МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КПІ"

На правах рукопису

ЄРЬОМІНА ТЕТЯНА ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 517.9

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Самойленко Анатолій Михайлович
академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження різницевих рівнянь, які відомі ще з античних часів, давно вийшли за межі суто теоретичних досліджень. Важливим внеском для побудови теорії різницевих та функціонально-різницевих рівнянь ще більш ніж сто років тому були роботи Джорджа Біркгофа та його учнів, що створили основи теорії лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. Сучасна теорія різницевих рівнянь є важливим розділом математичного аналізу, розвитку якого присвячено цілий ряд фундаментальних праць, серед яких відмітимо монографії О.О. Гельфонда, А. Халаная, Д. Векслера, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, Д.І. Мартинюка, Г.П. Пелюха, О.М. Шарковського, Ю.Л. Майстренка, О.Ю. Романенка, М.А. Солдатова, О.О. Миролюбова, В.Ю. Слюсарчука та інших відомих математиків. Як виявилось, різницеві рівняння добре підходять для моделювання багатьох реальних нелінійних систем у науці і техніці. Оскільки дискретність є однією з фундаментальних властивостей матеріального світу, а різницеві рівняння дозволяють описати її, то для апроксимації багатьох систем не можливо обійтись без цього потужного апарату. З широким застосуванням ЕОМ, починаючи з 60-х років XX століття, нелінійні різницеві рівняння та породжувані ними динамічні системи привертають значну увагу багатьох математиків, зокрема, Д.В. Аносова, В.І. Арнольда, А.Б. Катка, С. Смейла, А.Н. Шарковського, Л.С. Блока, Р. Боуена, М. Кучми, Г. Лядаса, Дж. Мілнора, М. Місюревича, Г.П. Пелюха, С. ван Стриена, М.В. Якобсона та ін. Різноманітним напрямкам теорії різницевих рівнянь присвячено велику кількість статей та монографій, засновано кілька міжнародних журналів, різко зростає кількість тематичних наукових конференцій, а результати досліджень відіграють важливу роль в медицині, економіці, фізиці, інформатиці, тощо.

В даний час основні зусилля наукового середовища зосереджуються переважно на вивченні різницевих рівнянь з дискретним аргументом. Але розвиток теорії нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом є не менш актуальною задачею, корисність якої викликана як потребами самої теорії різницевих рівнянь, так і потребами прикладного характеру, зокрема, вимогами математичної фізики, теорії диференціально-різницевих рівнянь, теорії хаосу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились на кафедрі диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «КПІ» згідно з держбюджетною темою «Асимптотичні та якісні методи дослідження еволюційних систем» (номер державної реєстрації 0107U010797), «Дослідження якісних та спектральних характеристик динамічних систем» (номер державної реєстрації 0113U004540); а також згідно з проектом Державного фонду фундаментальних досліджень України, проект Ф 25.1/021 та у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України у відповідності до плану науково-дослідних робіт за темою „Теорія диференціальних рівнянь та нелінійних коливань" (номер державної реєстрації 0101U000526).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження властивостей неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь з неперервним аргументом.

Об'єктом дослідження є різницево-функціональні рівняння з неперервним аргументом.

Предметом дослідження є вивчення структури множини неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь.

Завдання дослідження:

– розробити метод побудови неперервних розв'язків лінійних та нелінійних різницево-функціональних рівнянь;

– встановити умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь;

– дослідити структуру множини неперервних обмежених розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановити умови існування та єдиності неперервного обмеженого розв'язку систем нелінійних функціональних рівнянь.

Методи дослідження. У роботі використовуються основні методи теорії звичайних диференціальних і різницевих рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, полягають у наступному:

– розроблено метод побудови неперервних розв'язків лінійних та нелінійних різницево-функціональних рівнянь;

– встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановлено умови існування та єдиності неперервного обмеженого розв'язку систем нелінійних функціональних рівнянь.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані в ній результати доповнюють результати робіт багатьох математиків, тематика яких є близькою до тематики дисертаційної роботи, і сприятимуть подальшому розвитку теорії різницевих рівнянь. Вони також можуть використовуватись при дослідженні задач теорії керування, біології, економіки та в інших галузях науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать науковому керівникові.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

1. The 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists. Theoretical and Appied Aspects of Cybernetics. Proceedings. (Kyiv "Bukrek", 2014);
2. III Міжнародній науково-практичній конференції "Математика в сучасному технічному університеті." (Київ, 2014 р.).
3. XVI Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2015);

4. Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 2015);
5. XVII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука, (м. Київ, 2016);
6. VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». (м. Кам'янець-Подільський, 2016);
7. Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвяченої 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка. (м. Ужгород, 2016);
8. Наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Національного технічного університету України "КПІ".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 роботах, з яких 5 - у спеціалізованих фахових журналах, 7 - в збірниках тез наукових конференцій. Серед статей 3 опубліковано в журналах, які входять до наукометричних баз даних (Web of Science).

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 93 найменування. Повний обсяг роботи складає 148 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертаційної роботи, визначено об'єкт та мету дослідження, сформульовано основні результати.

В першому розділі наведено короткий огляд літератури, що є близькою до тематики дисертації.

В другому розділі розроблено метод побудови сім'ї неперервних розв'язків широких класів лінійних різницево-функціональних рівнянь. Розглядаються різницево-функціональні рівняння вигляду

$$x\,(qt) = a\,(t)\,x\,(t) + b\,(t)\,x\,(t+1) + f\,(t) \tag{2.1}$$

де $a\,(t)$, $b\,(t)$, $f\,(t)$ – деякі дійсні функції і q – дійсна стала. Зокрема, вивчаються питання існування неперервних обмежених розв'язків таких рівнянь і досліджується структура їх множини.

В підрозділах 2.1, 2.2 розглядаються однорідні рівняння вигляду

$$x\left(qt\right)=ax\left(t\right)+bx\left(t+1\right), \tag{2.2}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=(0,+\infty)$, a, b, q – деякі дійсні сталі. В залежності від припущень відносно a і q розглянуто такі випадки:

1. $0<q<1$, $a>1$,
2. $0<a<1$, $q>1$,
3. $0<q<1$, $|a|>1$,
4. $|a|<1$, $q>1$.

Підрозділ 2.1 присвячений дослідженню різницево-функціональних рівнянь вигляду (2.2) у випадку додатніх a. Основними його результатами є наступні теореми.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $0<q<1$, $a>1$,
2. $\Delta=\frac{|b|}{a-1}<1$, $\nu=\frac{\ln a}{\ln q}<0$.

Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t\geq T>0$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $x(t)=x\left(t,\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$.

Показано, що неперервні розв'язки (2.2) можна представити у вигляді ряду:

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{2.3}$$

де $x_i(t)$, $i=0,1,...$– деякі неперервні функції, які задовольняють рівняння:

$$x_0(qt)=ax_0(t), \tag{2.5$_0$}$$

$$x_i(qt)=ax_i(t)+bx_{i-1}(t+1), i=1,2,..., \tag{2.5$_i$}$$

які мають розв'язки у вигляді:

$$x_0(t)=t^{\frac{\ln a}{\ln q}}\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{2.6}$$

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)} x_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, ..., \qquad (2.7_i)$$

де $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

В цьому підрозділі вивчається також неоднорідне рівняння вигляду

$$y\left(qt\right) = ay\left(t\right) + by\left(t+1\right) + f\left(t\right), \qquad (2.13)$$

де a, b, q – деякі сталі, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Доведено наступну теорему.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови*

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{a-1} < 1$;
3. *функція* $f\left(t\right)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такою, що* $\sup\limits_{t} \left|f\left(t\right)\right| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Показано, що (2.13) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \qquad (2.14)$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$– деякі неперервні функції, які задовольняють рівняння:

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f\left(t\right), \qquad (2.16_0)$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + b\bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ... \qquad (2.16_i)$$

Рівняння (2.16_0) має розв'язок вигляду:

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} f(q^j t). \qquad (2.17_0)$$

Рівняння (2.16_i), $i = 0, 1, 2, ...$ мають розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, ... \qquad (2.17_i)$$

Зауваження 2.1. *Виконуючи в (2.13) заміну змінних*

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \qquad (2.24)$$

отримаємо рівняння (2.2) відносно функції $x(t)$. Оскільки для цього рівняння справедлива Теорема 2.1, то приймаючи до уваги заміну змінних (2.24), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків рівняння (2.13).

У зв'язку із доведеними вище теоремами 2.1 і 2.2 виникло питання про описання структури множини неперервних розв'язків рівняння (2.13) у випадку, коли $b = b\,(t)$ - деяка дійсна функція дійсної змінної t, тобто, коли рівняння (2.13) має вигляд

$$y\,(qt) = ay\,(t) + \tilde{b}\,(t)\,y\,(t+1) + \tilde{f}\,(t)\,, \tag{2.25}$$

де $a,\ q$ – деякі дійсні сталі, $\tilde{b}\,(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}\,(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Доведена наступна теорема.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1, a > 1$;
2. $\tilde{\Delta} = \frac{b^*}{a-1} < 1$;
3. *функції* $\tilde{b}\,(t)$,$\tilde{f}\,(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такими, що* $\sup\limits_t \left|\tilde{b}\,(t)\right| = b^* < \infty$, $\sup\limits_t \left|\tilde{f}\,(t)\right| = f^* < \infty$.

Тоді рівняння (2.1) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{\bar{y}}(t)$.

Аналогічні результати отримані у випадку 2. Зокрема, доведені теореми 2.4 та 2.5.

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1, q > 1$,
2. $\Delta = \frac{|b|}{1-a} < 1, \nu = \frac{\ln a}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються наведені вище умови. Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$.*

В підрозділі 2.2 другого розділу досліджується питання існування неперервних розв'язків рівнянь (2.2) у випадках 3 та 4. При цьому, зокрема, доведені теореми 2.6 – 2.9 .

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1$, $|a| > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{|a|-1} < 1$, $\nu = \frac{\ln|a|}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної функції* $\omega(\tau)$ *такої, що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Теорема 2.8. *Нехай виконуються умови:*

1. $|a| < 1, q > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{1-|a|} < 1, \nu = \frac{\ln|a|}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної функції* $\omega(\tau)$, *яка задовольняє умові* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1$, $|a| > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{|a|-1} < 1$;
3. *функція* $f(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такою, що* $\sup\limits_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)$.

Теорема 2.9. *Нехай виконуються умови:*

1. $|a| < 1$, $q > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{1-|a|} < 1$;
3. *функція*$f(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такою, що* $\sup\limits_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежених при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Останній підрозділ 2.3 присвячений вивченню неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу. Зокрема, розглянуто рівняння вигляду

$$x(qt) = ax(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x(t + \delta_j), \tag{2.60}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$, a, q, b_j, δ_j, j=*1,2,...,k*, деякі дійсні сталі, для якого доведено наступну теорему.

Теорема 2.10. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;
2. $\tilde{\Delta} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}|b_j|}{a-1} < 1$, $\nu = \frac{\ln a}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2.60) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(\tau)$.

В цьому підрозділі розглянуто також неоднорідне рівняння вигляду

$$y\,(qt) = ay\,(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j y\,(t+\delta_j) + f(t), \tag{2.65}$$

де a, b_j δ_j, j=*1,2,...,k*, q – деякі сталі; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для цього рівняння доведена наступна теорема.

Теорема 2.11. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;
2. $\tilde{\Delta} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{k}|b_l|}{a-1} < 1$, $\nu = \frac{\ln a}{\ln q} < 0$;
3. *функція* $f\,(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такою, що* $\sup\limits_{t} |f\,(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (2.65) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Основним об'єктом дослідження третього розділу є системи різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\,(qt) = A\,(t)\,x\,(t) + B\,(t)\,x\,(t+1) + F\,(t)\,, \tag{3.1}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$, $A\,(t)$, $B\,(t)$ - дійсні $(n \times n)$ - матриці, $F\,(t)$ - дійсний вектор розмірності n, q - деяка дійсна стала. Вивчаються питання існування неперервних обмежених розв'язків систем різницево-функціональних рівнянь вигляду (3.1) з постійними коефіцієнтами.

Метою підрозділу 3.1 є встановлення умов існування сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків для систем однорідних рівнянь вигляду

$$x\,(qt) = Ax\,(t) + Bx\,(t+1)\,, \tag{3.2}$$

де A, B - дійсні сталі $(n \times n)$ - матриці, q - деяка дійсна стала. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$ задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j ; |\lambda_i| \neq 0, 1; i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка стала неособлива $(n \times n)$ - матриця, яка приводить систему рівнянь (3.2) до вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B} y(t+1), \tag{3.3}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{B} = C^{-1}BC$.

Розглянуто випадок, коли виконуються такі умови:

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$,
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Доведена наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови 1,2. Тоді система рівнянь (3.3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(\tau)$.*

Також розглянуто систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B} y(t+1) + F(t), \tag{3.11}$$

де матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q \neq 0$;
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$;
3. всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Для системи (3.11) доведена наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь (3.11) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{3.12}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots,$ - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Досліджено рівняння (3.3) у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$, $t \geq T > 0$. Зокрема, доведено наступну теорему.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$;
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{1-\lambda^*} < 1$, *де* $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3.3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T- деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(\tau)$.

В цьому підрозділі досліджено також неоднорідне рівняння вигляду (3.11), для якого виконуються умови 1-2 теореми 3.3 і всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Зауваження 3.1. *Виконуючи в (3.11) заміну змінних*

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t), \tag{3.27}$$

отримаємо систему рівнянь (3.3) відносно вектор-функції $z(t)$, для якої справедлива теорема 3.1.

У випадку, коли $\tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}(t)$ для системи рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{\tilde{B}}(t)\, y(t+1) + \tilde{F}(t), \tag{3.28}$$

де матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, q - стала, $\tilde{\tilde{B}}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $\tilde{F}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, доведена наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \dots, n$, $q \neq 0$;

2. $\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{b}^*}{\lambda_* - 1} < 1$*;*

3. *всі елементи вектор-функцій* $\tilde{F}(t)$ *та* $\tilde{\tilde{B}}(t)$ *є неперервними й обмеженими функціями при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такими, що* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t)\right| = \tilde{M}^* < +\infty$, $\sup\limits_t \left|\tilde{\tilde{B}}(t)\right| = \tilde{b}^* < +\infty$.

Тоді система рівнянь (3.28) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)$ *у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$*,* $i = 0, 1, \ldots,$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Підрозділ 3.2. присвячений побудові сімї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків. Розглянуто однорідну систему рівнянь вигляду (3.3) при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$ у випадках, коли виконуються умови:

1. $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;
2. $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$.

Показано, що така система рівнянь має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.29}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ - деякі неперервні вектор-функції. Доведена теорема 3.5.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови:*

1. $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $0 < q < 1$,
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$*, де* $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3.3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *- деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$*, такої що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

В підрозділі 3.3 розглядається система лінійних рівнянь вигляду:

$$x(qt) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, x(t + \Delta_j(t)) + F(t), \tag{3.33}$$

де $t \in \mathbb{R}$, A, $B_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ - деякі дійсні $(n \times n)$ - матриці, q - деяка дійсна стала, $F(t)$ - дійсний вектор розмірності n, $\Delta_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$.

Досліджено питання існування неперервних обмежених при $t \geq T$ розв'язків такої системи у випадку, коли виконуються умови:

1. всі елементи матриць $B_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ і вектора $F(t)$ є обмеженими при $t \geq T$ функціями;
2. функції $\Delta_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ є неперервними обмеженими при $t \geq T$, $q \neq 0$;
3. $\sup\limits_t |B_j(t)| = b_j$, $j = 1, ..., k$, $\sup\limits_t |F(t)| = M$, $|A| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = a < 1$;
4. $\Delta = \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1-a} < 1$.

Доведена наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови 1-4. Тоді система рівнянь (3.33) має єдиний неперервний обмежений при $t \geq T$ розв'язок $x(t)$ у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{3.34}$$

де $x_i(t), i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні обмежені при $t \geq T$ вектор-функції.

При виконанні умов теореми 3.6 система рівнянь

$$y(qt) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, y(t + \Delta_j(t))$$

має єдиний неперервний при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y \equiv 0$. Тим не менш, при деяких додаткових умовах вона має нескінченно багато неперервних при $t \geq T > 0$ (T – деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків. Це показано (для простоти) у випадку, коли $\Delta_j(t) \equiv j$, $j = 1, \ldots, k$, а матриця A є такою, що $A = \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, і, отже, розглядувана система має вигляд:

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, y(t + j)\,. \tag{3.38}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови теореми 3.6 і умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ q > 1;$
2. $\tilde{\Delta} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1-\lambda^*} < 1,$

   де $b_l = \sup\limits_t |B_j(t)|,\ j = 1, \ldots, k,\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}.$

Тоді система рівнянь (3.38) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ *(T – деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1 – періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$*.*

Підрозділ 3.4 присвячений дослідженню структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь в критичному випадку. Досліджено питання існування неперервних розв'язків та досліджується структура їх множини для системи лінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + By(t+1)\,, \tag{3.43}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, Λ та B- дійсні $(n \times n)$ - матриці, q - деяка дійсна стала у випадку, коли серед власних чисел λ_i, $i = 1, \ldots, n$ матриці Λ є однакові. Не обмежуючи загальності припускається, що $\Lambda = diag\,(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$, $m \leq n$, де $\Lambda_i - (k_i \times k_i)$ - матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \tag{3.44}$$

ε - достатньо мала додатна стала. Доведена наступна теорема.

Теорема 3.8. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, m,\ q > 1;$
2. $\Delta = \frac{b}{1-(\lambda^*+\delta)} < 1,$ *де* $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda^* + \delta < 1$, $b = |B| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (3.43) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$*.*

Також розглянуто систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + By(t+1) + F(t), \tag{3.49}$$

де матриці Λ, B задовольняють умови теореми 3.8, а $F(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Теорема 3.9. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 3.8, і всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$. Тоді система рівнянь (3.49) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{3.50}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Для рівнянь вигляду (3.43) проведені аналогічні дослідження у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < q < 1$, $t \geq T > 0$.

В підрозділі 3.5 розглянуто однорідну систему рівнянь вигляду (3.43) в припущенні, що $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \leq m \leq n$, $q > 1$. Вводячи такі позначення:

$$y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right), y^1(t) = (y_1(t), \ldots, y_p(t)), y^2(t) = (y_{p+1}(t), \ldots, y_m(t));$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} B_{12} \\ B_{21} B_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = diag\left(\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2\right), \tilde{\Lambda}_1 = diag(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p), \tilde{\Lambda}_2 = diag(\Lambda_{p+1}, \ldots, \Lambda_m), m \leq n,$$

$\Lambda_i - (k_i \times k_i)$ - матриці вигляду (3.44), систему рівнянь (3.43) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} y^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 y^1(t) + B_{11} y^1(t+1) + B_{12} y^2(t+1), \\ y^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 y^2(t) + B_{21} y^1(t+1) + B_{22} y^2(t+1). \end{cases} \tag{3.57}$$

Для неї доведена теорема 3.11.

Теорема 3.11. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \leq m \leq n$, $q > 1$;

2. $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda}^*+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda}_*^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1,$
   де $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,
   $\underline{\lambda}^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\underline{\lambda}^* + \delta_1 < 1$,
   $\bar{\lambda}_* = \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\overline{\lambda}_*^{-1} + \delta_2 < 1$.

Тоді система рівнянь (3.57) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *- деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків, що залежить від* m *довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, m$.

Для систем неоднорідних рівнянь вигляду:

$$\left\{\begin{array}{l} y^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 y^1(t) + B_{11}y^1(t+1) + B_{12}y^2(t+1) + F^1(t), \\ y^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 y^2(t) + B_{21}y^1(t+1) + B_{22}y^2(t+1) + F^2(t). \end{array}\right. \tag{3.63}$$

де $F(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, F(t) = \left(F^1(t), F^2(t)\right)$,
$F^1(t) = (F_1(t), \ldots, F_p(t))$, $F^2(t) = (F_{p+1}(t), \ldots, F_m(t))$
має місце наступна теорема.

Теорема 3.12. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \leq m \leq n$, $q > 0$;
2. $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda}^*+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda}_*^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1,$
   де $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,
   $\underline{\lambda}^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $\underline{\lambda}^* + \delta_1 < 1$,
   $\bar{\lambda}_* = \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $\overline{\lambda}_*^{-1} + \delta_2 < 1$;
3. *всі елементи вектор-функції* $F(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (3.63) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right)$.

Об'єктом дослідження четвертого розділу є системи нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=F\left(t,x\left(t\right),x\left(t+f_{1}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),...,x\left(t+f_{k}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right),\qquad(4.1)$$

де $t\in\mathbb{R}$, $q=const\neq 0,1$, $\varepsilon\ll 1$. Розглядаються питання існування та єдиності неперервних розв'язків таких рівнянь та досліджуються їх властивості.

Підрозділ 4.1 присвячений доведенню існування та єдиності неперервного при $t\in\mathbb{R}$ розв'язку нелінійних функціональних рівнянь вигляду (4.1) в припущені, що виконуються умови:

1. вектор-функція $F\left(t,x^{0},x^{1},...,x^{k},\varepsilon\right)$ і функції $f_{i}\left(t,x\right)$, $i=1,2,...,k$, є неперервними при всіх $t\in\mathbb{R}$, $x^{i}\in\mathbb{R}^{n}$, $i=0,1,...,k$, $x\in\mathbb{R}^{n}$ і має місце співвідношення $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|F\left(t,0,...,0,\varepsilon\right)\right|=M<+\infty$;
2. вектор-функція $F\left(t,x^{0},x^{1},...,x^{k},\varepsilon\right)$ і функції $f_{i}\left(t,x\right)$, $i=1,2,...,k$, задовольняють умови:
$$\left|F\left(\bar{t},\bar{x}^{0},\bar{x}^{1},...,\bar{x}^{k},\varepsilon\right)-F\left(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}^{0},\bar{\bar{x}}^{1},...,\bar{\bar{x}}^{k},\varepsilon\right)\right|\leq L_{0}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+L\sum_{i=0}^{k}\left|\bar{x}^{i}-\bar{\bar{x}}^{i}\right|,\qquad(4.2)$$
$$\left|f_{i}\left(\bar{t},\bar{x}\right)-f_{i}\left(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}\right)\right|\leq l_{i}'\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+l_{i}''\left|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right|,i=1,2,...,k,\qquad(4.3)$$
де $L_{0},L,l_{i}',l_{i}'',i=1,2,...,k,$ - деякі додатні сталі, $\left(\bar{t},\bar{x}^{0},\bar{x}^{1},...,\bar{x}^{k},\varepsilon\right),\left(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}^{0},\bar{\bar{x}}^{1},...,\bar{\bar{x}}^{k},\varepsilon\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{kn}$;
3. при достатньо малих $L_{0},L,l_{i}',l_{i}'',i=1,2,...,k,$ виконуються співвідношення $\frac{L_{0}}{ql}+\frac{L}{q}\left(k+1+\left(l^{*}+l^{*}l\right)k\right)\leq 1,L\left(k+1+ll^{*}k\right)=\theta<1$, де $l^{*}=\max\left\{l_{i}',l_{i}''\right\}$, $l>0$.

Поклавши в (4.1) $\varepsilon=0$, отримаємо систему рівнянь, для якої доведена наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь*

$$x\left(qt\right)=F\left(t,x\left(t\right),x\left(t+f_{1}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),...,x\left(t+f_{k}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),0\right),\qquad(4.4)$$

має єдиний неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок, що задовольняє умову

$$\left|x(\bar{t})-x(\bar{\bar{t}})\right|\leq l\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|,\qquad(4.5)$$

де $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \mathbb{R}$, l *- деяка додатна стала.*

Виконуючи в (4.1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x\left(t\right)=y\left(t\right)+\gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ - неперервний розв'язок системи (4.4), отримаємо систему рівнянь вигляду

$$y\left(qt\right)=\tilde{F}\left(t,y\left(t\right),y\left(t+\tilde{f}_1\left(t,y\left(t\right)\right)\right),...,y\left(t+\tilde{f}_k\left(t,y\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right), \qquad (4.10)$$

де

$$F\left(t,y\left(t\right),y\left(t+\tilde{f}_1\left(t,y\left(t\right)\right)\right),...,y\left(t+\tilde{f}_k\left(t,y\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right)=$$
$$=F\left(t,y\left(t\right)+\gamma\left(t\right),y\left(t+f_1\left(t,y\left(t\right)+\gamma\left(t\right)\right)\right)+\gamma\left(t+f_1\left(t,y\left(t\right)+\gamma\left(t\right)\right)\right),...\right.$$
$$\left....,y\left(t+f_k\left(t,y\left(t\right)+\gamma\left(t\right)\right)\right)+\gamma\left(t+f_k\left(t,y\left(t\right)+\gamma\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right)-$$
$$-F\left(t,\gamma\left(t\right),\gamma\left(t+f_1\left(t,\gamma\left(t\right)\right)\right),...,\gamma\left(t+f_k\left(t,\gamma\left(t\right)\right)\right),0\right);$$

3'. при достатньо малих L_0, L, l'_i, l''_i, $i=1,2,...,k$, виконуються співвідношення $\frac{L_0}{ql}+\frac{L}{q}\left(k+1+\left[l^*+l^*\tilde{l}\right]k\right)\leq 1$, $L\left[k+1+\tilde{l}l^*k\right]=\theta<1$, де $l^*=\max\left\{l'_i,l''_i\right\}$, $\tilde{l}>0$.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови 1,2 та 3'. Тоді система рівнянь (4.10) має єдиний неперервний обмежений при* $t\in\mathbb{R}$ *розв'язок, що задовольняє умови*

$$\left|y(\bar{t},\varepsilon)-y(\bar{\bar{t}},\varepsilon)\right|\leq\tilde{l}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|,\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=0,$$

де $t,\bar{t},\bar{\bar{t}}\in\mathbb{R}$, $\tilde{l}=\tilde{l}\left(\varepsilon\right)$ *- додатна стала, що залежить від* ε, $\varepsilon\ll 1$.

Метою підрозділу 4.2 є побудова неперервних обмежених при $t\geq T$ розв'язків нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=\Lambda x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t+1\right)\right), \qquad (4.15)$$

де $t\in\mathbb{R}$, $\Lambda-$дійсна $(n\times n)$ - матриця вигляду $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$,
$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, q - деяка дійсна стала, в припущені, що виконуються умови:

1. $|\lambda_i| \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $q > 0$;
2. вектор-функція $f\,(t, x)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $f\,(t, 0) = 0$;
3. для довільних $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$|f\,(t, x) - f\,(t, y)| \leq l\,|x - y|\,, \tag{4.16}$$

де l - деяка додатна стала.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови 1-3 і умови:*

4. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$;
5. $\Delta = \frac{l}{1-\lambda^*} < 1$, *де* $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.17}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови 1-3 і умови:*

6. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$;
7. $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.22}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Аналогічні результати отримані при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$ у випадках, коли виконуються умови:

1. $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$;
2. $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$.

В підрозділі 4.3 розглянуто систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь (4.15) у випадку, коли виконуються наступні умови:

1) Λ - дійсна $(n \times n)$ - матриця вигляду $\Lambda = diag\,(\Lambda_1, \Lambda_2)$,

   де Λ_1, Λ_2 - дійсні $(p \times p)$ та $(r \times r)$ - матриці $(p + r = n)$, $\det\Lambda \neq 0$.
   $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
   $f\,(t, x\,(t+1)) = \left(f^1\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right), f^2\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right)\right)$,
   q - деяка дійсна додатна стала;

2)

$$\begin{aligned} \left|f^1\left(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2\right) - f^1\left(t, \bar{\bar{x}}^1, \bar{\bar{x}}^2\right)\right| \le l_1\left(\left|\bar{x}^1 - \bar{\bar{x}}^1\right| + \left|\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2\right|\right), \\ \left|f^2\left(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2\right) - f^2\left(t, \bar{\bar{x}}^1, \bar{\bar{x}}^2\right)\right| \le l_2\left(\left|\bar{x}^1 - \bar{\bar{x}}^1\right| + \left|\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2\right|\right), \end{aligned} \tag{4.30}$$

   де l_1, l_2 - деякі додатні сталі, що залежать від l $(l_1 = l_1\,(l)\,, l_2 = l_2\,(l)\,,$
   $l_1 \to 0, l_2 \to 0$ при $l \to 0)$.

Вводячи відповідні позначення, систему рівнянь (4.15) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x^1\,(qt) = \Lambda_1 x^1\,(t) + f^1\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right), \\ x^2\,(qt) = \Lambda_2 x^2\,(t) + f^2\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right), \end{cases} \tag{4.31}$$

де $x^1 = (x_1, ..., x_p)\,, x^2 = (x_{p+1}, ..., x_{p+r})\,, f^1 = (f_1, ..., f_p)\,, f^2 = (f_{p+1}, ..., f_{p+r})\,.$

Виконуючи в (4.31) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x_1\,(t) = y_1\,(t) + \tilde{\gamma}_1\,(t)\,,$$
$$x_2\,(t) = y_2\,(t) + \tilde{\gamma}_2\,(t),$$

де $\gamma\,(t) = (\tilde{\gamma}_1\,(t)\,, \tilde{\gamma}_2\,(t))$ - неперервний обмежений розв'язок системи (4.31), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y^1\,(qt) = \Lambda_1 y^1\,(t) + F^1\left(t, y^1\,(t+1)\,, y^2\,(t+1)\right), \\ y^2\,(qt) = \Lambda_2 y^2\,(t) + F^2\left(t, y^1\,(t+1)\,, y^2\,(t+1)\right), \end{cases} \tag{4.32}$$

де

$$F^1(t, y^1(t+1), y^2(t+1)) =$$
$$= f^1(t, y^1(t+1) + \gamma^1(t+1), y^2(t+1) + \gamma^2(t+1)) - f^1(t, \gamma^1(t+1), \gamma^2(t+1)),$$

$$F^2(t, y^1(t+1), y^2(t+1)) =$$
$$= f^2(t, y^1(t+1) + \gamma^1(t+1), y^2(t+1) + \gamma^2(t+1)) - f^2(t, \gamma^1(t+1), \gamma^2(t+1)),$$

причому вектор-функції $F^1\left(t, y^1, y^2\right), F^2\left(t, y^1, y^2\right)$ задовольняють умові 2) і $F^1(t, 0, 0) \equiv 0, F^2(t, 0, 0) \equiv 0$. Для системи (4.32) доведена теорема 4.7.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1)-2) і умови:*

3) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, 2, \dots,$ $j = \ +1, \dots n$, $0 \leq p \leq n$, $q > 1$;

4) $\theta = \max\left\{\frac{2l_1}{1-\lambda^*}, \frac{2l_2}{\lambda_*-1}\right\} < 1$,
де $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, p\}$, $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = p+1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.32) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді рядів*

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{4.33}$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...$ - *деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Аналогічний результат доведено для випадку $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, 2, \dots,$ $j = \ +1, \dots n, 0 \leq p \leq n$, $0 < q < 1$.

В підрозділі 4.4 побудовано неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f(t, x(t), x(t+1)), \tag{4.45}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\Lambda-$ дійсна $(n \times n)$ - матриця вигляду $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, q - деяка дійсна стала, у випадках:

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$;
2. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$.

При цьому припускається, що виконуються умови:

3. вектор-функція $f(t, x, y)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ і $f(t, 0, 0) \equiv 0$;

4. для довільних $t \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}} \in \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leq l\left(|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|\right), \tag{4.46}$$

   де l - деяка додатна стала.

Зокрема, доведено наступні теореми.

Теорема 4.9. *Нехай виконуються умови 1, 3-4 і умова:*

5. $\Delta = \frac{2l}{\bar{\lambda} - \lambda^*} < 1$, *де* $1 > \bar{\lambda} > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.45) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.47}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умові*

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0.$$

Теорема 4.10. *Нехай виконуються умови 2-4 і умова:*

6. $\Delta = \frac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, *де* $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.45) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умові*

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0.$$

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Різницево-функціональні рівняння поєднують в собі властивості різницевих та q – різницевих (функціональних) рівнянь і є важливим інструментом при розв'язанні багатьох прикладних задач. При різних припущеннях, такі рівняння були і є об'єктом дослідження багатьох математиків, розвиток їх теорії набув цілий ряд напрямків, серед яких важливе значення має напрямок, основним завданням якого є побудова загального розв'язку та вивчення його структури.

Слід відмітити, що вперше побудувати загальний розв'язок для широкого класу систем лінійних різницевих рівнянь та дослідити його властивості вдалося Біркгофу та його учням в роботах [5-7]. Ці праці мали великий вплив на подальший розвиток теорії різницевих рівнянь. В даний час ця теорія набула широкого розгалуження і має дуже багато важливих результатів. Зокрема, в [54] досліджується система лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x\left(t+1\right)=A\left(t\right)x\left(t\right), \tag{1.1}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}$, $A\left(t\right)$ - дійсна $\left(n\times n\right)$ - матриця, для якої побудовано представлення загального розв'язку і досліджено його структуру.

Продовжуючи дослідження системи (1.1), в роботах [56-58] розроблено сам метод побудови загального неперервного розв'язку системи (1.1) для випадку, коли виконуються наступні умови:

1) елементи матриці $A\left(t\right)$ є неперервними N - періодичними (N – ціле додатне число) функціями;
2) $\det A\left(t\right)\neq 0$ при всіх $t\in\mathbb{R}$.

Розширюючи коло досліджень, в роботі [69] розглядається рівняння вигляду

$$x\left(t+1\right)=\left(\Lambda+A\left(t\right)\right)x\left(t\right), \tag{1.2}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=[0,+\infty)$, Λ - стала дійсна $\left(n\times n\right)$ - матриця, $A\left(t\right)$ – дійсна $\left(n\times n\right)$-матриця, для якого доведено наступну теорему.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $\det A(t) \neq 0$, $\det(\Lambda + A(t)) \neq 0$ *при всіх* $t \in \mathbb{R}^+$;
2. *при всіх* $t \in \mathbb{R}^+$ *існує неперервна, додатна функція* $a(t)$ *така, що* $\|A(t)\| \leq a(t)$, *де* $\|A(t)\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;
3. *ряд* $h(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_* \lambda^* a(t+i)$, *де* $\lambda_* = \left\|\Lambda^{-1}\right\|$, $\lambda^* = \|\Lambda\|$, *рівномірно збігається при всіх* $t \in \mathbb{R}^+$,

і виконується співвідношення

$$\lambda_* h(t) \leq \theta < 1.$$

Тоді при $t \geq T$, *де* T *- достатньо велике, існує заміна змінних*

$$x(t) = \gamma(t)\, y(t),$$

($\gamma(t)$ *- неперервна обмежена неособлива при* $t \geq T$ *матриця, яка має неперервну обмежену при* $t \geq T$ *обернену матрицю* $\gamma^{-1}(t)$*), яка приводить систему рівнянь (1.2) до вигляду*

$$y(t+1) = \Lambda y(t).$$

Питання побудови загального неперервного розв'язку системи неоднорідних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)\, x(t) + f(t), \tag{1.3}$$

де $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ - дійсна $(n \times n)$ - матриця $f(t)$ - n-мірний дійсний вектор, розглядається в роботі [67].

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови:*

1. *всі елементи матриці* $A(t)$ *і вектора* $f(t)$ *є неперервними при* $t \in \mathbb{R}^+$ *функціями;*
2. $\det A(t) \neq 0$ *при* $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\det \prod_{i=0}^{N-1} A(N-i-0) \neq 0.$$

Тоді довільний неперервний при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $x(t)$ системи рівнянь (1.3) має вигляд

$$x(t) = \prod_{i=1}^{[t]} A(\tau + [t] - j)\,\Phi(\tau)\,\omega(t) + \prod_{i=1}^{[t]} A(\tau + [t] - j)\,\varphi(\tau) + \\ + \prod_{i=1}^{[t]-1} A(\tau + [t] - j)\, f(\tau) + ... + A(\tau + [t] - 1)\, f(\tau + [t] - 2) + \\ + f(\tau + [t] - 1),$$

де неособлива при $\tau \in [0,1)$ матрична функція $\Phi(\tau)$ і вектор-функція $\varphi(\tau)$ є неперервними і задовольняють умови

$$\Phi(1-0) = \Phi^1, \Phi^1 = A(0)\,\Phi(0)\,, \varphi^1 = A(0)\,\varphi(0) + f(0)$$

відповідно, а $\omega(t)$ - деяка неперервна при $t \in \mathbb{R}^+$ 1-періодична вектор-функція.

В роботах [70, 72-73, 85] досліджуються функціонально-різницеві рівняння вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + bx(qt)\,, \tag{1.4}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, a, b, q – деякі дійсні сталі, для яких доведена низка тверджень. При цьому припускаються виконаними умови:

1. $0 < a < 1$, $q > 1$,
2. $\Delta = \frac{|b|}{a - a^q} < 1$.

Лема 1.1. *Якщо виконуються умови 1,2, то рівняння* (1.4) *має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, що залежить від довільної неперервної 1–періодичної функції $\omega(t)$.*

Лема 1.2. *Якщо $\gamma(t)$ - довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок рівняння* (1.4) *і виконуються умови 1,2 леми 1, то при всіх $t \geq 0$ має місце оцінка*

$$|\gamma(t)| \leq \tilde{M} a^t,$$

де $\tilde{M}$ - деяка додатна стала.

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1$, $q > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{a - a^q} < \frac{1}{2}$.

Тоді довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $\gamma(t)$ рівняння (1.4) можна зобразити у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

в якому функції $x_i(t) = x_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, ...$, визначаються співвідношеннями

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} b x_{i-1}(q(t+j)), i = 0, 1, ...,$$

а $\omega(t)$ – деяка неперервна 1-періодична функція.

Отримані результати поширено також на випадок неоднорідних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + bx(qt) + f(t),$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, a, b, q – деякі дійсні сталі, $f(t)$ – n-мірний дійсний вектор.

В роботі [38] розглядається лінійне функціонально-різницеве рівняння вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, x(q_j t), \tag{1.5}$$

де $t \in R^+ = [0, +\infty)$, a, b_j, $q_j, j = 1, 2, ...$– дійсні сталі. Продовжуючи дослідження робіт [70, 72-73, 85], вивчаються аналогічні питання для рівняння (1.5) при певних припущеннях відносно a та $q_j, j = \overline{1, n}$.

Лема 1.3. *Якщо виконуються умови:*

1. $0 < a < 1, q_j \geq q > 1, j = 1, 2, ...;$
2. $b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty,\ \ \Delta = \frac{b}{a - a^q} < 1.$

То рівняння (1.5) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$.

Лема 1.4. *Якщо $\gamma(t)$– довільний неперервний обмежений при $t \geq 0$ розв'язок рівняння (1.5) і виконуються умови 1, 2 леми 1.3, то при всіх $t \geq 0$ виконується оцінка*

$$|\gamma(t)| \leq Ma^t,$$

де M - деяка додатна стала.

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1, q > 1;]$
2. $b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty,\ \Delta = \frac{b}{a-a^q} < \frac{1}{2}.$

Тоді довільний неперервний обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $\gamma(t)$ рівняння (1.5) можна представити у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

в якому функції $x_i(t) = x_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, ...$, визначаються співвідношеннями

$$x_i(t) = -\sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\ x_{i-1}(q_j(t+p)) \right),\ \ i = 1, 2, ...\ ,$$

а $\omega\,(t)-$деяка неперервна 1-періодична функція.

Продовжуючи дослідження, в роботі [76] розглядається лінійне функціонально-різницеве рівняння вигляду

$$x\,(t+1) = a\,(t)\,x\,(t) + b\,(t)\,x\,(qt) + f\,(t)\,, \tag{1.6}$$

де $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $a\,(t)\,, b\,(t)\,, f\,(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a\,(t)$, $b\,(t)$ - деякі дійсні матриці розмірності $n \times n$, q – деяка дійсна стала.

Досліджується структура множини неперервних розв'язків при виконанні наступних умов:

1. $0 < a_* \leq a\,(t) \leq a^* < 1$, $q > 0$;
2. функції $b\,(t)\,, f\,(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такими, що $\sup\limits_t |b\,(t)| = b^*, \sup\limits_t |f\,(t)| = f^*$;
3. $\Delta = \frac{b^*}{1-a^*} < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема. 1.5. *Якщо виконуються умови 1-3, то рівняння (1.6) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $x\,(t)$ у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *функції.*

В [70, 72-73, 85] узагальнено отримані результати на випадок систем функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(qt) + F(t)\,, \tag{1.7}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $A(t)$, $B(t)$ - дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ - дійсний вектор розмірності n, q - деяка дійсна стала. Зокрема, в [13] досліджується система однорідних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt)\,, \tag{1.8}$$

де A, B - дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q - деяка дійсна стала. При цьому припускається, що власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$ матриці A задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j; |\lambda_i| \neq 0, 1;\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді, як відомо, існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t)\,,$$

де С – деяка стала неособлива $(n \times n)$-матриця, що приводить систему рівнянь (1.8) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{B} y(qt)\,, \tag{1.9}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{B} = C^{-1}BC$, для якої детально досліджені випадки:

a) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$,

b) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$.

Наприклад, якщо виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;
2. $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$,
   $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$,

то має місце наступна лема.

Лема 1.5. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (1.9) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.*

Зауважимо, що у [84] вивчається також випадок, коли серед власних чисел матриці А є однакові.

Узагальнення роботи [69] на випадок систем нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x\left(t+1\right)=\left(\Lambda+A\left(t\right)\right)x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t\right)\right), \tag{1.10}$$

де $t \in \mathbb{R}^+$, Λ, $A\left(t\right)$ - дійсні $(m \times n)$-матриці, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, отримано в [55], де, зокрема, доведена наступна теорема.

Теорема 1.6. *Нехай виконуються умови:*

1. *власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, m$ матриці Λ задовольняють умові*

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_m| > 0;$$

2. *матриця $A\left(t\right)$ і вектор-функція $f\left(t,x\right)$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$, $|x| \leq a$, N-періодичними по t і задовольняють співвідношення*

$$|A\left(t\right)| \leq l, f\left(t,0\right) \equiv 0,$$

$$|f\left(t,x'\right)-f\left(t,x''\right)| \leq L\left(|x'|+|x''|\right)^{k-1}|x'-x''|,$$

$$|x'| \leq a, |x''| \leq a,$$

де $|A\left(t\right)| = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, l *– достатньо мале додатне число,* $k > l$, $L = const > 0$, $\Lambda = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right)$, $A\left(t\right) = diag\left(a_1\left(t\right), \ldots, a_n\left(t\right)\right)$.

Тоді при $t \in \mathbb{R}^+$, $|y| \leq a_1 < a$, достатньо малому l існує заміна змінних

$$x\left(t\right)=y\left(t\right)+\gamma\left(t,y\left(t\right)\right),$$

де вектор-функція $\gamma\left(t,y\right)$ є неперервною по t, y, N- періодичною по t і задовольняє умови

$$\gamma\left(t,0\right) \equiv 0, \quad |\gamma\left(t,y'\right)-\gamma\left(t,y''\right)| \leq M\left(|y'|+|y''|\right)^{k-1}|y'-y''|,$$

$M = const > 0$, *яка приводить систему рівнянь (1.10) до вигляду*

$$y\left(t+1\right) = \left(\Lambda + A\left(t\right)\right) y\left(t\right).$$

В [62] доведено існування та єдиність неперервного і обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи вигляду

$$x\left(t+1\right) = \Lambda x\left(t\right) + f\left(t, x\left(t\right)\right), \tag{1.11}$$

де $t \in \mathbb{R}^{+} = (-\infty, +\infty)$, Λ - дійсна, стала $(n \times n)$-матриця, $f\left(t, x\right)$ - задана дійсна вектор-функція, $x\left(t\right)$ - невідома вектор-функція у випадку, коли виконуються наступні умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, m$ матриці Λ задовольняють умові

$$0 < |\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, n;$$

2) вектор-функція $f\left(t, x\right)$ є неперервною по всіх аргументах і задовольняє умові Ліпшица

$$\left|f\left(t, x\right) - f\left(t, y\right)\right| \leq l\left|x - y\right|,$$

де $\left(t, x\right), \left(t, y\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $l = const > 0$;

3) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left|f\left(t, 0\right)\right| = M < \infty$.

Дослідженню структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь (1.11), що знаходяться в околі її тривіального розв'язку $\left(f\left(t, 0\right) \equiv 0\right)$, присвячені роботи [61, 63-64].

Зокрема, в роботі [61] розглядається система (1.11), в якій $t \in \mathbb{R}^{+} = [0, +\infty)$, $\Lambda-$ стала дійсна $(n \times n)$-матриця, $f : \mathbb{R} \times C^n \to C^n$, $x(t)-$ невідома комплексно-значна вектор-функція і досліджується структура її загального розв'язку. Доведено, що існує взаємно-однозначна заміна змінних

$$x(t) = \gamma(t, y(t)),$$

яка приводить систему рівнянь (1.11) до лінійного вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t),$$

якщо виконуються наступні умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1, ..., n$, матриці Λ задовольняють співвідношення $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $0 < |\lambda_i| < 1$; $i, j = 1, ..., n$;

2) для довільного набору $i_1, ..., i_n$ цілих невід'ємних чисел $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} i_j \geq 2\right)$ виконуються нерівності $\lambda_i \neq \lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}$, $i = 1, ..., n$;

3) вектор-функція $f(t, x)$ розкладається в ряд

$$f(t, x) = \sum_{|i|=2}^{\infty} f_i(t) x^i,$$

де $f_i(t)-$векторні функції, $i = (i_1, ..., i_n)-$ вектор-рядок, компоненти якого невід'ємні цілі числа, $|i| = i_1 + ... + i_n$, $x^i = x_1^{i_1}...x_n^{i_n}$ і підсумовування проводиться по всіх i, для яких $|i| \geq 2$;

4) $|f_{ij}(t)| \leq F_{ij}$ при всіх $t \in \mathbb{R}$ і $|i| \geq 2$, $j = 1, ..., n$, де $F_{ij} = const > 0$, $F_i = (F_{i1}, ..., F_{in})$;

5) ряд $F(x) = \sum\limits_{|i|=2}^{\infty} F_i x^i$ збігається при $|x| < \rho$, $\rho > 0$.

Одним з найефективніших методів дослідження систем нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x\left(t+1\right) = \Lambda x\left(t\right) + F\left(x\left(t\right)\right) \tag{1.12}$$

є метод нормальних форм Пуанкаре, що дозволяє звести дослідження таких систем рівнянь в околі стану рівноваги до дослідження систем рівнянь найбільш простого вигляду. При цьому такі найбільш прості форми залежать від умов, яким задовольняють матриця Λ і вектор-функція $F\left(x\right)$. Наприклад, якщо всі власні числа матриці Λ по модулю менші (або всі більші) одиниці і відсутні резонанси, вектор-функція $F\left(x\right)$ - голоморфна в області $D : |x| < a, F\left(0\right) = 0, \left.\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, то існує заміна змінних

$$x = y + \gamma\left(y\right),$$

де вектор-функція $\gamma\left(y\right)$ - голоморфна в деякій області $\tilde{D} \subseteq D$, $\gamma\left(0\right) = 0$, $\left.\frac{\partial \gamma(y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, яка приводить систему рівнянь (1.12) до лінійного вигляду

$$y\left(t+1\right) = \Lambda y\left(t\right). \tag{1.13}$$

Цей результат, доведений Пуанкаре в [19, 77], поклав початок численним дослідженням, направленим на розвиток та застосування цього методу при вивченні інших класів рівнянь [54-74]. Зокрема, в [63-64] метод нормальних форм розвинуто для дослідження неавтономних різницевих рівнянь

$$x\left(t+1\right)=\Lambda x\left(t\right)+F\left(t,x\left(t\right)\right)$$

в околі стану рівноваги $x = 0\left(F\left(t,0\right)\equiv 0\right)$ при різних припущеннях відносно матриці Λ і вектор-функції F. Але в даний час існують рівняння, дослідження яких за допомогою методу нормальних форм не дає потрібних результатів. До таких рівнянь відносяться, зокрема, функціонально-різницеві рівняння вигляду

$$x\left(t+1\right)=\Lambda x\left(t\right)+F\left(t,x\left(t\right),x\left(f\left(t\right)\right)\right), \tag{1.14}$$

де Λ - постійна дійсна $(n\times n)$-матриця, $F:\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$, $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$. Такі рівняння досліджуються в роботі [93], де основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1.7. *Нехай виконуються умови:*

1. $\det\Lambda\neq 0$;
2. *всі елементи вектора $F\left(t,x,y\right)$ і функція $f\left(t\right)$ є неперервними відносно всіх своїх аргументів в області $D: t\in\mathbb{R}^{+}, |x|<a, |y|<a$, $F\left(t,0,0\right)\equiv 0$;*
3. *вектор-функція $F\left(t,x,y\right)$ задовольняє співвідношенню*

$$|F(t,x',y')-F(t,x'',y'')|\leq\varphi(t)\left(|x'-x''|+|y'-y''|\right),$$

де $\varphi\left(t\right)$ - деяка неперервна невід'ємна функція така, що ряд

$$\Phi\left(t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left|\Delta^{-1}\right|^{i}\varphi\left(t+i\right)$$

рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}^{+}$ і $2\left|\Delta^{-1}\right|\Phi\left(t\right)\leq\Delta<1$.

Тоді існує неперервна в області $\tilde{D}\subseteq D$,взаємно однозначна заміна змінних$x\left(t\right)=\Gamma\left(t,y\left(t\right)\right)$, що приводить систему рівнянь (1.14) до лінійного вигляду (1.13).

Ціла низка робіт присвячена дослідженню різницевих рівнянь вигляду

$$x\left(t+1\right)=f\left(t,x\left(t\right)\right), \tag{1.15}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=(-\infty,+\infty)$, $f\left(t,x\right)$ - задана дійсна вектор-функція. Встановленню умов існування та єдиності періодичних розв'язків таких рівнянь та дослідженню їх властивостей присвячені роботи [59-60, 66]. Зокрема, в роботі [66], в припущенні, що виконуються умови:

1) функція $f(t,x)$ є неперервною при $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ і N -періодичною по t;
2) для довільних $t,x,y\in\mathbb{R}$ функція $f(t,x)$ задовольняє умову

   $$|f(t,x)-f(t,y)|\leq\omega(t)|x-y|,$$

   де $\omega(t)-$деяка невід'ємна, N -періодична функція;
3) $\omega(t)\omega(t+1)...\omega(t+N-1)\leq\theta<1, t\in\mathbb{R}$

досліджується питання існування періодичних розв'язків різницевого рівняння (1.15).

Основною метою роботи [25] є встановлення умов існування неперервних N - періодичних розвязків (N - ціле додатне число) системи рівнянь

$$x\left(t+1\right)=f\left(t,x\left(t\right),\varepsilon\right), \tag{1.16}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=(-\infty,+\infty)$, $x\in\mathbb{R}^{n}$, $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_{0}\right],\varepsilon_{0}>0$ і дослідження їх властивостей при $\varepsilon\to 0$.

Система різницевих рівнянь (1.16) розглядається при таких припущеннях:

1) вектор-функція $f\left(t,x,\varepsilon\right)$ є неперервною по всіх змінних та N-періодичною по t (N - ціле додатне число);
2) $\forall t,x,y\in\mathbb{R}$ вектор-функція $f\left(t,x,\varepsilon\right)$ задовольняє умову

   $$|f(t,x,\varepsilon)-f(t,y,\varepsilon)|\leq w(t,\varepsilon)|x-y|,$$

   де $w(t,\varepsilon)$ – деяка невід'ємна, неперервна по t,ε та N - періодична по t функція;
3) $w(t,\varepsilon)w(t+1,\varepsilon)w(t+2,\varepsilon)\dots w(t+N-1,\varepsilon)\leq\Delta<1,\ t\in\mathbb{R}.$

Достатні умови існування та єдиності періодичних (глобальних) розв'язків систем різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = F(t, x(t), x(t-1), ..., x(t-k)),$$

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(t), x(t-1), ..., x(t-k)),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, A - дійсна $(n \times n)$-матриця, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ встановлено в роботах [27, 72] .

Важливі результати щодо вивчення асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом отримано в роботах [53, 65]. Праця [53] присвячена побудові представлення асимптотично періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = f(x(t)),$$

де $t \in [0, \infty)$, $f \in C^2_{[a,b]}$, $x(t) : [0, \infty) \to [a, b]$.

В [65] розроблено метод, що дозволяє досліджувати властивості розв'язків широких класів рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \lambda x(t) + f(t, x(t)),$$

де $t \in \mathbb{R} = [0, +\infty)$, $\lambda = const \neq 0$, $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для випадку, коли $\lambda = 1$ досліджується задача про існування неперервних при $t \geq 0$ розв'язків, що задовольняють умові

$$\lim_{t \to +\infty} [x(t) - \omega(t)] = 0,$$

де $\omega(t)-$неперервна *1*-періодична функція. При цьому припускаються виконаними умови:

1) функція $f(t, x)$ є неперервною при $t \geq 0$, $f(t, 0) \equiv 0$ і задовольняє співвідношенню

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \varphi(t)|x - y|,$$

де $\varphi(t)-$деяка невід'ємна функція і $x, y \in \mathbb{R}$;

2) ряд $\Phi(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi(t+i)$ рівномірно збігається при всіх $t \in [0, +\infty)$ і $\Phi(t) \leq \theta < 1$.

Більш широкі класи рівнянь розглянуто в [21, 74], зокрема, в [74] вивчається питання існування і єдиності неперервних періодичних розв'язків систем нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(t\right) = F\left(t, x\left(q_1 t + f_1\left(t, x\left(t\right)\right)\right), ..., x\left(q_k t + f_k\left(t, x\left(t\right)\right)\right)\right), \qquad (1.17)$$

де $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $q_i = const \neq 0, 1$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., k$. Зокрема, доведено наступну теорему.

Теорема 1.8. *Нехай виконуються умови:*

1. q_i, $i = 1, 2, ..., k$ *- цілі додатні числа;*
2. *вектор-функція* $F\left(t, x^1, ..., x^k\right)$ *і функції* $f_i\left(t, x\right)$, $i = 1, 2, ..., k$, *є неперервними при всіх* $t \in \mathbb{R}$, $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ..., k$, $x \in \mathbb{R}^n$, T*-періодичними по* t *і має місце співвідношення*
$$\sup_{t \in \mathbb{R}, x^i \in \mathbb{R}^n, i=\overline{1,k}} \left|F\left(t, x^1, ..., x^k\right)\right| = M < \infty;$$
3. *вектор-функція* $F\left(t, x^1, ..., x^k\right)$ *і функції* $f_i\left(t, x\right)$, $i = 1, 2, ..., k$, *задовольняють умови*
$$\left|F\left(\bar{t}, \bar{x}^1, ..., \bar{x}^k\right) - F\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, ..., \bar{\bar{x}}^k\right)\right| \leq L_0 \left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + \sum_{i=1}^{k} L_i \left|\bar{x}^i - \bar{\bar{x}}^i\right|,$$
$$\left|f_i\left(\bar{t}, \bar{x}\right) - f_i\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}\right)\right| \leq l'_i \left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + l''_i \left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right|, i = 1, 2, ..., k,$$
де L_i, $i = 0, 1, ..., k$, l'_i, l''_i, $i = 1, 2, ..., k$, *- деякі додатні сталі,* $\left(\bar{t}, \bar{x}^1, ..., \bar{x}^k\right), \left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, ..., \bar{\bar{x}}^k\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kn}$.
4. *при достатньо малих* L_i, $i = 0, 1, ..., k$, l'_i, l''_i, $i = 1, 2, ..., k$, *виконуються співвідношення*
$$\frac{L_0}{l} + L^*\left(q + l^* + l^* l\right) \leq 1, L^* + l l^* L^* = \Delta < 1,$$
де $L^* = \sum_{i=1}^{k} L_i$, $l^* = \max\left\{l'_i, l''_i\right\}$, $q = \max_i \left\{q_i\right\}$, $l > 0$.

Тоді система рівнянь (1.17) має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок, що задовольняє умову

$$\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| \le l \left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|,$$

де $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \mathbb{R}$.

В [21] отримано узагальнення для нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(t\right) = f\left(t, x\left(\varphi_1^{(1)}\left(t, x\left(\varphi_1^{(2)}\left(t, x\left(...x\left(\varphi_1^{(k)}\left(t, x\left(t\right)\right)\right)...\right)\right)\right)\right)\right)\right), ...$$

$$..., x\left(\varphi_m^{(1)}\left(t, x\left(\varphi_m^{(2)}\left(t, x\left(...x\left(\varphi_m^{(k)}\left(t, x\left(t\right)\right)\right)...\right)\right)\right)\right)\right)\right), \qquad (1.18)$$

де $k, m \in \mathrm{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, $\varphi_i\left(t, x\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., m$, $i = 1, 2, ..., k$. Зокрема, доведено наступну теорему.

Теорема 1.9. *Нехай виконуються умови:*

1. *функція* $f\left(t, x_1, ..., x_m\right)$ *є неперервною на* $\mathbb{R}^{m+1}$ *і*

$$\sup_{(t, x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}} \left|f\left(t, x_1, ..., x_m\right)\right| = M < \infty;$$

2. *функції* $\varphi_j^{(i)}\left(t, x\right)$, *неперервні на* $\mathbb{R}^2$ *для всіх* $j = 1, 2, ..., m, i = 1, 2, ..., k$,
3. *функції* $f\left(t, x_1, ..., x_m\right)$ *і* $\varphi_j^{(i)}\left(t, x\right)$, $j = 1, 2, ..., m$, $i = 1, 2, ..., k$, *задовольняють наступні умови Ліпшица*

$$\left|f\left(t_1, x_1, ..., x_m\right) - f\left(t_2, y_1, ..., y_m\right)\right| \le L_0 \left|t_1 - t_2\right| + \sum_{j=1}^{m} L_j \left|x_j - y_j\right|,$$

$$\left|\varphi_j^{(i)}\left(t_1, x\right) - \varphi_j^{(i)}\left(t_2, y\right)\right| \le l_{j,1}^{(i)} \left|t_1 - t_2\right| + l_{j,2}^{(i)} \left|x - y\right|,$$

де L_j, $j = 0, 1, ..., m$, $l_{j,1}^{(i)}, l_{j,2}^{(i)}$, $j = 1, 2, ..., m$, $i = 1, 2, ..., k$ *- додатні сталі,* $\left(t_1, x_1, ..., x_m\right), \left(t_2, y_1, ..., y_m\right) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\left(t_1, x\right), \left(t_2, y\right) \in \mathbb{R}^2$;

4. *при додатньому* L *такому, що*

$$L^{k+1} \sum_{j=1}^{m} L_j \prod_{i=1}^{k} l_{j,2}^{(i)} + L^k \sum_{j=1}^{m} L_j \left(\prod_{i=1}^{k-1} l_{j,2}^{(i)}\right) l_{j,1}^{(k)} + ...$$

$$... + L^2 \sum_{j=1}^{m} L_j l_{j,2}^{(1)} l_{j,1}^{(2)} + L \sum_{j=1}^{m} L_j l_{j,1}^{(1)} + L_0 \le L,$$

$$q=\sum_{j=1}^{m}L_j+L\sum_{j=1}^{m}L_jl_{j,2}^{(1)}+...+L^k\sum_{j=1}^{m}L_j\prod_{i=1}^{k}l_{j,2}^{(i)}<1.$$

Тоді рівняння (1.18) має єдиний неперервний розв'язок $x\left(t\right)$ на $\mathbb{R}$, що задовольняє умови

$$\left|x(t)\right|\leq M,\left|x(t)-x(s)\right|\leq L\left|t-s\right|,$$

для всіх $t,s\in\mathbb{R}$.

Результати, які отримані в [65], узагальнено в [20] при дослідженні різницевого рівняння з неперервним аргументом вигляду

$$x(t+2)-2\lambda x(t+1)+\lambda^2x(t)=f(t,x(t)),$$

де $\lambda>0$, $t\in[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Для цього рівняння встановлено достатні умови існування та єдиності неперервних асимптотично періодичних розв'язків. Також доведено, що якщо $x\left(t\right)$ - деяка дійсна неперервна функція така, що

$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t+2)-\left(1-\alpha\right)x(t+1)-\alpha x(t)\right)=0,$$

де $\alpha\in\mathbb{R}$, то з обмеженості $x\left(t\right)$ завжди випливає, що

$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t+1)-x(t)\right)=0,$$

якщо і тільки якщо $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\left\{1\right\}$.

Для різницевих рівнянь вигляду

$$\Delta^2x(t)=f(t,x(t)),\tag{1.19}$$

де $\Delta x(t)=x(t+1)-x(t)$ доведено теорему про існування та єдиність неперервного розвязку рівняння (1.19) для $t\geq0$, що задовольняє умову

$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t)-\omega(t)\right)=0,$$

де $\omega\left(t\right)$ - неперервна 1-періодична функція.

Також розглянуто більш загальний випадок – різницеве рівняння вигляду

$$\Delta^nx(t)=f(t,x(t)),\tag{1.20}$$

для якого доведено наступну теорему.

Теорема 1.10. *Нехай виконуються умови:*

1. $f(t,0) \equiv 0$, $|f(t,x) - f(t,y)| \le \varphi(t)|x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$, *де* $\varphi(t)$ *- додатно-визначена на* $[0,\infty)$;
2. *ряд* $\Phi_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (i+1)^{n-1} \varphi(t+i)$ *рівномірно збігається на* $[0,\infty)$, *де* $\Phi_1(t) \le \theta < 1$.

Тоді рівняння (1.20) має один і тільки один неперервний розв'язок на $[0,\infty)$, *що задовольняє рівняння (1.20).*

Використовуючи результати [65], в [22] отримано відповідь на питання: при яких умовах розв'язок $x(t)$ різницевого рівняння з неперервним аргументом завжди задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty} (x(t+1) - x(t)) = 0.$$

В [2] вивчається питання асимптотичної стійкості кусково-неперервних N-періодичних розв'язків рівняння

$$x(t+1) = f(x(t)) + \varepsilon g(t, x(t), x(t+1)),$$

де $t \in \mathbb{R}^+$, f, g–деякі неперервні функції, g є N-періодична по t, N – ціле додатне число.

Клас q-різницевих рівнянь вигляду

$$x(qt+1) = f(x(t)),$$

де $q > 1$, $t \in \mathbb{R}^+$ досліджується в [79]. Тут показано, що гладкі розв'язки при "не дуже великих" $q > 1$ успадковують асимптотичні властивості розв'язків відповідного різницевого рівняння, розв'язок якого не обов'язково є асимптотично сталим, в типових ситуаціях він коливається з неспадаючою до нуля амплітудою.

Практичне застосування функціональних рівнянь, які досліджуються в роботах [52-75] при моделюванні різних процесів науки та техніки описано в праці [8]. В [9] ці методи поширені також на вирішення економічних задач.

Продовжуючи роботи [52,75] в [13] при різних припущеннях відносно функцій $\varphi, f_i, i = 1, 2, ..., n$, досліджуються рівняння вигляду:

$$F(x, \varphi(x), \varphi(f_1(x)), ..., \varphi(f_n(x))) = 0.$$

В [80] наведено узагальнення [78]. Зокрема, в [80] розглядаються різницеві рівняння вигляду

$$x(n+1) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k x(n-k) + y(n), n \in \mathrm{Z} \tag{1.21}$$

де $y := \{y(n) : n \in \mathrm{Z}\}$ - відома обмежена послідовність елементів B, $x := \{x(n) : n \in \mathrm{Z}\}$ – шукана обмежена послідовність елементів B, $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\vec{0}$, $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B, I – одиничний оператор, $S := \{z \in C | \, |z| = 1\}$, $D \subset B$ – лінійна множина, $A_k : D \to B$ – замкнені оператори.

Припускається, що оператори $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$ попарно комутують, тобто $\forall k, l, 1 \leq k, l \leq m-1 \forall x \in D, A_k x \in D, A_l x \in D : A_k A_l x = A_l A_k x.$

В роботі [78] розглянуто аналогічне рівняння першого порядку

$$x(n+1) = A_0 x(n) + y(n), n \in \mathrm{Z} \tag{1.22}$$

при умові, що спектр $\sigma(A_0)$не перетинається з S , а простір B розкладається в пряму суму підпросторів B_+ та B_- , які відповідають частинам спектра $\sigma(A_0)$, що лежать відповідно зовні та всередині S. Для цього рівняння доведено наступну теорему.

Теорема 1.11. *Нехай $\sigma(A_0) \bigcap S = \Theta$, $y := \{y(n) : n \in \mathrm{Z}\}$ – фіксована обмежена послідовність елементів B, $x := \{x(n) : n \in \mathrm{Z}\}$ – єдиний обмежений розв'язок різницевого рівняння (1.22), відповідний послідовності y.*

Тоді існують числа $q_\pm \in (0,1)$, $N_\pm \in \mathrm{N}$ такі, що для всіх $\alpha_- \in B_-$, $\alpha_+ \in B_+$, а також для всіх натуральних чисел m, k , які задовольняють умови $m \geq \max\{N_+, N_-\}, N_- \leq k \leq 2m - N_+$,виконується нерівність

$$\|x(-m+k) - u(-m+k)\| \leq q_-^k \|x_-(-m) - \alpha_-\| + q_+^{2m-k} \|x_+(m) - \alpha_+\|,$$

де u – сума розв'язків двох задач Коші, що відповідають рівнянню (1.22) в інваріантних підпросторах, α_- , α_+ – відповідні початкові умови.

В [80] цей результат узагальнюється на випадок рівняння (1.21) з одним необмеженим операторним коефіцієнтом.

РОЗДІЛ 2
НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНИМ ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Основним об'єктом дослідження даного розділу є різницево-функціональні рівняння вигляду

$$x\left(qt\right)=a\left(t\right)x\left(t\right)+b\left(t\right)x\left(t+1\right)+f\left(t\right) \tag{2.1}$$

де $a\left(t\right)$, $b\left(t\right)$, $f\left(t\right)$ – деякі дійсні функції і q – дійсна стала. Розглядаються питання існування неперервних обмежених розв'язків таких рівнянь і досліджується структура їх множини.

2.1. Про існування сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків.

Розглянемо однорідне різницево-функціональне рівняння

$$x\left(qt\right)=ax\left(t\right)+bx\left(t+1\right), \tag{2.2}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=(0,+\infty)$, a, b, q - деякі дійсні сталі. Припустимо, що виконуються умови:

1. $0<q<1$, $a>1$,
2. $\Delta=\frac{|b|}{a-1}<1$, $\nu=\frac{\ln a}{\ln q}<0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови 1,2. Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t\geq T>0$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $x(t)=x\left(t,\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$.*

Доведення. Покажемо, що (2.2) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{2.3}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$– деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.3) в (2.2) отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1). \tag{2.4}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$x_0(qt) = ax_0(t); \tag{2.5_0}$$

$$x_i(qt) = ax_i(t) + bx_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.5_i}$$

то ряд (2.3) буде формальним розв'язком рівняння (2.2).

Рівняння (2.5_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \tag{2.6}$$

де $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (2.5_i), $i = 1, 2, ...$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)} x_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, ... \tag{2.7_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (2.7_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i, i = 1, 2, ... \tag{2.8}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \leq Mt^v$, де $M = \max\limits_t |\omega(\tau)|$, то в силу ($2.7_1$), і $\nu < 0$, отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b| \, a^{-(j+1)} \left| x_0(q^j t + 1) \right| \leq |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} M(q^j t + 1)^{\nu} \leq$$

$$\leq \frac{M\,|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^j (q^j t + 1)^{|\nu|}} \leq \frac{M\,|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^j. \tag{2.9}$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)| \leq \frac{M\,|b|}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^j \leq \frac{M\,|b|}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{M\,|b|}{a-1} = M\Delta.$$

Отже, оцінка (2.8) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.8) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)} x_i(q^j t + 1), \tag{2.10}$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b|\, a^{-(j+1)} \left| x_i(q^j t + 1) \right| \leq |b|\, M \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \Delta^i \leq$$

$$\leq \frac{M\,|b|}{a} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{M\,|b|\,\Delta^i}{a-1} = M\Delta^{i+1}. \tag{2.11}$$

Отже, ряди (2.7_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i\,(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки (2.8).

Приймаючи до уваги, що $\nu < 0$, можемо зробити висновок, що при всіх $t \geq T > 0$ виконується оцінка $|x_0(t)| \leq Mt^v \leq M$. А з (2.8) безпосередньо випливає, що ряд (2.3) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x\,(t)$, яка задовольняє умові

$$|x\,(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i\,(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}. \tag{2.12}$$

Теорему 2.1 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y\,(qt) = ay\,(t) + by\,(t+1) + f\,(t)\,, \tag{2.13}$$

де a, b, q - деякі сталі, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Припустимо, що виконуються умови:

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{a-1} < 1$;
3. функція$f\,(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup\limits_{t} |f\,(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$.*

Доведення. Покажемо, що (2.13) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{2.14}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$– деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.14) в (2.13) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + f(t). \tag{2.15}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t), \tag{2.16$_0$}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + b\bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.16$_i$}$$

то ряд (2.14) буде формальним розв'язком рівняння (2.13).

Рівняння (2.16_0) має формальний розв'язок вигляду:

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} f(q^j t). \tag{2.17$_0$}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (2.16_i), $i = 0, 1, 2, ...$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, ... \tag{2.17$_i$}$$

Покажемо, що ряди (2.17_i) $i = 0, 1, 2, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \le \tilde{M}' \Delta^i, i = 1, 2, ... \tag{2.18}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \left| f(q^j t) \right| \le \frac{\tilde{M}}{a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} \le \frac{\tilde{M}}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}}{a-1} = \tilde{M}', \tag{2.19}$$

то

$$|\bar{y}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^{-(j+1)} \left|\bar{y}_0(q^j t + 1)\right| \leq |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \tilde{M}' \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}' |b|}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}' |b|}{a - 1} = \tilde{M}' \Delta. \tag{2.20}$$

Отже, оцінка (2.18) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.18) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} \bar{y}_i(q^j t + 1), \tag{2.21}$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^{-(j+1)} \left|\bar{y}_i(q^j t + 1)\right| \leq |b| \tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \Delta^i \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}' \cdot |b|}{a} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}' |b| \Delta^i}{a - 1} = \tilde{M}' \cdot \Delta^{i+1}. \tag{2.22}$$

Таким чином, ряди (2.17_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки (2.18). В силу (2.18) ряд (2.14) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1 - \Delta}. \tag{2.23}$$

Теорему 2.2 доведено.

Зауваження 2.1. *Виконуючи в (2.13) заміну змінних*

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \tag{2.24}$$

отримаємо рівняння (2.2) відносно функції $x(t)$. *Оскільки для цього рівняння справедлива Теорема 2.1, то приймаючи до уваги заміну змінних (2.24), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при* $t \geq T > 0$ *розв'язків рівняння (2.13).*

У зв'язку із доведеними вище теоремами виникає питання про описання структури множини неперервних розв'язків рівняння (2.13) у випадку, коли $b = b(t)$ - деяка дійсна функція дійсної змінної t.

Розглянемо, наприклад, рівняння вигляду

$$y\left(qt\right)=ay\left(t\right)+\tilde{b}\left(t\right)y\left(t+1\right)+\tilde{f}\left(t\right), \tag{2.25}$$

де a, q - деякі дійсні сталі, $\tilde{b}\left(t\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}\left(t\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Тоді аналогічно тому, як була доведена теорема 2.2, можна довести, що рівняння (2.25) має неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0<q<1, a>1$;
2. $\tilde{\Delta}=\frac{b^*}{a-1}<1$;
3. *функції* $\tilde{b}\left(t\right)$, $\tilde{f}\left(t\right)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t\in\mathbb{R}$ *і такими, що* $\sup\limits_{t}\left|\tilde{b}\left(t\right)\right|=b^*<\infty$, $\sup\limits_{t}\left|\tilde{f}\left(t\right)\right|=f^*<\infty$.

Тоді рівняння (2.1) має неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{\bar{y}}(t)$.

Доведення. Покажемо, що (2.25) має неперервний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{\bar{y}}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\bar{\bar{y}}_i(t), \tag{2.26}$$

де $\bar{\bar{y}}_i(t)$, $i=0,1,...$ - деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.26) в (2.25) отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\bar{\bar{y}}_i(qt)=a\sum_{i=0}^{\infty}\bar{\bar{y}}_i(t)+\tilde{b}\left(t\right)\sum_{i=0}^{\infty}\bar{\bar{y}}_i(t+1)+\tilde{f}\left(t\right). \tag{2.27}$$

Звідси випливає, що якщо функції $\bar{\bar{y}}_i(t)$, $i=0,1,...$, задовольняють рівняння

$$\bar{\bar{y}}_0(qt)=a\bar{\bar{y}}_0(t)+\tilde{f}\left(t\right), \tag{2.28_0}$$

$$\bar{\bar{y}}_i(qt)=a\bar{\bar{y}}_i(t)+\tilde{b}\left(t\right)\bar{\bar{y}}_{i-1}(t+1), i=1,2,... \tag{2.28_i}$$

то ряд (2.26) буде формальним розв'язком рівняння (2.25).

Рівняння (2.28_0) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{\bar{y}}_0(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}a^{-(j+1)}\tilde{f}(q^jt). \tag{2.29_0}$$

Тоді, розглядаючи послідовно рівняння (2.28_i), $i=1,2,\ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{\bar{y}}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\tilde{b}\left(q^j t\right)\bar{\bar{y}}_{i-1}(q^j t+1), i = 1, 2, \ldots \tag{2.29_i}$$

Покажемо, що ряди (2.29_i), $i = 0, 1, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{\bar{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{\bar{y}}_i(t)| \leq M''\tilde{\Delta}^i, i = 0, 1, ... \tag{2.30}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{\bar{y}}_0(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{-(j+1)}\tilde{f}\left|(q^j t)\right| \leq \frac{f^*}{a}\sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} \leq \frac{f^*}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{f^*}{a-1} = M'',$$

то

$$|\bar{\bar{y}}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\left|\tilde{b}\left(q^j t\right)\right| \cdot \left|\bar{\bar{y}}_0(q^j t+1)\right| \leq \frac{b^* M''}{a}\sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} \leq$$

$$\leq \frac{b^* M''}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{b^* M''}{a-1} = M''\tilde{\Delta}.$$

Отже, оцінка (2.30) має місце при $i = 0, 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.30) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{\bar{y}}_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\tilde{b}(q^j t)\bar{\bar{y}}_i(q^j t+1),$$

то

$$|\bar{\bar{y}}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\left|\tilde{b}(q^j t)\right| \cdot \left|\bar{\bar{y}}_i(q^j t+1)\right| \leq \frac{b^* M''}{a}\tilde{\Delta}^i\sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} \leq$$

$$\leq \frac{b^* M''}{a-1}\tilde{\Delta}^i = M''\tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.29_i), $i = 0, 1, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{\bar{y}}_i\,(t)$, $i = 0, 1, ...$, для яких виконуються оцінки (2.30). Звідси випливає, що ряд (2.26) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{\bar{y}}\,(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{\bar{y}}\,(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{\bar{y}}_i\,(t)| \leq M''\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{\Delta}^i \leq \frac{M''}{1-\tilde{\Delta}}.$$

Теорему 2.3 доведено.

Дослідимо тепер рівняння (2.2) у випадку, коли $0 < a < 1$, $q > 1$.

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1, q > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{1-a} < 1, \nu = \frac{\ln a}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *- деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(\tau)$*.*

Доведення. Покажемо, що (2.2) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2.31}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.31) в (2.2) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1). \tag{2.32}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$x_0(qt) = ax_0(t), \tag{2.33_0}$$

$$x_i(qt) = ax_i(t) + bx_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.33_i}$$

то ряд (2.31) буде формальним розв'язком рівняння (2.2).

Рівняння (2.33_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}}\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{2.34}$$

де $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (2.33_i), $i = 1, 2, ...$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j x_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), i = 1, 2, ... \tag{2.35_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (2.35_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i, i = 1, 2, ... \tag{2.36}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \leq Mt^v$, де $M = \max_{\tau} |\omega(\tau)|$, то в силу (2.35_1), і $\nu < 0$, отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b| \, a^j \left| x_0(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \leq M \, |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \left(\frac{1}{q^{j+1}} t + 1 \right)^{\nu} \leq$$

$$\leq M \, |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \leq \frac{M \, |b|}{1 - a} = M\Delta.$$

Таким чином, оцінка (2.36) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.36) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j x_i(q^{-(j+1)}t + 1),$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^j \left| x_i(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \leq M \, |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \Delta^i \leq \frac{M \, |b| \, \Delta^i}{1 - a} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.35_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i\,(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки (2.36). Із (2.36) безпосередньо випливає, що ряд (2.31) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x\,(t)$, яка задовольняє умові

$$|x\,(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i\,(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Теорему 2.4 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (2.13), для якого виконуються умови 1-2 теореми 2.4 і функція $f\,(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup_t |f\,(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1, q > 1$;

2. $\Delta = \frac{|b|}{1-a} < 1, \nu = \frac{\ln a}{\ln q} < 0$;

3. *функція* $f(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такою, що* $\sup\limits_{t} |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежених при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Доведення. Покажемо, що (2.13) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{2.37}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.37) в (2.13) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + f(t). \tag{2.38}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t), \tag{2.39_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + b\bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.39_i}$$

то ряд (2.37) буде формальним розв'язком рівняння (2.13).

Рівняння (2.39_0) має формальний розв'язок вигляду:

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j f(q^{-(j+1)}t), \tag{2.40_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (2.39_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j \bar{y}_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), i = 1, 2, \ldots. \tag{2.40_i}$$

Покажемо, що ряди (2.40_i), $i = 0, 1, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, для яких виконуються оцінки:

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \Delta^i, i = 0, 1, ... \tag{2.41}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} a^j \left| f(q^{-(j+1)}t) \right| \le \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} a^j \le \tilde{M} \frac{1}{1-a} = \tilde{M}',$$

то

$$|\bar{y}_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b|\, a^j \left| \bar{y}_0(q^{-(j+1)}t+1) \right| \le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \tilde{M}' \le \frac{\tilde{M}'\,|b|}{1-a} = \tilde{M}'\Delta. \qquad (2.42)$$

Отже, оцінка (2.41) має місце при i=*1.* Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.41) доведено уже для деякого $i \ge$*1,* і покажемо її справедливість для i+*1.* Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b a^j \bar{y}_i(q^{-(j+1)}t+1),$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot a^j \left| \bar{y}_i(q^{-(j+1)}t+1) \right| \le |b|\, \tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} a^j \Delta^i \le \frac{\tilde{M}'\,|b|\,\Delta^i}{1-a} = \tilde{M}'\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.40$_i$), $i = 0, 1, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i\,(t)$, $i = 0, 1, ...$, для яких виконуються оцінки (2.41). Звідси випливає, що ряд (2.37) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}\,(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{y}\,(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i\,(t)| \le \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \le \frac{\tilde{M}'}{1-\Delta}.$$

Теорему 2.5 доведено.

Зауваження 2.2. *Виконуючи в (2.13) заміну змінних*

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \qquad (2.43)$$

отримаємо рівняння (2.2) відносно функції $x(t)$*. Оскільки для цього рівняння справедлива Теорема 2.4, то приймаючи до уваги заміну змінних (2.43), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при* $t \ge T > 0$ *розв'язків рівняння (2.13).*

Подібні результати можна отримати для рівняння (2.13) у випадку, коли $b = b\,(t)$ - деяка дійсна функція дійсної змінної t і така, що $\sup\limits_t |\tilde{b}\,(t)\,| = b^* < \infty$.

2.2. Про побудову сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків.

Розглянемо рівняння (2.2)

$$x\left(qt\right) = ax\left(t\right) + bx\left(t+1\right),$$

де $t \in \mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)$, a, b, q - деякі дійсні сталі. Припустимо, що виконуються умови:

1. $0 < q < 1$, $|a| > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{|a|-1} < 1$, $\nu = \frac{\ln|a|}{\ln q} < 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови 1,2. Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \geq T > 0$ *розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної функції* $\omega(\tau)$, *такої що* $\omega(\tau+1) = -\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що (2.2) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2.44}$$

де $x_i(t), i = 0, 1, ...$- деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.44) в (2.2), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t), i = 0, 1, ...,$ задовольняють рівняння:

$$x_0(qt) = ax_0(t), \tag{2.45_0}$$

$$x_i(qt) = ax_i(t) + bx_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.45_i}$$

то ряд (2.44) буде формальним розв'язком рівняння (2.2).

Рівняння (2.45_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln|a|}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{2.46_0}$$

де $\omega(\tau+1)=-\omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (2.45_i), $i=1,2,...$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_i(t)=-\sum_{j=0}^{\infty} ba^{-(j+1)}x_{i-1}(q^jt+1), i=1,2,\dots \tag{2.46_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (2.46_i), $i=1,2,...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i=1,2,...$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)|\le M\Delta^i, i=1,2,\dots. \tag{2.47}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)|\le Mt^v$, де $M=\max\limits_{\tau}|\omega(\tau)|$, то в силу ($2.46_1$), і $\nu<0$, отримуємо

$$|x_1(t)|\le\sum_{j=0}^{\infty}|b|\cdot|a|^{-(j+1)}\left|x_0(q^jt+1)\right|\le|b|\sum_{j=0}^{\infty}|a|^{-(j+1)}M(q^jt+1)^{\nu}\le$$

$$\le\frac{M\,|b|}{|a|}\sum_{j=0}^{\infty}|a|^{-j}\left(q^jt+1\right)^{\nu}\le\frac{M\,|b|}{|a|}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{|a|^j\left(q^jt+1\right)^{|\nu|}}\le\frac{M\,|b|}{|a|}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^j$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)|\le\frac{M\,|b|}{|a|}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^j\le\frac{M\,|b|}{|a|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{|a|}}=\frac{M\,|b|}{|a|-1}=M\Delta,$$

де $\Delta=\frac{|b|}{|a|-1}<1$.

Отже, оцінка (2.47) має місце при $i=1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.47) доведено уже для деякого $i\geq 1$, і покажем її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}ba^{-(j+1)}x_i(q^jt+1),$$

то

$$|x_{i+1}(t)|\le\sum_{j=0}^{\infty}|b|\cdot|a|^{-(j+1)}\left|x_i(q^jt+1)\right|\le|b|\,M\sum_{j=0}^{\infty}|a|^{-(j+1)}\Delta^i\le$$

$$\le\frac{M\,|b|}{|a|}\cdot\frac{\Delta^i}{1-\frac{1}{|a|}}=\frac{M\,|b|\,\Delta^i}{|a|-1}=M\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.46_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i\left(t\right)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (2.47). Із (2.47) безпосередньо випливає, що ряд (2.44) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x\left(t\right)$, яка задовольняє умові

$$\left|x\left(t\right)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|x_i\left(t\right)\right| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорему 2.6 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (2.13)

$$y\left(qt\right) = ay\left(t\right) + by\left(t+1\right) + f\left(t\right),$$

де a, b, q – деякі сталі, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Припустимо, що виконуються умови:

1. $0 < q < 1$, $|a| > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{|a|-1} < 1$;
3. функція$f\left(t\right)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup\limits_{t} \left|f\left(t\right)\right| = \tilde{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t)$.*

Доведення. Покажемо, що (2.13) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{2.48}$$

де $y_i(t), i = 0, 1, ...$- деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.48) в (2.13) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) + f\left(t\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t), i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$y_0(qt) = ay_0(t) + f\left(t\right), \tag{2.49_0}$$

$$y_i(qt) = ay_i(t) + by_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.49_i}$$

то ряд (2.48) буде формальним розв'язком рівняння (2.13).

Рівняння (2.49_0) має формальний розв'язок вигляду:

$$y_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} f(q^j t). \qquad (2.50_0)$$

Розглядаючи послідовно рівняння (2.49_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} y_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots \qquad (2.50_i)$$

Покажемо, що ряди (2.50_i), $i = 0, 1, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, для яких виконуються оцінки:

$$|y_i(t)| \le \tilde{M}' \Delta^i, i = 0, 1, \ldots, \qquad (2.51)$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |a|^{-(j+1)} \left| f(q^j t) \right| \le \frac{\tilde{M}}{|a|} \sum_{j=0}^{\infty} |a|^{-j} \le \frac{\tilde{M}}{|a|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|a|}} = \frac{\tilde{M}}{|a| - 1} = \tilde{M}',$$

то

$$|y_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot |a|^{-(j+1)} \left| y_0(q^j t + 1) \right| \le |b| \sum_{j=0}^{\infty} |a|^{-(j+1)} \tilde{M}' \le$$

$$\le \frac{\tilde{M}' |b|}{|a|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|a|}} = \frac{\tilde{M}' |b|}{|a| - 1} = \tilde{M}' \Delta.$$

Отже, оцінка (2.51) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.51) доведено уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} b a^{-(j+1)} y_i(q^j t + 1),$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot |a|^{-(j+1)} \left| y_i(q^j t + 1) \right| \le |b| \tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} |a|^{-(j+1)} \Delta^i \le$$

$$\le \frac{\tilde{M}' \cdot |b|}{|a|} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{|a|}} = \frac{\tilde{M}' |b| \Delta^i}{|a| - 1} = \tilde{M}' \Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.50_i), i=0,1,..., рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, для яких виконуються оцінки (2.51). Звідси випливає, що ряд (2.48) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1-\Delta}.$$

Теорему 2.7 доведено.

Дослідимо тепер рівняння (2.2) у випадку, коли $q > 1$, $|a| < 1$, $t \geq T > 0$.

Теорема 2.8. *Нехай виконуються умови:*

1. $|a| < 1, q > 1, t \geq T > 0$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{1-|a|} < 1, \nu = \frac{\ln|a|}{\ln q} < 0$.

Тоді рівняння (2.2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної функції* $\omega(\tau)$*, яка задовольняє умові* $\omega(\tau+1) = -\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що (2.2) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2.52}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$- деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.52) в (2.2) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t), i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$x_0(qt) = ax_0(t), \tag{2.53_0}$$

$$x_i(qt) = ax_i(t) + bx_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ... \tag{2.53_i}$$

то ряд (2.52) буде формальним розв'язком рівняння (2.2).

Рівняння (2.53_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln|a|}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{2.54_0}$$

де $\omega(\tau)$ - довільна функція, що задовольняє умові $\omega(\tau+1) = -\omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (2.53_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j x_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), i = 1, 2, \ldots \tag{2.54_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (2.53_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i, i = 1, 2, \ldots . \tag{2.55_i}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le Mt^v$, де $M = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$, то в силу (2.54_1), і $\nu < 0$, отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot |a|^j \left| x_0(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \le |b| \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j M(q^{-(j+1)}t + 1)^\nu =$$

$$= M|b| \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j (q^{-(j+1)}t + 1)^\nu = M|b| \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j \left(\frac{1}{q^{j+1}} t + 1 \right)^\nu \le M|b| \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j .$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)| \le M|b| \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j \le \frac{M|b|}{1 - |a|} = M\Delta,$$

де $\Delta = \frac{|b|}{1-|a|} < 1$.

Отже, оцінка (2.55_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.55_i) доведено уже для деякого *$i \geq 1$,* і покажемо її справедливість для *$i+1$.* Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} ba^j x_i(q^{-(j+1)}t + 1),$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |b| \cdot |a|^j \left| x_i(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \le |b| M \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j \Delta^i \le \frac{M|b|\Delta^i}{1 - |a|} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.54_i), $i = 1, 2, \dots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$до деяких неперервних функцій $x_i\left(t\right)$, $i = 1, 2, \dots$, для яких виконуються оцінки (2.55_i). Із (2.55_i) безпосередньо випливає, що ряд (2.52) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x\left(t\right)$, яка задовольняє умові

$$\left|x\left(t\right)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|x_i\left(t\right)\right| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорему 2.8 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (2.13), де a, b, q - деякі сталі, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Припустимо, що виконуються умови:

1. $|a| < 1$, $q > 1$;
2. $\Delta = \frac{|b|}{1-|a|} < 1$;
3. функція$f\left(t\right)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup\limits_{t} \left|f\left(t\right)\right| = \tilde{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.9. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді рівняння (2.13) має неперервний обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$.*

Доведення. Покажемо, що (2.13) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{2.56}$$

де $y_i(t), i = 0, 1, ...$- деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.56) в (2.13) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) + f\left(t\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$y_0(qt) = ay_0(t) + f\left(t\right), \tag{2.57_0}$$

$$y_i(qt) = ay_i(t) + by_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{2.57_i}$$

то ряд (2.56) буде формальним розв'язком рівняння (2.13).

Рівняння (2.57_0) має формальний розв'язок вигляду:

$$y_0(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a^j f(q^{-(j+1)}t). \tag{2.58_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (2.57_i), $i=1,2,\dots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t)=\sum_{j=0}^{\infty}ba^j y_{i-1}(q^{-(j+1)}t+1), i=1,2,\dots . \tag{2.58_i}$$

Покажемо, що ряди (2.58_i), $i=0,1,\dots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i=0,1,\dots$, для яких виконуються оцінки:

$$|y_i(t)|\le \tilde{M}'\Delta^i, i=0,1,\dots . \tag{2.59_i}$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)|\le \sum_{j=0}^{\infty}|a|^j\left|f(q^{-(j+1)}t)\right|\le \tilde{M}\sum_{j=0}^{\infty}|a|^j\le \tilde{M}\frac{1}{1-|a|}=\tilde{M}',$$

то

$$|y_1(t)|\le \sum_{j=0}^{\infty}|b|\,|a|^j\left|y_0(q^{-(j+1)}t+1)\right|\le |b|\sum_{j=0}^{\infty}|a|^j\,\tilde{M}'\le \tilde{M}'\,|b|\,\frac{1}{1-|a|}=\tilde{M}'\Delta.$$

Отже, оцінка (2.59_i) має місце при $i=0,1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.59_i) доведено уже для деякого $i\ge 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}ba^j y_i(q^{-(j+1)}t+1),$$

то

$$|y_{i+1}(t)|\le \sum_{j=0}^{\infty}|b|\,|a|^j\left|y_i(q^{-(j+1)}t+1)\right|\le |b|\,\tilde{M}'\sum_{j=0}^{\infty}|a|^j\,\Delta^i\le \frac{\tilde{M}'\,|b|\,\Delta^i}{1-|a|}=\tilde{M}'\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.58_i), $i=0,1,...$, рівномірно збігаються при всіх $t\in\mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $y_i\,(t)$, $i=0,1,...$, для яких виконуються оцінки (2.59_i),

$i = 0, 1, \ldots$. Звідси випливає, що ряд (2.56) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1 - \Delta}.$$

Теорему 2.9 доведено.

2.3. Неперервні розв'язки різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу.

Розглянемо рівняння вигляду

$$x\left(qt\right)=ax\left(t\right)+\sum_{j=1}^{k}b_{j}x\left(t+\delta_{j}\right), \tag{2.60}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=(0,+\infty)$, a, q, b_j, δ_j, $j=1,2,\ldots,k$, деякі дійсні сталі ($\delta_j\geq 1$). Припустимо, що виконуються умови:

1. $0<q<1$, $a>1$;
2. $\tilde{\Delta}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}|b_j|}{a-1}<1$, $\nu=\frac{\ln a}{\ln q}<0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.10. *Нехай виконуються умови 1,2. Тоді рівняння (2.60) має сім'ю неперервних обмежених при $t\geq T>0$розв'язків $x(t)=x\left(t,\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$.*

Доведення. Покажемо, що (2.60) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{2.61}$$

де $x_i(t), i=0,1,...$- деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.61) в (2.60) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt)=a\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t)+\sum_{j=1}^{k}b_j\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t+\delta_j).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t), i=0,1,...$, задовольняють рівняння:

$$x_0(qt)=ax_0(t), \tag{2.62_0}$$

$$x_i(qt)=ax_i(t)+\sum_{j=1}^{k}b_jx_{i-1}(t+\delta_j), i=1,2,..., \tag{2.62_i}$$

то ряд (2.61) буде формальним розв'язком рівняння (2.60).

Рівняння (2.62_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{2.63_0}$$

де $\omega(\tau+1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (2.62_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_i(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j x_{i-1}(q^l t + \delta_j), i = 1, 2, \ldots \tag{2.63_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1-3 ряди (2.63_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$,$i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|x_i(t)| \le M' \tilde{\Delta}^i, i = 1, 2, \ldots. \tag{2.64_i}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le M' t^v$, де $M' = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$, то в силу (2.62_1), і $\nu < 0$, отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|x_0\left(q^l t + \delta_j\right)\right|\right] \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| M' \left(q^l t + \delta_j\right)^{\nu}\right] \le M' \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{|b_j|}{(q^l t + \delta_j)^{|\nu|}}\right] \le$$

$$\le \frac{M'}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j|\right].$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)| \le \frac{M'}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^l \sum_{j=1}^{k} |b_j|\right] \le \frac{M'}{a} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{M' \sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a-1} = M' \tilde{\Delta},$$

де $\tilde{\Delta} = \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a-1} < 1$.

Отже, оцінка (2.64_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.64_i) доведено уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j x_i(q^l t + \delta_j),$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \cdot \left| x_i \left(q^l t + \delta_j \right) \right| \right] \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \cdot M' \tilde{\Delta}^i \right] \leq$$

$$\leq \frac{M'}{a} \tilde{\Delta}^i \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1 - \frac{1}{a}} = M' \tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.63_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (2.64_i), $i = 1, 2, \ldots$. Із (2.64_i), $i = 1, 2, \ldots$ безпосередньо випливає, що ряд (2.61) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i(t)| \leq M' \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}^i \leq \frac{M'}{1 - \tilde{\Delta}}, \quad \forall t \geq T > 0.$$

Теорему 2.10 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y(qt) = ay(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j y(t + \delta_j) + f(t), \tag{2.65}$$

де a, b_j δ_j, $j = 1, 2, \ldots, k, q$ - деякі сталі; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Припустимо, що виконуються умови:

1. $0 < q < 1$, $a > 1$;
2. $\tilde{\Delta} = \frac{\sum_{l=1}^{k} |b_l|}{a-1} < 1$, $\nu = \frac{\ln a}{\ln q} < 0$.
3. функція$f(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup\limits_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.11. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді рівняння (2.65) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$.*

Доведення. Покажемо, що (2.65) має неперервний розв'язок у вигляді ряду:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{2.66}$$

де $\bar{y}_i(t), i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2.66) в (2.65) отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t + \delta_j) + f(t) .$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t), i = 0, 1, ...$, задовольняють рівняння:

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t) , \tag{2.67_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_{i-1}(t + \delta_j), i = 1, 2, ..., \tag{2.67_i}$$

то ряд (2.66) буде формальним розв'язком рівняння (2.65).

Рівняння (2.67_0) має формальний розв'язок вигляду:

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} f(q^l t). \tag{2.68_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (2.67_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_{i-1}(q^l t + \delta_j), i = 1, 2, \ldots \tag{2.68_i}$$

Покажемо, що ряди (2.68_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \tilde{\Delta}^i, i = 0, 1, \ldots . \tag{2.69}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left| f(q^l t) \right| \leq \frac{\tilde{M}}{a} \sum_{l=0}^{\infty} a^{-l} \leq \frac{\tilde{M}}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}}{a - 1} = \tilde{M}',$$

то

$$|\bar{y}_1(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left| \bar{y}_i \left(q^l t + \delta_j \right) \right| \right] \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \, \tilde{M}' \tilde{\Delta}^i \right] \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}'}{a} \tilde{\Delta}^i \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1 - \frac{1}{a}} = \tilde{M}' \tilde{\Delta}.$$

Отже, оцінка (2.69) має місце при $i{=}1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.69) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i{+}1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_i (q^l t + \delta_j),$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left| \bar{y}_i (q^l t + \delta_j) \right| \right) \leq |b| \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} |b_j| \, \tilde{M}' \tilde{\Delta}^i \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}' \sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a} \frac{\tilde{\Delta}^i}{1 - \frac{1}{a}} = \tilde{M}' \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a - 1} \tilde{\Delta}^i = \tilde{M}' \tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.68_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i\,(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (2.69). Звідси випливає, що ряд (2.66) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}\,(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{y}\,(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i\,(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1 - \tilde{\Delta}}.$$

Теорему 2.11 доведено.

ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ

В другому розділі розглядаються різницево-функціональні рівняння вигляду

$$x(qt) = a(t)\,x(t) + b(t)\,x(t+1) + f(t)\,,$$

де $t \in \mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)$, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ - деякі дійсні функції, a, q - дійсна стала. Досліджуються питання існування неперервних розв'язків таких рівнянь і вивчаються їх властивості. Серед основних результатів цього розділу відмітимо наступні:

- розроблено метод побудови сім'ї неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків широких класів лінійних однорідних різницево-функціональних рівнянь;
- встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^{+}$ розв'язків лінійних різницево-функціональних рівнянь;
- досліджено неперервні розв'язки різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу.

РОЗДІЛ 3
ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Основним об'єктом дослідження даного розділу є різницево-функціональні рівняння вигляду

$$x\left(qt\right)=A\left(t\right)x\left(t\right)+B\left(t\right)x\left(t+1\right)+F\left(t\right) \tag{3.1}$$

де $t\in\mathbb{R}^{+}=[0,+\infty)$, $A\left(t\right)$, $B\left(t\right)$ - дійсні $(n\times n)$-матриці, $F\left(t\right)$ - дійсний вектор розмірності n, q - деяка дійсна стала. Вивчаються питання існування неперервних обмежених розв'язків різницево-функціональних рівнянь вигляду (3.1) з постійними коефіцієнтами.

3.1. Про існування сім'ї неперервних обмежених при $t\geq T>0$ розв'язків.

Розглянемо систему однорідних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=Ax\left(t\right)+Bx\left(t+1\right), \tag{3.2}$$

де A, B - дійсні сталі $(n\times n)$-матриці, q - деяка дійсна стала. При цьому відносно матриці A припустимо, що її власні значення λ_i, $i=1,\ldots,n$ задовольняють умови

$$\lambda_i\neq\lambda_j;|\lambda_i|\neq 0,1;i,j=1,\ldots,n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x\left(t\right)=Cy\left(t\right),$$

де C - деяка стала неособлива $(n\times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (3.2) до вигляду

$$y\left(qt\right)=\Lambda y\left(t\right)+\tilde{B}y\left(t+1\right), \tag{3.3}$$

де $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$, $\tilde{B}=C^{-1}BC$.

Розглянемо спочатку випадок, коли виконуються такі умови:

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* < \min\left\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\right\}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови 1,2. Тоді система рівнянь (3.3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(\tau)$.*

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.4}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.4) в (3.3), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{3.5_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{3.5_i}$$

то ряд (3.4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.3).

Система рівнянь (3.5_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду:

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{3.6_0}$$

де $\omega\left(\tau\right) = \left(\omega_1\left(\tau\right), \omega_2\left(\tau\right), \ldots, \omega_n\left(\tau\right)\right)$, $\omega_i\left(\tau\right)$, $i = 1, \ldots, n$ - довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = diag\left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.5_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots . \qquad (3.6_i)$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2, ряди (3.5_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|y_i(t)| \le M\Delta^i, i = 1, 2, \ldots . \qquad (3.7_i)$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \le |t^v| \, |\omega\,(\tau)| \le t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} \, |\omega\,(\tau)| \le \frac{M}{t^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}},$$

де $M = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$, то в силу (3.6_1) і $\frac{\ln \lambda_*}{\ln q} < 0$, отримуємо

$$|y_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{B}\right| \left|y_0(q^j t + 1)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \tilde{b} M \frac{1}{(q^j t + 1)^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}} \le$$

$$\le \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j \le \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{M\tilde{b}}{\lambda_* - 1} = M\Delta.$$

Отже, оцінка (3.7_1) має місце. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (3.7_i) доведено уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_i(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots, \qquad (3.8)$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{B}\right| \left|y_i(q^j t + 1)\right| \le \tilde{b} M \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \Delta^i \le$$

$$\le \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{M\tilde{b}\Delta^i}{\lambda_* - 1} = M\Delta^{i+1}. \qquad (3.9)$$

Отже, ряди (3.6_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i\,(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (3.7_i). Приймаючи до уваги, що $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$, можемо зробити висновок, що при всіх $t \ge T > 0$ виконується оцінка $|x_0(t)| \le M$. А із

(3.7_i), $i = 1, 2, \ldots$, безпосередньо випливає, що ряд (3.4) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}. \tag{3.10}$$

Теорему 3.1 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B} y(t+1) + F(t), \tag{3.11}$$

де матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q \neq 0$;
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$;
3. всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Для системи (3.11) має місце наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь (3.11) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{3.12}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (3.12) в (3.11), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + F(t). \tag{3.13}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють системи рівнянь:

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t), \tag{3.14_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{3.14_i}$$

то ряд (3.12) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.11).

Система рівнянь (3.14_0) має формальний розв'язок у вигляді ряду:

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} F\left(q^j t\right). \qquad (3.15_0)$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.14_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони також мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots. \qquad (3.15_i)$$

Покажемо, що ряди (3.15_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \Delta^i, i = 0, 1, \ldots, \qquad (3.16)$$

де $\tilde{M}'$ - деяка додатна стала. Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-(j+1)}\right| \left|F\left(q^j t\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|F\left(q^j t\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \tilde{M} \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_* - 1} = \tilde{M}', \qquad (3.17)$$

то на підставі (3.15_1), отримуємо

$$|\bar{y}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-(j+1)}\right| \left|\tilde{B}\right| \left|\bar{y}_0(q^j t + 1)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{B}\right| \left|\bar{y}_0(q^j t + 1)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \tilde{b} \tilde{M}' \leq \frac{\tilde{M}' \tilde{b}}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{\tilde{M}' \tilde{b}}{\lambda_* - 1} = \tilde{M}' \Delta. \qquad (3.18)$$

Отже, оцінка (3.18) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (3.18) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} \bar{y}_i(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots, \qquad (3.19)$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{B}\right| \left|\bar{y}_i(q^j t+1)\right| \le \tilde{b}\tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \Delta^i \le$$

$$\le \frac{\tilde{M}'\tilde{b}}{\lambda_*} \frac{\Delta^i}{1-\frac{1}{\lambda_*}} = \frac{\tilde{M}'\tilde{b}\Delta^i}{\lambda_*-1} = \tilde{M}'\Delta^{i+1}. \tag{3.20}$$

Отже, ряди (3.15_i), $i = 0, 1, \dots$, рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, для яких виконуються оцінки (3.16). Звідси випливає, що ряд (3.12) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{y}\,(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i\,(t)| \le \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \le \frac{\tilde{M}'}{1-\Delta}. \tag{3.21}$$

Теорему 3.2 доведено.

Дослідимо тепер рівняння (3.3) у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$, $t \ge T > 0$.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$;
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{1-\lambda^*} < 1$, *де* $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3.3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T- деяка достатнъо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.22}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$- деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.22) в (3.3), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{3.23_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ... \qquad (3.23_i)$$

то ряд (3.22) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.3).

Система рівнянь (3.23_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду:

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \qquad (3.24_0)$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ - довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = diag \left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}} \right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.23_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} y_{i-1}(q^{-(j+1)} t + 1), i = 1, 2, \ldots. \qquad (3.24_i)$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (3.24_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i, i = 1, 2, \ldots. \qquad (3.25)$$

Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \leq |t^v| \, |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda^*}{\ln q}} \, |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda^*}{\ln q}} M$, де $M = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$, $\lambda^* = \max \{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, то в силу ($3.23_1$), і $\frac{\ln \lambda^*}{\ln q} < 0$, отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left| \tilde{B} \right| \left| y_0(q^{-(j+1)} t + 1) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left| \tilde{B} \right| \left(\frac{1}{q^{j+1}} t + 1 \right)^{\frac{\ln \lambda^*}{\ln q}} M \leq$$

$$\leq M \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \, \tilde{b} \leq \frac{M \tilde{b}}{1 - \lambda^*} \leq M \Delta. \qquad (3.26)$$

Отже, оцінка (3.25) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (3.25) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} y_i(q^{-(j+1)} t + 1), i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left|\tilde{B}\right| \left|y_i(q^{-(j+1)}t+1)\right| \le M\tilde{b}\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \Delta^i \le \frac{M\tilde{b}\Delta^i}{1-\lambda^*} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (3.24_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (3.25). Із (3.25) безпосередньо випливає, що ряд (3.22) рівномірно збігається при всіх $t \ge T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \le M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \le \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорему 3.3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (3.11), для якого виконуються умови 1-2 теореми 3.3 і всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Аналогічно тому, як була доведена теорема 3.2, можна довести, що рівняння (3.13) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна представити у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

в якому функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda\bar{y}_0(t) + F(t),$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda\bar{y}_i(t) + \tilde{B}\bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ...,$$

і визначаються за допомогою співвідношень

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j F\left(q^{-(j+1)}t\right),$$

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B}\bar{y}_{i-1}(q^{-(j+1)}t+1), i = 1, 2, \ldots.$$

Зауваження 3.1. *Виконуючи в (3.11) заміну змінних*

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t), \tag{3.27}$$

отримаємо систему рівнянь (3.3) відносно вектор-функції $z(t)$, для якої справедлива теорема 3.1.

У випадку, коли $\tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}(t)$ також мають місце аналогічні результати про існування неперервних розв'язків системи рівнянь (3.11). Наприклад, для системи рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{\tilde{B}}(t)\, y(t+1) + \tilde{F}(t), \tag{3.28}$$

де матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, q - стала, $\tilde{\tilde{B}}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $\tilde{F}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, має місце наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q \neq 0$;
2. $\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{b}^*}{\lambda_* - 1} < 1$;
3. *всі елементи вектор-функцій $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{\tilde{B}}(t)$ є неперервними й обмеженими функціями при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такими, що* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t)\right| = \tilde{M}^* < +\infty$, $\sup\limits_t \left|\tilde{\tilde{B}}(t)\right| = \tilde{b}^* < +\infty$.

Тоді система рівнянь (3.28) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

3.2. Про побудову сімї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків.

Розглянемо тепер однорідну систему рівнянь вигляду (3.3) при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$ у випадках, коли виконуються умови:

1) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;

2) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$.

Покажемо, що така система рівнянь має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.29}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставивши (3.29) в (3.3), отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{3.30_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{3.30_i}$$

то ряд (3.29) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.3).

Система рівнянь (3.30_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду:

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \tag{3.31_0}$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ - довільні неперервні вектор-функції, що задовольняють умові $\omega_i(\tau + 1) = -\omega_i(\tau)$ і

$$t^{\nu} = diag\left(t^{\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln q}} \right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.30_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots. \tag{3.31_i}$$

Аналогічно тому, як було доведено теорему 3.1, можна показати, що при виконанні умов: 1) і $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_*-1} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$,
$\lambda_* = \min\left\{|\lambda_i|, i = 1, ..., n\right\}$, ряди (3.31_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{3.32}$$

Отже, ряди (3.31_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (3.32). Із (3.32) безпосередньо випливає, що ряд (3.29) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Тим самим доведено наступну теорему.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови:*

1. $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $0 < q < 1$;
2. $\Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_*-1} < 1$, *де* $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\left\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\right\}$.

Тоді система рівнянь (3.3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$, *такої що* $\omega(\tau+1) = -\omega(\tau)$.

Аналогічно теоремі 3.3, можна довести подібний результат для випадку $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $q > 1$.

3.3. Неперервні обмежені розв'язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнямиаргументу.

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x(qt) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, x(t + \Delta_j(t)) + F(t), \tag{3.33}$$

де $t \in \mathbb{R}$, A, $B_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ - деякі дійсні $(n \times n)$-матриці, q - деяка дійсна стала, $F(t)$ - дійсний вектор розмірності n, $\Delta_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$. Дослідимо питання існування неперервних обмежених при $t \geq T$ розв'язків такої системи у випадку, коли виконуються умови:

1) всі елементи матриць $B_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ і вектора $F(t)$ є обмеженими при $t \geq T$ функціями;

2) функції $\Delta_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ є неперервними обмеженими при $t \geq T$, $\Delta_j(t) \geq 1$, $q \neq 0$;

3) $\sup\limits_t |B_j(t)| = b_j$, $j = 1, \ldots, k$, $\sup\limits_t |F(t)| = M$,
$|A| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = a < 1$;

4) $\tilde{\Delta} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1-a} < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови 1)-4). Тоді система рівнянь (3.33) має єдиний неперервний обмежений при* $t \geq T$ *розв'язок* $x(t)$ *у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{3.34}$$

де $x_i(t), i = 0, 1, \ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T$ *вектор-функції.*

Доведення. Підставляючи (3.34) в (3.33), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = A \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t + \Delta_j(t)) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t), i = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$x_0(qt) = Ax_0(t) + F\,(t)\,, \tag{3.35$_0$}$$

$$x_i(qt) = Ax_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j\,(t)\,x_{i-1}\,(t + \Delta_j\,(t))\,, i = 1, 2, ..., \tag{3.35$_i$}$$

то ряд (3.34) є формальним розв'язком системи рівнянь (3.33).

Безпосередньою підстановкою в (3.35$_0$) можна переконатися, що ряд

$$x_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j F\left(q^{-(j+1)}t\right), \tag{3.36$_0$}$$

є формальним розв'язком системи рівнянь (3.36$_0$). Більше цього, в силу умов 1)-4) ряд (3.36$_0$) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$|x_0(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^j\right| \left|F\left(q^{-(j+1)}t\right)\right| \leq M \sum_{j=0}^{\infty} a^j \leq \frac{M}{1-a} = M'.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.35$_i$), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що ряди:

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \left(\sum_{l=1}^{k} B_l\left(q^{-(j+1)}t\right) x_{i-1}\left(q^{-(j+1)}t + \Delta_j\left(q^{-(j+1)}t\right)\right)\right), \tag{3.36$_i$}$$

$i = 1, 2, \ldots.$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ які є розв'язками відповідних систем (3.35$_i$), $i = 1, 2, \ldots,$ і задовольняють умови

$$|x_i(t)| \leq M'\tilde{\Delta}^i,\ i = 1, 2, \ldots. \tag{3.37$_i$}$$

Дійсно, в силу (3.36$_1$) і умов 1)-4) отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \left|B_l\left(q^{-(j+1)}t\right)\right| \left|x_0\left(q^{-(j+1)}t + \Delta_j\left(q^{-(j+1)}t\right)\right)\right|\right) \leq$$

$$\leq M' \sum_{j=0}^{\infty} a^j \sum_{l=1}^{k} b_l \leq M' \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1-a} = M'\tilde{\Delta}$$

і, отже, оцінка (3.37_1) має місце. За індукцією, припустимо, що оцінку (3.37_i) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Справді, приймаючи до уваги (3.36_{i+1}), (3.37_i) і умови тереми, знаходимо

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \left| B_l \left(q^{-(j+1)} t \right) \right| \left| x_{i-1} \left(q^{-(j+1)} t + \Delta_j \left(q^{-(j+1)} t \right) \right) \right| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} a^j \left(\sum_{l=1}^{k} b_l \right) M' \tilde{\Delta}^i \leq M' \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} b_l}{1-a} \tilde{\Delta}^i = M' \tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, оцінки (3.37_i), виконуються для всіх $i \geq 1$.

Таким чином, ряди (3.36_i), $i = 0, 1, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, для яких виконуються оцінки (3.37_i), $i = 0, 1, \ldots$. Тоді безпосередньо із (3.37_i), $i = 0, 1, ...$ випливає, що ряд (3.34) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3.33).

Припустимо тепер, що система (3.33) має ще один розв'язок $y(t)$ такий, що $y(t) \neq x(t)$. Оскільки

$$y(qt) \equiv Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, y(t + \Delta_j(t)) + F(t),$$

то приймаючи до уваги умови теореми 3.6, одержимо

$$|x(qt) - y(qt)| \leq |A| \, |x(t) - y(t)| + \sum_{j=1}^{k} |B_j(t)| \, |x(t + \Delta_j(t)) - y(t + \Delta_j(t))| \leq$$

$$\leq \left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

де $\|x(t) - y(t)\| = \max\limits_t |x(t) - y(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

яке в силу умов теореми, може мати місце лише у випадку, коли $y(t) \equiv x(t)$. Отримане протиріччя завершує доведення.

Виконуючи в (3.33) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ - побудований вище неперервний обмежений при $t \geq T$ розв'язок системи (3.33), дослідження системи рівнянь (3.33) можна звести до дослідження системи рівнянь

$$y(qt) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, y(t + \Delta_j(t)).$$

При виконанні умов теореми 3.6 ця система рівнянь має єдиний неперервний при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y \equiv 0$. Тим не менш, при деяких додаткових умовах вона має нескінченно багато неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків. Це ми покажемо (для простоти) у випадку, коли $\Delta_j(t) \equiv j$, $j = 1, \ldots, k$, а матриця A має вигляд $A = \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Отже, розглянемо систему рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\, y(t + j) \tag{3.38}$$

і доведемо, що для неї має місце така теорема.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови теореми 3.6 і умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;
2. $\bar{\Delta} = \frac{\sum_{l=1}^{k} b_j}{1-\lambda^*} < 1$,

   де $b_j = \sup_t |B_j(t)|$, $j = 1, \ldots, k$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3.38) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.38) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.39}$$

де $y_i(t), i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.39) в (3.38), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i\left(qt\right) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i\left(t\right) + \sum_{j=1}^{k} B_j\left(t\right) \sum_{i=0}^{\infty} y_i\left(t+j\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \qquad (3.40_0)$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j\left(t\right) y_{i-1}(t+j), i = 1, 2, ..., \qquad (3.40_i)$$

то ряд (3.39) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.38).

Система рівнянь (3.40_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \qquad (3.41_0)$$

де $\omega\left(\tau\right) = \left(\omega_1\left(\tau\right), \omega_2\left(\tau\right), \ldots, \omega_n\left(\tau\right)\right)$, $\omega_i\left(\tau\right)$, $i = 1, \ldots, n$ - довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = diag\left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.40_i), $i = 1, 2, \ldots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \sum_{l=1}^{k} B_l\left(q^{-(j+1)}t\right) y_{i-1}(q^{-(j+1)}t + l + 1), i = 1, 2, \ldots. \qquad (3.41_i)$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми ряди (3.41_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки:

$$|y_i(t)| \leq \tilde{M}\bar{\Delta}^i, i = 1, 2, \ldots. \qquad (3.42)$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \leq |t^v| \left|\omega\left(\tau\right)\right| \leq t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} \tilde{M},$$

де $\tilde{M} = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, то в силу (3.40_1), і $\frac{\ln \lambda_*}{\ln q} < 0$, отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \left| B_l \left(q^{-(j+1)} t \right) \right| \left| y_0(q^{-(j+1)} t + l + 1) \right| \right) \leq$$

$$\leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left(\sum_{l=1}^{k} |b_l| \left(\frac{t}{q^{j+1}} + l + 1 \right)^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} \right) \leq$$

$$\leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \sum_{l=1}^{k} |b_l| \leq \tilde{M} \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} |b_l|}{1 - \lambda^*} \leq \tilde{M} \bar{\Delta}.$$

Отже, оцінка (3.42) має місце при $i = 1$. Припустимо, що вона доведена уже для деякого $i \geq 1$, і покажем її справедливість для $i + 1$. Дійсно, в силу (3.41_{i+1}), (3.42), $i = 1, 2, \ldots$, маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \left| B_l \left(q^{-(j+1)} t \right) \right| \left| y_i(q^{-(j+1)} t + l + 1) \right| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^*|^j \left(\tilde{M} \sum_{l=1}^{k} |b_l| \right) \bar{\Delta}^i \leq \tilde{M} \frac{\sum\limits_{l=1}^{k} |b_l|}{1 - \lambda^*} \bar{\Delta}^i = \tilde{M} \bar{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, оцінки (3.42) виконуються для всіх $i \geq 1$, і ряди (3.41_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Цим самим ми довели, що ряд (3.39) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3.38) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq \tilde{M} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Delta}^i \leq \frac{\tilde{M}}{1 - \bar{\Delta}}.$$

Теорему 3.7 доведено.

3.4. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь в критичному випадку.

Розглянемо питання існування неперервних розв'язків та дослідимо структуру їх множини для системи лінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$y\left(qt\right) = \Lambda y\left(t\right) + By\left(t+1\right), \tag{3.43}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, Λ та B - дійсні $(n \times n)$-матриці, q - деяка дійсна стала у випадку, коли серед власних чисел λ_i, $i = 1, \ldots, n$ матриці Λ є однакові. Не обмежуючи загальності припустимо, що $\Lambda = diag\left(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m\right)$, $m \leq n$, $\Lambda_i - (k_i \times k_i)$-матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \tag{3.44}$$

ε- достатньо мала додатна стала. Має місце наступна теорема.

Теорема 3.8. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $q > 1$;
2. $\Delta = \frac{b}{1-(\lambda^*+\delta)} < 1$, *де* $\lambda^* = \max\left\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\right\}$, $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0$ *таке, що* $\delta \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda^* + \delta < 1$, $b = |B| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (3.43) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.43) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.45}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.45) в (3.43), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + B \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{3.46_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + B y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{3.46_i}$$

то ряд (3.45) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.43).

Дослідження системи рівнянь (3.46_0) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$y_0^i(qt) = \Lambda_i y_0^i(t), i = 1, \ldots, m \leq n, \tag{3.47_0^i}$$

де $y_0^i = \left(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i\right)$, $i = 1, \ldots, m$.

Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку системи (3.46_0) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \geq T$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq M t^{\frac{\ln \alpha}{\ln q}}, \tag{3.48_0}$$

де $\lambda^* < \alpha < 1$.

Оскільки ряди

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j B y_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), i = 1, 2, \ldots \tag{3.49_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (3.46_i), $i = 1, 2, \ldots,$ то приймаючи до уваги (3.48_0) та умови 1 і 2, покажемо, що ряди (3.49_i), $i = 1, 2, \ldots$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$ виконуються оцінки:

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i, i = 1, 2, \ldots. \tag{3.48_i}$$

Дійсно, враховуючи (3.48_0), в силу (3.49_1) отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |B| \left| y_0(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \, bM \left(\frac{1}{q^{j+1}} t + 1 \right)^{\frac{\ln \alpha}{\ln q}} \leq$$

$$\leq Mb \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \leq \frac{Mb}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M\Delta.$$

Отже, оцінка (3.48_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (3.48_i) доведено вже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, відповідно до (3.49_{i+1}) і (3.48_i) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |B| \left| y_i(q^{-(j+1)}t + 1) \right| \leq b \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \, M\Delta^i \leq$$

$$\leq \frac{Mb\Delta^i}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, оцінка (3.48_i) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси випливає, що ряди (3.49_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i\,(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких мають місце оцінки (3.48_i). Із (3.48_i) безпосередньо випливає, що ряд (3.45) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y\,(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3.43) і задовольняє умові

$$|y\,(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Теорему 3.8 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y\,(qt) = \Lambda y\,(t) + By\,(t + 1) + F\,(t)\,, \tag{3.49}$$

де матриці Λ, B задовольняють умови теореми 3.8, а $F\,(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 3.9. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 3.8, і всі елементи вектор-функції $F\,(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$*

функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$. *Тоді система рівнянь (3.49) має неперервний обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$ *у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{3.50}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Доведення. Підставляючи (3.50) у (3.49), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + B \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють системи рівнянь:

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t), \tag{3.51_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + B\bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{3.51_i}$$

то ряд (3.50) є формальним розв'язком системи рівнянь (3.49).

Система рівнянь (3.51_0) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j F\left(q^{-(j+1)}t\right). \tag{3.52_0}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.51_i), $i = 1, 2, ...$ можна переконатися, що вони також мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j B \bar{y}_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), i = 1, 2, \ldots. \tag{3.52_i}$$

Покажемо, що ряди (3.52_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \le M'\Delta^i, i = 1, 2, \ldots, \tag{3.53_i}$$

де M' - деяка додатна стала. Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^j\right| \left|F\left(q^{-(j+1)}t\right)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j \tilde{M} \le \frac{\tilde{M}}{1 - (\lambda^* + \delta)} = M',$$

то на підставі (3.52_1), отримуємо

$$|\bar{y}_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^j\right| |B| \left|\bar{y}_0(q^{-(j+1)}t+1)\right| \le b \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j M' \le$$

$$\le \frac{M'b}{1-(\lambda^*+\delta)} = M'\Delta.$$

Отже, оцінка (3.53_i) має місце при i=*1*. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (3.53_i) доведено уже для деякого $i\geq$*1,* і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j B \bar{y}_i(q^{-(j+1)}t+1), i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |B| \left|\bar{y}_i(q^{-(j+1)}t+1)\right| \le b \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^* + \delta)^j M'\Delta^i \le$$

$$\le \frac{M'b\Delta^i}{1-(\lambda^*+\delta)} = M'\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (2.52_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки (3.52_i). Звідси випливає, що ряд (3.50) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{y}\,(t)| \le \frac{M'}{1-\Delta}.$$

Теорему 3.9 доведено.

Зауваження 3.2. *Виконуючи в (3.49) заміну змінних*

$$y(t) = z\,(t) + \bar{y}\,(t)\,,$$

отримаємо систему рівнянь (3.43) відносно вектор-функції $z\,(t)$ *, для якої справедлива теорема 3.8.*

Дослідимо тепер рівняння (3.43) у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < q < 1$, $t \geq T > 0$.

Теорема 3.10. *Нехай виконуються умови:*

1. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < q < 1$;
2. $\tilde{\Delta} = \frac{b}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} < 1$, *де* $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\tilde{\delta} \to 0$, *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta} < 1$, $b = |B| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (3.43) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.43) має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.54}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.54) в (3.43), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + B \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{3.55_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + B y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ..., \tag{3.55_i}$$

то ряд (3.54) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.43).

Дослідження системи рівнянь (3.55_0) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$y_0^i(qt) = \Lambda_i y_0^i(t), i = 1, \ldots, m \le n, \tag{3.55_0^i}$$

де $y_0^i = \left(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i\right)$, $i = 1, \ldots, m$.

Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку системи (3.55_0) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \ge T > 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \le M t^{\frac{\ln \alpha'}{\ln q}}, \tag{3.56_0}$$

де $1 < \alpha' < \lambda_*$.

Оскільки ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} B y_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, \ldots \qquad (3.57_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (3.55_i), $i = 1, 2, ...$, то взявши до уваги (3.56_0) й умови 1 і 2, покажемо, що ряди (3.57_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$ виконуються оцінки

$$|y_i\,(t)| \leq M\tilde{\Delta}^i, i = 1, 2, \ldots. \qquad (3.56_i)$$

Справді, враховуючи (3.56_0), (3.57_1) і $\frac{\ln \alpha'}{\ln q} < 0$, маємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} |B| \left|y_0(q^j t + 1)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{j+1} b \frac{M}{(q^j t + 1)^{\left|\frac{\ln \alpha'}{\ln q}\right|}} \leq$$

$$\leq Mb \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{j+1} \leq Mb \frac{\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}}{1 - \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)} = \frac{Mb}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} = M\tilde{\Delta},$$

тобто оцінка (3.56_i) справедлива при $i = 1$. За індукцією припустимо, що оцінку (3.56_i) доведено вже для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i + 1$. Відповідно до (3.57_{i+1}) і (3.56_i) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} |B| \left|y_i(q^j t + 1)\right| \leq b \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{j+1} M\tilde{\Delta}^i \leq$$

$$\leq Mb \frac{\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}}{1 - \left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)} \tilde{\Delta}^i = \frac{Mb\tilde{\Delta}^i}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} = M\tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, оцінка (3.56_i) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси випливає, що ряди (3.57_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i\,(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких має місце оцінка (3.56_i). Згідно з (3.56_i) ряд (3.54) рівномірно збігається при $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y\,(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3.43) і задовольняє умову

$$|y\,(t)| \leq \frac{M}{1 - \tilde{\Delta}}.$$

Теорему 3.10 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду (3.49), для якої виконуються умови 1, 2 теореми 3.9, всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_{t} |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Аналогічно тому, як було доведено теорему 3.10, можна показати, що система рівнянь (3.49) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна записати у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

в якому функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t),$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + B\bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, ...,$$

і визначаються за допомогою співвідношень

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} F\left(q^j t\right),$$

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} B\bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, ...$$

3.5. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь в гіперболічному випадку.

Розглянемо тепер однорідну систему рівнянь вигляду (3.43) в припущенні, що $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \le m \le n$, $q > 1$. Позначимо

$$y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right), y^1(t) = (y_1(t), \ldots, y_p(t)), y^2(t) = (y_{p+1}(t), \ldots, y_m(t));$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}B_{12} \\ B_{21}B_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = diag\left(\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2\right), \tilde{\Lambda}_1 = diag(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p), \tilde{\Lambda}_2 = diag(\Lambda_{p+1}, \ldots, \Lambda_m), m \le n,$$

$\Lambda_i - (k_i \times k_i)$-матриці вигляду (3.44),

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, ..., m, \ \sum_{i=1}^{m} k_i = n,$$

ε - достатньо мала додатна стала. Тоді система рівнянь (3.43) набере вигляду

$$\begin{cases} y^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 y^1(t) + B_{11}y^1(t+1) + B_{12}y^2(t+1), \\ y^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 y^2(t) + B_{21}y^1(t+1) + B_{22}y^2(t+1). \end{cases} \tag{3.57}$$

Для системи (3.57) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3.11. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \le m \le n$, $q > 1$;
2. $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1$,

   де $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,

   $\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\underline{\lambda^*} + \delta_1 < 1$,

   $\bar{\lambda}_* = \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 < 1$.

Тоді система рівнянь (3.57) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків, що залежить від m довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_i(\tau)$, $i = 1, ..., m$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.57) має розв'язки у вигляді рядів:

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{3.58}$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.58) у (3.57), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + B_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1), \\ \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + B_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1). \end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$\begin{aligned} y_0^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{3.59_0}$$

$$\begin{aligned} y_i^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_i^1(t) + B_{11} y_{i-1}^1(t+1) + B_{12} y_{i-1}^2(t+1), \\ y_i^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_i^2(t) + B_{21} y_{i-1}^1(t+1) + B_{22} y_{i-1}^2(t+1), i = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{3.59_i}$$

то ряди (3.58) будуть формальними розв'язками системи рівнянь (3.57).

Довільний неперервний, обмежений при $t \geq T$ розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t) &= 0, \end{aligned} \tag{$3.59'_0$}$$

задовольняє систему рівнянь (3.59_0), де $y_0^1 = \left(y_1^1, \ldots, y_{k_i}^1\right)$, $i = 1, \ldots, p$. Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку систем $(3.59'_0)$ і умову 1, можна показати, що існує додатна стала $\tilde{M}$ така, що при всіх $t \geq T$ для довільного неперервного обмеженого розв'язку (T - деяка достатньо велика додатна стала) виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \left|y_0^1(t)\right| &\leq \tilde{M} t^{\frac{\ln \alpha}{\ln q}}, \\ \left|y_0^2(t)\right| &= 0, \end{aligned} \tag{3.60_0}$$

де $\underline{\lambda}^* < \alpha < 1$.

Оскільки ряди

$$\begin{aligned} y_i^1(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_1^j \left(B_{11} y_{i-1}^1(q^{-(j+1)}t+1) + B_{12} y_{i-1}^2(q^{-(j+1)}t+1) \right), \\ y_i^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_2^{-(j+1)} \left(B_{21} y_{i-1}^1(q^j t+1) + B_{22} y_{i-1}^2(q^j t+1) \right), \end{aligned} \tag{3.61_i}$$

$i = 1, 2, \ldots$ є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (3.60_i), $i = 1, 2, ...$, то, взявши до уваги (3.60_0) та умови 1-2, покажемо, що ряди (3.61_i),$i = 1, 2, ...$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких виконуються оцінки:

$$\begin{aligned} \left| y_i^1(t) \right| &\leq \tilde{M}\theta^i, \\ \left| y_i^2(t) \right| &\leq \tilde{M}\theta^i, i = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.62_i}$$

Дійсно, враховуючи (3.60_0), в силу (3.61_1) отримуємо

$$\left| y_1^1(t) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \tilde{\Lambda}_1 \right|^j \left| B_{11} y_0^1(q^{-(j+1)}t+1) + B_{12} y_0^2(q^{-(j+1)}t+1) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \left(|B_{11}| \left| y_0^1(q^{-(j+1)}t+1) \right| + |B_{12}| \left| y_0^2(q^{-(j+1)}t+1) \right| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \left(|B_{11}| \tilde{M} (q^{-(j+1)}t+1)^{\frac{\ln\alpha}{\ln q}} \right) \leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j |B_{11}| \leq$$

$$\leq \tilde{M} b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \leq \frac{\tilde{M} b_1}{1 - (\underline{\lambda}^* + \delta_1)} \leq \tilde{M}\theta,$$

$$\left| y_1^2(t) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \tilde{\Lambda}_2^{-1} \right|^{j+1} \left| B_{21} y_0^1(q^j t+1) + B_{22} y_0^2(q^j t+1) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 \right)^{j+1} |B_{21}| \tilde{M} (q^j t+1)^{\frac{\ln\alpha}{\ln q}} \leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 \right)^{j+1} |B_{21}| \leq$$

$$\leq \tilde{M} b_2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 \right)^{j+1} \leq \frac{\tilde{M} b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 \right)^{-1} - 1} \leq \tilde{M}\theta.$$

Отже, оцінки (3.62_i) мають місце при $i = 1$. За індукцією, припустимо, що оцінки (3.62_i) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо їх справедливість для $i + 1$. Дійсно, відповідно до (3.61_{i+1}) і (3.62_i) маємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\Lambda}_1\right|^j \left|B_{11}y_i^1(q^{-(j+1)}t+1) + B_{12}y_i^2(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\underline{\lambda^*} + \delta_1\right)^j \left(|B_{11}| + |B_{12}|\right) \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i b_1 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\underline{\lambda^*} + \delta_1\right)^j \leq \tilde{M}\theta^i \frac{b_1}{1 - \left(\underline{\lambda^*} + \delta_1\right)} \leq \tilde{M}\theta^{i+1},$$

$$\left|y_{i+1}^2(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1} \left|B_{21}y_i^1(q^jt+1) + B_{22}y_i^2(q^jt+1)\right| \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{j+1} \left(|B_{21}| + |B_{22}|\right) \leq$$

$$\leq \tilde{M}\theta^i \frac{b_2\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)}{1 - \left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)} \leq \frac{\tilde{M}\theta^i b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{-1} - 1} \leq \tilde{M}\theta^{i+1}, i = 1, 2, \ldots.$$

Отже, оцінки (3.62_i) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси безпосередньо випливає, що ряди (3.58) рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3.57) і задовольняє умову

$$|y\,(t)| \leq \frac{\tilde{M}}{1 - \theta}.$$

Теорему 3.11 доведено.

Аналогічно тому, як було доведено теорему 3.11, можна показати, що система рівнянь (3.49) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, що залежить від $m - p$ довільних неперервних 1-періодичних функцій, для випадку, коли виконуються такі умови:

3. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p + 1, \ldots, m$, $0 \leq m \leq n$, $0 < q < 1$;

4. $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1,$

де $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,

$\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\underline{\lambda^*} + \delta_1 < 1$,

$\bar{\lambda}_* = \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 < 1$.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y^1(qt) = \tilde{\Lambda}_1 y^1(t) + B_{11} y^1(t+1) + B_{12} y^2(t+1) + F^1(t), \\ y^2(qt) = \tilde{\Lambda}_2 y^2(t) + B_{21} y^1(t+1) + B_{22} y^2(t+1) + F^2(t). \end{cases} \tag{3.63}$$

де $F(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $F(t) = \left(F^1(t), F^2(t)\right)$, $F^1(t) = (F_1(t), \ldots, F_p(t))$, $F^2(t) = (F_{p+1}(t), \ldots, F_m(t))$.

Теорема 3.12. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, m$, $0 \le m \le n$, $q > 0$;
2. $\theta = \max\left\{\frac{b_1}{1-(\underline{\lambda^*}+\delta_1)}; \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\} < 1$,

   де $b_1 = |B_{11}| + |B_{12}|$, $b_2 = |B_{21}| + |B_{22}|$,

   $\underline{\lambda^*} = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_1 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $\underline{\lambda^*} + \delta_1 < 1$,

   $\bar{\lambda}_* = \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, m\}$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2 < 1$;
3. *всі елементи вектор-функції* $F(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (3.63) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.63) має розв'язки у вигляді рядів:

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{3.64}$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (3.64) в (3.63), отримуємо

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + B_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) + F^1(t)\,, \\
\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + B_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) + B_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) + F^2(t)\,.
\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...$, задовольняють системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
y_0^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_0^1(t) + F^1(t)\,, \\
y_0^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_0^2(t) + F^2(t)\,,
\end{aligned} \tag{3.65_0}$$

$$\begin{aligned}
y_i^1(qt) &= \tilde{\Lambda}_1 y_i^1(t) + B_{11} y_{i-1}^1(t+1) + B_{12} y_{i-1}^2(t+1), i = 1, 2, ..., \\
y_i^2(qt) &= \tilde{\Lambda}_2 y_i^2(t) + B_{21} y_{i-1}^1(t+1) + B_{22} y_{i-1}^2(t+1), i = 1, 2, ...,
\end{aligned} \tag{3.65_i}$$

то ряди (3.64) будуть формальними розв'язками системи рівнянь (3.63).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned}
y_0^1(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_1^j F^1\left(q^{-(j+1)} t\right), \\
y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_2^{-(j+1)} F^2\left(q^j t\right)
\end{aligned}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють послідовність систем рівнянь (3.65_0) і виконуються оцінки:

$$\begin{aligned}
\left|y_0^1(t)\right| &\le \tfrac{\tilde{M}_1}{1-(\underline{\lambda}^*+\delta_1)} \le M'', \\
\left|y_0^2(t)\right| &\le \tfrac{\tilde{M}_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1} \le M'',
\end{aligned} \tag{3.66_0}$$

де $\tilde{M}_1 = \sup\limits_t \left|F^1(t)\right|$, $\tilde{M}_2 = \sup\limits_t \left|F^2(t)\right|$, $M'' = \max\left\{\frac{\tilde{M}_1}{1-(\underline{\lambda}^*+\delta_1)}, \frac{\tilde{M}_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}\right\}$.

Оскільки ряди

$$\begin{aligned}
y_i^1(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_1^j \left(B_{11} y_{i-1}^1(q^{-(j+1)} t + 1) + B_{12} y_{i-1}^2(q^{-(j+1)} t + 1)\right), \\
y_i^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_2^{-(j+1)} \left(B_{21} y_{i-1}^1(q^j t + 1) + B_{22} y_{i-1}^2(q^j t + 1)\right),
\end{aligned} \tag{3.67_i}$$

$i=1,2,\ldots$ є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (3.66_i), $i=1,2,...$, то приймаючи до уваги (3.66_0) та умови 1-2, покажемо, що ряди (3.67_i), $i=1,2,...$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i=1,2,...$, для яких виконуються оцінки:

$$\begin{aligned}&\left|y_i^1\left(t\right)\right|\leq M''\theta^i,\\&\left|y_i^2\left(t\right)\right|\leq M''\theta^i, i=1,2,\ldots.\end{aligned}\tag{3.68_i}$$

Дійсно, враховуючи (3.66_0), в силу (3.67_1) отримуємо

$$\left|y_1^1(t)\right|\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{\Lambda}_1\right|^j\left|B_{11}y_0^1(q^{-(j+1)}t+1)+B_{12}y_0^2(q^{-(j+1)}t+1)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left(\underline{\lambda}^*+\delta_1\right)^j\left(\left|B_{11}\right|\left|y_0^1(q^{-(j+1)}t+1)\right|+\left|B_{12}\right|\left|y_0^2(q^{-(j+1)}t+1)\right|\right)\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left(\underline{\lambda}^*+\delta_1\right)^jM''\left(\left|B_{11}\right|+\left|B_{12}\right|\right)\leq M''b_1\sum_{j=0}^{\infty}\left(\underline{\lambda}^*+\delta_1\right)^j\leq$$

$$\leq\frac{M''b_1}{1-(\underline{\lambda}^*+\delta_1)}\leq M''\theta,$$

$$\left|y_1^2(t)\right|\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{21}y_0^1(q^jt+1)+B_{22}y_0^2(q^jt+1)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1}M''\left(\left|B_{21}\right|+\left|B_{22}\right|\right)\leq M''b_2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{j+1}\leq$$

$$\leq\frac{M''b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1}+\delta_2\right)^{-1}-1}=M''\theta.$$

Отже, оцінки (3.68_i) мають місце при $i=1$. За індукцією, припустимо, що оцінки (3.68_i) доведено уже для деякого $i\geq1$, і покажемо їх справедливість для $i+1$. Дійсно, відповідно до (3.67_{i+1}) і (3.68_i) маємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right|\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{\Lambda}_1\right|^j\left|B_{11}y_i^1(q^{-(j+1)}t+1)+B_{12}y_i^2(q^{-(j+1)}t+1)\right|\leq$$

$$\leq M''\theta^i\sum_{j=0}^{\infty}\left(\underline{\lambda}^*+\delta_1\right)^j\left(\left|B_{11}\right|+\left|B_{12}\right|\right)\leq$$

$$\leq M''\theta^i b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\underline{\lambda}^* + \delta_1)^j \leq M''\theta^i \frac{b_1}{1-(\underline{\lambda}^* + \delta_1)} = M''\theta^{i+1}, i = 1, 2, \ldots,$$

$$\left|y_{i+1}^2(t)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\right|^{j+1} \left|B_{21}y_i^1(q^j t + 1) + B_{22}y_i^2(q^j t + 1)\right| \leq$$

$$\leq M''\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{j+1} (|B_{21}| + |B_{22}|) \leq M''\theta^i \frac{b_2\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)}{1-\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)} \leq$$

$$\leq M''\theta^i \frac{b_2}{\left(\overline{\lambda_*}^{-1} + \delta_2\right)^{-1} - 1} = M''\theta^{i+1}, i = 1, 2, \ldots.$$

Отже, оцінки (3.68_i) виконуються при всіх $i \geq 1$, $t \geq T > 0$. Звідси безпосередньо випливає, що ряди (3.64) рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3.63) і задовольняє умові

$$|y\,(t)| \leq \frac{M''}{1-\theta}.$$

Теорему 3.12 доведено.

ВИСНОВКИ ДО ТРЕТЬОГО РОЗДІЛУ

В третьому розділі розглядаються системи різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\,(qt) = A\,(t)\,x\,(t) + B\,(t)\,x\,(t+1) + F\,(t) \tag{3.1}$$

де $t \in \mathbb{R}^{+} = [0, +\infty)$, $A\,(t)$, $B\,(t)$ - дійсні $(n \times n)$-матриці, $F\,(t)$ - дійсний вектор розмірності n, q - деяка дійсна стала. Досліджуються питання існування неперервних обмежених розв'язків таких систем і вивчаються їх властивості. Серед основних результатів цього розділу відмітимо наступні:

– розроблено метод побудови сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь;

– встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь;

– досліджено структуру множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у критичному та у гіперболічному випадках.

РОЗДІЛ 4
НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Об'єктом дослідження даного розділу є системи нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=F\left(t,x\left(t\right),x\left(t+f_{1}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),...,x\left(t+f_{k}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right),\tag{4.1}$$

де $t\in\mathbb{R}$, $q=const\neq 0,1$, $\varepsilon\ll 1$. Розглядаються питання існування та єдиності неперервних розв'язків таких рівнянь та досліджуються їх властивості.

4.1. Умови існування та єдиності неперервного при $t\in\mathbb{R}$ розв'язку нелінійних функціональних рівнянь.

Розглянемо систему нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=F\left(t,x\left(t\right),x\left(t+f_{1}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),...,x\left(t+f_{k}\left(t,x\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right),$$

де $t\in\mathbb{R}$, $q=const\neq 0,1$, $\varepsilon<<1$ і припустимо, що виконуються такі умови:

1. вектор-функція $F\left(t,x^{0},x^{1},...,x^{k},\varepsilon\right)$ і функції $f_{i}\left(t,x\right)$, $i=1,2,...,k$, є неперервними при всіх $t\in\mathbb{R}$, $x^{i}\in\mathbb{R}^{n}$, $i=0,1,...,k$, $x\in\mathbb{R}^{n}$ і має місце співвідношення

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F\left(t,0,...,0,\varepsilon\right)\right|=M<+\infty;$$

2. вектор-функція $F\left(t,x^{0},x^{1},...,x^{k},\varepsilon\right)$ і функції $f_{i}\left(t,x\right)$, $i=1,2,...,k$, задовольняють умови:

$$\left|F\left(\bar{t},\bar{x}^{0},\bar{x}^{1},...,\bar{x}^{k},\varepsilon\right)-F\left(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}^{0},\bar{\bar{x}}^{1},...,\bar{\bar{x}}^{k},\varepsilon\right)\right|\leq$$

$$\leq L_{0}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+L\sum_{i=0}^{k}\left|\bar{x}^{i}-\bar{\bar{x}}^{i}\right|,\tag{4.2}$$

$$\left|f_{i}\left(\bar{t},\bar{x}\right)-f_{i}\left(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}\right)\right|\leq l_{i}^{\prime}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+l_{i}^{\prime\prime}\left|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right|,i=1,2,...,k,\tag{4.3}$$

де L_0, L, l_i', l_i'', $i = 1, 2, ..., k$, - деякі додатні сталі, $\left(\bar{t}, \bar{x}^0, \bar{x}^1, ..., \bar{x}^k, \varepsilon\right), \left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^0, \bar{\bar{x}}^1, ..., \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kn}$;

3. при достатньо малих L_0, L, l_i', l_i'', $i = 1, 2, ..., k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q}\left(k + 1 + \left(l^* + l^* l\right) k\right) \leq 1, \quad L\left(k + 1 + ll^* k\right) = \theta < 1,$$

де $l^* = \max\left\{l_i', l_i''\right\}$, $l > 0$.

Поклавши в (1) $\varepsilon = 0$, отримаємо систему рівнянь

$$x\left(qt\right) = F\left(t, x\left(t\right), x\left(t + f_1\left(t, x\left(t\right)\right)\right), ..., x\left(t + f_k\left(t, x\left(t\right)\right)\right), 0\right), \tag{4.4}$$

для якої доведемо наступну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь (4.4) має єдиний неперервний розв'язок, що задовольняє умову*

$$\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| \leq l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{4.5}$$

де $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \mathbb{R}$, l *- деяка додатна стала.*

Доведення. Розглянемо послідовність функцій

$$x_0(t) = 0, \tag{4.6$_0$}$$

$$x_m\left(t\right) = F\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right), x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), ...\right.$$
$$\left. ..., x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right), \quad m = 1, 2, ... \tag{4.6$_m$}$$

За допомогою методу математичної індукції можна показати, що функції $x_m\left(t\right)$, $m = 0, 1, ...$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}$. Більше цього, доведемо, що при $t \in \mathbb{R}$ і всіх $m \geq 0$ виконуються нерівності:

$$\left|x_m\left(t\right)\right| \leq M', \tag{4.7}$$

$$\left|x_m(\bar{t}) - x_m(\bar{\bar{t}})\right| \leq l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{4.8}$$

де $M' > M$ та l – деяка додатна стала.

Дійсно, оскільки $x_0(t) = 0$, то маємо $\left|x_0(\bar{t}) - x_0(\bar{\bar{t}})\right| = 0$. В силу (4.6_1) отримаємо

$$\begin{aligned}&|x_1(t)| = \left|F\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right), x_0\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.\right.\\ &\left.\ldots, x_0\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)\Big| \le \left|F\left(q^{-1}t, 0, \ldots, 0, 0\right)\right| \le M < M',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|x_1(\bar{t}) - x_1\left(\bar{\bar{t}}\right)\right| \le \left|F\left(q^{-1}\bar{t}, x_0\left(q^{-1}\bar{t}\right), x_0\left(q^{-1}\bar{t} + f_1\left(q^{-1}\bar{t}, x_0\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)\right), \ldots\right.\\ &\ldots, x_0\left(q^{-1}\bar{t} + f_k\left(q^{-1}\bar{t}, x_0\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)\right), 0) -\\ &- F\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right), x_0\left(q^{-1}\bar{\bar{t}} + f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right), \ldots\right.\\ &\left.\ldots, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar{t}} + f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_0\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right), 0\right)\Big| \le\\ &\le \left|F\left(q^{-1}\bar{t}, 0, \ldots, 0, 0\right) - F\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, 0, \ldots, 0, 0\right)\right| \le\\ &\le L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| \le \tfrac{L_0}{q}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \le l\tfrac{L_0}{ql}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \le l\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|.\end{aligned}$$

Припустимо,що функції $x_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots, m-1$, які визначені співвідношеннями (4.6_m), також задовольняють нерівності (4.7), (4.8). Тоді в силу (4.6_m), (4.7) та умов теореми отримаємо

$$\begin{aligned}&|x_m(t)| \le \left|F\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right), x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), \ldots\right.\right.\\ &\left.\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) - F\left(q^{-1}t, 0, \ldots, 0, 0\right)\Big| +\\ &+ \left|F\left(q^{-1}t, 0, \ldots, 0, 0\right)\right| \le\\ &\le L\left(\left|x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right| + \ldots\right.\\ &\left.\ldots + \left|x_{m-1}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, x_{m-1}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right|\right) + M \le\\ &\le LM'(k+1) + M \le M'\left(L(k+1) + \tfrac{M}{M'}\right) \le M',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|x_m(\bar{t}) - x_m\left(\bar{\bar{t}}\right)\right| \le\\ &\le \left|F\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right), x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t} + f_1\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)\right), \ldots\right.\\ &\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t} + f_k\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)\right), 0) -\\ &- F\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right), x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}} + f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right), \ldots\right.\\ &\left.\ldots, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}} + f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right), 0\right)\Big| \le\\ &\le L_0\left|q^{-1}\bar{t} - q^{-1}\bar{\bar{t}}\right| + L\left(\left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right) - x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right| +\right.\\ &+ \left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t} + f_1\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)\right) -\right.\\ &\left.-x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}} + f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right)\right| + \ldots\\ &\ldots + \left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t} + f_k\left(q^{-1}\bar{t}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)\right) -\right.\\ &\left.\left.-x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}} + f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}, x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right)\right|\right) \le\end{aligned}$$

$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\left(l\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\right.$$
$$+l\left|q^{-1}\bar{t}+f_1\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-q^{-1}\bar{\bar{t}}-f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|+...$$
$$\left....+l\left|q^{-1}\bar{t}+f_k\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-q^{-1}\bar{\bar{t}}-f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\right)\le$$
$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+Ll\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\right.$$
$$+\left|f_1\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|+...$$
$$\left....+\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\left|f_k\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\right)\le$$
$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+Ll\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\right.$$
$$+\left|f_1\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-f_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|+...$$
$$\left....+\left|f_k\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-f_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\right)\le$$
$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+Ll\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{k}\left|f_i\left(q^{-1}\bar{t},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)\right)-f_i\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right)\right|\right)\le$$
$$\le L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+Ll\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{k}\left(l_i'\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+l_i''\left|x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t}\right)-x_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}}\right)\right|\right)\right)\le$$
$$\le\frac{L_0}{q}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+Ll\left(\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\frac{(k+1)}{q}+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{l_i'}{q}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+\frac{l_i''}{q}l\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\right]\right)\le$$
$$\le\frac{L_0}{q}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+\frac{L}{q}l\left(\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\sum_{i=1}^{k}\left[l_i'+l_i''l\right]\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\right)\le$$
$$\le\left[\frac{L_0}{q}+\frac{L}{q}l\left(k+1+\sum_{i=1}^{k}\left[l_i'+l_i''l\right]\right)\right]\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\le$$
$$\le\frac{l}{q}\left[\frac{L_0}{l}+L\left(k+1+\sum_{i=1}^{k}\left[l_i'+l_i''l\right]\right)\right]\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\le$$
$$\le\frac{l}{q}\left[\frac{L_0}{l}+L\left(k+1+\left[l^*+l^*l\right]k\right)\right]\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\le l\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|.$$

Отже, всі функції $x_m(t)$, $m=0,1,...$, при $t\in\mathbb{R}$ задовольняють нерівності (4.7), (4.8).

Тепер покажемо, що послідовність вектор-функцій $x_m(t)$, $m=1,2,...$ рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$. Для цього достатньо, щоб при всіх $t\in\mathbb{R}$ і $m=0,1,...$ мала місце оцінка

$$|x_m(t)-x_{m-1}(t)|\le\tilde{M}\theta^{m-1}, m=1,2,..., \qquad (4.9_m)$$

де $\tilde{M}$- деяка додатна стала $\left(\tilde{M}\ge M\right)$.

Дійсно, оскільки $x_0(t)=0$, то маємо

$$|x_1(t)-x_0(t)|=\left|F\left(q^{-1}t,x_0\left(q^{-1}t\right),x_0\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t,x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right),...\right.\right.$$
$$\left.\left....,x_0\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t,x_0\left(q^{-1}t\right)\right)\right),0\right)\right|\le\left|F\left(q^{-1}t,0,...,0,0\right)\right|\le M\le\tilde{M}.$$

Отже, при $m = 1$ нерівність (4.9_m) виконується. Припустимо, що оцінку (4.9_m) доведено уже для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m + 1$.

$$
\begin{aligned}
&|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \\
&\leq \big|F\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t), x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big), \ldots \\
&\ldots, x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big), 0\big) - \\
&- F\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t), x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big), \ldots \\
&\ldots, x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big), 0\big)\big| \leq \\
&\leq L\big[\big|x_m(q^{-1}t) - x_{m-1}(q^{-1}t)\big| + \\
&+ \big|x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big) - x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big| + \ldots \\
&\ldots + \big|x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big) - x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big|\big] \leq \\
&\leq L\big[\big|x_m(q^{-1}t) - x_{m-1}(q^{-1}t)\big| + \\
&+ \big|x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big) - x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big) + \\
&+ x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big) - \\
&- x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big| + \ldots \\
&\ldots + \big|x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big) - x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big) + \\
&+ x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big) - \\
&- x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big|\big] \leq \\
&\leq L\Big[\tilde{M}\,\theta^{m-1} + \big|x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big) - \\
&- x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big| + \\
&+ \big|x_m\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big) - \\
&- x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big| + \ldots \\
&\ldots + \big|x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big)\big) - x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big| + \\
&+ \big|x_m\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big) - \\
&- x_{m-1}\big(q^{-1}t + f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big)\big|\Big] \leq \\
&\leq L\Big[\tilde{M}\theta^{m-1} + l\,\big|f_1\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big) - f_1\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big| + \tilde{M}\theta^{m-1} + \ldots \\
&\ldots + l\,\big|f_k\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big) - f_k\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big| + \tilde{M}\theta^{m-1}\Big] \leq \\
&\leq L\Big[\tilde{M}\theta^{m-1}(k+1) + l\sum_{i=1}^{k}\big|f_i\big(q^{-1}t, x_m(q^{-1}t)\big) - f_i\big(q^{-1}t, x_{m-1}(q^{-1}t)\big)\big|\Big] \leq \\
&\leq L\Big[\tilde{M}\theta^{m-1}(k+1) + l\sum_{i=1}^{k} l_i''\big|x_m(q^{-1}t) - x_{m-1}(q^{-1}t)\big|\Big] \leq \\
&\leq L\Big[\tilde{M}\theta^{m-1}(k+1) + l\sum_{i=1}^{k}\Big(l_i''\tilde{M}\theta^{m-1}\Big)\Big] \leq \\
&\leq L\Big[k + 1 + l\sum_{i=1}^{k} l_i''\Big]\tilde{M}\theta^{m-1} \leq L\,[k + 1 + ll^{*}k]\,\tilde{M}\theta^{m-1} \leq \tilde{M}\theta^{m}.
\end{aligned}
$$

Таким чином, оцінка (4.9_m) виконується при всіх $m \geq 1$. Звідси випливає, що послідовність неперервних вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, ...$ рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $\bar{x}(t) = \lim\limits_{m \to \infty} x_m(t)$, яка є неперервним розв'язком системи рівнянь (4.4) та задовольняє нерівність

$$|\bar{x}(t)| \leq M'$$

(в цьому можна переконатись, якщо в (4.7) , (4.9_m) перейти до границі при $m \to \infty$).

Для завершення доведення теореми покажемо, що розв'язок $\bar{x}(t)$ – єдиний. Дійсно, припустимо, що існує ще один неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\tilde{x}(t)$ системи (4.4) такий, що $\tilde{x}(t) \neq \bar{x}(t)$. Тоді,використовуючи умови теореми, маємо

$$\begin{aligned}
&|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| \leq \\
&\leq |F\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right), \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), ...\right. \\
&\left. ..., \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) - \\
&- F\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right), \bar{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), ...\right. \\
&\left. ..., \bar{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)\Big| \leq \\
&\leq L\,(\left|\tilde{x}\left(q^{-1}t\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right| + \\
&+ \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right| + ... \\
&... + \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right| \,) \leq \\
&\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| + \right. \\
&+ \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) + \right. \\
&\left. + \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right| + ... \\
&... + \left|\tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) + \right. \\
&\left.\left. + \tilde{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right)\right|\right) \leq \\
&\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| + \right. \\
&+ l\left|f_1\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right) - f_1\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right| + \|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| + ... \\
&\left. ... + l\left|f_k\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right) - f_k\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right| + \|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|\right) \leq \\
&\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|(k+1) + \right. \\
&\left. + l\sum\nolimits_{i=1}^{k}\left|f_i\left(q^{-1}t, \tilde{x}\left(q^{-1}t\right)\right) - f_i\left(q^{-1}t, \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right)\right|\right) \leq \\
&\leq L\left(\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\|(k+1) + l\sum\nolimits_{i=1}^{k} l_i''\left|\tilde{x}\left(q^{-1}t\right) - \bar{x}\left(q^{-1}t\right)\right|\right) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq L\left(\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\|(k+1)+l\sum_{i=1}^{k} l_i''\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\|\right) \leq$$
$$\leq L\left(k+1+l\sum_{i=1}^{k} l_i''\right)\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\| \leq$$
$$\leq L\left(k+1+ll^*k\right)\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\| \leq \theta\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\|,$$

де $\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\| = \sup\limits_{t}|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)|$. Звідси безпосередньо випливає співвідношення $\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\| \leq \theta\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\|$, яке можливе лише у випадку, коли $\tilde{x}(t)=\bar{x}(t)$, що суперечить припущенню. Таким чином, система рівнянь (4.4) має єдиний неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $\bar{x}(t)$. Теорему 4.1 доведено.

Зауважимо, що теорема 4.1 має місце лише у випадку, коли виконується співвідношення

$$L(k+1)+\frac{M}{M'} \leq 1,$$

яке має місце при достатньо малих L та M.

Виконаємо в системі рівнянь (4.1) взаємно однозначну заміну змінних $x(t)=y(t)+\gamma(t)$, де $\gamma(t)$ - неперервний розв'язок системи (4.4). В результаті отримаємо систему рівнянь вигляду

$$y(qt)=\tilde{F}\left(t,y(t),y\left(t+\tilde{f}_1(t,y(t))\right),...,y\left(t+\tilde{f}_k(t,y(t))\right),\varepsilon\right), \qquad (4.10)$$

де

$$\tilde{F}\left(t,y(t),y\left(t+\tilde{f}_1(t,y(t))\right),...,y\left(t+\tilde{f}_k(t,y(t))\right),\varepsilon\right)=$$
$$=F\left(t,y(t)+\gamma(t),y\left(t+f_1(t,y(t)+\gamma(t))\right)+\gamma\left(t+f_1(t,y(t)+\gamma(t))\right),...\right.$$
$$\left....,y\left(t+f_k(t,y(t)+\gamma(t))\right)+\gamma\left(t+f_k(t,y(t)+\gamma(t))\right),\varepsilon\right)-$$
$$-F\left(t,\gamma(t),\gamma\left(t+f_1(t,\gamma(t))\right),...,\gamma\left(t+f_k(t,\gamma(t))\right),0\right).$$

Очевидно, що вектор-функція

$$\tilde{F}\left(t,y(t),y\left(t+\tilde{f}_1(t,y(t))\right),...,y\left(t+\tilde{f}_k(t,y(t))\right),\varepsilon\right)$$

задовольняє умови 1-2 та виконується умова:

3') при достатньо малих L_0, L, l_i', l_i'', $i=1,2,...,k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql}+\frac{L}{q}\left(k+1+\left[l^*+l^*\tilde{l}\right]k\right) \leq 1, \quad L\left[k+1+\tilde{l}l^*k\right]=\theta<1,$$

де $l^* = \max\{l_i', l_i''\}$, $\tilde{l} > 0$.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови 1,2 та 3‘. Тоді система рівнянь (4.10) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок, що задовольняє умови:*

$$\left|y(\bar{t},\varepsilon) - y(\bar{\bar{t}},\varepsilon)\right| \le \tilde{l}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = 0,$$

де $t, \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{l} = \tilde{l}\,(\varepsilon)$ - додатна стала, що залежить від ε, $\varepsilon << 1$.

Доведення: Розглянемо послідовність функцій:

$$y_0(t,\varepsilon) = 0, \tag{4.11$_0$}$$

$$y_m\,(t,\varepsilon) = \tilde{F}\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),\varepsilon\right), \tag{4.11$_m$}$$

$m = 1, 2, \ldots$. Аналогічно до доведення теореми 4.1 можна показати, що при $t \in \mathbb{R}$ і всіх $m \ge 0$ функції $y_m\,(t,\varepsilon)$, $m = 0, 1, \ldots$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}$ і виконуються нерівності:

$$\left|y_m\,(t,\varepsilon)\right| \le M'', \tag{4.12}$$

$$\left|y_m(\bar{t},\varepsilon) - y_m(\bar{\bar{t}},\varepsilon)\right| \le \tilde{l}\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \tag{4.13}$$

де $M'' = M''\,(\varepsilon) > M$ та $\tilde{l}$ - деякі додатні сталі.

Дійсно, оскільки $y_0(t,\varepsilon) = 0$, то при $m = 0$ нерівності (4.12) та (4.13) виконуються.

Припустимо, що функції $y_n\,(t,\varepsilon)$, $n = 0, 1, \ldots, m-1$, які визначені співвідношеннями (4.11$_m$), також задовольняють нерівності (4.12), (4.13). Тоді в силу (4.11$_m$), (4.12), (4.13) та умов теореми отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left|y_m\,(t,\varepsilon)\right| \le \\
&\le \left|\tilde{F}\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right), \ldots\right.\right. \\
&\left.\left.\ldots, y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),\varepsilon\right)\right| \le \\
&\le L\left(\left|y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right| + \left|y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\right| + \ldots\right. \\
&\left.\ldots + \left|y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\right|\right) + M \le \\
&\le LM''\,(k+1) + M \le M''\left(L\,(k+1) + \tfrac{M}{M''}\right) \le M'',
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left|y_m\left(\bar{t},\varepsilon\right)-y_m\left(\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right|\leq\\
&\leq\Big|\tilde{F}\Big(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right),y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{t}+\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),...\\
&...,y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{t}+\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big)-\\
&-\tilde{F}\Big(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right),y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar{t}}+\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),...\\
&...,y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar{t}}+\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big),\varepsilon\Big)\Big|\leq\\
&\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\left(\left|y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)-y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right|+\right.\\
&+\Big|y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{t}+\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)-\\
&-y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar{t}}+\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big|+...\\
&...+\Big|y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{t}+\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)-\\
&\left.-y_{m-1}\Big(q^{-1}\bar{\bar{t}}+\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right),\varepsilon\Big)\Big|\right)\leq\\
&\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\Big(\tilde{l}\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\\
&+\tilde{l}\Big|q^{-1}\bar{t}+\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right)-q^{-1}\bar{\bar{t}}-\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\Big|+...\\
&...+\tilde{l}\,\Big|q^{-1}\bar{t}+\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right)-q^{-1}\bar{\bar{t}}-\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\Big|\Big)\leq\\
&\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\tilde{l}\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\right.\\
&+\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\Big|\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right)-\tilde{f}_1\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\Big|+...\\
&\left....+\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+\Big|\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right)-\tilde{f}_k\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\Big|\right)\leq\\
&\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\tilde{l}\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\right.\\
&\left.+\textstyle\sum_{i=1}^{k}\Big|\tilde{f}_i\left(q^{-1}\bar{t},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)\right)-\tilde{f}_i\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right)\Big|\right)\leq\\
&\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\tilde{l}\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\right.\\
&\left.+\textstyle\sum_{i=1}^{k}\left(l_i'\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+l_i''\left|y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{t},\varepsilon\right)-y_{m-1}\left(q^{-1}\bar{\bar{t}},\varepsilon\right)\right|\right)\right)\leq\\
&\leq L_0\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+L\tilde{l}\left(\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|(k+1)+\right.\\
&\left.+\textstyle\sum_{i=1}^{k}\left(l_i'\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|+l_i''l\left|q^{-1}\bar{t}-q^{-1}\bar{\bar{t}}\right|\right)\right)\leq\\
&\leq\tfrac{L_0}{q}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|+\tfrac{L}{q}\tilde{l}\left(k+1+\textstyle\sum_{i=1}^{k}\left(l_i'+l_i''\tilde{l}\right)\right)\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\leq\\
&\leq\tilde{l}\left[\tfrac{L_0}{q\tilde{l}}+\tfrac{L}{q}\left(k+1+\textstyle\sum_{i=1}^{k}\left(l_i'+l_i''\tilde{l}\right)\right)\right]\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\leq\\
&\leq\tilde{l}\left[\tfrac{L_0}{q\tilde{l}}+\tfrac{L}{q}\left(k+1+\left(l^*+l^*\tilde{l}\right)k\right)\right]\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|\leq\tilde{l}\left|\bar{t}-\bar{\bar{t}}\right|.
\end{aligned}
$$

Отже, всі функції $y_m\left(t,\varepsilon\right)$, $m=0,1,...$, при $t\in\mathbb{R}$ задовольняють нерівності (4.12) та (4.13).

Покажемо, що система функціональних рівнянь (4.10) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t,\varepsilon)$, який задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\bar{y}(t,\varepsilon)| = 0.$$

Для цього доведемо, що при всіх $m \geq 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |y_m(t,\varepsilon)| = 0. \qquad (4.13_m)$$

Розглядаючи послідовно (4.11_m), $m = 0, 1, ...$, знаходимо

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} |y_0(t,\varepsilon)| = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0} [y_1(t,\varepsilon)] =\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{F}\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_0\left(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right), ...\right.\\
&\left. ..., y_0\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),\varepsilon\right) =\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} [F\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right), y_0\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \right.\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left. +\gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), ...\\
&..., y_0\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right) +\\
&+\gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right) + \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\varepsilon) -\\
&-F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\ ...\right.\\
&\left. ..., \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right)] =\\
&= F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), ...\right.\\
&\left. ...\ , \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) -\\
&-F\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right), \gamma\left(q^{-1}t + f_1\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), ...\right.\\
&\left. ...\ , \gamma\left(q^{-1}t + f_k\left(q^{-1}t, \gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right), 0\right) = 0,\\
&\dots\\
&\lim_{\varepsilon\to 0} [y_m(t,\varepsilon)] =\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\tilde{F}\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right), y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_1\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right), ...\right.\right.\\
&\left.\left. ..., y_{m-1}\left(q^{-1}t + \tilde{f}_k\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),\varepsilon\right)\right] =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}[F\left(q^{-1}t, y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)+\gamma\left(q^{-1}t\right),\right.\\
&y_{m-1}\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)+\gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right)+\\
&+\gamma\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)+\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),...\\
&...,y_{m-1}\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)+\gamma\left(q^{-1}t\right)\right),\varepsilon\right)+\\
&+\gamma\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)+\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\varepsilon\Big)-\\
&-F\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right),\gamma\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),...\right.\\
&\left.... \quad ,\gamma\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),0\right)]=\\
&=F\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right),\gamma\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),...\right.\\
&\left.... \quad ,\gamma\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),0\right)-\\
&-F\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right),\gamma\left(q^{-1}t+f_1\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),\ ...\right.\\
&\left.... ,\gamma\left(q^{-1}t+f_k\left(q^{-1}t,\gamma\left(q^{-1}t\right)\right)\right),0\right)=0,\\
&m\geq 2,
\end{aligned}
$$

що і необхідно було довести.

Тепер покажемо, що при всіх $t\in\mathbb{R}$ і всіх $m\geq 1$ виконується оцінка

$$
|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)|\leq \bar{M}\theta^{m-1}, \qquad (4.14_m)
$$

де $\bar{M}=\bar{M}\left(\varepsilon\right)>M$. Дійсно, оскільки $y_0(t,\varepsilon)=0$, то маємо

$$
\begin{aligned}
&\left|y_1\left(t,\varepsilon\right)-y_0\left(t,\varepsilon\right)\right|=\\
&=\left|\tilde{F}\left(q^{-1}t,y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right),y_0\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right),...\right.\right.\\
&\left.\left....,y_0\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,y_0\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right),\varepsilon\right)\right|\leq\\
&\leq\left|\tilde{F}\left(q^{-1}t,0,...,0,\varepsilon\right)\right|\leq M<\bar{M}.
\end{aligned}
$$

Отже, при $m=1$ нерівність (4.14_m) виконується. Припустимо, що оцінку (4.14_m) доведено уже для деякого $m\geq 1$, і покажемо її справедливість для $m+1$.

$$
\begin{aligned}
&|y_{m+1}(t,\varepsilon) - y_m(t,\varepsilon)| \le \\
&\le \Bigl|\tilde{F}\Bigl(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon), y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr), \dots \\
&\dots, y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr), \varepsilon\Bigr) - \\
&- \tilde{F}\Bigl(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon), y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr), \dots \\
&\dots, y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr), \varepsilon\Bigr)\Bigr| \le \\
&\le L\,\bigl[\bigl|y_m(q^{-1}t,\varepsilon) - y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)\bigr| + \\
&+ \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) - \\
&- y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr)\Bigr| + \dots \\
&\dots + \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) - \\
&- y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr)\Bigr|\Bigr] \le \\
&\le L\,\bigl[\bigl|y_m(q^{-1}t,\varepsilon) - y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)\bigr| + \\
&+ \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) - \\
&- y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) + \\
&+ y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) - \\
&- y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr)\Bigr| + \dots \\
&\dots + \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) - \\
&- y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) + \\
&+ y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr) - \\
&- y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)), \varepsilon\Bigr)\Bigr|\Bigr| \le \\
&\le L\,\bigl[\bigl|y_m(q^{-1}t,\varepsilon) - y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)\bigr| + \\
&+ \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr) - \\
&- y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr)\Bigr| + \\
&+ \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr) - \\
&- y_{m-1}(q^{-1}t + f_1(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon)))\bigr| + \dots \\
&\dots + \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_m(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr) - \\
&- y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr)\Bigr| + \\
&+ \Bigl|y_m\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr) - \\
&-y_{m-1}\Bigl(q^{-1}t + \tilde{f}_k(q^{-1}t, y_{m-1}(q^{-1}t,\varepsilon))\Bigr)\Bigr|\Bigr] \le
\end{aligned}
$$

$$\leq L\left[\bar{M}\theta^{m-1}+\tilde{l}\left|\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)-\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right|+\right.$$
$$+\bar{M}\theta^{m-1}+...+\tilde{l}\left|\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right|+\bar{M}\theta^{m-1}\right]\leq$$
$$\leq L\left[\bar{M}\theta^{m-1}\left(k+1\right)+\tilde{l}\sum_{i=1}^{k}\left|\tilde{f}_i\left(q^{-1}t,y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\tilde{f}_i\left(q^{-1}t,y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right|\right]\leq$$
$$\leq L\left[\bar{M}\theta^{m-1}\left(k+1\right)+\tilde{l}\sum_{i=1}^{k}l_i''\left|y_m\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)-y_{m-1}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right|\right]\leq$$
$$\leq L\left[\bar{M}\theta^{m-1}\left(k+1\right)+\tilde{l}\sum_{i=1}^{k}l_i''\bar{M}\theta^{m-1}\right]\leq$$
$$\leq L\left[k+1+\tilde{l}l^*k\right]\bar{M}\theta^{m-1}\leq L\left[k+1+\tilde{l}l^*k\right]\bar{M}\theta^{m-1}\leq\bar{M}\theta^{m},m=2,3,....$$

Таким чином, оцінка (4.14_m) виконується при всіх $m\geq 1$. Звідси випливає, що послідовність неперервних вектор-функцій $y_m\left(t,\varepsilon\right)$, $m=0,1,...$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)=\lim\limits_{m\to\infty}y_m\left(t,\varepsilon\right)$, яка є неперервним розв'язком системи рівнянь (4.10), який задовольняє нерівність

$$\left|\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\right|\leq M''$$

та такий, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{y}(t,\varepsilon)=0$ (в цьому можна переконатись, якщо в (4.12), (4.11_m), (4.13_m) перейти до границі при $m\to\infty$).

Для завершення доведення теореми покажемо, що розв'язок $\bar{y}(t,\varepsilon)$- єдиний. Дійсно, припустимо, що існує ще один неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $\tilde{y}(t,\varepsilon)$ системи (4.10) такий, що $\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)\neq\bar{y}(t,\varepsilon)$. Тоді, використовуючи умови теореми, маємо

$$\left|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\right|\leq$$
$$\leq\left|\tilde{F}\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right),\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),...\right.\right.$$
$$\left....,\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),\varepsilon\right)-$$
$$-\tilde{F}\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right),\bar{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),...\right.$$
$$\left.\left....,\bar{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right),\varepsilon\right)\right|\leq$$
$$\leq L\left(\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right|+\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\bar{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\right|+...+\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\bar{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\right|\right)\leq$$

$$
\begin{aligned}
&\leq L\left(\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|+\right.\\
&+\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)-\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)+\right.\\
&\left.+\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)-\bar{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\right|+\ldots\\
&\ldots+\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)-\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)+\right.\\
&\left.\left.+\tilde{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)-\bar{y}\left(q^{-1}t+\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right),\varepsilon\right)\right|\right)\leq\\
&\leq L\left(\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|+\tilde{l}\left|\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)-\tilde{f}_1\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right|+\right.\\
&+\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|+\ldots\\
&\left.\ldots+\tilde{l}\left|\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)-\tilde{f}_k\left(q^{-1}t,\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right)\right|+\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|\right)\leq\\
&\leq L\left(\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|\left(k+1\right)+\tilde{l}\sum\nolimits_{i=1}^{k}l_i''\left|\tilde{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(q^{-1}t,\varepsilon\right)\right|\right)\leq\\
&\leq L\left(\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|\left(k+1\right)+\tilde{l}\sum\nolimits_{i=1}^{k}l_i''\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|\right)\leq\\
&\leq L\left(k+1+\tilde{l}\sum\nolimits_{i=1}^{k}l_i''\right)\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|\leq\\
&\leq L\left(k+1+\tilde{l}l^*k\right)\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|\leq\\
&\leq\theta\|\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)-\bar{y}\left(t,\varepsilon\right)\|,
\end{aligned}
$$

де $\|\tilde{y}(t,\varepsilon)-\bar{y}(t,\varepsilon)\|=\sup\limits_t|\tilde{y}(t,\varepsilon)-\bar{y}(t,\varepsilon)|$. Звідси безпосередньо випливає співвідношення $\|\tilde{y}(t,\varepsilon)-\bar{y}(t,\varepsilon)\|\leq\theta\|\tilde{y}(t,\varepsilon)-\bar{y}(t,\varepsilon)\|$, яке можливе лише у випадку, коли $\tilde{y}\left(t,\varepsilon\right)=\bar{y}(t,\varepsilon)$, що суперечить припущенню. Таким чином, система рівнянь (4.10) має єдиний неперервний розв'язок $\bar{y}(t,\varepsilon)$. Теорему 4.2 доведено.

Зауважимо, що теорема 4.2 має місце лише тоді, коли виконується співвідношення

$$L\left(k+1\right)+\frac{M}{M''}\leq 1,$$

яке має місце при достатньо малих L та M.

4.2. Про побудову неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь.

Метою цього підрозділу є побудова неперервних обмежених розв'язків нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\,(qt) = \Lambda x\,(t) + f\,(t, x\,(t+1))\,, \tag{4.15}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\Lambda-$ дійсна $(n \times n)$-матриця вигляду $\Lambda = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, q - деяка дійсна стала.

Розглянемо систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду (4.15). При цьому припустимо, що виконуються наступні умови:

1. $|\lambda_i| \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $q > 0$;
2. вектор-функція $f\,(t, x)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $f\,(t, 0) = 0$;
3. для довільних $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$|f\,(t, x) - f\,(t, y)| \leq l\,|x - y|\,, \tag{4.16}$$

де l - деяка додатна стала.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

4. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;
5. $\Delta = \frac{l}{1-\lambda^*} < 1$, *де* $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.17}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду:

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{4.18$_0$}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f\,(t, x_0(t+1))\,, \tag{4.18$_1$}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \qquad (4.18_i)$$

$i = 2, 3, ...$, і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умови:

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i, i = 1, 2, \ldots, \qquad (4.19_i)$$

де M- деяка додатна стала.

Система рівнянь (4.18_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$x_0(t) = t^{\nu}\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \qquad (4.20_0)$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ - довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = diag\left(t^{\frac{\ln\lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln\lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln\lambda_n}{\ln q}}\right),$$

які задовольняють умові

$$|x_0(t)| \leq |t^{v}| |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}} |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}} M, \qquad (4.19_0)$$

де $M = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$. Підставляючи в (4.18_1) ряд

$$x_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j f\left(q^{-(j+1)}t, x_0(q^{-(j+1)}t + 1)\right), \qquad (4.20_1)$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більше цього, в силу (4.16), (4.19_0) і $\frac{\ln\lambda^*}{\ln q} < 0$, отримаємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left|f\left(q^{-(j+1)}t, x_0(q^{-(j+1)}t+1)\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j\, l\left|x_0(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j\, lM\left(\frac{1}{q^{j+1}}t + 1\right)^{\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}} \leq lM\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \leq M\frac{l}{1-\lambda^*} \leq M\Delta.$$

Отже, системи рівнянь (4.18_0), (4.18_1) мають сім'ї неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (4.19_0), (4.19_1).

Враховуючи умови теореми і оцінки (4.19_0), (4.19_1), можна послідовно показати, що ряди

$$\begin{aligned} x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \Bigg[f\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right) - \\ -f\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{4.20$_i$}$$

$i = 2, 3, ...$ рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4.18_i), $i = 2, 3, ...$ Дійсно, легко переконатися, що ряди (4.20_i), $i = 2, 3, ...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4.18_i), $i = 2, 3, ...$ Доведемо їх збіжність.

Оскільки ряд (4.20_1) рівномірно збігається при $t \geq T > 0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (4.20_i) доведена уже для деякого $i \geq 1$ і доведемо, що ряд (4.20_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \geq T > 0$ і виконується оцінка (4.19_{i+1}). В силу (4.16), (4.20_{i+1}) та (4.19_i) отримаємо

$$\begin{aligned} &|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \Bigg| f\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i} x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right) - \\ &-f\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\Bigg| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \, l \left|\sum_{l=0}^{i} x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \, l \left|x_i\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right| \leq lM\Delta^i \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \leq M\Delta^i \tfrac{l}{1-\lambda^*} = M\Delta^{i+1}. \end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (4.18_i), i=1,2,... мають розв'язки у вигляді рядів (4.20_i), i=1,2,..., що рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, i=1,2,..., які задовольняють умови (4.19_i). Із (4.19_i) безпосередньо випливає, що ряд (4.17) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорема 4.3 доведена.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

6. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$*;*

7. $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.22}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції.*

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду:

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{4.23_0}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f\left(t, x_0(t+1)\right), \tag{4.23_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \tag{4.23_i}$$

$i = 2, 3, \ldots$. Покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умови:

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i, i = 1, 2, \ldots. \tag{4.24_i}$$

де M- деяка додатна стала. Дійсно, система рівнянь (4.23_0) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умові

$$|x_0(t)| \leq \frac{M}{t^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}}, \tag{4.24_0}$$

де $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$. Далі, підставляючи в (4.23_1) ряд

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f\left(q^j t, x_0(q^j t + 1)\right), \tag{4.25_1}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більше того, в силу (4.16), (4.24_0), отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|f\left(q^j t, x_0(q^j t + 1)\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l \left|x_0(q^j t + 1)\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j l \frac{M}{(q^j t + 1)^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}} \leq \frac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j lM \leq \frac{M}{\lambda_*} \frac{l}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} \leq$$
$$\leq M \frac{l}{\lambda_* - 1} \leq M\Delta.$$

Отже, системи рівнянь (4.23_0), (4.23_1) мають сім'ї неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (4.24_0), (4.24_1).

Враховуючи умови теореми і оцінки (4.24_0), (4.24_1), можна послідовно показати, що ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \left[f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l \left(q^j t + 1\right)\right) - f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l \left(q^j t + 1\right)\right)\right], \tag{4.25_i}$$

$i = 2, 3, ...$ рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4.23_i), $i = 2, 3, ...$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (4.25_i), $i = 2, 3, ...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4.23_i), $i = 2, 3, ...$ Доведемо їх збіжність.

Справді, оскільки ряд (4.25_1) рівномірно збігається при $t \geq T > 0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (4.25_i) доведена уже для деякого $i \geq 1$ і доведемо, що ряд (4.25_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \geq T > 0$ і виконується оцінка (4.24_{i+1}). В силу (4.16), (4.25_{i+1}) та (4.24_i) отримаємо

$$\begin{gathered} |x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left| f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i} x_l \left(q^j t + 1\right)\right) - f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l \left(q^j t + 1\right)\right)\right| \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} l \left| \sum_{l=0}^{i} x_l \left(q^j t + 1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} x_l \left(q^j t + 1\right)\right| \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} l \left| x_i \left(q^j t + 1\right)\right| \leq l M \Delta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^j \leq M \Delta^i \tfrac{l}{\lambda_* - 1} = M \Delta^{i+1}. \end{gathered}$$

Отже, системи рівнянь (4.23_i), $i = 1, 2, \ldots$ мають розв'язки у вигляді рядів (4.25_i), $i = 1, 2, \ldots$, що рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i\,(t)$, i=1,2,…, які задовольняють умови (4.24_i). Із (4.24_i) безпосередньо випливає, що ряд (4.22) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x\,(t)$, яка задовольняє умові

$$|x\,(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Теорему 4.4 доведено.

Розглянемо тепер систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду (4.15) при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$ у випадках, коли виконуються умови:

a) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$;

b) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$. Покажемо, що така система рівнянь має розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.26}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставивши (4.26) в (4.15_0), отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + f\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1)\right),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{4.27_0}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f\left(t, x_0(t+1)\right), \tag{4.27_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \tag{4.27_i}$$

$i = 2, \dots, n$, то ряд (4.26) буде формальним розв'язком системи рівнянь (4.15).

Система рівнянь (4.27_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду:

$$x_0(t) = t^{\nu} \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{4.28_0}$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \dots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$ - довільні неперервні вектор-функції, що задовольняють умові $\omega_i(\tau + 1) = sign\lambda_i \cdot \omega_i(\tau)$, і

$$t^{\nu} = diag\left(t^{\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln q}}, \dots, t^{\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (4.27_i), $i = 1, 2, \dots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f\left(q^j t, x_0(q^j t + 1)\right), \tag{4.28_1}$$

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \left[f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t + 1\right)\right) - f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l\left(q^j t + 1\right)\right)\right], \tag{4.28_i}$$

i=2,3.... Аналогічно тому, як було доведено теорему 4.2, можна показати, що при виконанні умов 1-3, a) і $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1$, де $1 < \lambda_* < \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$, ряди (4.28$_i$), i=1,2,..., рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, i=1,2,..., для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i, i = 1, 2, \ldots. \tag{4.29}$$

Отже, ряди (4.28$_i$), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (4.29). Із (4.29) безпосередньо випливає, що ряд (4.28) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Тим самим доведено наступну теорему.

Теорема 4.5. *Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

8. $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $0 < q < 1$;

9. $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$, *такої що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Аналогічно теоремі 4.3, можна довести подібний результат для випадку b) , коли $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $q > 1$.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови 1-3 і умови:*

10. $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i < 0$, $q > 1$,

11. $\Delta = \frac{l}{1 - \lambda^*} < 1$, *де* $1 > \lambda^* > \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$, *такої що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

4.3. Дослідження властивостей неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку.

Розглянемо тепер систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь (4.15) у випадку, коли виконуються наступні умови:

1. Λ - дійсна $(n \times n)$-матриця вигляду $\Lambda = diag\,(\Lambda_1, \Lambda_2)$,
   де Λ_1, Λ_2 - дійсні $(p \times p)$ та $(r \times r)$-матриці $(p + r = n)$, $\det \Lambda \neq 0$.
   $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
   $f\,(t, x\,(t+1)) = \left(f^1\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right), f^2\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right)\right),$
   q - деяка дійсна додатна стала.
2.

$$\begin{aligned} \left|f^1\left(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2\right) - f^1\left(t, \bar{\bar{x}}^1, \bar{\bar{x}}^2\right)\right| \le l_1\left(\left|\bar{x}^1 - \bar{\bar{x}}^1\right| + \left|\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2\right|\right), \\ \left|f^2\left(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2\right) - f^2\left(t, \bar{\bar{x}}^1, \bar{\bar{x}}^2\right)\right| \le l_2\left(\left|\bar{x}^1 - \bar{\bar{x}}^1\right| + \left|\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2\right|\right), \end{aligned} \tag{4.30}$$

де l_1, l_2 - деякі додатні сталі, що залежать від $l (l_1 = l_1\,(l)\,, l_2 = l_2\,(l)\,,$ $l_1 \to 0, l_2 \to 0$ при $l \to 0)$. Тоді система рівнянь (4.15) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x^1\,(qt) = \Lambda_1 x^1\,(t) + f^1\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right), \\ x^2\,(qt) = \Lambda_2 x^2\,(t) + f^2\left(t, x^1\,(t+1)\,, x^2\,(t+1)\right), \end{cases} \tag{4.31}$$

де $x^1 = (x_1, ..., x_p)\,,\ x^2 = (x_{p+1}, ..., x_{p+r})\,,\ f^1 = (f_1, ..., f_p)\,,\ f^2 = (f_{p+1}, ..., f_{p+r})\,.$

Виконавши в (4.31) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x_1\,(t) = y_1\,(t) + \tilde{\gamma}_1\,(t)\,,$$
$$x_2\,(t) = y_2\,(t) + \tilde{\gamma}_2\,(t),$$

де $\gamma\,(t) = (\tilde{\gamma}_1\,(t)\,, \tilde{\gamma}_2\,(t))$ - неперервний обмежений розв'язок системи (4.31), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y^1\,(qt) = \Lambda_1 y^1\,(t) + F^1\left(t, y^1\,(t+1)\,, y^2\,(t+1)\right), \\ y^2\,(qt) = \Lambda_2 y^2\,(t) + F^2\left(t, y^1\,(t+1)\,, y^2\,(t+1)\right), \end{cases} \tag{4.32}$$

де

$$F^1\left(t, y^1(t+1), y^2(t+1)\right) =$$
$$= f^1\left(t, y^1(t+1) + \gamma^1(t+1), y^2(t+1) + \gamma^2(t+1)\right) -$$
$$-f^1\left(t, \gamma^1(t+1), \gamma^2(t+1)\right),$$
$$F^2\left(t, y^1(t+1), y^2(t+1)\right) =$$
$$= f^2\left(t, y^1(t+1) + \gamma^1(t+1), y^2(t+1) + \gamma^2(t+1)\right) -$$
$$-f^2\left(t, \gamma^1(t+1), \gamma^2(t+1)\right).$$

Легко переконатися, що вектор-функції $F^1\left(t, y^1, y^2\right), F^2\left(t, y^1, y^2\right)$ задовольняють умові 2. і $F^1(t,0,0) \equiv 0, F^2(t,0,0) \equiv 0$. Для системи (4.32) справедлива наступна теорема.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1-2 і умови:*

3. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1, 2, \ldots p, j = p+1, 2, \ldots n, 0 \le p \le n, q > 1;$

4. $\theta = \max\left\{\frac{2l_1}{1-\lambda^*}, \frac{2l_2}{\lambda_*-1}\right\} < 1,$

де $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (4.32) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді рядів*

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),$$
$$y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \tag{4.33}$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...$ - *деякі неперервні обмежені при* $t \ge T > 0$ *вектор-функції.*

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду:

$$y_0^1(qt) = \Lambda_1 y_0^1(t),$$
$$y_0^2(qt) = 0, \tag{4.34_0}$$

$$y_1^1(qt) = \Lambda_1 y_1^1(t) + F^1\left(t, y_0^1(t+1), 0\right),$$
$$y_1^2(qt) = \Lambda_2 y_1^2(t) + F^2\left(t, y_0^1(t+1), 0\right), \tag{4.34_1}$$

$$y_i^1(qt) = \Lambda_1 y_i^1(t) +$$

$$+F^1\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2(t+1)\right) - F^1\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-2} y_l^2(t+1)\right),$$

$$y_i^2(qt) = \Lambda_2 y_i^2(t) +$$

$$+F^2\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2(t+1)\right) - F^2\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-2} y_l^2(t+1)\right), \tag{4.35_i}$$

$i = 2, 3, ...$, і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умови:

$$\begin{aligned} \left|y_i^1(t)\right| &\leq \tilde{M}\theta^i, \\ \left|y_i^2(t)\right| &\leq \tilde{M}\theta^i, i = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{4.36_i}$$

де $\tilde{M}$ - деяка додатна стала.

Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку системи (4.36_0) і умову 3, можна показати, що існує додатна стала $\tilde{M}$ така, що при всіх $t \geq T$ для довільного неперервного обмеженого розв'язку (T - деяка достатньо велика додатна стала) виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \left|y_0^1(t)\right| &\leq \tilde{M} t^{\frac{\ln \lambda^*}{\ln q}}, \\ \left|y_0^2(t)\right| &= 0, \end{aligned} \tag{4.36_0}$$

де $\tilde{M} = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$. Підставляючи в ($4.34_1$) ряди

$$\begin{aligned} y_1^1(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_1^j F^1\left(q^{-(j+1)}t, y_0^1(q^{-(j+1)}t+1), 0\right), \\ y_1^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} F^2\left(q^j t, y_0^1(q^j t+1), 0\right), \end{aligned} \tag{4.37_1}$$

можна переконатися, що вони є її формальним розв'язком. Більше цього, в силу умови 2., (4.36_0), і $\frac{\ln \lambda^*}{\ln q} < 0$, отримаємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j \left|F^1\left(q^{-(j+1)}t, y_0^1(q^{-(j+1)}t+1), 0\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j l_1 \left|y_0^1(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j l_1 2\tilde{M} \left(\frac{1}{q^{j+1}}t+1\right)^{\frac{\ln \lambda^*}{\ln q}} \leq$$

$$\leq l_1 2\tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \leq \tilde{M}\frac{2l_1}{1-\lambda^*} \leq \tilde{M}\theta.$$

$$\left|y_1^2(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda_2^{-1}\right|^{j+1} \left|F^2\left(q^j t, y_0^1(q^j t+1), 0\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l_2 \left|y_0^1(q^j t+1)\right| \le \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} l_2 \frac{2\tilde{M}}{(q^j t+1)^{\left|\frac{\ln \lambda^*}{\ln q}\right|}} \le$$
$$\le \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} l_2 2\tilde{M} \le \tfrac{2\tilde{M}}{\lambda_*} \tfrac{l_2}{1-\frac{1}{\lambda_*}} \le \tilde{M} \tfrac{2l_2}{\lambda_*-1} \le \tilde{M}\theta.$$

Отже, системи рівнянь (4.34_0), (4.34_1) мають сім'ї неперервних при $t \ge T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (4.36_0), (4.36_1). Враховуючи умови теореми і оцінки (4.36_0), (4.36_1), можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_1^j \left[F^1\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right) - \right.$$
$$\left. -F^1\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right), \sum_{l=0}^{i-2} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right],$$
$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} \left[F^2\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^j t+1\right), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^j t+1\right)\right) - \right.$$
$$\left. -F^2\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l^1\left(q^j t+1\right), \sum_{l=0}^{i-2} y_l^2\left(q^j t+1\right)\right)\right], \tag{4.38$_i$}$$

$i = 2, 3, \ldots$ рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4.35_i), $i = 2, 3, \ldots$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (4.37_i), $i = 2, 3, \ldots$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4.35_i), $i = 2, 3, \ldots$. Доведемо їх збіжність.

Оскільки ряд (4.37_1) рівномірно збігається при $t \ge T > 0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (4.37_i) доведена уже для деякого $i \ge 1$ і доведемо, що ряд (4.37_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \ge T > 0$ і виконується оцінка (4.36_{i+1}). В силу (4.30), (4.37_{i+1}) та (4.36_i) отримаємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j \left|F^1\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right), \sum_{l=0}^{i} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right) - \right.$$
$$\left. -F^1\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j l_1 \left(\left|\sum_{l=0}^{i} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\sum_{l=0}^{i} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\right) \le$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j \, l_1 \left(\left| y_i^1 \left(q^{-(j+1)} t + 1 \right) \right| + \left| y_i^2 \left(q^{-(j+1)} t + 1 \right) \right| \right) \leq$$
$$\leq 2 l_1 \tilde{M} \theta^i \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \leq \tilde{M} \theta^i \tfrac{2 l_1}{1-\lambda^*} = \tilde{M} \theta^{i+1}.$$
$$\left| y_{i+1}^2(t) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \Lambda_2^{-1} \right|^{j+1} \left| F^2 \left(q^j t, \sum_{l=0}^{i} y_l^1 \left(q^j t + 1 \right), \sum_{l=0}^{i} y_l^2 \left(q^j t + 1 \right) \right) - \right.$$
$$\left. - F^2 \left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1 \left(q^j t + 1 \right), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2 \left(q^j t + 1 \right) \right) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \Lambda_2^{-1} \right|^{j+1} l_2 \left(\left| \sum_{l=0}^{i} y_l^1 \left(q^j t + 1 \right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1 \left(q^j t + 1 \right) \right| + \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{l=0}^{i} y_l^2 \left(q^j t + 1 \right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2 \left(q^j t + 1 \right) \right| \right) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \Lambda_2^{-1} \right|^{j+1} l_2 \left(\left| y_i^1 \left(q^j t + 1 \right) \right| + \left| y_i^2 \left(q^j t + 1 \right) \right| \right) \leq$$
$$\leq 2 l_2 \tilde{M} \theta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*} \right)^j \leq \tilde{M} \theta^i \tfrac{2 l_2}{\lambda_* - 1} = \tilde{M} \theta^{i+1}.$$

$i = 1, 2, \ldots$. Отже, системи рівнянь (4.35_i), i=1,2,... мають розв'язки у вигляді рядів (4.37_i), i=1,2,..., що рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i^1(t), y_i^2(t)$, i=1,2,..., які задовольняють умови (4.36_i). Із (4.36_i) безпосередньо випливає, що ряди (4.33) рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y^1(t), y^2(t)$, які задовольняють умовам

$$\left| y^1(t) \right| \leq \tfrac{\tilde{M}}{1-\theta},$$
$$\left| y^2(t) \right| \leq \tfrac{\tilde{M}}{1-\theta},$$

що і завершує доведення теореми 4.7.

Теорема 4.8. *Нехай виконуються умови 1-2 і умови:*

5. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1, 2, \ldots p, j = p+1, 2, \ldots n, 0 \leq p \leq n, 0 < q < 1;$

6. $\theta = \max \left\{ \frac{2 l_1}{1-\lambda^*}, \frac{2 l_2}{\lambda_* - 1} \right\} < 1,$

де $1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, p\}$, $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = p+1, \ldots, n\}$. *Тоді система рівнянь (4.32) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді рядів*

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \qquad y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \tag{4.39}$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, ...$ - *деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *векторфункції.*

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} &y_0^1(qt) = 0, \\ &y_0^2(qt) = \Lambda_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{4.40$_0$}$$

$$\begin{aligned} &y_1^1(qt) = \Lambda_1 y_1^1(t) + F^1\left(t, 0, y_0^2(t+1)\right), \\ &y_1^2(qt) = \Lambda_2 y_1^2(t) + F^2\left(t, 0, y_0^2(t+1)\right), \end{aligned} \tag{4.40$_1$}$$

$$\begin{aligned} &y_i^1(qt) = \Lambda_1 y_i^1(t) + F^1\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2(t+1)\right) - \\ &-F^1\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-2} y_l^2(t+1)\right), \\ &y_i^2(qt) = \Lambda_2 y_i^2(t) + F^2\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2(t+1)\right) - \\ &-F^2\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l^1(t+1), \sum_{l=0}^{i-2} y_l^2(t+1)\right), \end{aligned} \tag{4.41$_i$}$$

$i = 2, 3, ...,$ і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умови:

$$\begin{aligned} &\left|y_i^1(t)\right| \leq \tilde{M}\theta^i, \\ &\left|y_i^2(t)\right| \leq \tilde{M}\theta^i, i = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{4.42$_i$}$$

де $\tilde{M}$ - деяка додатна стала. Використовуючи зображення загального неперервного розв'язку системи (4.40$_0$) і умову 5, можна показати, що існує додатна стала $\tilde{M}$ така, що при всіх $t \geq T$ для довільного неперервного обмеженого розв'язку (T - деяка достатньо велика додатна стала) виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} &\left|y_0^1(t)\right| = 0, \\ &\left|y_0^2(t)\right| \leq \frac{\tilde{M}}{t^{\left|\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}\right|}}, \end{aligned} \tag{4.42$_0$}$$

де $\tilde{M} = \max_{\tau} |\omega(\tau)|$. Підставляючи в (4.40$_1$) ряди

$$\begin{aligned} &y_1^1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_1^j F^1\left(q^{-(j+1)}t, 0, y_0^2(q^{-(j+1)}t+1)\right), \\ &y_1^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} F^2\left(q^j t, 0, y_0^2(q^j t+1)\right), \end{aligned} \tag{4.43$_1$}$$

можна переконатися, що вони є її формальним розв'язком. Більше цього, в силу умови 2., (4.42_0) і $\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}<0$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left|y_1^1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda_1|^j\left|F^1\left(q^{-(j+1)}t,0,y_0^2(q^{-(j+1)}t+1)\right)\right| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j l_1\left|y_0^2(q^{-(j+1)}t+1)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j l_1 2\tilde{M}\left(\tfrac{1}{q^{j+1}}t+1\right)^{\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}} \le \\
&\le l_1 2\tilde{M}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j \le \tilde{M}\tfrac{2l_1}{1-\lambda^*} \le \tilde{M}\theta. \\
&\left|y_1^2(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda_2^{-1}\right|^{j+1}\left|F^2\left(q^jt,0,y_0^2(q^jt+1)\right)\right| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l_2\left|y_0^2(q^jt+1)\right| \le \tfrac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^j l_2\frac{2\tilde{M}}{(q^jt+1)^{\left|\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}\right|}} \le \\
&\le \tfrac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^j l_2 2\tilde{M} \le \tfrac{2\tilde{M}}{\lambda_*}\tfrac{l_2}{1-\frac{1}{\lambda_*}} \le \tilde{M}\tfrac{2l_2}{\lambda_*-1} \le \tilde{M}\theta.
\end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (4.40_0), (4.40_1) мають сім'ї неперервних при $t\ge T>0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (4.42_0), (4.42_1). Враховуючи умови теореми і оцінки (4.42_0), (4.42_1), можна послідовно показати, що ряди

$$\begin{aligned}
&y_i^1(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_1^j\left[F^1\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i-1}y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right),\sum_{l=0}^{i-1}y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)-\right.\\
&\left.-F^1\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i-2}y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right),\sum_{l=0}^{i-2}y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right],\\
&y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_2^{-(j+1)}\left[F^2\left(q^jt,\sum_{l=0}^{i-1}y_l^1\left(q^jt+1\right),\sum_{l=0}^{i-1}y_l^2\left(q^jt+1\right)\right)-\right.\\
&\left.-F^2\left(q^jt,\sum_{l=0}^{i-2}y_l^1\left(q^jt+1\right),\sum_{l=0}^{i-2}y_l^2\left(q^jt+1\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.44$_i$}$$

$i=2,3,...$ рівномірно збігаються при всіх $t\ge T>0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4.41_i), $i=2,3,....$ Дійсно, легко переконатися, що ряди (4.43_i), $i=2,3,...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4.41_i), $i=2,3,....$ Доведемо їх збіжність.

Оскільки ряд (4.43_1) рівномірно збігається при $t\ge T>0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (4.43_i) доведена уже для деякого $i\ge 1$ і доведемо, що ряд (4.43_{i+1}) також рівномірно збігається при $t\ge T>0$ і виконується оцінка (4.42_{i+1}). В силу (4.30), (4.43_{i+1}) та (4.42_i)

отримаємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j \left| F^1\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right), \sum_{l=0}^{i} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right) - \right.$$
$$\left. -F^1\left(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j l_1 \left(\left|\sum_{l=0}^{i} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\sum_{l=0}^{i} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\right) \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1|^j l_1 \left(\left|y_i^1\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right| + \left|y_i^2\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\right) \le 2l_1\tilde{M}\theta^i \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \le$$
$$\le \tilde{M}\theta^i \tfrac{2l_1}{1-\lambda^*} = \tilde{M}\theta^{i+1}.$$
$$\left|y_{i+1}^2(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda_2^{-1}\right|^{j+1} \left| F^2\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i} y_l^1\left(q^j t+1\right), \sum_{l=0}^{i} y_l^2\left(q^j t+1\right)\right) - \right.$$
$$\left. -F^2\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^j t+1\right), \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^j t+1\right)\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda_2^{-1}\right|^{j+1} l_2 \left(\left|\sum_{l=0}^{i} y_l^1\left(q^j t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^1\left(q^j t+1\right)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\sum_{l=0}^{i} y_l^2\left(q^j t+1\right) - \sum_{l=0}^{i-1} y_l^2\left(q^j t+1\right)\right|\right) \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda_2^{-1}\right|^{j+1} l_2 \left(\left|y_i^1\left(q^j t+1\right)\right| + \left|y_i^2\left(q^j t+1\right)\right|\right) \le 2l_2\tilde{M}\theta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^j \le$$
$$\le \tilde{M}\theta^i \tfrac{2l_2}{\lambda_*-1} = \tilde{M}\theta^{i+1},$$

$i = 1, 2, \ldots$. Отже, системи рівнянь (4.41_i), i=1,2,... мають розв'язки у вигляді рядів (4.43_i), i=1,2,..., що рівномірно збігаються при $t \ge T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i^1(t), y_i^2(t)$, i=1,2,..., які задовольняють умови (4.42_i). Із (4.42_i) безпосередньо випливає, що ряди (4.39) рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y^1(t), y^2(t)$, які задовольняють умовам:

$$\left|y^1(t)\right| \le \tfrac{\tilde{M}}{1-\theta},$$
$$\left|y^2(t)\right| \le \tfrac{\tilde{M}}{1-\theta}.$$

Доведення теореми 4.8 завершено.

4.4. Побудова неперервних обмежених розв'язків одного класу систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь.

Побудуємо неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=\Lambda x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t\right),x\left(t+1\right)\right), \tag{4.45}$$

де $t\in\mathbb{R}$, $\Lambda-$ дійсна $(n\times n)$-матриця вигляду $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$, $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, q - деяка дійсна стала. При цьому будемо припускати виконаними наступні умови:

1. $|\lambda_i|\neq 0$, $i=1,2,...,n$, $q>0$;
2. вектор-функція $f\left(t,x,y\right)$ є неперервною обмеженою при всіх $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$ і $f\left(t,0,0\right)\equiv 0$;
3. для довільних $t\in\mathbb{R}$, $\bar{x},\bar{y},\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}\in\mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$\left|f\left(t,\bar{x},\bar{y}\right)-f\left(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}\right)\right|\leq l\left(\left|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right|+\left|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\right|\right), \tag{4.46}$$

де l - деяка додатна стала.

Теорема 4.9. *Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

4. $0<\lambda_i<1$, $i=1,\ldots,n$, $q>1$*;*

5. $\Delta=\frac{2l}{\bar{\lambda}-\lambda^*}<1$ *, де* $1>\bar{\lambda}>\lambda^*=\max\left\{\lambda_i, i=1,\ldots,n\right\}$.

Тоді система рівнянь (4.45) має сім'ю неперервних обмежених при $t\geq T>0$ *(*T *- деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{4.47}$$

де $x_i(t)$, $i=0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t\geq T>0$ *вектор-функції, якізадовольняють умові* $\lim\limits_{t\to+\infty}x_i(t)=0$.

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду:

$$x_0(qt)=\Lambda x_0(t), \tag{4.48_0}$$

$$x_1(qt)=\Lambda x_1(t)+f\left(t,x_0(t),x_0(t+1)\right), \tag{4.48_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \tag{4.48$_i$}$$

$i = 2, 3, ...,$ і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умову

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i t^{\bar{\nu}}, i = 1, 2, \ldots. \tag{4.49$_i$}$$

де M- деяка додатна стала, $\bar{\nu} = \frac{\ln \bar{\lambda}}{\ln q}$, $1 > \bar{\lambda} > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Дійсно, система рівнянь (4.48$_0$) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умові

$$|x_0(t)| \leq M t^{\bar{\nu}}, \tag{4.49$_0$}$$

де $M = \max_{\tau} |\omega(\tau)|$. Підставляючи в (4.48$_1$) ряд

$$x_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j f\left(q^{-(j+1)}t, x_0\left(q^{-(j+1)}t\right), x_0(q^{-(j+1)}t + 1)\right), \tag{4.50$_1$}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більше цього, в силу (4.46), (4.49$_0$), і $1 > \bar{\lambda} > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\bar{\nu} < 0$ отримаємо

$$\begin{aligned}
&|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left|f\left(q^{-(j+1)}t, x_0\left(q^{-(j+1)}t\right), x_0(q^{-(j+1)}t + 1)\right)\right| \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j\, l\left(\left|x_0\left(q^{-(j+1)}t\right)\right| + \left|x_0(q^{-(j+1)}t + 1)\right|\right) \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j\, l\left(M\left(q^{-(j+1)}t\right)^{\bar{\nu}} + M\left(q^{-(j+1)}t + 1\right)^{\bar{\nu}}\right) \leq \\
&\leq Ml \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j\, 2\left(q^{-(j+1)}t\right)^{\bar{\nu}} \leq M2l \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \left(q^{\bar{\nu}}\right)^{-(j+1)} t^{\bar{\nu}} \leq \\
&\leq M2l \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \left(\bar{\lambda}\right)^{-(j+1)} t^{\bar{\nu}} \leq M2l\frac{1}{\bar{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right)^j t^{\bar{\nu}} \leq \\
&\leq M2l\frac{1}{\bar{\lambda}}\frac{1}{1-\frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}} t^{\bar{\nu}} \leq M\frac{2l}{\bar{\lambda}-\lambda^*} t^{\bar{\nu}} \leq M\Delta t^{\bar{\nu}}.
\end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (4.48$_0$), (4.48$_1$) мають сім'ї неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (4.49$_0$), (4.49$_1$). Враховуючи умови теореми і оцінки (4.49$_0$), (4.49$_1$), можна послідовно показати, що ряди

$$x_i(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^j\left[q^{-(j+1)}t, f\left(\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t\right),\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(t,\sum_{l=0}^{i-2}x_l\left(q^{-(j+1)}t\right),\sum_{l=0}^{i-2}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right], \qquad (4.50_i)$$

$i=2,3,...$ рівномірно збігаються при всіх $t\geq T>0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4.48_i), $i=2,3,...$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (4.50_i), $i=2,3,...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4.48_i), $i=2,3,....$ Доведемо їх збіжність.

Оскільки ряд (4.50_1) рівномірно збігається при $t\geq T>0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (4.50_i) доведена уже для деякого $i\geq 1$ і доведемо, що ряд (4.50_{i+1}) також рівномірно збігається при $t\geq T>0$ і виконується оцінка (4.49_{i+1}). В силу (4.46), (4.50_{i+1}), (4.49_i) та $1>\bar{\lambda}>\lambda^*$ отримаємо

$$|x_{i+1}(t)|\leq\sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\left|f\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^{-(j+1)}t\right),\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t\right),\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right|\leq$$
$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\,l\left(\left|\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^{-(j+1)}t\right)-\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)-\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\right)\leq$$
$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda^*|^j\,l\left(\left|x_i\left(q^{-(j+1)}t\right)\right|+\left|x_i\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\right)\leq$$
$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,2lM\Delta^i\left(q^{-(j+1)}t\right)^{\bar{\nu}}\leq 2lM\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,\Delta^i\left(q^{\bar{\nu}}\right)^{-(j+1)}t^{\bar{\nu}}\leq$$
$$\leq 2lM\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,\Delta^i\left(\bar{\lambda}\right)^{-(j+1)}t^{\bar{\nu}}\leq 2lM\frac{1}{\bar{\lambda}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right)^j\Delta^i t^{\bar{\nu}}\leq$$
$$\leq\frac{2l}{1-\frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}}\frac{1}{\bar{\lambda}}M\Delta^i t^{\bar{\nu}}\leq\frac{2l}{\bar{\lambda}-\lambda^*}M\Delta^i t^{\bar{\nu}}\leq M\Delta^{i+1}t^{\bar{\nu}}.$$

Отже, системи рівнянь (4.48_i), $i=1,2,\ldots$ мають розв'язки у вигляді рядів (4.50_i), $i=1,2,\ldots$, що рівномірно збігаються при $t\geq T>0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i\left(t\right)$,$i=1,2,\ldots$, які задовольняють умови (4.49_i). Із (4.49_i) безпосередньо випливає, що ряд (4.47) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x\,(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (4.45) і задовольняє умові

$$|x\,(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta} t^{\bar{\nu}}.$$

Теорему 4.9 доведено.

Теорема 4.10. *Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

6. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;

7. $\Delta = \frac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, *де* $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\left\{\lambda_i, i = 1, 2, ..., n\right\}$.

Тоді система рівнянь (4.45) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *- деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4.52}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умові* $\lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$.

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду:

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{4.53_0}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f\left(t, x_0(t), x_0(t+1)\right), \tag{4.53_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \tag{4.53_i}$$

$i = 2, 3, ...$, і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умову

$$|x_i(t)| \leq M \Delta^i t^{\underline{\nu}}, i = 1, 2, \ldots. \tag{4.54_i}$$

де M- деяка додатна стала, $\underline{\nu} = \frac{\ln \underline{\lambda}}{\ln q}$, $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\left\{\lambda_i, i = 1, 2, ..., n\right\}$.

Дійсно, система рівнянь (4.48_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умові

$$|x_0(t)| \leq M t^{\underline{\nu}}, \tag{4.54_0}$$

де $M = \max_{\tau} |\omega(\tau)|$. Підставляючи в ($4.53_1$) ряд

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f\left(q^j t, x_0\left(q^j t\right), x_0(q^j t + 1)\right), \qquad (4.55_1)$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більше того, в силу умов 2., 3. та (4.54_0), отримуємо

$$\begin{aligned}
&|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|f\left(q^j t, x_0\left(q^j t\right), x_0(q^j t + 1)\right)\right| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l\left(\left|x_0\left(q^j t\right)\right| + \left|x_0(q^j t + 1)\right|\right) \le \\
&\le \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} l\left(M\left(q^j t\right)^{\underline{\nu}} + M\left(q^j t + 1\right)^{\underline{\nu}}\right) \le \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} 2lM\left(q^j t\right)^{\underline{\nu}} \le \\
&\le 2lM \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}\right)^{j} t^{\underline{\nu}} \le M \tfrac{1}{\lambda_*} \tfrac{2l}{1 - \frac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}} t^{\underline{\nu}} \le M \tfrac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} t^{\underline{\nu}} \le M\Delta t^{\underline{\nu}}.
\end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (4.53_0), (4.53_1) мають сім'ї неперервних при $t \ge T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (4.54_0), (4.54_1).

Враховуючи умови теореми і оцінки (4.54_0), (4.54_1), можна послідовно показати, що ряди

$$\begin{aligned}
x_i(t) = &-\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \left[f\left(q^j t, \textstyle\sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t\right), \displaystyle\sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t + 1\right)\right) - \right.\\
&\left. - f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l\left(q^j t\right), \sum_{l=0}^{i-2} x_l\left(q^j t + 1\right)\right)\right],
\end{aligned} \qquad (4.55_i)$$

$i = 2, 3, ...$ рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4.53_i), $i = 2, 3, ...$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (4.55_i), $i = 2, 3, ...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4.53_i), $i = 2, 3, ...$ Доведемо їх збіжність.

Справді, оскільки ряд (4.55_1) рівномірно збігається при $t \ge T > 0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (4.55_i) доведена уже для деякого $i \ge 1$ і доведемо, що ряд (4.55_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \ge T > 0$ і виконується оцінка (4.54_{i+1}). В силу умови 3., (4.55_{i+1}), (4.54_i) та $1 < \underline{\lambda} < \lambda_*$ отримаємо

$$
\begin{aligned}
&|x_{i+1}(t)| \le \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left| f\left(q^j t, \sum\limits_{l=0}^{i} x_l\left(q^j t\right), \sum\limits_{l=0}^{i} x_l\left(q^j t+1\right)\right) - \right.\\
&\left. -\left(q^j t, \sum\limits_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t\right), \sum\limits_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t+1\right)\right)\right| \le\\
&\le \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} l \left(\left|\sum\limits_{l=0}^{i} x_l\left(q^j t\right) - \sum\limits_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t\right)\right| + \right.\\
&\left. + \left|\sum\limits_{l=0}^{i} x_l\left(q^j t+1\right) - \sum\limits_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t+1\right)\right|\right) \le\\
&\le \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l \left(\left|x_i\left(q^j t\right)\right| + \left|x_i\left(q^j t+1\right)\right|\right) \le 2Ml\Delta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} \left(q^j t\right)^{\underline{\nu}} \le\\
&\le 2Ml\Delta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} \left(q^{\underline{\nu}}\right)^j t^{\underline{\nu}} \le 2Ml\Delta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}\right)^{j} t^{\underline{\nu}} \le\\
&\le M\Delta^i \tfrac{1}{\lambda_*} \tfrac{2l}{1-\frac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}} t^{\underline{\nu}} \le M\Delta^i \tfrac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} t^{\underline{\nu}} \le M\Delta^{i+1} t^{\underline{\nu}}.
\end{aligned}
$$

Отже, системи рівнянь (4.53_i), $i = 1, 2, \ldots$ мають розв'язки у вигляді рядів (4.55_i), $i = 1, 2, \ldots$, що рівномірно збігаються при $t \ge T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умови (4.54_i). Із (4.54_i) безпосередньо випливає, що ряд (4.52) рівномірно збігається при всіх $t \ge T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)| \le \frac{M}{1-\Delta} t^{\underline{\nu}}.$$

Теорему 4.10 доведено.

ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ

В четвертому розділі розглядаються системи нелінійних функціональних рівнянь. Досліджуються питання існування та єдиності неперервних обмежених розв'язків таких рівнянь та вивчаються їх властивості. Серед основних результатів цього розділу відмітимо наступні:

– встановлено умови існування та єдиності неперервного обмеженого розв'язку систем нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=F\left(t,x\left(t\right),x\left(t+f_1\left(t,x\left(t\right)\right)\right),...,x\left(t+f_k\left(t,x\left(t\right)\right)\right),\varepsilon\right),$$

де $t\in\mathbb{R}$, $q=const\neq 0,1$, $\varepsilon\ll 1$;

– розроблено метод побудови неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=\Lambda x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t+1\right)\right),$$

де $t\in\mathbb{R}$, $\Lambda-$дійсна $(n\times n)$-матриця вигляду $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$, $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$, q - деяка дійсна стала;

– досліджено властивості неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь;

– запропоновано метод побудови неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right)=\Lambda x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t\right),x\left(t+1\right)\right),$$

де $t\in\mathbb{R}$, $\Lambda-$дійсна $(n\times n)$-матриця вигляду $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$, $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$, q - деяка дійсна стала.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена вивченню питань існування неперервних розв'язків систем різницево-функціональних рівнянь і дослідженню їх властивостей. При цьому одержано наступні нові результати:

– розроблено метод побудови неперервних розв'язків систем лінійних та нелінійних різницево-функціональних рівнянь;

– встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків систем неоднорідних лінійних різницево-функціональних рівнянь;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановлено умови існування та єдиності неперервного обмеженого розв'язку систем нелінійних функціональних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Adams C.R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations / *C.R. Adams* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – Vol.30, №3. – P. 507-541.
2. *Agarwal R.P.* On stable periodic solutions of difference equations / *R.P. Agarwal, E.Yu. Romanenko* // Appl. Math. Lett. – 1998. – Vol.11, №4. – P.81-84.
3. *Agarwal R.P.* Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications. Second Edition, Revised and Expanded / *R.P. Agarwal.* – Pure And Appl. Math. – New York, Basel. – 2000. – 971 P.
4. *Antonevich A.* Linear Functional Equations. Operator Approach. / *A. Antonevich.* // Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 83. - - Birkhuser, 2012. – 184 p.
5. *Birkhoff G.D.* General theory of Linear Difference Equations / *G.D. Birkhoff* // Trans. Amer. Soc. – 1911. – Vol.12, №2. – P. 242-284.
6. *Birkhoff G.D.* Formal theory of irregualar linear difference equations / *G.D.Birkhoff* // Acta math. – 1930. – Vol.54. – P. 205-246.
7. *Birkhoff G.D.* Analytic theory of singular difference equations / *G.D. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky* // Acta math. – 1932. – Vol.60. – P. 1-89.
8. *Castillo E.* Functional Equations and Modelling in Science and Engineering. / *E. Castillo, M. Reyes Ruiz-Cobo.* – Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. – Vol. 161. - 1992. – 307 p.
9. *Castillo Ron E.* Ecuaciones funcionales y modelizaciyn en ciencia, ingeniегна y economна. / E. Castillo Ron, ı M. Reyes Ruiz Cobo. – Reverte, 1993. – 360 p.
10. *Guldberg A.* Theorie der linearen differenzengleichungen / *A. Guldberg, G.Wallenberg.* – Berlin, 1911. – 288 p.
11. *Gumowski I.* Recurrences and discrete dynamic systems / *I. Gumowski, C. Mira.* – Berlin, 1980. – 272 p.

12. *Kolmanovskii V. B.* Control of Systems with After-effect . / *V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet* . – Translations of Mathematical Monographs – 1996. – 340 p.

13. *Kuczma M.* Iterative Functional Equations. / *M. Kuczma, B. Choczewski, R.Ger.* – Encyclopaedia of Mathematics and its Applications. – Vol. 32. – Cambridge University Press. – 1990. – 552 p.

14. *Lakshmikantham V.* Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations. / *V. Lakshmikantham.* – Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. – Vol.90. – CRC Press, 1984. – 564 p.

15. *Martynyk D.I.* Periodic solutions of one class systems of difference equations / *D.I. Martynyk, N.A. Perestyuk, L.V. Khabarovskaya* // Mat. Phiz. – 1974. – Vol.15. – P. 98-104.

16. *Michael G.* Difference Equations in Normed Spaces: Stability and Oscillations. / *G. Michael.* – North-Holland Mathematics Studies. - Vol. 206. – Elsevier, 2007. – 378 p.

17. *Murray J.D.* Mathematical biology / *J.D. Murray.* – Berlin. Heidelberg. Springer, 1989. – 767 p.

18. *Nurlund N.E.* Forlesungen ber Differenzenrechung / *N.E. Nųrlund.* – Berlin, 1924. — 551 p.

19. *Poincare H.* /Sur les courbes definies equations differetielles / *H. Poincare* // J. Math. Ser. 4. – 1886. – 2. – P. 151-217.

20. *Stevic' S.* Asymptotic behaviour of solutions of a nonlinear difference equation with a continuous argument / *S. Stevic'* // Укр. мат. журн. – 2004. – Vol.56, №8. – C. 1095-1100.

21. *Stevic' S.* Unique existence of bounded continuous solutions on the real line of a class of nonlinear functional equations with complicated deviations. / *S. Stevic'* // Appl. Math. and Computation. 218 . – 2012. – P. 7813-7817.

22. *Stevic' S.* On some linear difference equations and inequalities with continuous argument./ *S. Stevic'* // Appl. Math. and Computation. 218 . – 2012. – P. 9831-9838.

23. *Wiener J.* Generalized Solutions of Functional Differential Equations / *J.Wiener.* – Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore – 1993. – 412 p.

24. *Yeromina T. O.* Continuous solutions of the systems of linear difference-functional equations. / *T. O. Yeromina.* – TAAC. The 4-th International scientific conference of students and young scientists. – K.: Bukrek, 2014. – P. 245-250.

25. *Акбергенов. А.А.* Періодичні розв'язки нелінійних різницевих рівнянь і їх властивості. / *А.А. Акбергенов.* // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2010. – №4. – С. 5-9.

26. *Беллман Р.* Дифференциально-разностные уравнения / *Р. Беллман, К.Л. Кук.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.

27. *Богай Н.А.* Глобальні розв'язки систем нелінійних різницевих рівнянь і їх властивості / *Н.А. Богай* // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.10, №3. – С. 291-297.

28. *Быков Я.В.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений / *Я.В. Быков, В.Г. Линенко.* – Фрунзе.: Илим, 1968. – 127 с.

29. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем / *И.В. Гайшун.* – Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2001. – 400 с.

30. *Гельфонд О.А.* Исчисление конечных разностей / *О.А. Гельфонд.* – М.: Наука, 1967. – 375 с.

31. *Герсеванов Н.М.* Итерационное исчисление и его приложения / *Н.М. Герсеванов.* – М.: Машстройиздат, 1950. – 69 с.

32. *Городній М.Ф.* Обмежені розв'язки деяких класів різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами / *М.Ф. Городній, О.А. Лагода* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №11. – С. 1495-1500.

33. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні розвязки одного класу різницево-функціональних рівнянь. / *Єрьоміна Т.О.* // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2014. – №4. – С.48-52.

34. *Єрьоміна Т.О.* Дослідження структури множини нneперервних розвязків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Єрьоміна Т.О.* // Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №3. – С. 341-350.
35. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні розв'язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна*// Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №4. – С. 447-461.
36. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні розв'язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // 16-та Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. – 2015. – С. 85-87.
37. *Єрьоміна Т.О.* Про умови існування неперервних розвязків одного класу різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна.* // Матем. в сучасному техн. унів. Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції. – 2015. – С. 28-30.
38. *Єрьоміна Т.О.* Про неперервні розв'язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // Міжнародна конференція молодих математиків 3-6 червня 2015 р. – К.: Ін-т математики НАН України, Київ. - 2015. – С. 145.
39. *Єрьоміна Т.О.* Про побудову неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна.* // Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – №2. – С. 71-74.
40. *Єрьоміна Т.О.* Про неперервні при $t \in \mathbb{R}$ розв'язки систем нелінійних функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна.* // Нелінійні коливання. – 2016. – Т.19, №1. – С. 32-47.
41. *Єрьоміна Т.О.* Побудова неперервних обмежених розв'язків одного класу систем неленійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // 17-та Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. – К. - Т.1. - 2016. - С. 106-108.
42. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні при $t \in \mathbb{R}$ розв'язки систем неленійних функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // 7-ма Міжнародна наукова конференція ім. І. Огієнка. – Кам'янець-Подільський, 2016. – С. 71-72.

43. *Єрьоміна Т.О.* Неперервні обмежені розв'язки одного класу систем неленійних різницево-функціональних рівнянь. / *Т.О. Єрьоміна* // Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, 19-21 травня 2016. – Ужгород, 2016. – С. 68.

44. *Колмановский В.Б.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / *В.Б. Колмановский, И.Р. Носов.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

45. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения / *В.Г. Курбатов.* – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990. – 168 с.

46. *Майстренко Ю.Л.* Аналитическая теория разностных уравнений. Качественное исследование дифференциально-функциональных уравнений / *Ю.Л. Майстренко.* – М.: Наукова думка, 1980. – С. 71-90.

47. *Марков А.А.* Исчисление конечных разностей / *А.А. Марков.* – Одесса, 1910. – 274 с.

48. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений / *Д.И. Мартынюк.* – К.: Наук. думка, 1972. – 248 С.

49. *Миролюбов А.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения./ *А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов.* – М.: Наука, 1986. – 128 с.

50. *Митропольськuй Ю.А.* Периодические решения дискретных разностных уравнений второго порядка / *Ю.А. Митропольськuй, Н.А.Михайловская* // Укр. мат. журн. – 1972. – Т.24, №4. – С. 543-547.

51. *Митропольськuй Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условнопериодическими коэффициентами / *Ю.А. Митропольськuй, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк.* – К.: Наук. думка, 1985. – 216 с.

52. *Пелюх Г.П.* Введение в теорию функциональных уравнений./ *Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковськuй* // К.: Ин-т мат. АН УССР, 1974. – 119 с.

53. *Пелюх Г.П.* О представлении асимптотически периодических решений нелинейных разностных уравнений / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 1990. – №7. – С. 939-946.

54. *Пелюх Г.П.* Общее решение систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* //Докл. АН. – 1994. –Т.336, №1 – С.16-21.

55. *Пелюх Г.П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений / *Г.П. Пелюх* // Диф. уравнения. – 1994. – Т.30, №6 – С. 1083-1085.

56. *Пелюх Г.П.* О структуре общего непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами/ *Г.П. Пелюх* // Докл. АН. – 1994. – Т.336, №5 – С. 587-589.

57. *Пелюх Г.П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами / *Г.П. Пелюх* // Докл. АН. – 1994. – Т.336, №4 – С. 450-452.

58. *Пелюх Г.П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами / *Г.П. Пелюх* // Диф. уравнения. – 1994. – Т.30, №3 – С. 514-519.

59. *Пелюх Г.П.* О существовании периодических решений дискретных разностных уравнений и их свойства / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т.46, № 10. – С. 1382-1387.

60. *Пелюх Г.П.* О периодических решениях систем разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48, № 1. – С. 140-155.

61. *Пелюх Г.П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, №2. – С. 304-312.

62. *Пелюх Г.П.* О непрерывных и ограниченных на всей оси решения систем нелинейных разностных уравнений и их свойства / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, № 12. – С. 1636-1645.

63. *Пелюх Г.П.* О структуре общего решения систем нелинейных разностных уравнений / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 1999. – № 10. – С. 1368-1378.

64. *Пелюх Г.П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, № 7. – С. 936-953.

65. *Пелюх Г.П.* Асимптотическое поведение решений нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, №1. – С. 166-170.

66. *Пелюх Г.П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений / *Г.П. Пелюх* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, № 12. – С. 1626-1633.

67. *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Докл. АН. – 2006. – Т.73, №3 – С. 269-272.

68. *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Докл. АН. – 2006. – Т.407, №5 – С. 600-603.

69. *Пелюх Г.П.* О структуре общего непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / *Г.П. Пелюх* // Доп. НАН України – 2007. – № 1. – С. 29-33.

70. *Пелюх Г.П.* Про періодичні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / *Г.П. Пелюх, О.А. Сівак* // Доп. НАН України – 2009. – № 8. – С. 24-28.

71. *Пелюх Г.П.* О линеаризации систем нелинейных функционально-разностных уравнений в окрестности положения равновесия. / *Г.П. Пелюх* // Докл. АН. – 2009. – №9. – С. 36-41.

72. *Пелюх Г.П.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / *Г.П. Пелюх, О.А. Сівак* // Нелінійні коливання. – 2009. – Т.12, № 3. – С. 320-348.

73. *Пелюх Г.П.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом / *Г.П. Пелюх, О.А. Сівак* // Нелінійні коливання. – 2010. – Т.13, № 1. – С. 75-95.

74. *Пелюх Г.П.* Періодичні розв'язки систем нелінійних функціональних рівнянь. / *Г.П. Пелюх, О.А. Сівак* // Нелінійні коливання. – 2013. – Т.16, №1. – С. 90-93.

75. *Пелюх Г.П.* Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / *Пелюх Г.П., Шарковський А.Н.* // Киев: Праці ін-т мат. – 2013. – Т. 95. – С. 38-57.

76. *Поварова О.А. п*ро структуру множини неперервних розвзязків лінійних функціонально-різницевих рівнянь./ *О.А.Поварова* // Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №3. – С. 399-406.

77. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. / *А. Пуанкаре* – М.: Гостехтеоретиздат, 1947. – 390 с.

78. *Романенко В.М.* Наближення обмежених розв'язків різницевих та диференціальних рівнянь розв'язками відповідних задач Коші / *В.М. Романенко* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – №2. – С. 142-147.

79. *Романенко О.Ю.* Основи якісної теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 / НАН України. – К., 2007. – 34 с.

80. *Романенко В.М.* Апроксимація обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами / *В.М. Романенко* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – №4. – С. 103-106.

81. *Самарський А.А.* Разностные уравнения / *А.А. Самарський, Ю.Н. Карамзин* – М.: Знание, 1978. – 64 с.

82. *Самойленко А.М.* Инвариантные торы разностных уравнений / *А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк, Н.А. Перестюк* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9, №10. – С. 1904-1910.

83. *Селиванов Д.Ф.* Курс исчисления конечных разностей / *Д.Ф. Селиванов.* – Санкт-Петербург, 1908. – 104 с.

84. *Сівак О.А.* Про існування неперервних при $t \in \mathbb{R}$розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих і їх властивості / *О.А. Сивак* // Зб. праць ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6, № 2. – С. 450-459.

85. *Сівак О.А.* Структура множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / *О.А. Сивак* // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 81-87.

86. *Слюсарчук В.Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів / *В.Ю. Слюсарчук.* – Рівне.: Видавництво НУВГП, 2005. – 234 с.

87. *Соколов Ю.Д.* Лінійні різницеві рівняння (з прикладами простіших застосувань). / *Ю.Д. Соколов.* – К.: Вид-во АН УРСР, 1935. – 51 с.

88. *Солдатов М.А.* Линейные однородные разностные уравнения / *М.А.Солдатов, А.А. Миролюбов.* – М.: Наука, 1981. – 206 с.

89. *Солдатов М.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения / М.А.Солдатов, А.А. Миролюбов. – М.: Наука, 1986. – 127 с.

90. *Халанай А.* Качественння теоря импульсных систем / *А. Халанай, Д. Векслер.* – М.: Мир, 1971. – 307 с.

91. *Хейл Дж.* Теоря функционально-дифференциальных уравнений / *Дж. Хейл.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.

92. *Цыпкин Я.З.* Периодические решения нелинейных конечно-разностных уравнений и их устойчивость / *Я.З. Цыпкин* // Труды международного симпозиума по нелинейных колебаниях, АН УССР. – 1963. – Т.2. – С. 191-207.

93. *Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложеня / *А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко.* – К.: Наук. думка, 1986. – 280 с.