня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Г.П. Пелюх**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження різницевих рівнянь, які відомі ще з античних часів, давно вийшли за межі суто теоретичних досліджень. Важливим внеском для побудови теорії різницевих та функціонально-різницевих рівнянь ще більш ніж сто років тому були роботи Джорджа Біркгофа та його учнів, що створили основи теорії лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. Сучасна теорія різницевих рівнянь є важливим розділом математичного аналізу розвитку якого присвячено цілий ряд фундаментальних праць, серед яких відмітимо монографії О.О. Гельфонда, А. Халаная, Д. Векслера, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, Д.І. Мартинюка, Г.П. Пелюха, О.М. Шарковського, Ю.Л. Майстренка, О.Ю. Романенко, М.А. Солдатова, О.О. Миролюбова, В.Ю. Слюсарчука та інших відомих математиків. Як виявилось, різницеві рівняння добре підходять для моделювання багатьох реальних нелінійних систем у науці і техніці. Оскільки дискретність є однією з фундаментальних властивостей матеріального світу, а різницеві рівняння дозволяють описати її, то для апроксимації багатьох систем не можливо обійтись без цього потужного апарату. З широким застосуванням ЕОМ, починаючи з 60-х років XX століття, нелінійні різницеві рівняння та породжувані ними динамічні системи привертають значну увагу багатьох математиків, зокрема, Д.В. Аносова, В.І. Арнольда, А.Б. Катка, С. Смейла, А.Н. Шарковського, Л.С. Блока, Р. Боуена, М. Кучми, Г. Лядаса, Дж. Мілнора, М. Місюревича, Г.П. Пелюха, С. ван Стриена, М.В. Якобсона та ін. Різноманітним напрямкам теорії різницевих рівнянь присвячено велику кількість статей та монографій, засновано кілька міжнародних журналів, різко зростає кількість тематичних наукових конференцій, а результати досліджень відіграють важливу роль в медицині, економіці, фізиці, інформатиці, тощо.

В даний час основні зусилля наукового середовища зосереджуються переважно на вивченні різницевих рівнянь з дискретним аргументом. Але розвиток теорії нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом є не менш актуальною задачею, корисність якої викликана як потребами самої теорії різницевих рівнянь, так і потребами прикладного характеру, зокрема, вимогами математичної фізики, теорії диференціально-різницевих рівнянь, теорії хаосу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились на кафедрі диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «КПІ» згідно з держбюджетною темою «Асимптотичні та якісні методи дослідження еволюційних систем» (номер державної реєстрації 0107U010797), «Дослідження якісних та спектральних характеристик динамічних систем» (номер державної реєстрації 0113U004540); а також згідно з проектом Державного фонду фундаментальних досліджень України, проект Ф 25.1/021 та у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України у відповідності до плану науково-дослідних робіт за темою „Теорія диференціальних рівнянь та нелінійних коливань” (номер державної реєстрації 0101U000526).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження властивостей неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь з неперервним аргументом.

Об'єктом дослідження є різницево-функціональні рівняння з неперервним аргументом.

Предметом дослідження є вивчення структури множини неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь.

Завдання дослідження:

- розробити метод побудови неперервних розв’язків лінійних та нелінійних різницево-функціональних рівнянь;
- встановити умови існування неперервних обмежених при $t \in \Re$ розв’язків неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь;
- дослідити структуру множини неперервних обмежених розв’язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку;

- встановити умови існування та єдиності неперервного обмеженого розв’язку систем нелінійних функціональних рівнянь

Методи дослідження. У роботі використовуються основні методи теорії звичайних диференціальних і різницевих рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, полягають у наступному:

- розроблено метод побудови неперервних розв’язків лінійних та нелінійних різницево-функціональних рівнянь;
- встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \Re$ розв’язків неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь;
- досліджено структуру множини неперервних обмежених розв’язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку;
- встановлено умови існування та єдиності неперервного обмеженого при $t \in \Re$ розв’язку систем нелінійних функціональних рівнянь

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані в ній результати доповнюють результати робіт багатьох математиків, тематика яких є близькою до тематики дисертаційної роботи, і сприятимуть подальшому розвитку теорії різницевих рівнянь. Вони також можуть використовуватись при дослідженні задач теорії керування, біології, економіки та в інших галузях науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать науковому керівникові.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

- The 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists. Theoretical and Appied Aspects of Cybernetics. Proceedings. (Kyiv “Bukrek”, 2014);
- III Міжнародній науково-практичній конференції “Математика в сучасному технічному університеті.” (Київ, 2014 р.).
- XVI Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2015);
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 2015).
- XVII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука, (м. Київ, 2016);
- VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». (м. Кам'янець-Подільський, 2016).
- Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвяченої 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка. (м. Ужгород, 2016).
- Наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Національного технічного університету України “КПІ”.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 наукових працях. З них 5 статей [1-5] - у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань, а роботи [6-12] – у матеріалах міжнародних наукових конференцій. Серед статей 3 опубліковано в журналах, які входять до наукометричних баз даних (Web of Science).

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 93 найменувань. Повний обсяг роботи складає 148 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертаційної роботи, визначено об’єкт та мету дослідження, сформульовано основні результати.

В першому розділі наведено короткий огляд літератури, що є близькою до тематики дисертації.

В другому розділі розроблено метод побудови сім'ї неперервних розв’язків широких класів лінійних різницево-функціональних рівнянь. Розглядаються різницево-функціональні рівняння вигляду

$$x(qt) = a(t)x(t) + b(t)x(t+1) + f(t), \tag{1}$$

де $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ – деякі дійсні функції і q – дійсна стала. Зокрема, вивчаються питання існування неперервних обмежених розв’язків таких рівнянь і досліджується структура їх множини.

В підрозділах 2.1, 2.2 розглядаються однорідні рівняння вигляду

$$x(qt) = ax(t) + bx(t+1), \tag{2}$$

де $t \in \Re^{+} = (0, +\infty)$, a, b, q – деякі дійсні сталі. В залежності від припущень відносно a і q розглянуто такі випадки:

1. $0 < q < 1,\ a > 1,$
2. $0 < a < 1,\ q > 1$,
3. $0 < q < 1,\ |a| > 1,$
4. $|a| < 1,\ q > 1$.

Підрозділ 2.1 присвячений дослідженню різницево-функціональних рівнянь вигляду (2) у випадку додатніх a. Основними його результатами є наступні теореми.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1,\ a > 1,$
2. $\Delta = \dfrac{|b|}{a-1} < 1$, $\nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2) має сім’ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв’язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1–періодичної функції* $\omega(\tau)$.

Показано, що неперервні розв’язки (2) можна представити у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t),\ i = 0,1,\ldots$ – деякі неперервні функції, які задовольняють рівняння:

$$x_0(qt) = ax_0(t),$$
$$x_i(qt) = ax_i(t) + bx_{i-1}(t+1),\ i = 1,2,\ldots,$$

які мають розв'язки у вигляді:

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right),$$

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)} x_{i-1}(q^j t + 1),\ i = 1,2,\ldots.$$

де $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

В цьому підрозділі вивчається також неоднорідне рівняння вигляду

$$y(qt) = ay(t) + by(t+1) + f(t), \tag{3}$$

де a, b, q – деякі сталі, $f : \Re \to \Re$. Доведено наступну теорему.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови*

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;
2. $\Delta = \dfrac{|b|}{a-1} < 1$;
3. *функція* $f(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \Re$ *і такою, що* $\sup\limits_t |f(t)| = \widetilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (3) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Показано, що (3) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0,1,...$– деякі неперервні функції, які задовольняють рівняння:

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t), \tag{4_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + b\bar{y}_{i-1}(t+1), \ i = 1,2,..., \tag{4_i}$$

Рівняння (4_0) має розв'язок вигляду:

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} f(q^j t). \tag{5_0}$$

Рівняння (4_i), $i = 0,1,2,...$ мають розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), \ i = 1,2,.... \tag{5_i}$$

Зауваження 2.1. *Виконуючи в (3) заміну змінних*

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \tag{6}$$

отримаємо рівняння (2) відносно функції $x(t)$. *Оскільки для цього рівняння справедлива теорема 2.1, то приймаючи до уваги заміну змінних (6), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при* $t \ge T > 0$ *розв'язків рівняння (3)*.

У зв'язку із доведеними вище теоремами 2.1 і 2.2 виникло питання про описання структури множини неперервних розв'язків рівняння (3) у випадку, коли $b = b(t)$ - деяка дійсна функція дійсної змінної t, тобто, коли рівняння (3) має вигляд

$$y(qt) = ay(t) + \tilde{b}(t)y(t+1) + \tilde{f}(t), \tag{7}$$

де *a, q* – деякі дійсні сталі, $\tilde{b}(t): \Re \to \Re$, $\tilde{f}(t): \Re \to \Re$. Доведена наступна теорема.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;

2. $\tilde{\Delta} = \dfrac{b^*}{a-1} < 1$;

3. функції $\widetilde{b}(t), \widetilde{f}(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in \Re$ *і такими, що* $\sup\limits_{t}\left|\widetilde{b}(t)\right| = b^{*} < \infty$, $\sup\limits_{t}\left|\widetilde{f}(t)\right| = f^{*} < \infty$.

Тоді рівняння (7) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ *розв'язок* $\overline{\overline{y}}(t)$.

Аналогічні результати отримані у випадку 2. Зокрема, доведені теореми 2.4 та 2.5.

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1,\ q > 1,$
2. $\Delta = \dfrac{|b|}{1-a} < 1,\ \nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0.$

Тоді рівняння (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(\tau)$.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються наведені вище умови. Тоді рівняння (3) має неперервний обмежених при* $t \in \Re$ *розв'язок* $\overline{y}(t)$.

В підрозділі 2.2 другого розділу досліджується питання існування неперервних розв'язків рівнянь (2) у випадках 3 та 4.

Останній підрозділ 2.3 присвячений вивченню неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу. Зокрема, розглянуто рівняння вигляду

$$x(qt) = ax(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x(t + \delta_j), \tag{8}$$

де $t \in \Re^{+} = (0, +\infty)$, *a, q,* b_j, δ_j, *j=1,2,...,k,* деякі дійсні сталі, для якого доведено наступну теорему.

Теорема 2.10. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1,\ a > 1$;
2. $\widetilde{\Delta} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left|b_j\right|}{a-1} < 1,\ \nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (8) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(\tau)$.

В цьому підрозділі розглянуто також неоднорідне рівняння вигляду

$$y(qt) = ay(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j y(t + \delta_j) + f(t), \tag{9}$$

де *a,* b_j δ_j, *j=1,2,...,k,* *q* – деякі сталі; $f : \Re \to \Re$. Для цього рівняння доведена наступна теорема.

Теорема 2.11. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1,\ a > 1;$
2. $\widetilde{\Delta} = \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{k} |b_l|}{a-1} < 1,\ \nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0$.
3. *функція* $f(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \Re$ *і такою, що* $\sup\limits_t |f(t)| = \widetilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (9) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Основним об'єктом дослідження третього розділу є системи різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = A(t)x(t) + B(t)x(t+1) + F(t), \tag{10}$$

де $t \in \Re^+ = [0, +\infty)$, $A(t)$, $B(t)$ - дійсні $(n \times n)$ - матриці, $F(t)$ - дійсний вектор розмірності n, q - деяка дійсна стала. Вивчаються питання існування неперервних обмежених розв'язків систем різницево-функціональних рівнянь вигляду (10) з постійними коефіцієнтами.

Метою підрозділу 3.1 є встановлення умов існування сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків для систем однорідних рівнянь вигляду

$$x(qt) = Ax(t) + Bx(t+1), \tag{11}$$

де A, B - дійсні сталі $(n \times n)$ - матриці, q - деяка дійсна стала. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$ задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j;\ |\lambda_i| \neq 0,1;\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка стала неособлива $(n \times n)$ - матриця, яка приводить систему рівнянь (11) до вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(t+1), \tag{12}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\widetilde{B} = C^{-1} B C$.

Серед отриманих тут результатів відмітимо наступні теореми:

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1,\ i = 1, \ldots, n,\ 0 < q < 1,$

2) $\Delta = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\widetilde{b} = |\widetilde{B}| = \max\limits_i \sum\limits_j |\widetilde{b}_{ij}|,\ \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (12) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ q > 1,$
2. $\Delta = \dfrac{\widetilde{b}}{1 - \lambda^*} < 1$, *де* $\widetilde{b} = \left|\widetilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|\widetilde{b}_{ij}\right|,\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}.$

Тоді система рівнянь (12) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Також розглянуто систему неоднорідних рівнянь вигляду:

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(t+1) + F(t), \tag{13}$$

де матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\widetilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1. $\lambda_i > 1,\ i = 1, \ldots, n,\ q \neq 0;$
2. $\Delta = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\widetilde{b} = \left|\widetilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|\widetilde{b}_{ij}\right|,\ \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\};$
3. всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \widetilde{M} < +\infty$.

В цьому підрозділі досліджено також неоднорідне рівняння вигляду:

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(t+1) + F(t),$$

для якого виконуються умови 1-2 теореми 3.3 і всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \widetilde{M} < +\infty$.

Зауваження 3.1. *Виконуючи в (13) заміну змінних*

$$y(t) = z(t) + \overline{y}(t) \tag{14}$$

отримаємо систему рівнянь (12) відносно вектор-функції $z(t)$, *для якої справедлива теорема 3.1. (теорема 3.3).*

У випадку, коли $\tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}(t)$ для системи рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \widetilde{\widetilde{B}}(t) y(t+1) + \widetilde{F}(t), \tag{15}$$

де матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, q - стала, $\tilde{\tilde{B}}(t): \Re \to \Re^{n^2}$, $\tilde{F}(t): \Re \to \Re^n$, доведена наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q \neq 0$;
2. $\tilde{\Delta} = \dfrac{\tilde{b}^*}{\lambda_* - 1} < 1$;
3. *всі елементи вектор-функцій* $\tilde{F}(t)$ *та* $\tilde{\tilde{B}}(t)$ *є неперервними й обмеженими функціями при всіх* $t \in \Re$ *і такими, що* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t)\right| = \tilde{M}^* < +\infty$, $\sup\limits_t \left|\tilde{\tilde{B}}(t)\right| = \tilde{b}^* < +\infty$.

Тоді система рівнянь (15) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ *розв'язок* $y(t)$ *у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \in \Re$ *вектор-функції.*

Підрозділ 3.2. присвячений побудові сімї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків однорідної системи рівнянь вигляду (12) при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$ у випадках, коли виконуються умови:

1) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$,
2) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$.

Показано, що така система рівнянь має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ - деякі неперервні вектор-функції, зокрема, доведена наступна теорема.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови:*

1) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $0 < q < 1$,
2) $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (12) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$, *такої що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

В підрозділі 3.3 розглядається система лінійних рівнянь вигляду:

$$x(qt) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) x\left(t + \Delta_j(t)\right) + F(t), \tag{16}$$

де $t \in \Re$, A, $B_j(t)$, $j = 1,\ldots,k$ - деякі дійсні $(n \times n)$ - матриці, q - деяка дійсна стала, $F(t)$ - дійсний вектор розмірності *n*, $\Delta_j(t): \Re \to \Re$, $j = 1,\ldots,k$. Досліджено питання існування неперервних обмежених при $t \in \Re$ розв'язків такої системи у випадку, коли виконуються умови:

1) всі елементи матриць $B_j(t)$, $j = 1,\ldots,k$ і вектора $F(t)$ є обмеженими при $t \in \Re$ функціями;

2) функції $\Delta_j(t)$, $j = 1,\ldots,k$ є неперервними обмеженими при $t \in \Re$, $q \neq 0$;

3) $\sup\limits_t \left|B_j(t)\right| = b_j$, $j = 1,\ldots,k$, $\sup\limits_t \left|F(t)\right| = M$, $|A| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| = a < 1;$,

4) $\Delta = \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1 - a} < 1$.

Доведена наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови 1-4. Тоді система рівнянь (16) має єдиний неперервний обмежений при* $t \in \Re$ *розв'язок* $x(t)$ *у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t), i = 0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \in \Re$ *вектор-функції.*

При виконанні умов теореми 3.6 система рівнянь

$$y(qt) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y\left(t + \Delta_j(t)\right).$$

має єдиний неперервний при $t \in \Re$ розв'язок $y \equiv 0$. Тим не менш, при деяких додаткових умовах вона має нескінченно багато неперервних при $t \ge T > 0$ (T – деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків. Це показано (для простоти) у випадку, коли $\Delta_j(t) \equiv j$, $j = 1,\ldots,k$, а матриця А є такою, що $A = \Lambda = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1,\ldots,n$, і, отже, розглядувана система має вигляд:

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y(t + j) \tag{17}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови теореми 3.6 і умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1,\ldots,n$, $q > 1$,

2) $\widetilde{\Delta} = \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1 - \lambda^*} < 1$, *де* $b_l = \sup\limits_t \left|B_j(t)\right|$, $j = 1,\ldots,k$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,\ldots,n\}$.

Тоді система рівнянь (17) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ *(T – деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1 – періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Підрозділ 3.4 присвячений дослідженню структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь в критичному випадку . Досліджено питання існування неперервних розв'язків та досліджується структура їх множини для системи лінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + By(t+1), \tag{18}$$

де $t \in \Re^+ = [0, +\infty)$, Λ та B - дійсні $(n \times n)$- матриці, q - деяка дійсна стала у випадку, коли серед власних чисел λ_i, $i = 1, \ldots, n$ матриці Λ є рівні. Не обмежуючи загальності припускається, що $\Lambda = diag(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$, $m \leq n$, де $\Lambda_i - (k_i \times k_i)$- матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \tag{19}$$

ε - достатньо мала додатна стала. Доведена наступна теорема .

Теорема 3.8. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $q > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{b}{1 - (\lambda^* + \delta)} < 1$, *де* $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda^* + \delta < 1$, $b = |B| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (18) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$.

Також розглянуто систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + By(t+1) + F(t), \tag{20}$$

де матриці Λ, B задовольняють умови теореми 3.8, а $F(t): \Re \to \Re^n$.

Теорема 3.9. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 3.8, і всі елементи вектор-функції* $F(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in \Re$ *функціями і* $\sup\limits_{t} |F(t)| = \widetilde{M} < +\infty$. *Тоді система рівнянь (20) має неперервний обмежений при* $t \in \Re$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$ *у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

де $\bar{y}_i(t),\ i=0,1,...,$ *- деякі неперервні обмежені при* $t\in\Re$ *вектор-функції.*

Для рівнянь вигляду (18) проведені аналогічні дослідження у випадку, коли $\lambda_i>1$, $i=1,\ldots,m,\ 0<q<1,\ t\ge T>0$.

В підрозділі 3.5 розглянуто однорідну систему рівнянь вигляду (18) в припущенні, що $0<\lambda_i<1<\lambda_j,\ i=1,\ldots,p,\ j=p+1,\ldots,m,\ 0\le m\le n,\ q>1$. Вводячи такі позначення:

$$y(t)=\left(y^1(t),y^2(t)\right),\ y^1(t)=\left(y_1(t),\ldots,y_p(t)\right),\ y^2(t)=\left(y_{p+1}(t),\ldots,y_m(t)\right);\ B=\begin{pmatrix}B_{11}B_{12}\\ B_{21}B_{22}\end{pmatrix},$$

$$\Lambda=diag\left(\tilde{\Lambda}_1,\tilde{\Lambda}_2\right),\ \tilde{\Lambda}_1=diag\left(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p\right),\ \tilde{\Lambda}_2=diag\left(\Lambda_{p+1},\ldots,\Lambda_m\right),\ m\le n,$$

$\Lambda_i-\left(k_i\times k_i\right)$- матриці вигляду (19),

систему рівнянь (18) можна записати у вигляді

$$\begin{cases}y^1(qt)=\tilde{\Lambda}_1y^1(t)+B_{11}y^1(t+1)+B_{12}y^2(t+1),\\ y^2(qt)=\tilde{\Lambda}_2y^2(t)+B_{21}y^1(t+1)+B_{22}y^2(t+1).\end{cases}\tag{21}$$

Для системи (21) доведена така теорема.

Теорема 3.11. *Нехай виконуються умови:*

1. $0<\lambda_i<1<\lambda_j,\ i=1,\ldots,p,\ j=p+1,\ldots,m,\ 0\le m\le n,\ q>1$;

2. $\theta=\max\left\{\dfrac{b_1}{1-\left(\underline{\lambda^*}+\delta_1\right)};\dfrac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\}<1$, де $b_1=|B_{11}|+|B_{12}|,\ b_2=|B_{21}|+|B_{22}|$,

$\underline{\lambda^*}=\max\{\lambda_i,i=1,\ldots,p\},\ \delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ *таке, що* $\delta_1\to0$ *при* $\varepsilon\to0$, *і* $\underline{\lambda^*}+\delta_1<1$,

$\overline{\lambda_*}=\min\{\lambda_i,i=p+1,\ldots,m\},\ \delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ *таке, що* $\delta_2\to0$ *при* $\varepsilon\to0$, *і* $\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2<1$.

Тоді система рівнянь (21) має сім'ю неперервних обмежених при $t\ge T>0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків, що залежить від n довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_i(\tau),\ i=1,\ldots,n$.

Для систем неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{cases}y^1(qt)=\tilde{\Lambda}_1y^1(t)+B_{11}y^1(t+1)+B_{12}y^2(t+1)+F^1(t),\\ y^2(qt)=\tilde{\Lambda}_2y^2(t)+B_{21}y^1(t+1)+B_{22}y^2(t+1)+F^2(t),\end{cases}\tag{22}$$

де $F(t):\Re\to\Re^n,\ F(t)=\left(F^1(t),F^2(t)\right),\ F^1(t)=\left(F_1(t),\ldots,F_p(t)\right),\ F^2(t)=\left(F_{p+1}(t),\ldots,F_n(t)\right)$ має місце наступна теорема.

Теорема 3.12. *Нехай виконуються умови:*

1. $0<\lambda_i<1<\lambda_j,\ i=1,\ldots,p,\ j=p+1,\ldots,m,\ 0\le m\le n,\ q>0$;

2. $\theta = \max\left\{ \dfrac{b_1}{1-\left(\underline{\lambda^*}+\delta_1\right)}; \dfrac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1} \right\} < 1$, де $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|,\ b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,

$\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i = 1,\dots,p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $\underline{\lambda^*} + \delta_1 < 1$,

$\overline{\lambda_*} = \min\{\lambda_i, i = p+1,\dots,m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 < 1$.

3. всі елементи вектор-функції $F(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in \Re$ *функціями. Тоді система рівнянь (22) має неперервний обмежений при* $t \in \Re$ *розв'язок* $y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right)$.

Об'єктом дослідження четвертого розділу є системи нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = F\left(t, x(t), x(t + f_1(t, x(t))), \dots, x(t + f_k(t, x(t))), \varepsilon\right), \tag{23}$$

де $t \in \Re$, $q = const \neq 0,1$, $\varepsilon << 1$. Розглядаються питання існування та єдиності неперервних розв'язків таких рівнянь та досліджуються їх властивості.

Підрозділ 4.1 присвячений доведенню існування та єдиності неперервного при $t \in \Re$ розв'язку нелінійних функціональних рівнянь вигляду (23) в припущенні, що виконуються умови:

1) вектор-функція $F\left(t, x^0, x^1, \dots, x^k, \varepsilon\right)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1,2,\dots,k$, є неперервними при всіх $t \in \Re$, $x^i \in \Re^n$, $i = 0,1,\dots,k$, $x \in \Re^n$ і має місце співвідношення $\sup\limits_{t\in\Re}\left|F(t,0,\dots,0,\varepsilon)\right| = M < +\infty$;
2) вектор-функція $F\left(t, x^0, x^1, \dots, x^k, \varepsilon\right)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1,2,\dots,k$, задовольняють умови

$$\left|F\left(\bar{t}, \bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k, \varepsilon\right) - F\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^0, \bar{\bar{x}}^1, \dots, \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon\right)\right| \le L_0\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + L\sum_{i=0}^{k}\left|\bar{x}^i - \bar{\bar{x}}^i\right|, \tag{24}$$

$$\left|f_i(\bar{t}, \bar{x}) - f_i\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}\right)\right| \le l_i'\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + l_i''\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right|,\ i = 1,2,\dots,k, \tag{25}$$

де $L_0, L, l_i', l_i'',\ i = 1,2,\dots,k,$ - деякі додатні сталі, $\left(\bar{t}, \bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots \bar{x}^k, \varepsilon\right), \left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^0, \bar{\bar{x}}^1, \dots \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon\right) \in \Re \times \Re^{kn}$.

3) при достатньо малих $L_0,\ L,\ l_i', l_i'',\ i = 1,2,\dots,k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q}\left(k + 1 + \left(l^* + l^* l\right)k\right) \le 1, \quad L\left(k + 1 + l l^* k\right) = \theta < 1,$$

де $l^* = \max\{l_i', l_i''\}$, $l > 0$.

Поклавши в (23) $\varepsilon = 0$, отримаємо систему рівнянь, для якої доведена наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь*

$$x(qt) = F\left(t, x(t), x(t + f_1(t, x(t))), \dots, x(t + f_k(t, x(t))), 0\right), \tag{26}$$

має єдиний неперервний обмежений при $t \in \Re$ *розв'язок, що задовольняє умову*

$$\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| \le l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{27}$$

де $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \Re$, l *- деяка додатна стала.*

Виконуючи в (23) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ - неперервний розв'язок системи (26), отримаємо систему рівнянь вигляду

$$y(qt) = \widetilde{F}\left(t, y(t), y\left(t + \widetilde{f}_1(t, y(t))\right), \ldots, y\left(t + \widetilde{f}_k(t, y(t))\right), \varepsilon\right), \tag{28}$$

де

$$\widetilde{F}\left(t, y(t), y\left(t + \widetilde{f}_1(t, y(t))\right), \ldots, y\left(t + \widetilde{f}_k(t, y(t))\right), \varepsilon\right) =$$
$$= F\left(t, y(t) + \gamma(t), y\left(t + f_1(t, y(t) + \gamma(t))\right) + \gamma\left(t + f_1(t, y(t) + \gamma(t))\right), \ldots, y\left(t + f_k(t, y(t) + \gamma(t))\right) + \gamma\left(t + f_k(t, y(t) + \gamma(t))\right), \varepsilon\right) -$$
$$- F\left(t, \gamma(t), \gamma\left(t + f_1(t, \gamma(t))\right), \ldots, \gamma\left(t + f_k(t, \gamma(t))\right), 0\right).$$

3´) при достатньо малих $L_0,\ L,\ l_i', l_i'',\ i = 1,2,\ldots,k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q}\left(k + 1 + \left[l^* + l^* \widetilde{l}\,\right]k\right) \le 1,\ L\left[k + 1 + \widetilde{l}\, l^* k\right] = \theta < 1,$$

де $l^* = \max\{l_i', l_i''\}$, $\widetilde{l} > 0$.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови 1,2 та 3`. Тоді система рівнянь (28) має єдиний неперервний обмежений при* $t \in \Re$ *розв'язок, що задовольняє умови*

$$\left|y(\bar{t}, \varepsilon) - y(\bar{\bar{t}}, \varepsilon)\right| \le \widetilde{l}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = 0,$$

де $t, \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \Re$, $\widetilde{l} = \widetilde{l}(\varepsilon)$ *- додатна стала, що залежить від* ε, $\varepsilon << 1$.

Метою підрозділу 4.2 є побудова неперервних обмежених при $t \ge T$ розв'язків нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f\left(t, x(t+1)\right), \tag{29}$$

де $t \in \Re$, Λ – дійсна $(n \times n)$- матриця вигляду $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $f : \Re \times \Re^n \to \Re^n$, q - деяка дійсна стала, в припущенні, що виконуються умови:

1) $|\lambda_i| \ne 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, $q > 0$;
2) вектор-функція $f(t,x)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \Re$, $x \in \Re^n$ і $f(t,0) = 0$;
3) для довільних $t \in \Re$, $x, y \in \Re^n$ виконується співвідношення

$$\left|f(t,x) - f(t,y)\right| \le l|x - y|, \tag{30}$$

де l - деяка додатна стала. Доведені наступні теореми.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови 1)-3) і умови:*

4) $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1,\ldots,n$, $q > 1$;

5) $\Delta = \dfrac{l}{1 - \lambda^*} < 1$, *де* $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1,\ldots,n\}$.

Тоді система рівнянь (29) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t),\ i = 0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови 1)-3) і умови:*

6) $\lambda_i > 1,\ i = 1,\dots,n,\ 0 < q < 1$*;*

7) $\Delta = \dfrac{l}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = 1,\dots,n\}$.

Тоді система рівнянь (29) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t),\ i = 0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Аналогічні результати отримані при $\lambda_i < 0,\ i = 1,\dots,n$ у випадках, коли виконуються умови:

1) $|\lambda_i| > 1,\ i = 1,\dots,n,\ 0 < q < 1,$
2) $|\lambda_i| < 1,\ i = 1,\dots,n,\ q > 1$.

В підрозділі 4.3 розглянуто систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь (29) у випадку, коли виконуються наступні умови:

1) Λ - дійсна $(n \times n)$- матриця вигляду $\Lambda = diag(\Lambda_1, \Lambda_2)$, де Λ_1, Λ_2 - дійсні $(p \times p)$ та $(r \times r)$- матриці $(p + r = n)$, $\det \Lambda \neq 0$.
$f : \Re \times \Re^n \to \Re^n$, $f(t, x(t+1)) = \left(f_1\left(t, x^1(t+1), x^2(t+1)\right), f_2\left(t, x^1(t+1), x^2(t+1)\right)\right)$,
q - деяка дійсна додатна стала.

2)
$$\left|f^1\left(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2\right) - f^1\left(t, \bar{\bar{x}}^1, \bar{\bar{x}}^2\right)\right| \leq l_1\left(\left|\bar{x}^1 - \bar{\bar{x}}^1\right| + \left|\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2\right|\right),$$
$$\left|f^2\left(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2\right) - f^2\left(t, \bar{\bar{x}}^1, \bar{\bar{x}}^2\right)\right| \leq l_2\left(\left|\bar{x}^1 - \bar{\bar{x}}^1\right| + \left|\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2\right|\right),$$
де l_1, l_2 - деякі додатні сталі, що залежать від l ($l_1 = l_1(l), l_2 = l_2(l), l_1 \to 0, l_2 \to 0$ при $l \to 0$).
Вводячи відповідні позначення систему рівнянь (29) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x^1(qt) = \Lambda_1 x^1(t) + f_1\left(t, x^1(t+1), x^2(t+1)\right), \\ x^2(qt) = \Lambda_2 x^2(t) + f_2\left(t, x^1(t+1), x^2(t+1)\right), \end{cases} \tag{31}$$

де $x^1 = (x_1, ..., x_p)$, $x^2 = (x_{p+1}, ..., x_{p+r})$, $f^1 = (f_1, ..., f_p)$, $f^2 = (f_{p+1}, ..., f_{p+r})$.

Виконуючи в (4.31) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x_1(t) = y_1(t) + \tilde{\gamma}_1(t),$$
$$x_2(t) = y_2(t) + \tilde{\gamma}_2(t),$$

де $\gamma(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))$ - неперервний обмежений розв'язок системи (31), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y^1(qt) = \Lambda_1 y^1(t) + F^1\left(t, y^1(t+1), y^2(t+1)\right), \\ y^2(qt) = \Lambda_2 y^2(t) + F^2\left(t, y^1(t+1), y^2(t+1)\right), \end{cases} \tag{32}$$

де

$$F^1\left(t, y^1(t+1), y^2(t+1)\right) = f^1\left(t, y^1(t+1) + \gamma^1(t+1), y^2(t+1) + \gamma^2(t+1)\right) - f^1\left(t, \gamma^1(t+1), \gamma^2(t+1)\right),$$
$$F^2\left(t, y^1(t+1), y^2(t+1)\right) = f^2\left(t, y^1(t+1) + \gamma^1(t+1), y^2(t+1) + \gamma^2(t+1)\right) - f^2\left(t, \gamma^1(t+1), \gamma^2(t+1)\right).$$

причому вектор-функції $F^1\left(t, y^1, y^2\right)$, $F^2\left(t, y^1, y^2\right)$ задовольняють умові 2) і $F^1(t,0,0) \equiv 0$, $F^2(t,0,0) \equiv 0$. Для системи (32) доведена така теорема.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1)-2) і умови:*

3) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, *i=1,2,...p, j=p+1,2,...n.* $0 \le p \le n$, $q > 1$;

4) $\theta = \max\left\{\dfrac{2l_1}{1-\lambda^*}, \dfrac{2l_2}{\lambda_* - 1}\right\} < 1$,

де $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (32) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді рядів*

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^{\,1}(t), \qquad y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^{\,2}(t), \tag{33}$$

де $y_i^{\,1}(t)$, $y_i^{\,2}(t)$, $i = 0,1,\ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \ge T > 0$ *вектор-функції.*

Аналогічний результат доведено для випадку $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, *i=1,2,...p,* *j=p+1,2,...n,* $0 \le p \le n$, $0 < q < 1$.

В підрозділі 4.4 побудовано неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f\left(t, x(t), x(t+1)\right), \tag{34}$$

де $t \in \Re$, Λ – дійсна $(n \times n)$- матриця вигляду $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $f : \Re \times \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$, q - деяка дійсна стала, у випадках:

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$,
2) $\lambda_i > 1$, , $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$,

При цьому припускається, що виконуються умови:

3) вектор-функція $f(t, x, y)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \Re$, $x \in \Re^n$, $y \in \Re^n$ і $f(t,0,0) \equiv 0$;
4) для довільних $t \in \Re$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}} \in \Re^n$ виконується співвідношення
$$\left|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\right| \le l\left(\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right| + \left|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\right|\right),$$

де l - деяка додатна стала. Зокрема, доведено наступні теореми.

Теорема 4.9. *Нехай виконуються умови 1),3-4) і умова:*

5) $\Delta = \dfrac{2l}{\overline{\lambda} - \lambda^*} < 1$ *, де* $1 > \overline{\lambda} > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}.$

Тоді система рівнянь (34) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t),\ \ i = 0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \ge T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умові* $\lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$.

Теорема 4.10. *Нехай виконуються умови 2)-4) і умова:*

6) $\Delta = \dfrac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$ *, де* $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,2,...,n\}.$

Тоді система рівнянь (34) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду* $x(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i(t),$ *де* $x_i(t),\ \ i = 0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \ge T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умові* $\lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена вивченню питань існування неперервних розв'язків систем різницево-функціональних рівнянь і дослідженню їх властивостей. При цьому одержано наступні нові результати:

- розроблено метод побудови неперервних розв’язків систем лінійних та нелінійних різницево-функціональних рівнянь;
- встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \Re$ розв’язків систем неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь;
- досліджено структуру множини неперервних обмежених розв’язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку;
- встановлено умови існування та єдиності неперервного обмеженого при $t \in \Re$ розв’язку систем нелінійних функціональних рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні розвязки одного класу різницево-функціональних рівнянь. / *Єрьоміна Т.О.* // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2014. – №4. – С.48-52.

2. *Єрьоміна Т.О.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Єрьоміна Т.О.* // Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №3. – С. 341-350.

3. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні розв’язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №4. – С. 447-461.

4. *Єрьоміна Т.О.* Про неперервні при $t \in \Re$ розв'язки систем нелінійних функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна.* // Нелінійні коливання. – 2016. – Т.19, №1. – С. 32-47.

5. *Єрьоміна Т.О.* Про побудову неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна.* // Вісник Київського національного університету ім.. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2015. – №2. – С. 71-74.

6. *Yeromina T. O.* Continuous solutions of the systems of linear difference-functional equations. / *T. O. Yeromina.* // TAAC. The 4th International scientific conference of students and young scientists. – K.: Bukrek, 2014. – P. 245-250.

7. *Єрьоміна Т.О.* Про умови існування неперервних розвязків одного класу різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна.* // Матем. в сучасному техн. унів. Матеріали ІІІ Міжнародної науково-практичної конференції, 25-26 грудня 2014. – Київ, 2015. – С. 28 – 30.

8. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні розв’язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // 16-та Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 14-15 травня 2015.: матеріали конференції. – Київ, 2015. – С. 85-87.

9. *Єрьоміна Т.О.* Про неперервні розв'язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // Міжнародна конференція молодих математиків 3-6- червня 2015: Ін-т математики НАН України. – Київ, 2015. – С. 145.

10. *Єрьоміна Т.О.* Побудова неперервних обмежених розв'язків одного класу систем неленійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // 17-та Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016.: матеріали конференції. – К. – Т.1. – 2016. – С.106-108.

11. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні при $t \in \Re$ розв'язки систем неленійних функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації. Тези доповідей 7-ої Міжнародної наукової конференції. Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2016. – Кам'янець-Подільський, 2016. - С. 71-72.

12. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні обмежені розв'язки одного класу систем неленійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвяченої 70-річчю акад. НАН України М.О. Перестюка, 19-21 травня 2016. – Ужгород, 2016. – С. 68.

АНОТАЦІЇ

1. Єрьоміна Т.О. *Неперервні розв'язки систем різницево-функціональних рівнянь та їх властивості*. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. Національний технічний університет України "КПІ", Київ, 2016.

Багато класів різницевих рівнянь вже тривалий час використовуються в різноманітних областях прикладних наук. Саме завдяки такій увазі та великій кількості нетривіальних та специфічних властивостей розв'язків, різницеві рівняння багато років утримують інтерес значної кількості математиків. На даний момент в математичній літературі існує велика кількість робіт, що описують різні проблеми їх теорії. Зокрема, різницеві рівняння використовують для математичного моделювання реальних процесів із теорії керування, біології та економіки, тощо. Основою для побудови теорії різницевих та функціонально-різницевих рівнянь ще більш ніж сто років тому стали роботи Джорджа Біркгофа та його учнів, де і було закладено фундамент теорії лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. В даний час основні зусилля наукового середовища зосереджуються переважно на вивченні різницевих рівнянь з дискретним аргументом. Але розвиток теорії нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом є не менш актуальною задачею, корисність якої викликана, як потребами самої теорії різницевих рівнянь, так і потребами прикладного характеру.

В дисертаційній роботі досліджено структуру множини неперервних розв'язків систем різницево-функціональних рівнянь з лінійними відхиленнями аргументу і вивчаються їх властивості. Розроблено метод побудови цілої сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T – деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків для широких класів однорідних систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. Для систем неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \Re$ розв'язків та досліджено структуру їх множини у критичному та у гіперболічному випадках. Дослідження продовжені на системи різницевих рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу, зокрема, доведена теорема про єдиність неперервного обмеженого при $t \in \Re$ розв'язку. Тим не менш, наведено умови, при яких вона має нескінченно багато неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків. Отримано узагальнення для систем нелінійних функціональних рівнянь, досліджуються питання існування та єдиності неперервних обмежених при $t \in \Re$ розв'язків таких рівнянь та вивчаються їх властивості.

Ключові слова: різницево-функціональне рівняння, неперервний розв'язок, обмежений розв'язок, відхилення аргументу.

2. Ерёмина Т.А. *Непрерывные решения систем разностно-функциональных уравнений и их свойства.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев, 2016.

В диссертационной работе исследована структура множества непрерывных решений систем разностно-функциональных уравнений с линейными отклонениями аргумента и изучаются их свойства. Разработан метод построения целой семьи непрерывных ограниченных при $t \geq T > 0$ (Т – некоторая достаточно большая положительная постоянная) решений для широких классов однородных систем линейных разностно-функциональных уравнений. Для систем неоднородных линейных разностно-функциональных уравнений установлены условия существования непрерывных ограниченных при $t \in \Re$ решений и исследована структура их множества в критическом и в гиперболическому случаях. Исследования продолжены на системы разностных уравнений со многими отклонениями аргумента, в частности, доказана теорема о единственности непрерывного ограниченного при $t \in \Re$ решения. Тем не менее, приведены условия, при которых она имеет бесконечно много непрерывных решений при $t \geq T > 0$. Получено обобщение для систем нелинейных функциональных уравнений, исследуются вопросы существования и единственности непрерывных при $t \in \Re$ ограниченных решений таких уравнений и изучаются их свойства.

Ключевые слова: разностно-функциональное уравнение, непрерывное решение, ограниченное решение, отклонения аргумента.

3. Yeromina T.O. *Continuous solutions of systems of difference-functional equations and their properties. – Manuscript.*

The dissertation to obtain the scientific degree of the Candidate of sciences physics and mathematics in the speciality 01.01.02 – differential equations. – The National Technical University of Ukraine “KPI”, Kyiv, 2016.

In the dissertation work investigated the structure of the continuous solution set of systems of difference-functional equations with linear deflections of an argument and studied their properties. Developed the method of building a whole family of continuous bounded for $t \geq T > 0$ (T – some quite large positive constant) solutions for broad classes of homogeneous systems of linear difference-functional equations. For systems of heterogeneous linear difference-functional equations determined existence conditions of continuous bounded for $t \in \Re$ solutions and investigated the structure of their set in critical and hyperbolic cases. The research is extended on systems of difference equations with many argument deflections, in particular proved the theorem of unity of a continuous bounded for $t \in \Re$ solution. Nevertheless conditions are given on which it has infinitely many continuous for $t \geq T > 0$ solutions. Obtained a generalization for systems of non-linear functional equations, being investigated issues of existence and unity of continuous bounded for $t \in \Re$ solutions of such equations and being studied their properties.

Keywords: difference-functional equation, continuous solution, bounded solution, argument deflection.

Підп. до друку 25.07.2016. Наклад 100 пр. Зам. №23-16

НУХТ. 01601 Київ-33, вул.. Володимирська, 68

Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 1786 від 18.05.04 р.