НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Глиняна Катерина Валеріївна

УДК 519.21

Стохастичні потоки з дискретним часом

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук
ДОРОГОВЦЕВ Андрій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
РАДЧЕНКО Вадим Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри математичного аналізу
механіко-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
КОПИТКО Богдан Іванович,
Львівський національний університет ім. Івана Франка,
завідувач кафедри вищої математики
механіко-математичного факультету.

Захист відбудеться "____"______ 2016 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "____"______________ 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г. П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Об'єкт дослідження роботи – це стохастичні потоки броунівських часток і їх аналоги з дискретним часом. Простим прикладом стохастичного потоку броунівських часток на прямій є сукупність розв'язків задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння. Сім'я розв'язків $\{x(u,t), u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ задачі Коші

$$\begin{aligned} &dx(u,t) = \cos x(u,t) dw_1(t) + \sin x(u,t) dw_2(t), \\ &x(u,0) = u, \end{aligned}$$

де $w_1,\ w_2$ – незалежні вінерівські процеси, має наступні властивості:

1) для кожного $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\cdot)$ – броунівський рух на прямій,

2) для всіх $u_1 \leq u_2$ виконується $x(u_1,t) \leq x(u_2,t)$,

3) процеси $x(u,\cdot)$ є мартингалами відносно спільної фільтрації із сумісною квадратичною варіацією

$$d\langle x(u_1,\cdot), x(u_2,\cdot)\rangle(t) = cos(x(u_1,t) - x(u_2,t))dt.$$

Нехай Γ – додатно визначена парна функція на $\mathbb{R}$. Існування сім'ї $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$, що задовольняє умови 1)-3) з функцією Γ замість cos, було доведено Гаррісом[1] при припущенні, що Γ є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця на всіх множинах виду $\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon),\ \varepsilon > 0$. Функцію Γ називають локальною характеристикою потоку.

Слід виділити випадок $\Gamma = \mathbb{I}_{\{0\}}$. Потік з такою локальною характеристикою є потоком броунівських часток, в якому кожні дві частки рухаються незалежно одна від одної до моменту зустрічі, після чого склеюються і продовжують рух як одна. Вперше такий потік був побудований і вивчався Р. Арратья[2]. А. А. Дороговцев[3] отримав $n-$точкові рухи потоку Арратья як слабку границю $n-$точкових рухів потоків, що складаються з розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з диференційовними коефіцієнтами.

---

[1] Harris T. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}$ // Stoch. Proc. and Appl., – 1984. – **17.** – P. 187-210.

[2] Arratia R. Brownian motion on the line // PhD dissertation, Univ. Wisconsin – 1979. – 129 p.

[3] Dorogovtsev A.A. One Brownian stochastic flow // Theory of Stochastic Processes – 2004. – **10(26)**, 3-4. – P.21-25.

Для функції Γ, що задовольняє умову Ліпшиця на всій прямій, потік Гарріса $\{x(u,t)\}$ може бути отриманий як розв'язок задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння

$$dx(u,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x(u,t))dw_k(t),$$
$$x(u,0) = u,$$

де $\{w_k\}_{k\geq 1}$ – незалежні вінерівські процеси, $a = (a_1, a_2, \ldots)$– відображення з $\mathbb{R}$ в l_2, що задовольняє умову Ліпшиця, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(u)a_k(v) = \Gamma(u-v).$$

Поняття стохастичних потоків броунівських часток природним чином поширюється на багатовимірний випадок.

В одновимірному випадку, коли функція Γ не задовольняє умову Ліпшиця, в потоці Гарріса може відбуватись склеювання часток. Так, для $\tau = \inf\{t : \ x(u,t) = x(v,t)\}$ співвідношення $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} = 1$ еквівалентно $\int_0^1 \frac{u}{1-\Gamma(u)}du < \infty$. Більше того, А. А. Дороговцев[4] показав, що в потоці Арратья не лише усі частки, що стартували з обмеженого інтервалу, склеюються в кінцеве число кластерів за кінцевий час, але і загальний час вільного пробігу для них кінцевий. У зв'язку з цим виникають питання про асимптотику зростання кластерів (тобто кількість точок, склеєних в одну). У роботі А. А. Дороговцева, А. В. Гнедіна, М. Б. Вовчанського[5] отримано закон повторного логарифма для розміру кластера. Утворення кластерів пов'язано з поведінкою відхилення положення частки від точки її старту. Асимптотику рівномірного відхилення часток в потоці Гарріса від положення старту, коли час прямує до нуля, отримано О. Шамовим [6].

При аналізі стохастичних потоків із диференційовною локальною характеристикою застосовуються методи дослідження детермінованих динамічних систем. Так, для встановлення стійкості та асимптотичних властивостей потоку обчислюються показники Ляпунова,

[4]Дороговцев А. А. Стохастический интеграл по потоку Арратья // Доклады академии наук. Математика. – 2006. – **410**, 2. – С. 156-157.

[5]Dorogovtsev A. A., Gnedin A. V.,Vovchanskii M. B. Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow. // Theory Stoch. Process. – 2012 – **18**, 2. – P.1–7.

[6]Shamov A. Short-time asympototics of one-dimensional Harris flows. // Comm. on Stoch. Analysis – 2011 – **5**, 3. – P. 527-539.

вивчається питання про знаходження інваріантних многовидів (ці методи використовували такі автори як A. Carverhill, Y. Le Jan, L. Arnold, P. Baxendale, T. Harris, H. Kunita, Sh. Watanabe). Також досліджуються топологічні властивості потоків. Наприклад, коефіцієнти зачеплення траєкторій в потоці розглядалися такими авторами, як C. Zirbel, W. Woyczinski, J. W. Pitman, M. Yor, В. О. Кузнєцов.

Поведінку динамічної системи можна характеризувати мірою, що переноситься потоком. Зокрема, для процесу $\mu_t(A) = \mu\{\vec{u}: \ \vec{x}(\vec{u}, t) \in A\}$, де μ-деяка міра, $A \in B(\mathbb{R}^d)$, його асимптотичні властивості вивчалися у роботах авторів H. Kunita, C. Zirbel, E. Cinlar. У роботах А. А. Дороговцева введено новий клас стохастичних потоків зі взаємодією, в яких рух кожної частки залежить від розподілу маси всіх часток, що переносяться потоком. Для таких потоків М. П. Карликовою встановлено існування слабкого рішення і наведено умови, при яких проблема мартингалів з генератором напівгрупи потоку має єдиний розв'язок.

Для потоку роз'вязків стохастичного диференціального рівняння як випадкового елементу у просторі $C([0, \infty) \to C(\mathbb{R}^d))$, H. Kunita довів теорему Струка-Варадана про носій. Узагальнення цієї теореми для випадку потоку, породженого стохастичним диференціальним рівнянням зі взаємодією отримано А. Ю. Пилипенком[7]. У роботі А. А. Дороговцева і О. В. Остапенко[8] доведено принцип великих відхилень для стохастичного потоку з гладкою взаємодією як для випадкового елементу в просторі $C\left([0,1], L_2(\mathbb{R}, \mu)\right)$, де $\mu-$ стандартний гауссівський розподіл на $\mathbb{R}$ і для $n-$точкового руху потоку Арратья в просторі $C([0,1], \mathbb{R}^m)$.

Як було сказано, на стохастичний потік з диференційовною локальною характеристикою можна дивитися як на динамічну систему, керовану випадковим гауссівським полем. Для потоку зі склеюванням не існує гауссівського шуму, який задавав би потік. Питаннями опису шуму, що відповідає потоку з сингулярною взаємодією, займалися такі автори, як B. Tsirelson, J. Warren, S. Watanabe, Y. Le Jan, O. Raimond.

Р. Арратья отримав потік броунівських рухів, що склеюються, як границю випадкових блукань на цілочисельних ґратах. У роботі

[7]Пилипенко А.Ю. Теорема Струка-Варадана для потоков, порожденных стохастическими дифференциальными уравнениями с взаимодействием // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, 2. – С. 227-238.

[8]Dorogovtsev A. A., Ostapenko O.V. Large deviations for flows of interacting Brownian motions // Stochastics and Dynamics – 2010 – **10**, 3. – P. 315–339.

C. Newman, K. Ravishankar, R. Sun наближення будуються за допомогою сімейства випадкових блукань, траєкторії яких можуть перетинатися. J. Norris, A. Turner отримали потік Арратья як слабку границю потоку з дискретним часом, який будується за допомогою ітерацій випадкових відображень. Як вже відзначалося, А. А. Дороговцев довів, що потік Арратья також може бути отриманий як слабка границя потоків рішень стохастичних диференціальних рівнянь. Потоки Арратья і Гарріса І. І. Ніщенко[9] отримала як границі випадкових потоків з дискретним часом. Дискретні потоки будуються по аналогії з схемою Ейлера-Маруямі для наближення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Потоки з дискретним часом є функціоналами від послідовності гауссівських процесів, що дає можливість затосовувати до їх вивчення методи гауссівського аналізу. Відмінною рисою потоку з дискретним часом від потоків Гарріса є можливість перетину траєкторій. У дисертаційній роботі досліджується функціонал, що дорівнює часу, який дві частки у дискретному потоці проводять у порядку, відмінному від початкового. Відмітимо, що різниця двох траєкторій в дискретному потоці є наближенням розв'язку деякого стохастичного диференціального рівняння. Використовуючи це, отримано оцінки на швидкість збіжності до нуля вказаного функціоналу у разі, коли потоки з дискретним часом збігаються до потоку Арратья.

При вивченні функціоналів від стохастичного потоку, породженого стохастичним диференціальним рівнянням, застосовуються методи гауссівського аналізу. Для функцій від розв'язку стохастичного диференціального рівняння Н. Н. Криловим та А. Ю. Веретенніковим було виписано хаотичний розклад[10]. Аналог розкладу Крилова-Веретеннікова для дискретних потоків будується у дисертації. Тут використовується підхід, що ґрунтується на визначенні суперпозиції полілінійних форм Гільберта-Шмідта від білого шуму, запропонований А. А. Дороговцевим. Для стохастичних напівгруп і скінченномірних рухів потоку Арратья аналог розкладу Крилова-Веретеннікова було отримано А. А. Дороговцевим[11]. Аналог розкладу Крилова-Веретеннікова для $m-$точкового руху потоку Арратья у термінах інтегралів по частинах траєкторій у потоці запропоновано в роботі Г.

[9]Nishcenko I. Discrete time approximation of coalescing flows on the real line // Theory Stoch. Process – 2011 – **17**, 1. – P. 70–78.

[10]Veretennikov A.Yu., Krylov N.V. Explicit formulas of the solutions of stochastic equation // Mat. Sb. – 1976 – **100**,5. – P. 266–283.

[11]Dorogovtsev A.A. Krylov-Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows // Comm. on Stoch. Analysis – 2012 – **6**, 3. – P. 421-435.

В. Рябова та А. А. Дороговцева [12].

Аналіз для негладких потоків, зокрема, для потоку Арратья, розроблявся А. А. Дороговцевим. Так, був побудований інтеграл по потоку Арратья і в цих термінах отримано представлення Кларка для функціоналів від потоку Арратья. За аналогією із стохастичними диференціальними рівняннями, Т. В. Маловічко довела аналог теореми Гірсанова для потоків як з гладкою взаємодією, так і потоку Арратья.

У дисертаційній роботі вивчається напівгрупа $m-$точкового руху потоку Арратья. Питання про знаходження явного вигляду дії півгрупи є цікавим, оскільки міра, що описує розподіл часток у момент часу t, має нетривіальну сингулярну компоненту відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$. При знаходженні генератора напівгрупи основні складнощі пов'язані з описом його області визначення. У дисертаційній роботі описано ядро для генератора напівгрупи $m-$точкового руху потоку Арратья. Дія напівгрупи представлена у вигляді суми, де кожен доданок індексується бінарним лісом, який відповідає порядку склеювання траєкторій у потоці Арратья.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу виконано в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів у рамках держбюджетної теми “Аналіз складних систем”, державний реєстраційний номер 0111U001002. Також частина роботи виконана у рамках спільного наукового проекту НАН України та Російського фонду наукових досліджень “Геометричні аспекти теорії нескінченновимірних динамічних систем”, державний реєстраційний номер 0114U002965.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є вивчення властивостей стохастичних потоків броунівських часток з сінгулярною взаємодією за допомогою наближаючих потоків з дискретним часом. Ця мета включає в себе наступні завдання:

- дослідження граничної поведінки функціоналів від потоку з дискретним часом;
- отримання аналога представлення Крилова-Веретеннікова для дискретного потоку;

[12] Dorogovtsev A. A., Riabov G. V. Transformations of Wiener Measure and Orthogonal Expansions //arXiv:1310.4722 – 2013.

- представлення дії перехідної напівгрупи $n-$точкового руху потоку Арратья в інтегральному вигляді.

Об'єкт та предмет дослідження. Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є стохастичні потоки броунівських часток та їх аналоги з дискретним часом. Предметами дослідження є функціонали від потоків з дискретним часом, їх поведінка, коли дискретні потоки наближають поток Арратья; хаотичний розклад функціоналів від потоку з дискретним часом.

Методи дослідження. У роботі використано методи стохастичного аналізу, теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну роботи, такі:

- вивчено ергодичні властивості за просторовою змінною потоків з дискретним часом;
- отримано швидкість спадання до нуля часу порушення впорядкованості двох часток у потоці з дискретним часом, що наближає потік Арратья;
- встановлено аналог представлення Крилова-Веретеннікова для $n-$ точкового руху у стохастичному потоці з дискретним часом у термінах полілінійних форм від білого шуму, що задає потік;
- отримано інтегральну форму представлення Крилова-Веретеннікова для дискретного потоку;
- для напівгрупи $n-$точкового руху потоку Арратья знайдено ядро генератора та дію генератора на функції з цього ядра;
- отримано інтегральне представлення для дії напівгрупи $n-$точкового руху потоку Арратья у вигляді суми, де кожний доданок індексується бінарним лісом, який відповідає за порядок склеюваня часток у потоці.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальше застосування у різних розділах теорії випадкових процесів та стохастичного аналізу.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач, вибір напрямів і методів дослідження та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику здобувача доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву. Всі результати, представлені у дисертаційній роботі, отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- XIX міжнародній конференції молодих учених "Ломоносов" (Москва, 9-13 квітня 2012 р.);
- всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня 2013 р.);
- міжнародній математичній конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування"(Севастополь, Україна, 23-30 червня 2013 р.);
- Workshop Nachwuchsforscherinnen in Stochastik. Junior female researchers in probability (Berlin and Potsdam, Germany, 10-11 October 2013);
- 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (Вільнюс, Литва, 30 червня – 4 липня, 2014);
- науковій конференції пам'яті Ю. Лінніка “Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics”, (Санкт-Петербург, 14-18 вересня, 2015);
- міжнародній конференції “Stochastic Processes in Abstract Space”, (Київ, 14 – 16 жовтня, 2015);
- науковому семінарі “Числення Маллявена та його застосування” Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора А. А. Дороговцева;
- науковому семінарі “Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів” кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного тех-

нічного університету України "Київський політехнічний інститут" під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора О. І. Клесова та доктора фіз.-мат. наук, професора О. В. Іванова;

- науковому семінарі "Аналітичні методи в теорії дифузійних процесів" кафедри вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені І. Франка під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Б. І. Копитка.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в п'яти статтях, чотири з яких в журналі, що індексується в наукометричній базі Scopus, і в шести збірках тез конференцій, п'ять з яких є міжнародними.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів і висновків, викладених на 126 сторінках, а також списку використаних джерел із 65 найменувань. Загальний обсяг роботи – 133 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і сформульовано задачі дослідження, а також висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію роботи та публікації.

Перший розділ дисертації присвячений вивченню потоків випадкових відображень з дискретним часом. Такі потоки в подальшому використовуються для наближення стохастичних потоків броунівських часток із взаємодією. В першому підрозділі будується дискретний за часом потік відображень $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ за допомогою рекурентного співвідношення:

$$x_{n+1} = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u)),\ x_0(u) = u, \tag{1}$$

де $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ – послідовність незалежних стаціонарних гауссівських процесів, що мають неперервну коваріаційну функцію Γ і нульове середнє.

Перевірено коректність визначення такої послідовності відображень $\{x_n\}_{n\geq 1}$ та їх неперервність у середньому довільного порядку. Зауважимо, що при фіксованому $u \in \mathbb{R}$ рівняння (1) визначає симетричне випадкове блукання на прямій. Тому сім'ю $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ можна розглядати як потік випадкових блукань, що стартують з кожної точки прямої. Для фіксованого набору точок $u_1, \dots, x_N$ послідовність векторів $(x_n(u_1), \dots, x_n(u_N))_{n\geq 1}$ будемо називати $N-$точковим рухом потоку.

Лема 1.1.4. *Послідовність векторів*

$$\{\vec{x}_n(\vec{u}) = (x_n(u_1), \dots, x_n(u_N))\}_{n\geq 1},\ u_1 < u_2 < \dots < u_N$$

утворює ланцюг Маркова в $\mathbb{R}^N$ *з перехідною ймовірністю*

$$P(\vec{x}, \Delta) = \mathbb{P}\{(\zeta(x_1), \dots, \zeta(x_N)) \in \Delta\},$$

де $\vec{x} \in \mathbb{R}^N, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\{\zeta(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ *– гауссівский процес з середнім* $\mathbb{E}\zeta(u) = u$ *і коваріаційною функцією* $\mathbb{E}(\zeta(u) - u)(\zeta(v) - v) = \Gamma(u - v)$

Відмітимо, що послідовність $\{x_n(u_2) - x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$ також утворює ланцюг Маркова.

Лема 1.1.5 *Послідовність* $\{z_n = x_n(u_2) - x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$ *є ланцюгом Маркова таким, що*

$$\{z_n\}_{n\geq 1} \stackrel{d}{=} \{v_n\}_{n\geq 1},$$

де послідовність $\{v_n\}_{n\geq 1}$ *задається співвідношенням:*

$$\begin{aligned} &v_{n+1} = v_n + \sqrt{2 - 2\Gamma(v_n)}\eta_{n+1}, \\ &v_0 = u_2 - u_1, \end{aligned}$$

і $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ *– незалежні стандартні гауссівскі величини.*

Наступний параграф глави присвячено вивченню властивостей випадкових відображень, з яких складається побудований дискретний потік. Із стаціонарності процесів ξ_n, за якими будується потік, випливає стаціонарність відображень $\{x_n(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$. А саме, має місце лема:

Лема 1.2.1 *Наступний процес із значеннями в* $\mathbb{R}^\infty$

$$\{(\xi_1(u), x_1(u) - u, \xi_2(u), x_2(u) - u, \dots, \xi_n(u), x_n(u) - u, \dots), u \in \mathbb{R}\}$$

є стаціонарним у вузькому сенсі.

Наступна теорема встановлює ергодичність процесу $\{x_n(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 1.2.2 *Нехай потік з дискретним часом* $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ *побудовано за послідовністю незалежних стаціонарних гауссівських* *процесів* $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ *з коваріаційною функцією* Γ *такою, що* $\Gamma(u) \to 0$ *при* $u \to \infty$, *тобто*

$$x_{n+1}(u) = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u))$$
$$x_0(u) = u.$$

Тоді процес $\{x_N(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$ *є ергодичним при кожному* $N \geq 1$.

В параграфі 1.3 наведено відомі результати, що стосуються наближення потоків Гарріса потоками з дискретним часом (1). Теорема про збіжність потоків з дискретним часом до потоку Арратья була отримана І. І. Ніщенко. Позначимо через $\widetilde{x}_n(u, \cdot)$ ламану на проміжку часу $[0,1]$, яку побудовано по вузлах $\left(\frac{k}{n}, x_k(u)\right)$, де $x_k(u)$ визначені рекурентним співвідношенням (1).

Теорема 1.3.3[13] *Нехай для кожного* $m \geq 1$ $\widetilde{x}_m$ *побудовані за послідовністю* $\{\xi_n^m, n \geq 1\}$, *де незалежні стаціонарні гауссівські процеси* ξ_n^m *мають коваріаційну функцію* $\frac{1}{\sqrt{m}}\Gamma_m$, *що задовольняє умову Ліпшиця. Для* $m \geq 1$ *позначимо*

$$c_m = \sup_{\mathbb{R}} \frac{2 - 2\Gamma_m(x)}{x^2}.$$

Якщо (i) $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m e^{c_m}}{m} = 0$;

(ii) для всякого $\delta > 0$ $\sup_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} |\Gamma_m(x)| \to 0, m \to \infty$;

тоді випадковий процес $\{\widetilde{x}_m(u_1, \cdot), \ldots, \widetilde{x}_m(u_l, \cdot); m \geq 1\}$ *слабко збігається в* $C([0,1], \mathbb{R}^l)$ *до* l*-точкового руху потоку Арратья.*

Параграф 1.4. присвячено вивченню функціонала від двоточкового руху потока з дискретним часом, який відповідає часу порушення впорядкованості:

$$\Phi_m = \int_0^1 1\!\!1_{\{x_m(u_2,t) - x_m(u_1,t) < 0\}} dt,$$

де $u_2 > u_1$ – деякі фіксовані точки прямої.

[13] Nishcenko I. Discrete time approximation of coalescing flows on the real line // Theory Stoch. Process – 2011 – **17**, 1. – P. 70–78.

Теорема 1.4.1 *Припустимо, що для всіх $m \geq 1$ коваріаційна функція Γ_m задовольняє умови теореми 1.3.3. Тоді*

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > 0\} \leq m \cdot F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right),$$

де $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$.

Якщо до того ж $\{\Gamma_m\}_{m\geq 1}$ такі, що

(i) $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m^2 e^{c_m}}{m} = 0$;

(ii) $\frac{u}{\sqrt{2-2\Gamma_m(u)}}$ *зростає при $u > 0$;*

(iii) $2 - 2\Gamma_m(\frac{1}{\sqrt{c_m}}) \geq \frac{1}{K^2}, m \geq 1$ *для деякої константи K,*

тоді для всіх $\varepsilon > 0$ існує константа $A > 0$ така, що

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\}}{F\left(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)} \geq A.$$

Оскільки дискретні потоки побудовано за послідовністю гауссівських процесів, то для вивчення функціоналів від таких потоків можна використовувати розклад Іто-Вінера гауссівських функціоналів. Другий розділ присвячено опису білого шуму, що породжує потік з дискретним часом і побудові розкладу Іто-Вінера функціоналів $m-$точкового руху потоку. У першому параграфі приведені основні означення і твердження про розклад Іто-Вінера випадкових величин, вимірних відносно білого шуму в гільбертовому просторі.

Будемо казати, що білий шум η в гільбертовому просторі H породжує гауссівський процес $\{\xi(u),\ u \in \mathbb{R}\}$, якщо для будь-якого $u \in \mathbb{R}$ існує такий елемент $f_u \in H$, що $\xi(u) = (f_u, \eta)$. Тоді значення функціонала від процесу $\{\xi\}$ є вимірним відносно білого шуму, і можна говорити про його розклад Іто-Вінера. У параграфі 2.2 будується білий шум, що породжує потік з дискретним часом $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Нехай гільбертів простір H^Γ є відтворюючим ядром, що побудовано за функцією $\{\Gamma(\cdot - v),\ v \in \mathbb{R}\}$. Для кожного $k \geq 1$ задамо η_k – білий шум в просторі H^Γ, що породжує процес ξ_k. У просторі $l_2(H^\Gamma) = \{F = (f_1, \ldots, f_k, \ldots) :\ f_j \in H^\Gamma,\ \sum_{k=1}^\infty ||f_k||^2_{H^\Gamma} < \infty\}$ визначимо білий шум η за правилом: $(\eta, F) = \sum_{k=1}^\infty (\eta_k, f_k)$.

Отримавши опис білого шуму, що задає послідовність процесів $\{\xi_n\}$, ми переходимо до розкладу Іто-Вінера величин виду $f(x_n(u_1),$

$\dots, x_n(u_m))$. У параграфі 2.3 розклад отримано у термінах операторів $\{Q_k\}_{k\geq 1}$, визначених через розклад випадкової величини $f(x_1(u_1), \dots, x_1(u_m))$:

$$f(u_1 + \xi_1(u_1), \dots, u_m + \xi_1(u_m)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1),$$

тут $Q_k f(\vec{u}; \cdot, \dots, \cdot)$ – $k-$лінійна форма Гільберта-Шмідта на H^Γ. Позначимо через

$$B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} | f\text{-вимірна}, \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} |f(\vec{u})| < +\infty\}$$

простір функцій з нормою $||f|| = \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} |f(\vec{u})|$.

Дію операторів Q_k можна розповсюдити на функції зі значеннями у гільбертовому просторі. Нехай H – деякий сепарабельний гільбертовий простір, можливо, відмінний від H^Γ, з ортонормованим базисом $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Введемо простір функцій

$$B(\mathbb{R}^m; H) = \{F : \mathbb{R}^m \to H | F\text{–вимірна}, \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} \|F(\vec{u})\| < +\infty\}.$$

Визначимо дію операторів Q_k на функції $F \in B(\mathbb{R}^m; H)$ за правилом:

$$Q_k F(\vec{u}; \cdot, \dots, \cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_k f_j(\vec{u}; \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{k}) e_j.$$

Теорема 2.3.2. *Нехай $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ – потік з дискретним часом (1). Тоді для довільної $\varphi \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ має місце розклад*

$$\varphi(x_n(u_1), \dots, x_n(u_m)) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1, \dots, l_n \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_n = k}} Q_{l_n} Q_{l_{n-1}} \dots Q_{l_1} \varphi(\vec{u}; \underbrace{\eta_n, \dots, \eta_n}_{l_n}, \dots \underbrace{\eta_1, \dots, \eta_1}_{l_1}).$$

Отриманий розклад є дискретним аналогом представлення Крилова–Веретеннікова для функції від розв'язку стохастичного диференціального рівняння.

Оскільки випадкова величина $\varphi(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m))$ вимірна відносно $\sigma-$алгебри, породженої процесами $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, її розклад можна записати в термінах значень процесів ξ_i. Позначимо через $\xi^{\circledast k}(\vec{u})$, добуток Віка $\xi(u_1)*\ldots*\xi(u_k)$. Введемо множину мультиіндексів $J(k,m)=\{r=(i_1,\ldots,i_k), i_j\in\{1,\ldots,m\}\}$. Нехай вектор $\vec{u}\in\mathbb{R}^m$, для мультиіндексу $r=(i_1,\ldots,i_k)\in J(k;m)$ писатимемо $\vec{u}_r=(u_{i_1},\ldots,u_{i_k})\in\mathbb{R}^k$.

Нехай $J(k,m)=\{r=(i_1,\ldots,i_k), i_j\in\{1,\ldots,m\}\}$. У роботі отримано явний вид ядер розкладу Іто–Вінера в термінах щільності розподілу вектору $(\xi(u_1),\xi(u_2),\ldots,\xi(u_m))$. Приведемо деякі достатні умови для існування щільності розподілу цього випадкового вектора:

Лема 2.3.4. *Нехай стаціонарний гауссівський процес ξ задовольняє одну з наступних умов :*

(i) коваріаційна функція Γ подається у вигляді $\Gamma=\psi*\psi$, де $\psi\in L_2(\mathbb{R})$;

(ii) процес ξ має спектральну щільність відносно міри Лебега.

Тоді для довільних $u_1<u_2<\ldots<u_m$ випадковий вектор $(\xi(u_1),\xi(u_2),\ldots,\xi(u_m))$ має щільність розподілу.

Позначимо через $p(\cdot,\vec{u})$ – щільність розподілу випадкового вектора $(u_1+\xi_1(u_1),\ldots,u_m+\xi_1(u_m))$. Для мультиіндекса $r=(i_1,\ldots,i_k)$ писатимемо $p^{(r)}(\vec{v},\vec{u})=\frac{\partial^k}{\partial v_{i_1}\ldots\partial v_{i_k}}p(\vec{v},\vec{u})$.

Теорема 2.3.3. *Для довільної функції $\varphi\in B(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$*

$$\varphi(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m))=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!\ldots k_n!}\sum_{r_n\in J(k_n,m)}\cdots$$

$$\sum_{r_n\in J(k_1,m)}\int_{\mathbb{R}^m}\cdots\int_{\mathbb{R}^m}p^{(r_n)}(\vec{\alpha}^{(n)},\vec{\alpha}^{(n-1)})p^{(r_{(n-1)})}(\vec{\alpha}^{(n-1)},\vec{\alpha}^{(n-2)})\ldots$$

$$p^{(r_1)}(\vec{\alpha}^{(1)},\vec{u})\varphi(\vec{\alpha}^{(n)})\xi_n^{\circledast k_n}(\vec{\alpha}^{(n-1)}_{r_n})\xi_{n-1}^{\circledast k_{n-1}}(\vec{\alpha}^{(n-2)}_{r_{n-1}})\ldots\xi_1^{\circledast k_1}(\vec{u}_{r_1})d\vec{\alpha}^{(n)}\ldots d\vec{\alpha}^{(1)}.$$

У третьому розділі розглядаються функціонали від $m-$точкового руху потоку Арратья. Склеювання часток у потоці призводить до того, що у момент t розподіл $m-$точкового руху потоку не має щільності відносно міри Лебега. Тут отримано опис дії перехідної напівгрупи $m-$точкового руху потоку Арратья в інтегральному вигляді.

$m-$точковий рух потоку Арратья $\{x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)\}$ до моменту першого склеювання співпадає по розподілу з $m-$вимірним броунівським рухом $w(\vec{u},t)$, що стартував з точок $u_1,\ldots,u_m$, до моменту виходу на межу симплексу $\Delta_m=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^m : u_1\le u_2\le\ldots\le u_m\}$:

$$\{(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))1\!\!\mathrm{I}_{\{t\le\tau_1\}}\}_{t\ge 0}\stackrel{d}{=}\{w(\vec{u},t)1\!\!\mathrm{I}_{\{t\le\theta\}}\}_{t\ge 0},$$

де $\tau_1=\inf\{t:(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))\in\delta_m\}$ і $\theta=\inf\{t:w(\vec{u},t)\in\Delta_m\}$.

Зважаючи на це, перший параграф глави присвячений вивченню броунівського руху в симплексі Δ_m. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial}{\partial s}F(\vec{u},s)=-\frac{1}{2}\Delta F(\vec{u},s),\ (\vec{u},s)\in\overset{\circ}{\Delta}_m\times[0,t), \tag{3}$$

$$\lim_{s\to t}F(\vec{u},s)=0, \tag{4}$$

$$F(\vec{u},s)=\varphi(\vec{u}),\ \vec{u}\in\partial\Delta_m, \tag{5}$$

$$F\in C_0^2(\overset{\circ}{\Delta}_m\times(0,t))$$

Відоме[14] імовірнісне представлення розв'язку крайової задачі (3)–(5):

Лема 3.1.2 *Нехай F – розв'язок крайової задачі (3)–(5) та $\{w_s(u_i,t),\ t\ge s\}_{i=1}^m$ – незалежні броунівські процеси, $w_s(u_i,s)=u_i,\vec{u}\in\Delta_m$. Позначимо $\tau=\inf\{t\ge s:(w_s(u_1,t),\ldots,w_s(u_m,t))\in\partial\Delta_m\}$. Тоді для всіх $\varphi\in C_0^2(\partial\Delta_m)$ та $t>s$*

$$\mathbb{E}1\!\!\mathrm{I}_{\{t\ge\tau\}}\varphi(w_0(u_1,\tau),\ldots,w_0(u_m,\tau))=F(\vec{u},0).$$

У параграфі 3.2 $m-$точковий рух потоку Арратья характеризується як марківський процес. Для нього визначена напівгрупа $\{T_{m,t}\}_{t\ge 0}$ за правилом:

$$T_{m,t}f(\vec{u})=\mathbb{E}f(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)).$$

[14]Гихман И.И., Скороход А.В, Введение в теорию случайных процессов // М.: 1977. - 568 с.

Ми випишемо дію напівгрупи $T_{m,t}$ на функцію f, за допомогою розв'язку системи крайових задач. Відомо, що функція $T_{m,t}f$ задовольняє рівняння Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{m,t}f(\vec{u}) = \mathcal{A}T_{m,t}f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m, t > 0,$$

де $\mathcal{A}$ – генератор напівгрупи та f – функція з області визначення генератора. Для зручності читача приведемо визначення ядра замкнутого лінійного оператора A з областю визначення $\mathcal{D}(A)$.

Означення 3.2.1. *Підмножина $D \subset \mathcal{D}(A)$ називається ядром для оператора A, якщо замикання звуження оператора A на D дорівнює A.*

Позначимо через $C_0(\Delta_m) = \{f \in C(\Delta_m),\ \lim_{||u||\to\infty} f(u) = 0\}$.

Теорема 3.2.2. *Множина функцій*

$$D_m = \{f \in C_0^2(\Delta_m) : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C_0(\Delta_m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}1\!\!\mathrm{I}_{\{x_i = x_j\}} = 0, i \neq j\}$$

є ядром для генератора $\mathcal{A}$ напівгрупи $Q_{m,t}$, і для довільної $f \in D_m$

$$\mathcal{A}f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Delta f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m.$$

Введемо позначення:

$$\pi_i : \Delta_m \to \Delta_{m-1}, \quad \pi_i(u_1, \ldots, u_m) = (u_1, \ldots, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_m),$$

$\pi_i^{-1} : \Delta_{m-1} \to \Delta_m, \quad \pi_i^{-1}(u_1, \ldots, u_m) = (u_1, \ldots, u_i, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{m-1}),$
$\mathcal{K}_i^m = \{\vec{u} \in \partial\Delta_m : \ u_i = u_{i+1},\ u_j < u_{j+1},\ i \neq j\}$. Функції $T_{m,t}f$ є розв'язком системи крайових задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{m,t}f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Delta T_{m,t}f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m, t \geq 0, \tag{6}$$

$$T_{m,0}f(\vec{u}) = f(\vec{u}), \tag{7}$$

$$T_{m,t}f(\vec{u}) = (T_{m-1,t}f \circ \pi_i^{-1})(\pi_i \vec{u}), \vec{u} \in K_i^m, \tag{8}$$

$$T_{m,t}f(\cdot) \in D_m.$$

У третьому параграфі глави виписано розв'язок системи крайових задач (6)-(8). Для наочності запису розв'язку використовується мова бінарних лісів. Введемо необхідні визначення. Множину вершин графу позначимо

$$U_k^m = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_k^{(k)}, u_1^{(k+1)}, \ldots, u_{k+1}^{(k+1)}, \ldots, u_1^{(m)}, \ldots, u_m^{(m)}, \\ \vec{u}^{(j)} \in \Delta_j\}.$$

Ребра задаються за допомогою сімейства відображень $\mathcal{G}_j = \{\sigma_j : \{1, 2, \ldots, j\} \to \{1, 2, \ldots, j-1\}, \sigma_j\text{– сюр'єкція}\}$. Для кожного відображення $\sigma_j \in \mathcal{G}_j$ існує єдина пара чисел $(l_1, l_2) \equiv (l_1(\sigma_j), l_2(\sigma_j)) \subset \{1, 2, \ldots, j\}$ така, що $\sigma_j(l_1) = \sigma_j(l_2), l_1 < l_2$. Для фіксованої множини відображень $\{\sigma_m, \sigma_{m-1}, \ldots, \sigma_{k+1}\}$, де $\sigma_j \in \mathcal{G}$, визначимо множину ребер:

$$R_k^m \equiv R_k^m(\sigma_m, \sigma_{m-1}, \ldots, \sigma_{k+1}) = \\ = \{(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}), i = k+1, \ldots, m, j = 1, \ldots, i\}.$$

Множина вершин і сукупність ребер на них утворюють бінарні ліси з k коренями і m листками: $T_k^m = \{(U_k^m, R_k^m(\sigma_m, \ldots, \sigma_{k+1})), \sigma_j \in \mathcal{G}_j\}$. Будемо говорити, що ребра $\left(u_j^{(n)}, u_{\sigma_n(j)}^{(n-1)}\right)$ и $\left(u_i^{(n)}, u_{\sigma_n(i)}^{(n-1)}\right)$ перетинаються, якщо $i < j$ і $\sigma_n(i) > \sigma_n(j)$. Для кожного лісу $T \in T_k^m$, кількість перетинів його ребер позначимо через $\varepsilon(T)$. Множині вершин $\{u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_j^{(j)}\}$ лісу $T \in T_k^m$ поставимо у відповідність час $t_j, j \in \{k, \ldots, m\}$. Кожному ребру лісу T припишемо вагу, яка залежить від вершин, що з'єднуються цим ребром, та відповідних моментів часу:

$$g(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}) = \sqrt{\frac{u_{l_2}^{(i)} - u_{l_1}^{(i)}}{t_i - t_{i-1}}} p_{t_i - t_{i-1}}(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i)})$$

для $j \in \{l_1, l_2\}$, де $l_1 < l_2$ такі, що $\sigma_i(l_1) = \sigma_i(l_2)$ та

$$g(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}) = p_{t_i - t_{i-1}}(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)})$$

для $j \notin \{l_1, l_2\}$, де $p_s(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(u_1-u_2)^2}{2s}}$.

Позначимо через $|T|$ добуток ваг усіх ребер лісу $T \in T_k^m$:

$$|T| = \prod_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{i} g(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}).$$

Кожному лісу поставимо у відповідність набір індексів $(i_{m-1}, i_{m-2}, \ldots, i_k)$, де кожний індекс i_j є координатою вектора $\vec{u}^{(j)}$ такою, що $\sigma_{j+1}(l_1) = \sigma_{j+1}(l_2) = i_j, l_1 \neq l_2$.

Дію лісу $T \in T_k^m$ на функцію $f : \Delta_m \to \mathbb{R}$ визначимо за правилом:

$$f_T = f \circ \pi_{i_{m-1}}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_{i_k}^{-1}.$$

Теорема 3.3.1. *Нехай $f \in D_m$ и G_m – функція Гріна крайової задачі (6) – (8). Тоді*

$$Q_{m,t} f(\vec{u}) = \int_{\Delta_m} f(\vec{y}) G_m(\vec{u}, \vec{y}, t, 0) d\vec{y} +$$

$$+ \sum_{T \in T_{m-1}^m} (-1)^{\varepsilon(T)} \int_0^1 \int_{\Delta_{m-1}} \int_{\Delta_{m-1}} f_T(\vec{y}) G_{m-1}(\vec{u}^{(m-1)}, \vec{y}, t_{m-1}, 0)$$

$$|T(\vec{u}, \vec{u}^{(m-1)}, t, t_{m-1})| d\vec{u}^{(m-1)} dy dt_{m-1} +$$

$$+ \sum_{T \in T_{m-2}^m} \int_0^t \int_0^{t_{m-1}} \int_{\Delta_{m-1}} \int_{\Delta_{m-2}} \int_{\Delta_{m-2}} (-1)^{\varepsilon(T)} f_T(\vec{y})$$

$$G_{m-2}(\vec{u}^{(m-2)}, \vec{y}, t_{m-2}, 0) |T(\vec{u}, \vec{u}^{(m-1)}, \vec{u}^{(m-2)}, t, t_{m-1}, t_{m-2})| \cdot$$

$$\cdot d\vec{y} d\vec{u}^{(m-2)} d\vec{u}^{(m-1)} dt_{m-2} dt_{m-1} + \ldots$$

$$+ \sum_{T \in T_1^m} (-1)^{\varepsilon(T)} \int_0^t \int_0^{t_{m-1}} \ldots \int_0^{t_2} \int_{\Delta_{m-1}} \int_{\Delta_{m-2}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}}$$

$$f_T(\vec{y}) G_1(u^{(1)}, y, t_1, 0) |T(\vec{u}, \vec{u}^{(m-1)}, \ldots, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(1)}, t, t_{m-1},$$

$$\ldots, t_1)|dydu^{(1)} \ldots d\vec{u}^{(m-1)}dt_1 \ldots dt_{m-1}.$$

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено вивченню стохастичних потоків броунівських часток із сингулярною взаємодією та їх аналогів з дискретним часом.

- Для потоку з дискретним часом доведено стаціонарність та ергодичність по просторовій змінній.
- Для потоків з дискретним часом, що наближають потік Арратья, встановлено асимптотику швидкості збіжності до нуля часу, впродовж якого має місце порушення впорядкованості двох частинок з потоку.
- Отримано аналог представлення Крилова-Веретеннікова для потоку з дискретним часом у термінах полілінійних форм від білого шуму, що породжує потік.
- Дискретний аналог формули Крилова-Веретеннікова виписано в термінах інтегралів від значень гауссівських процесів, які керують потоком.
- Знайдено ядро для генератора напівгрупи процесу $m-$точкових рухів потоку Арратья та записано дію генератора на функції з цього ядра.
- Виписано систему крайових задач для напівгрупи $m-$точкових рухів потоку Арратья. Дію напівгрупи $m-$точкових рухів на функцію представлено у вигляді суми інтегралів, де кожний доданок проіндексовано бінарним лісом, який відповідає за послідовність склеювання часток у потоці Арратья.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Glinyanaya E. V. Discrete analogue of the Krylov-Veretennikov expansion/ E. V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes. – 2011. – **17(33)**, 1. – P. 39-49.
2. Glinyanaya E. V. Disordering asymptotics in the discrete approximation of an Arratia flow/ E. V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes. – 2012. –**18(34)**, 2. – P. 8-14.

3. Glinyanaya E. V. Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests/ E. V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes. – 2014. – **19(35)**, 2. – P. 31-41.

4. Glinyanaya E. V. Krylov-Veretennikov representation for the m-point motion of a discrete-time flow/ E. V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes. –2015. – **20(36)**, 1. – P. 63-77.

5. Глиняная Е. В. . Эргодичность относительно пространственной переменной дискретных по времени стохастических потоков/ Е. В. Глиняная // Доклады Национальной академии наук Украины. – 2015. – **8.** – С. 13-20.

6. Глиняная Е. В. Дискретный аналог разложения Крылова-Веретенникова [Електронний ресурс] / Е. В. Глиняная // Конференция "Ломоносов 2012", Москва. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_ 2012/1797 /46365_2333.pdf.

7. Глиняная Е. В. О количестве беспорядка в приближениях стохастических потоков со склеиванием /Е. В. Глиняная // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, Україна, 25 лютого - 3 березня, 2013): тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 7.

8. Glinyanaya E. V. Asymptotic of disordering in the discrete approximation of the Arratia flow / E. V. Glinyanaya// Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, Україна, 23-20 червня 2013): тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАНУ, 2013. – С. 328.

9. Glinyanaya E. V. Discrete-time stochastic flows/ E. V. Glinyanaya // 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (Vilnius, Lithuania, 30 June - 4 July, 2014): abstracts of communications. – Vilnius, 2014. – P. 130.

10. Glinyanaya E. V. Discrete-time stochastic flow [Електронний ресурс] / E. V. Glinyanaya // Yu. V. Linnik Centennial Conference Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics (St.Petesburg, September). – 2015. – P. 21 –

Режим доступу до ресурсу: http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2015 /Linnik/abstract_pt.pdf.

11. Glinyanaya E. V. Discrete-time approximation of Harris flows and discrete-time analogue of Krylov-Veretennikov expansion / E. V. Glinyanaya // International Conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces" (Kyiv, Ukraine 14-16 October, 2015): abstracts. – Київ. – 2015. – P. 16.

Анотації

Глиняна К. В. Стохастичні потоки з дискретним часом. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню стохастичних потоків броунівських часток з сингулярною взаємодією та їх аналогів з дискретним часом. Простим прикладом стохастичного потоку броунівських часток на прямій є сукупність розв'язків задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння. В цьому випадку броунівськи частки не зустрічаються та потік є потоком гомеоморфізмів. В роботі вивчаються потоки броунівських часток, що зустрічаються, та після зустрічі склеєються і продовжують рух як одна частинка. Такі потоки було побудовано Р. Арратья та Т. Гаррісом. Потоки Арратья і Гарріса І. І. Ніщенко отримала як границі випадкових потоків з дискретним часом. Дискретні потоки будуються по аналогії з схемою Ейлера-Маруямі для наближення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Потоки з дискретним часом є функціоналами від послідовності гауссівських процесів, що дає можливість затосовувати до їх вивчення методи гауссівського аналізу. Для потоку з дискретним часом у роботі доведено стаціонарність та ергодичність по просторовій змінній. Відмінною рисою потоку з дискретним часом від потоків Гарріса є можливість перетину траєкторій. У дисертаційній роботі досліджується функціонал, що дорівнює часу, який дві частки у дискретному потоці проводять у порядку, відмінному від початкового. Відмітимо, що різниця двох траєкторій в дискретному потоці є наближенням розв'язку деякого стохастичного диференціального рівняння. Використовуючи це, отримано оцінки на швидкість збіжності до нуля вказаного функціоналу у разі, коли потоки з дискретним часом збігаються до потоку Арратья.

При вивченні функціоналів від стохастичного потоку, породженого стохастичним диференціальним рівнянням, застосовуються методи гауссівського аналізу. Н. Н. Криловим та А. Ю. Веретенніковим було виписано хаотичний розклад для функцій від розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Аналог розкладу Крилова-Веретеннікова для дискретних потоків будується у дисертації. Тут використовується підхід, що ґрунтується на визначенні суперпозиції полілінійних форм Гільберта-Шмідта від білого шуму, запропонований А. А. Дороговцевим. Отримано аналог представлення Крилова-Веретеннікова для потоку з дискретним часом у термінах полілінійних форм від білого шуму, що породжує потік. Також дискретний аналог формули Крилова-Веретеннікова виписано у термінах інтегралів від значень гауссівських процесів, які керують потоком.

У дисертаційній роботі вивчається напівгрупа $m-$точкового руху потоку Арратья. Питання про знаходження явного вигляду дії півгрупи є цікавим, оскільки міра, що описує розподіл часток у момент часу t, має нетривіальну сингулярну компоненту відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$. При знаходженні генератора напівгрупи основні складнощі пов'язані з описом його області визначення. У дисертаційній роботі описано ядро для генератора напівгрупи $m-$точкового руху потоку Арратья та записано дію генератора на функції з цього ядра. Виписано систему крайових задач для напівгрупи $m-$точкових рухів потоку Арратья. Дію напівгрупи $m-$точкових рухів на функцію представлено у вигляді суми інтегралів, де кожний доданок проіндексовано бінарним лісом, який відповідає за послідовність склеювання часток у потоці Арратья.

Ключові слова: стохастичні потоки із сингулярною взаємодією, розклад Крилова-Веретеннікова, стохастичні потоки з дискретним часом, перехідна напівгрупа $m-$точкового руху.

Глиняная Е. В. Стохастические потоки с дискретным временем. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена изучению стохастических потоков броуновских частиц с сингулярным взаимодействием и их аналогов с дискретным временем.

Для потока с дискретным временем доказана стационарность и эргодичность по пространственной переменной.

Для потоков с дискретным временем, которые приближают поток Арратья, получена асимптотика скорости сходимости к нулю времени, когда имеет место нарушение упорядоченности двух частиц.

Получен аналог представления Крылова-Веретенникова для потока с дискретным временем в терминах полилинейных форм от белого шума, которым порождается поток. Дискретный аналог формулы Крылова-Веретенникова записан в терминах интегралов от значений гауссовских процессов, которые управляют потоком.

Найдено ядро для генератора полугруппы процесса $m-$точечного движения потока Арратья и выписано действие генератора на функции из этого ядра. Получена система краевых задач для полугруппы процесса $m-$точечного движения потока Арратья. Действие полугруппы процесса $m-$точечного движения на функцию выписано в виде суммы интегралов, где каждое слагаемое индексируется бинарным лесом, отвечающим за последовательность склейки частиц в потоке.

Ключевые слова: стохастические потоки с сингулярным взаимодействием, разложение Крылова-Веретенникова, стохастические потоки с дискретным временем, переходная полугруппа $m-$точечных движений.

Glinyanaya E. V. Discrete-time stochastic flow. – Manuscript.

Candidate of Science Thesis, Probability Theory and Mathematical Statistics – 01.01.05. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the investigation of stochastic flows of Brownian motions with singular interactions and their analogue with discrete time.

Stationarity and ergodicity with respect to the spatial variable for the discrete-time stochastic flows are established. Some corollaries from these propeties are obtained.

Discrete-time stochastic flows that approximate the Arratia flow were considered. For such flows asymptotics of convergence to zero of the time when two particles disobey the initial order was obtained.

An analogue of Krylov-Veretennikov expansion for the discrete-time flow in terms of multilinear forms of white noise which generates the flow is obtained. The discrete-time analogue of Krylov-Veretennikov expansion is written in terms of integral of Gaussian processes.

A core for the generator of the $m-$point motion semigroup for the

Arratia flow is discovered. The action of the generator on functions from this core is written. The system of boundary value problems for the $m-$point motion semigroup for the Arratia flow is obtained. The action of the $m-$point motion semigroup is written in terms of sum of integrals where each summand is indexed by a binary forest.

Key words: stochastic flows with singular interactions, Krylov-Veretennikov expansion, discrete-time stochastic flows, $m-$point motion semigroup.

Підп. до друку . Формат $60 \times 84/16$.
Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 1,5.
Ум. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. .

Інститут математики НАН України,
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3