Институт математики Национальной Академии наук Украины

УДК 519.21

На правах рукописи

Глиняная Екатерина Валериевна

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОТОКИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А.А.Дороговцев

Киев – 2016

Содержание

Введение

Актуальность темы. Объект исследования данной работы – это стохастические потоки броуновских частиц и их аналоги с дискретным временем. Простейшим примером стохастического потока броуновских частиц на прямой является совокупность решений задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения. Рассмотрим задачу Коши

$$dx(u,t) = \cos x(u,t)dw_1(t) + \sin x(u,t)dw_2(t),$$
$$x(u,0) = u,$$

где $w_1,\ w_2$ – два независимых винеровских процесса. Семейство решений $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ обладает следующими свойствами:

1) для любой точки прямой u $x(u,\cdot)$ – броуновское движение,

2) для всех $u_1 \leq u_2$ выполняется $x(u_1,t) \leq x(u_2,t)$,

3) процессы $x(u,\cdot)$ являются мартингалами относительно общей фильтрации с совместной квадратичной вариацией

$$d\langle x(u_1,\cdot), x(u_2,\cdot)\rangle(t) = cos(x(u_1,t) - x(u_2,t))dt.$$

Пусть Γ – положительно определенная чётная функция на $\mathbb{R}$, $\Gamma(0) = 1$. Существование семейства $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$, обладающего свойствами 1)-3) с функцией Γ вместо cos, было доказано Т. Харрисом [1] при предположении, что Γ является непрерывной и удовлетворяет условию Липшица на всех множествах вида $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon),\ \varepsilon > 0$. Функцию Γ называют локальной характеристикой потока.

Следует выделить случай $\Gamma = \mathbb{I}_{\{0\}}$. Поток с такой локальной характеристикой представляет собой поток броуновских частиц, в котором каждые две частицы движутся независимо друг от друга до момента встречи, после чего склеиваются и продолжают движение как одна. Впервые такой поток был построен и изучался Р. Арратья [2]. В работе [3] А. А. Дороговцев получил $n-$точечные движения потока Арратья как слабый предел $n-$точечных движений потоков решений стохастических дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами.

Для гладкой функции Γ поток Харриса $\{x(u,t)\}$ может быть получен как решение задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} dx(u,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x(u,t))dw_k(t), \\ x(u,0) &= u, \end{aligned}$$

где $\{w_k\}_{k\geq 1}$ – независимые винеровские процессы, $a = (a_1, a_2, \ldots)$ – отображение из $\mathbb{R}$ в l_2, удовлетворяющее условию Липшица и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(u)a_k(v) = \Gamma(u-v).$$

Понятие стохастических потоков броуновских частиц естественным образом распространяется на многомерный случай. Пусть $\{V_k\}_{k\geq 1}-$ матричнозначные поля в $\mathbb{R}^d$, $\{\vec{w}_k\}_{k\geq 1}$ – независимые броуновские движения в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} d\vec{x}(\vec{u},t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(\vec{x}(\vec{u},t))d\vec{w}_k(t), \\ \vec{x}(\vec{u},0) &= \vec{u}. \end{aligned}$$

Пусть поля $\{V_k = (V_k^1, V_k^2, \ldots, V_k^d)\}_{k\geq 1}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k^p(\vec{u})V_k^q(\vec{v}) = \Gamma_{pq}(\vec{u}-\vec{v}), p,q = 1,\ldots,d,$$

где матрица $\Gamma = \Big(\Gamma_{pq}\Big)_{p,q=1}^{d}$ симметрична и положительно определенная, т.е.

$$\Gamma_{pq}(\vec{u}-\vec{v}) = \Gamma_{qp}(\vec{v}-\vec{u}),\ \Gamma_{pp}(0) = 1,\ \Gamma_{pq}(0) = 0,\ p \neq q,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{p,q=1}^{d} \Gamma_{pq}(\vec{u}_i - \vec{u}_j) c_p^i c_q^j \geq 0,\ \vec{u}_i \in \mathbb{R}^d,\ c_p^i \in \mathbb{R},$$

Тогда стохастический поток, определяемый рассматриваемым уравнением представляет собой поток броуновских частиц и

$$d\langle x^p(\vec{u},\cdot) - x^q(\vec{v},\cdot)\rangle(t) = \Gamma_{pq}(\vec{x}(\vec{u},t) - \vec{x}(\vec{v},t))dt.$$

Возвращаясь к одномерному случаю, отметим, что при негладкой функции Γ в потоке броуновских частиц может происходить склеивание частиц. Так, для $\tau = \inf\{t :\ x(u,t) = x(v,t)\}$ соотношение $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = 1$ эквивалентно $\int_0^1 \frac{u}{1-\Gamma(u)} du < +\infty$. Более того, в работе А. А. Дороговцева [4] показано, что в потоке Арратья не только все частицы, стартовавшие из ограниченного интервала, склеиваются в конечное число кластеров за конечное время, но и общее время свободного пробега для них конечно. В связи с этим возникают вопросы об асимптотике роста кластеров (т.е. количество точек, склеенных в одну). В работе А. А. Дороговцева, А. В. Гнедина, Н. Б. Вовчанского [5] получен закон повторного логарифма для размера кластера. Возникновение кластеров связано с поведением отклонения положения частицы от её точки старта. Асимптотика равномерного отклонения частиц в потоке Харриса от положения их старта при стремлении времени к нулю получено А. Шамовым [6].

Известно, что при определенных условиях гладкости на коэффициенты стохастического дифференциального уравнения, случайные отображения $\vec{x}(\cdot,t)$ являются диффеоморфизмами на $\mathbb{R}^d$ (например, такие результаты содержатся в монографии H. Kunita [7]). Семейство $\{\phi_{s,t} = x(\cdot,t) \circ x(\cdot,s)^{-1}, 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ обладает свойствами:

(i) $\phi_{s,s}$ – тождественное отображение, $s \geq 0$,

(ii) $\phi_{s,t} \circ \phi_{r,s} = \phi_{r,t}$, $0 \leq r \leq s \leq t < +\infty$,

(iii) отображение $(s,t,\omega,x) \mapsto \phi_{s,t}(\omega,x)$ измеримо,

(iv) для всех $n \geq 1$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_n$ случайные отображения $\phi_{t_1,t_2}, \ldots, \phi_{t_{n-1},t_n}$ независимы,

(v) для $0 \leq s \leq t$ распределения $\phi_{s+h,t+h}$ не зависит от h.

С этой точки зрения стохастический поток схож с детерминированной динамической системой. Поэтому, при исследовании гладких стохастических потоков применимы методы исследования детерминированных динамических систем. Так, при исследовании устойчивости и асимптотических свойств потока вычисляются показатели Ляпунова, изучается вопрос о нахождении инвариантных многообразий (A. Carverhill [8], Y. Le Jan [9], L. Arnold [10], P. Baxendale, T. Harris [11], H. Kunita [7], Y. Le Jan, S. Watanabe [12]). Также исследуются топологические свойства потоков. Например коэффициенты зацепления траекторий в потоке рассматривались такими авторами как C. Zirbel, W. Woyczinski [13], J. Pitman, M. Yor [14], В. Кузнецов [15].

Поведение динамической системы можно характеризовать мерой, переносимой потоком. Для процесса $\mu_t(A) = \mu\{\vec{u} : \ \vec{x}(\vec{u},t) \in A\}$, где μ-некоторая мера, $A \in B(\mathbb{R}^d)$ его асимптотические свойства изучались в работах H. Kunita [7], E. Cinlar [16]. В работах А.А. Дороговцева [17, 18, 19, 20] введен новый класс стохастических потоков со взаимодействием, в которых движение каждой частицы зависит от распределения массы всех частиц, переносимых потоком. Такие потоки также изучались в работах М.П. Карликовой [21], [22], где установлено существование слабого решения для потока со взаимодействием и приведены условия, при которых проблема мартингалов с генератором полугруппы потока имеет единственное решение.

Для потока решений стохастического дифференциального уравнения как случайного элемента в пространстве $C([0,\infty) \to C(\mathbb{R}^d))$, в работе [7] доказана теорема Струка-Варадана о носителе. Обобщение этой теоремы для случая потока, порожденного стохастическим дифференциальным уравнением со взаимодействием получено А. Ю. Пилипенко в [23]. В работе А. А. Дороговцева и Е. В. Остапенко [24] доказан принцип больших уклонений для стохастического потока с гладким взаимодействием как для случайного элемента в пространстве $C\left([0,1], L_2(\mathbb{R},\mu)\right)$, где $\mu-$ стандартное гауссовское распределение на $\mathbb{R}$ и для $n-$точечного движения потока Арратья в пространстве $C([0,1],\mathbb{R}^n)$.

Как было сказано, на стохастический поток с гладкой локальной характеристикой можно смотреть как на динамическую систему, управляемую гауссовским случайным полем. Для потока со склеиванием не существует гауссовского шума, который задавал бы поток. Вопросами описания шума, отвечающего потоку с сингулярным взаимодействием, занимались такие авторы как B. Tsirelson [25, 26], J. Warren, S. Watanabe [27], Y. Le Jan, O. Raimond [28]. Арратья [2] получил поток склеивающихся броуновских движений как предел случайных блужданий на целочисленной решетке. В работе [29] C. M. Newman, K. Ravishankar, R. Sun построили приближения с помощью семейства случайных блужданий, траектории которых могут пересекаться. J. Norris, A. Turner [30] получили поток Арратья как слабый предел потока с дискретным временем, который строится при помощи итераций случайных отображений. Как уже отмечалось, поток Арратья также может быть получен как слабый предел потоков решений стохастических дифференциальных уравнений [3]. Потоки Арратья и Харриса как пределы случайных потоков с дискретным временем получены в работе И. И. Нищенко [31]. В этой работе дискретные потоки строятся по аналогии со схемой Эйлера-Маруямы для приближения решения стохастических дифференциальных уравнений. Отметим, что в этом случае допредельные потоки с дискретным временем являются функционалами от последовательности гауссовских процессов. Отличительной чертой потока с дискретным временем от потоков Харриса является возможность пересечения траекторий. В диссертационной работе исследуется функционал, учитывающий время, которое две частицы в потоке с дискретным временем проводят в порядке, отличном от исходного. Отметим, что разность двух траекторий в дискретном потоке представляет собой приближение решения некоторого стохастического дифференциального уравнения. Используя это, получены оценки на скорость сходимости к нулю указанного функционала в случае, когда потоки с дискретным временем сходятся к потоку Арратья [62].

При изучении функционалов от гладкого стохастического потока, порожденного стохастическим дифференциальным уравнением, применимы методы гауссовского анализа. Для функций от решения стохастического дифференциального уравнения выписывается хаотическое разложение (Н. В. Крылов, А. Ю. Веретенников [32]). Аналог разложения Крылова-Веретенникова для дискретных потоков строится в диссертации. Здесь используется подход, основанный на суперпозиции полилинейных форм Гильберта-Шмидта от белого шума, предложенный А.А. Дороговцевым в [33] и [34]. Результаты о разложении для функций от $m-$точечных движений дискретного потока получены в работах [61, 64]. Отметим, что в работе А. А. Дороговцева [35] получен аналог разложения Крылова-Веретенникова для стохастических полугрупп и конечномерных движений потока Арратья. Совместная работа Г. В. Рябова и А. А. Дороговцева [36], а также работа [37] посвящены ортогональному разложению квадратично интегрируемых функционалов от потоков со склеиванием.

Анализ для негладких потоков, в частности для потока Арратья, разрабатывался А. А. Дороговцевым [38, 4, 39]. Так, был построен интеграл по потоку Арратья и в этих терминах получено представление Кларка для функционалов от потока Арратья. По аналогии со стохастическими дифференциальными уравнениями, Т. В. Маловичко [40] доказала аналог теоремы Гирсанова для потоков как с гладким взаимодействием, так и для потока Арратья.

В диссертационной работе изучается полугруппа $m-$точечного движения потока Арратья. Вопрос о нахождении явного вида действия полугруппы представляет интерес, поскольку мера, описывающая распределение частиц в момент времени t, имеет нетривиальную сингулярную компоненту относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^m$. При нахождении генератора полугруппы основные сложности связаны с определением его области определения. В диссертационной работе описано ядро для генератора полугруппы $m-$точеченого движения потока Арратья. Действие оператора полугруппы представлено в виде суммы, где каждое слагаемое индексируется бинарным лесом, которое отвечает порядку склейки траекторий в потоке Арратья. Результаты изложены в работе Е. В. Глиняной [63].

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнена в Институте математики НАН Украины в отделе теории случайных процессов в рамках госбюджетной темы “Анализ сложных систем”, государственный регистрационный номер 0111U001002. Также часть работы выполнена в рамках совместного научного проекта НАН Украины и Российского фонда научных исследований “Геометрические аспекты теории бесконечномерных динамических систем”, государственный регистрационный номер 0114U002965.

Цель и задачи исследования. Цель исследования состоит в изучении свойств стохастических потоков броуновских частиц с сингулярными взаимодействиям при помощи приближающих их потоков с дискретным временем. Эта цель включает в себя следующие задачи:

- исследование предельного поведения функционалов от потока с дискретным временем;
- получение аналога представления Крылова-Веретенникова для дискретного потока;
- представление действия полугруппы $n-$точечного движения потока Арратья в интегральном виде.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования диссертационной работы являются стохастические потоки броуновских частиц и их аналоги с дискретным временем. Предметами исследования являются функционалы от потоков с дискретным временем, их поведение, когда дискретный поток приближает поток Арратья; хаотическое разложение функционалов от потока с дискретным временем.

Методы исследования. В работе использованы методы стохастического анализа, теории вероятностей, теории случайных процессов и функционального анализа.

Научная новизна полученных результатов. Основные результаты, определяющие научную новизну работы, таковы:

- изучены эргодичекие свойства по пространственной переменной потоков с дискретным временем;

- получена скорость убывания к нулю времени нарушения упорядоченности двух частиц в потоке с дискретным временем, который приближает поток Арратья;

- установлен аналог представления Крылова-Веретенникова для $n-$ точечных движений в стохастическом потоке с дискретным временем в терминах полилинейных форм от белого шума, задающего поток;

- получено интегральное представление для дискретного разложения Крылова -Веретенникова;

- для полугруппы $n-$точечных движений потока Арратья найдено ядро генератора и действие генератора на функции из этого ядра;

- получено интегральное представления для действия полугруппы $n-$точечных движений потока Арратья в виде суммы, где каждое слагаемое индексируется бинарным лесом, который отвечает за порядок склейки частиц в потоке.

Практическая значимость полученных результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут иметь дальнейшее применение в различных разделах теории случайных процессов и стохастического анализа.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и выбор методов исследования принадлежит научному руководителю соискателя доктору физико-математических наук, профессору А. А. Дороговцеву. Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

- XIX международной конференции молодых ученых "Ломоносов", (Москва, 2012);
- Всеукраинской научной конференции "Современные проблемы теории вероятностей и математического анализа" (Ворохта, Украина, 25 февраля -3 марта 2013);
- Международной математической конференции "Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения" (Севастополь, Украина, 23-30 июня, 2013);
- Workshop Nachwuchsforscherinnen in Stochastik. Junior female researchers in probability, Berlin and Potsdam, (Germany, october 2013)
- 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (Вильнюс, 30 июнь - 4 июля, 2014);
- Научной конференции памяти Ю.Линника "Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics", (Санкт-Петербург, 14-18 сентября, 2015);
- Международной конференции "Stochastic Processes in Abstract Spaces", (Киев, 14 – 16 октября, 2015);
- Научном семинаре "Исчисление Маллявена и его приложения" Института математики НАН Украины под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора А. А. Дороговцева;
- Научном семинаре "Статистические проблемы для случайных процессов и полей" кафедры математического анализа и теории вероятностей физико-математического факультета Национального технического университета Украины "Киевский политехнический

институт” под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора О. И. Клесова и доктора физ.-мат. наук, профессора О.В. Иванова.

- Научном семинаре "Аналитические методы в теории диффузионных процессов"кафедры высшей математики механико-математического факультета Львовского национального университета имени И. Франка под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Б.И. Копытко.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в пяти статьях [61, 62, 63, 64, 65]:

1. Glinyanaya E.V., Discrete analogue of the Krylov-Veretennikov expansion / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2011. – V. 17(33), №1 – p. 39-49.

2. Glinyanaya E. V. Disordering asymptotics in the discrete approximation of an Arratia flow / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2012. – V. 18(34), №2 – p. 8-14.

3. Glinyanaya E. V. Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2014. – V. 19(35), №2 – p. 31-41.

4. Glinyanaya E. V. Krylov-Veretennikov representation for the m-point motion of a discrete-time flow / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2015. – V.20(36),№1 – p. 63-77.

5. Глиняная Е. В. Эргодичность относительно пространственной переменной дискретных по времени стохастических потоков / Е. В. Глиняная // Докл. НАНУ. – 2015 – 8 – С. 13-20.

и в шести сборниках тезисов конференций, пять из которых являются международными.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и выводов к ним, списка использованной литературы. Основной текст диссертации занимает 123 страниц, список литературы занимает 7 страниц и содержит 64 наименований.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Дороговцеву Андрею Анатольевичу за поставленные задачи, ценные рекомендации и постоянную поддержку на всех этапах выполнения этой работы.

Основное содержание работы

Для удобства читателя нумерация утверждений и формул совпадает с нумерацией в основном тексте работы. Глава 1 посвящена изучению свойств потоков случайных отображений с дискретным временем, которые можно рассматривать как аппроксимацию стохастических потоков броуновских частиц со взаимодействием. В первом параграфе главы строится дискретный поток отображений $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ с помощью рекуррентного соотношения:

$$x_{n+1} = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u)),\ x_0(u) = u, \tag{1.1.3}$$

где $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ – последовательность независимых стационарных гауссовских процессов, имеющих непрерывную ковариационную функцию Γ и нулевое среднее. Установлена корректность определения последовательности отображений $\{x_n\}_{n\geq 1}$ и их непрерывность в среднем любого порядка. Отметим, что при фиксированном $u \in \mathbb{R}$ уравнение 1.1.3 определяет симметричное случайное блуждание на прямой. Поэтому семейство $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ можно рассматривать как поток случайных блужданий на прямой, стартующих из каждой точки. Для фиксированного набора точек $u_1, \ldots, x_N$ $(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_N))$ будем называть $N-$точечным движением потока $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

Лемма 1.1.4. *Последовательность векторов*

$$\{\vec{x}_n(\vec{u}) = (x_n(u_1), \ldots, x_n(u_N))\}_{n\geq 1},\ u_1 < u_2 < \ldots < u_N$$

образует марковскую цепь в $\mathbb{R}^N$ *с переходной вероятностью*

$$P(\vec{x}, \Delta) = \mathbb{P}\{(\zeta(x_1), \ldots, \zeta(x_N)) \in \Delta\},$$

где $\vec{x} \in \mathbb{R}^N,\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\ \{\zeta(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ *– гауссовский процесс со средним* $\mathbb{E}\zeta(u) = u$ *и ковариационной функцией* $\mathbb{E}(\zeta(u)-u)(\zeta(v)-v) = \Gamma(u-v)$

Одной из топологических характеристик потоков является спиральность поля, которое задает поток [41]. Спиральность поля является мерой зацепления траекторий в фазовом потоке. В случае одномерных потоков с дискретным временем такой характеристикой может служить количество пересечений траекторий. Поскольку в системе из N частиц число пересечения их траекторий состоит из числа попарных пересечений траекторий, достаточно исследовать взаимное поведение каждой пары частиц. Отметим, что последовательность $\{x_n(u_2) - x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$ является марковской цепью.

Лемма 1.1.5. *Последовательность* $\{z_n = x_n(u_2) - x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$ *является цепью Маркова такой, что*

$$\{z_n\}_{n\geq 1} \stackrel{d}{=} \{v_n\}_{n\geq 1},$$

где последовательность $\{v_n\}_{n\geq 1}$ *задается соотношением:*

$$v_{n+1} = v_n + \sqrt{2 - 2\Gamma(v_n)}\eta_{n+1},$$
$$v_0 = u_2 - u_1,$$

и $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ *– независимые стандартные гауссовские случайные величины.*

Второй параграф главы посвящен изучению свойств случайных отображений из построенного потока. Стационарность процессов ξ_n, по которым строится поток, влекут стационарность отображений $\{x_n(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$. Именно, справедлива лемма:

Лемма 1.2.1. *Следующий процесс со значениями в* $\mathbb{R}^\infty$

$$\{(\xi_1(u), x_1(u) - u, \xi_2(u), x_2(u) - u, \ldots, \xi_n(u), x_n(u) - u, \ldots), u \in \mathbb{R}\}$$

является стационарным в узком смысле.

Следующая теорема устанавливает свойство эргодичности [42] процесса $\{x_n(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть поток с дискретным временем* $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ *построен по последовательности независимых стационарных гауссовских процессов* $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ *с ковариационной функцией* Γ *такой, что* $\Gamma(u) \to 0$ *при* $u \to \infty$, *то есть*

$$x_{n+1}(u) = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u))$$
$$x_0(u) = u.$$

Тогда процесс $\{x_N(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$ *является эргодическим при каждом* $N \geq 1$.

В параграфе 1.3 приводятся известные результаты о приближении потоков Харриса потоками с дискретным временем вида (1.1.3). Теорема о сходимости потоков с дискретным временем к потоку Арратья была получена Нищенко в [31]. Обозначим через $\widetilde{x}_n(u, \cdot)$ ломаную на отрезке времени $[0, 1]$ построенную по узлам $\left(\frac{k}{n}, x_k(u)\right)$, где $x_k(u)$ определены рекуррентным соотношением (1.1.3).

Теорема 1.3.3.[31] *Пусть для каждого* $m \geq 1$ $\widetilde{x}_m$ *построены по последовательности* $\{\xi_n^m, n \geq 1\}$, *где независимые стационарные гауссовские процессы* ξ_n^m *имеют ковариационную функцию* $\frac{1}{\sqrt{m}}\Gamma_m$, *удовлетворяющую условию Липшица. Для* $m \geq 1$ *определим*

$$c_m = \sup_{\mathbb{R}} \frac{2 - 2\Gamma_m(x)}{x^2}.$$

Если (i) $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m e^{c_m}}{m} = 0$;

(ii) для всякого $\delta > 0$ $\sup_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} |\Gamma_m(x)| \to 0, m \to \infty$;
тогда случайный процесс $\{\widetilde{x}_m(u_1, \cdot), \ldots, \widetilde{x}_m(u_l, \cdot); m \geq 1\}$ *слабо сходится в* $C([0, 1], \mathbb{R}^l)$ *к* l*-точечному движению потока Арратья.*

Как было отмечено, в потоке с дискретным временем возможно нарушение упорядоченности частиц. Поскольку в потоке Арратья порядок между частицами сохраняется, то естественно предположить, что время, в течении которого нарушается естественный порядок частиц в дискретном потоке, приближающем поток Арратья, будет стремится к нулю. Параграф 1.4. посвящен изучению функционала от двухточечного движения потока с дискретным временем, который отвечает за количество времени нарушения порядка:

$$\Phi_m = \int_0^1 1\!\!1_{\{x_m(u_2,t)-x_m(u_1,t)<0\}}dt,$$

где $u_2 > u_1$ – некоторые фиксированные точки прямой. Получены оценки на скорость сходимости к нулю функционалов Φ_m когда потоки с дискретным временем сходятся к потоку Арратья:

Теорема 1.4.1. *Предположим, что для всех $m \geq 1$ ковариационная функция Γ_m удовлетворяет условиям теоремы 1.3.3. Тогда*

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > 0\} \leq m \cdot F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right),$$

где $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$.

Если к тому же $\{\Gamma_m\}_{m\geq 1}$ таковы, что

(i) $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m^2 e^{c_m}}{m} = 0$;

(ii) $\frac{u}{\sqrt{2-2\Gamma_m(u)}}$ *возрастает при $u > 0$;*

(iii) $2 - 2\Gamma_m\left(\frac{1}{\sqrt{c_m}}\right) \geq \frac{1}{K^2}, m \geq 1$ *для некоторой константы K,*

тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует константа $A > 0$ такая, что

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\}}{F\left(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)} \geq A.$$

Поскольку дискретные потоки построены по последовательности гауссовских процессов, то для изучения функционалов от них можно использовать разложение Ито-Винера гауссовских функционалов. Вторая глава посвящена описанию белого шума, порождающего поток с дискретным временем и построению разложения Ито-Винера функционалов от $m-$точечных движений потока. В первом параграфе приведены основные определения и утверждения о разложении Ито-Винера случайных величин, измеримых относительно белого шума в гильбертовом пространстве. Пусть H – действительное сепарабельное гильбертово пространство. Белым шумом в H называется линейное отображение ξ, которое каждому элементу $h \in H$ ставит в соответствие гауссовскую случайную величину (h, ξ) такую, что

$$\mathbb{E}(h, \xi) = 0 \ \text{ и } \ \mathbb{E}(h, \xi)^2 = \|h\|^2.$$

Через $H_k, k \geq 1$ обозначим пространство симметричных k-линейных форм Гильберта–Шмидта на H, которое является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(A_k, B_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} A_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) B_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}),$$

где $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H. Значение полилинейной формы $Q_k \in H_k$ от белого шума ξ определяется по правилу:

$$Q_k(\xi, \ldots, \xi) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} Q_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})(e_{i_1}, \xi) * \ldots * (e_{i_k}, \xi),$$

где символ $*$ обозначает произведение Вика [43, 44]. Напомним определение произведения Вика совместно гауссовских случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$ с нулевым средним. Обозначим через $\mathcal{H}$ линейную оболочку $\{\sum_{i=1}^m t_i \xi_i, t_i \in \mathbb{R}\}$. Положим

$$\mathcal{P}_n = \{p(\xi_1, \ldots, \xi_k) : p \text{ – многочлен степени } \leq n, \xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathcal{H}, k < \infty\},$$

$\overline{\mathcal{P}}_n$ – замыкание $\mathcal{P}_n$ в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определим $\mathcal{H}_n = \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$ и обозначим через π_n ортогональную проекцию на подпространство $\mathcal{H}_n$ в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Произведением Вика [43] называется

$$\xi_1 * \ldots * \xi_m \overset{def}{=} \pi_n(\xi_1, \cdot \ldots \cdot \xi_m).$$

Случайная величина $\eta \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, измеримая относительно σ-алгебры $\sigma(\xi) = \sigma\{(h, \xi), h \in H\}$ раскладывается в ряд из значений полилинейных форм от шума ξ, а именно, справедлива теорема.

Теорема 2.1.1 ([49] разложение Ито–Винера). *Пусть $\eta \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ измерима относительно $\sigma(\xi)$. Тогда существует единственная последовательность полилинейных форм $Q_k \in H_k$ такая, что*

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\xi, \ldots, \xi),$$

где ряд сходится в среднем квадратическом.

В качестве примера рассмотрим гильбертово пространство $L_2([0,1])$ и белый шум на нем определим при помощи винеровского процесса $\{w(t), t \in [0,1]\}$ по правилу: для $f \in L_2([0,1])$

$$(\xi, f) = \int_0^1 f(t) dw(t).$$

Широкий класс случайных величин, измеримых относительно белого шума в этом примере имеет вид $\varphi(x(t))$, где $\{x(t), t \in [0,1]\}$ – решение стохастического дифференциального уравнения. Явный вид ядер разложения таких случайных величин был получен Н. В. Крыловым и А. Ю. Веретенниковым в [32]. Для приближения потоков со склеиванием используются стохастические дифференциальные уравнения по винеровскому листу [31]. Разложение значения функций от решения таких уравнений получается применением обобщенного разложения Крылова-Веретенникова для сильных случайных операторов [35].

Пример 2.1.4. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение:

$$x(u,t) = u + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \psi(x(u,s) - v) W(dv, ds), \qquad (2.1.12)$$

где W – винеровский лист на $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ ([50]), $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi^2(u) du = 1, \ \psi(u) = \psi(-u), u \in \mathbb{R}.$$

Случайная величина вида $f(x(u_1,t), \ldots, x(u_m,t))$, где $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция, $\{x(u_i,t), t \geq 0\}$ – решение уравнения (2.1.12), измерима относительно белого шума ξ в $L_2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, определенного по правилу:

$$(\xi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \varphi(u,s) W(du, ds), \ \varphi \in L_2(\mathbb{R} \times [0, +\infty)).$$

Рассмотрим семейство операторов в $L_2(\mathbb{R}^m)$, определенных по правилу: $G_t f(\vec{u}) = f(x(u_1,t), \ldots, x(u_m,t))$ и соответствующую полугруппу $T_t f(\vec{u}) = \mathbb{E} G_t f(\vec{u})$. Обозначим $A_v f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \psi(u_i - v) \frac{\partial}{\partial u_i} f(\vec{u})$. Тогда, согласно теореме 1.1 из [35]:

$$f(x(u_1,t), \ldots, x(u_m,t)) = T_{0,t} f(\vec{u}) + \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^k} \int \ldots \int_{0<t_1<\ldots<t_k<t}$$

$$T_{t,t_k} A_{v_1} T_{t_k,t_{k-1}} \ldots A_{v_k} T_{0,t_1} f(\vec{u}) W(dv_k, dt_k) \ldots W(dv_1, dt_1).$$

В предыдущем примере стохастический поток $\{x(u,t)\}$ задавался с помощью инфинитезимальных случайных возмущений, описываемых винеровским листом (или, что тоже самое, белым шумом в $L_2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. При рассмотрении потоков с дискретным временем естественно предложить белый шум, описывающий случайные возмущения (гауссовские стационарные процессы $\{\xi_n\}$), участвующие в построении потока. Будем говорить, что белый шум η в гильбертовом пространстве H порождает гауссовский процесс $\{\xi(u), \ u \in \mathbb{R}\}$, если для любого $u \in \mathbb{R}$ существует такой элемент $f_u \in H$, что $\xi(u) = (f_u, \eta)$. Тогда значение функционала от процесса ξ измеримо относительно белого шума и можно говорить о его разложении Ито-Винера. В параграфе 2.2 строится белый шум, порождающий поток с дискретным временем $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Поскольку поток задается последовательностью независимых стационарных гауссовских процессов, то сперва построен шум, порождающий один процесс из этой последовательности. Пусть $\{\xi(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ - произвольный стационарный гауссовский процесс с ковариационной функцией Γ и нулевым средним. Шум, порождающий процесс ξ можно задать несколькими способами. Например, возьмем в качестве гильбертова пространства $H = L_2(\mathbb{R}, \mu)$, где μ – спектральная мера процесса ξ. Зададим белый шум через интеграл по ортогональной случайной мере Z: $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$

$$(f, Z) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) Z(d\lambda).$$

Тогда значение процесса запишется в виде:

$$\xi(u) = (e^{iu}, Z).$$

Белый шум можно также задать в специальном гильбертовом пространстве H^Γ – воспроизводящем ядре, построенном по фукнции $\{\Gamma(\cdot - v),\ v \in \mathbb{R}\}$. Пусть $\widetilde{H}^\Gamma = \{\sum_{k=1}^n c_k \Gamma(u_k - \cdot), c_k, u_k \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$.

Лемма 2.2.1. *Отображение η, которое на функции $f \in \widetilde{H}^\Gamma$ действует по правилу*

$$(\eta, \sum_{k=1}^n c_k \Gamma(u_k - \cdot)) = \sum_{k=1}^n c_k \xi(u_k),$$

продолжается по непрерывности в L_2 до белого шума в H^Γ.

В случае, когда ковариационная функция Γ представима в виде $\Gamma(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u - v)\psi(v) dv$, где $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $\psi(u) = \psi(-u)$, $u \in \mathbb{R}$, белый шум в $L_2(\mathbb{R})$ можно задать при помощи винеровского процесса на $\mathbb{R}$, т.е. $w(u) = w_1(u)1\!\!\mathrm{I}\{u \geq 0\} + w_2(-u)1\!\!\mathrm{I}\{u < 0\}$, где $w_1,\ w_2$ – два независимых винеровских процесса на $\mathbb{R}$.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\Gamma = \psi * \psi$. *Тогда на (возможно расширенном) вероятностном пространстве существует винеровский процесс* $\{w(u), u \in \mathbb{R}\}$ *такой, что для всех* $u \in \mathbb{R}$

$$\xi(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u - v) dw(v).$$

Заметим, что белый шум задается на том же вероятностном пространстве, на котором задан сам процесс ξ, в случае, когда преобразование Фурье функции ψ является невырожденным.

Далее в работе строится белый шум, порождающий всю последовательность стационарных независимых процессов ξ_n. Для каждого $k \geq 1$ зададим η_k – белый шум в пространстве H^Γ, порождающий процесс ξ_k. В пространстве

$$l_2(H^\Gamma) = \{F = (f_1, \ldots, f_k, \ldots):\ f_j \in H^\Gamma,\ \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||^2_{H^\Gamma} < \infty\}$$

определим белый шум η по правилу: $(\eta, F) = \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k, f_k)$.

Получив описание белого шума, задающего последовательность процессов $\{\xi_n\}$, мы переходим к разложению Ито-Винера величин вида $f(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m))$. В параграфе 2.3 разложение получено в терминах операторов $\{Q_k\}_{k \geq 1}$, определенных через разложение случайной величины $f(x_1(u_1), \ldots, x_1(u_m))$:

$$f(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1),$$

здесь $Q_k f(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot)$ – $k-$линейная форма Гильберта-Шмидта на H^Γ.

Обозначим через

$$B(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} | f\text{-измерима}, \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} |f(\vec{u})| < +\infty\}$$

пространство функций с нормой $||f|| = \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} |f(\vec{u})|$

Лемма 2.3.1. *(i) Для произвольного $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ отображение*

$$B(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}) \ni f \mapsto Q_k f(\vec{u};\cdot,\ldots,\cdot) \in H_k^\Gamma$$

является линейным и непрерывным отображением из $B(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ в пространство k-линейных форм Гильберта–Шмидта на H^Γ.

(ii) Для произвольной функции $f \in B(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ отображение

$$\mathbb{R}^m \ni \vec{u} \mapsto Q_k f(\vec{u};\cdot,\ldots,\cdot) \in H_k^\Gamma$$

измеримо и $\sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} \|Q_k f(\vec{u};\cdot,\ldots,\cdot)\|_k < +\infty$.

Действие операторов Q_k продолжается на гильбертовозначные функции. Пусть H – некоторое сепарабельное гильбертово пространство, возможно, отличное от H^Γ, с ортонормированным базисом $\{e_j\}_{j=1}^\infty$. Введем пространство функций

$$B(\mathbb{R}^m;H) = \{F : \mathbb{R}^m \to H | F\text{–измерима}, \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} \|F(\vec{u})\| < +\infty\}.$$

Определим действие операторов Q_k на функции $F \in B(\mathbb{R}^m;H)$ по правилу:

$$Q_k F(\vec{u};\cdot,\ldots,\cdot) = \sum_{j=1}^\infty Q_k f_j(\vec{u};\underbrace{\cdot,\ldots,\cdot}_{k})e_j.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ – поток с дискретным временем* (1.1.3). *Тогда для произвольной $\varphi \in B(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ разложение*

Ито–Винера для $\varphi(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m))$ *имеет вид*

$$\varphi(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m)) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_n\geq 0\\ l_1+\ldots+l_n=k}} Q_{l_n}Q_{l_{n-1}}\ldots Q_{l_1}\varphi(\vec{u};\underbrace{\eta_n,\ldots,\eta_n}_{l_n},\ldots,\underbrace{\eta_1,\ldots,\eta_1}_{l_1}).$$

Полученное разложение является дискретным аналогом представления Крылова–Веретенникова для фукнции от решения стохастического дифференциального уравнения.

Поскольку случайная величина $\varphi(x_n(u_1),\ldots,x_n(u_m))$ измерима относительно $\sigma-$алгебры, порожденной процессами $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, ее разложение можно записать в терминах значений процессов ξ_i. В работе явный вид ядер разложения Ито–Винера выписан через плотность распределения вектора $(\xi(u_1),\xi(u_2),\ldots,\xi(u_m))$. Приведем некоторые достаточные условия для существования плотности распределения этого случайного вектора:

Лемма 2.3.4. *Пусть стационарный гауссовский процесс* ξ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) ковариационная функция Γ *представима в виде* $\Gamma = \psi * \psi$, *где* $\psi \in L_2(\mathbb{R})$;

(ii) процесс ξ *имеет спектральную плотность относительно меры Лебега.*

Тогда для произвольных $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$ *случайный вектор* $(\xi(u_1),\xi(u_2),\ldots,\xi(u_m))$ *имеет плотность распределения.*

Введем некоторые обозначения. Через $\xi^{\circledast k}(\vec{u})$, будем записывать произведение Вика $\xi(u_1) * \ldots * \xi(u_k)$. Обозначим множество мультииндексов $J(k,m) = \{r = (i_1,\ldots,i_k), i_j \in \{1,\ldots,m\}\}$. Пусть вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, и $r = (i_1,\ldots,i_k) \in J(k;m)$, тогда будем писать $\vec{u}_r =$

$(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$. Обозначим через $p(\cdot, \vec{u})$ – плотность распределения случайного вектора $(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m))$. Для мультииндекса $r = (i_1, \ldots, i_k)$ будем писать $p^{(r)}(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\partial^k}{\partial v_{i_1} \ldots \partial v_{i_k}} p(\vec{v}, \vec{u})$. Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ пространство Шварца, т.е.

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} |\vec{u}^\alpha D^\beta f(\vec{u})| \leq +\infty,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n),\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \ldots, n\}$$

Теорема 2.3.3. *Пусть ковариационная функция* Γ *имеет вид* $\Gamma(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u - \cdot)\psi(u)du$, *где* $\psi \in S(\mathbb{R})$ *и* $p(\cdot, \vec{u})$ *– плотность распределения вектора* $\{u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m)\}$, $u_1 < \ldots < u_m$. *Тогда для всех* $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$

$$\varphi(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m)) =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \sum_{r_n \in J(k_n, m)} \cdots \sum_{r_n \in J(k_1, m)} \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m}$$

$$p^{(r_n)}(\vec{\alpha}^{(n)}, \vec{\alpha}^{(n-1)}) p^{(r_{n-1})}(\vec{\alpha}^{(n-1)}, \vec{\alpha}^{(n-2)}) \ldots p^{(r_1)}(\vec{\alpha}^{(1)}, \vec{u}) \varphi(\vec{\alpha}^{(n)}) \cdot$$

$$\cdot\, \xi_n^{\circledast k_n}(\vec{\alpha}^{(n-1)}_{r_n}) \xi_{n-1}^{\circledast k_{n-1}}(\vec{\alpha}^{(n-2)}_{r_{n-1}}) \ldots \xi_1^{\circledast k_1}(\vec{u}_{r_1}) d\vec{\alpha}^{(n)} \ldots d\vec{\alpha}^{(1)}.$$

В третьей главе рассматриваются функционалы от $m-$точечного движения потока Арратья. Склеивание частиц в потоке приводит к тому, что в момент t распределение $m-$точечного движения потока не имеет плотности относительно меры Лебега. В главе получено действие переходной полугруппы $m-$точечного движения потока Арратья в интегральном виде. $m-$точечное движение потока Арратья $\{x(u_1, t), \ldots, x(u_m, t)\}$ до момента первой склейки совпадает по распределению с $m-$мерным броуновским движением $w(\vec{u}, t)$, стартовавшим из точек $u_1, \ldots, u_m$ до момента выхода на границу симплекса

$\Delta_m = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^m : u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_m\}$:

$$\{(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))1\!\!1_{\{t\le\tau_1\}}\}_{t\ge 0} \stackrel{d}{=} \{w(\vec{u},t)1\!\!1_{\{t\le\theta\}}\}_{t\ge 0},$$

где $\tau_1 = \inf\{t : (x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)) \in \Delta_m\}$ и $\theta = \inf\{t : w(\vec{u},t) \in \Delta_m\}$.

Ввиду этого, первый параграф главы посвящен изучению броуновского движения в симплексе Δ_m. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial s}F(\vec{u},s) = -\frac{1}{2}\Delta F(\vec{u},s),\ (\vec{u},s) \in \mathring{\Delta}_m \times [0,t), \tag{3.1.1}$$

$$\lim_{s\to t} F(\vec{u},s) = 0, \tag{3.1.2}$$

$$F(\vec{u},s) = \varphi(\vec{u}),\ \vec{u} \in \partial\Delta_m, \tag{3.1.3}$$
$$F \in C_0^2(\mathring{\Delta}_m \times (0,t))$$

Следующая лемма содержит известное ([45], Гл. VIII,§5, теорема 1, с.493) вероятностное представление решения краевой задачи (3.1.1)–(3.1.3).

Лемма 3.1.2. *Пусть F – решение краевой задачи* (3.1.1)–(3.1.3) *и $\{w_s(u_i,t), t \ge s\}_{i=1}^m$ – независимые броуновские движения, $w_s(u_i,s) = u_i, \vec{u} \in \Delta_m$. Обозначим $\tau = \inf\{t \ge s : (w_s(u_1,t),\ldots,w_s(u_m,t)) \in \partial\Delta_m\}$. Тогда для всех $\varphi \in C_0^2(\partial\Delta_m)$ и $t > s$*

$$\mathbb{E}1\!\!1_{\{t\ge\tau\}}\varphi(w_0(u_1,\tau),\ldots,w_0(u_m,\tau)) = F(\vec{u},0).$$

В параграфе 3.2, следуя работе Y. Le Jan и O. Raimond [28], $m-$точечное движение потока Арратья характеризуется как марковский процесс. Для него определена полугруппа $\{T_{m,t}\}_{t\ge 0}$:

$$T_{m,t}f(\vec{u}) = \mathbb{E}f(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)).$$

Мы выпишем действие полугруппы $T_{m,t}$ на функцию f, решив систему краевых задач. Известно, что функция $T_{m,t}f$ удовлетворяет уравнению Колмогорова [51]:

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{m,t}f(\vec{u}) = \mathcal{A}T_{m,t}f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m, t > 0,$$

где $\mathcal{A}$ - генератор полугруппы и f – функция из области определения генератора [51]. Для удобства читателя приведем используемое далее определение ядра замкнутого линейного оператора A с областью определения $\mathcal{D}(A)$ [51].

Определение 3.2.1 [51]. *Подмножество $D \subset \mathcal{D}(A)$ называется ядром для оператора A, если замыкание сужения оператора A на D равно A.*

Обозначим через $C_0(\Delta_m) = \{f \in C(\Delta_m),\ \lim_{||u||\to\infty} f(u) = 0\}$

Теорема 3.2.2. *Множество функций*

$$D_m = \{f \in C_0^2(\Delta_m) : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C_0(\Delta_m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}1\!\!1_{\{x_i = x_j\}} = 0, i \neq j\}$$

является ядром для генератора $\mathcal{A}$ полугруппы $T_{m,t}$ и для произвольной $f \in D_m$

$$\mathcal{A}f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Delta f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m.$$

Введем обозначения:

$$\pi_i : \Delta_m \to \Delta_{m-1}, \quad \pi_i(u_1, \ldots, u_m) = (u_1, \ldots, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_m),$$

$$\pi_i^{-1} : \Delta_{m-1} \to \Delta_m, \quad \pi_i^{-1}(u_1, \ldots, u_m) = (u_1, \ldots, u_i, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{m-1}),$$

$\mathcal{K}_i^m = \{\vec{u} \in \partial\Delta_m :\ u_i = u_{i+1},\ u_j < u_{j+1},\ i \neq j\}$. Тогда семейство функций $T_{m,t}$ удовлетворяет системе краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{m,t}f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Delta T_{m,t}f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m, t \geq 0, \tag{3.3.1}$$

$$T_{m,0}f(\vec{u}) = f(\vec{u}), \tag{3.3.2}$$

$$T_{m,t}f(\vec{u}) = (T_{m-1,t}f \circ \pi_i^{-1})(\pi_i \vec{u}), \vec{u} \in K_i^m, \tag{3.3.3}$$

$$T_{m,t}f(\cdot) \in D_m.$$

В третьем параграфе главы выписано решение системы краевых задач (3.3.1)-(3.3.3). Для наглядности записи решения используется язык бинарных лесов. Введем необходимые определения.

$U_k^m = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_k^{(k)}, u_1^{(k+1)}, \ldots, u_{k+1}^{(k+1)}, \ldots, u_1^{(m)}, \ldots, u_m^{(m)}, \vec{u}^{(j)} \in \Delta_j\}-$

множество вершин графа. Ребра задаются при помощи семейства отображений

$$\mathcal{G}_j = \{\sigma_j : \{1, 2, \ldots, j\} \to \{1, 2, \ldots, j-1\}, \sigma_j\text{– сюръекция}\}.$$

Для каждого отображения $\sigma_j \in \mathcal{G}_j$ существует единственная пара чисел

$$(l_1, l_2) \equiv (l_1(\sigma_j), l_2(\sigma_j)) \subset \{1, 2, \ldots, j\}$$

такая, что $\sigma_j(l_1) = \sigma_j(l_2), l_1 < l_2$. Для фиксированного множества отображений $\{\sigma_m, \sigma_{m-1}, \ldots, \sigma_{k+1}\}$, где $\sigma_j \in \mathcal{G}_j$ определим множество ребер:

$R_k^m \equiv R_k^m(\sigma_m, \sigma_{m-1}, \ldots, \sigma_{k+1}) = \{\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}\right), i = k+1, \ldots, m, j = 1, \ldots, i\}.$

Множество вершин и совокупность ребер на них образуют бинарные леса с k корнями и m листьями:

$$T_k^m = \{(U_k^m, R_k^m(\sigma_m, \ldots, \sigma_{k+1})), \sigma_j \in \mathcal{G}_j\}.$$

Будем говорить, что ребра $(u_j^{(n)}, u_{\sigma_n(j)}^{(n-1)})$ и $(u_i^{(n)}, u_{\sigma_n(i)}^{(n-1)})$ пересекаются, если $i < j$ и $\sigma_n(i) > \sigma_n(j)$. Для каждого леса $T \in T_k^m$ количество пересечений его ребер будем обозначать через $\varepsilon(T)$. Множеству вершин $\{u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_j^{(j)}\}$ леса $T \in T_k^m$ поставим в соответствие время $t_j, j \in \{k, \dots, m\}$. Каждому ребру леса T припишем вес, который зависит от соединяющих их вершин и соответствующих моментов времени:

$$g\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}\right) = \sqrt{\frac{u_{l_2}^{(i)} - u_{l_1}^{(i)}}{t_i - t_{i-1}}} p_{t_i - t_{i-1}}(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i)})$$

для $j \in \{l_1, l_2\}$, где $l_1 < l_2$ такие, что $\sigma_i(l_1) = \sigma_i(l_2)$ и

$$g\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}\right) = p_{t_i - t_{i-1}}\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}\right)$$

для $j \notin \{l_1, l_2\}$, где $p_s(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(u_1-u_2)^2}{2s}}$.

Обозначим через $|T|$ произведение весов всех ребер леса $T \in T_k^m$:

$$|T| = |T(\vec{u}^{(m)}, \dots, \vec{u}^{(k)}, t_m, \dots, t_k)| =$$
$$= \prod_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{i} g(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}).$$

Каждому лесу поставим в соответствие набор индексов $(i_{m-1}, i_{m-2}, \dots, i_k)$, где каждый индекс i_j является координатой вектора $\vec{u}^{(j)}$ такой, что $\sigma_{j+1}(l_1) = \sigma_{j+1}(l_2) = i_j, l_1 \neq l_2$.

Определим действие леса $T \in T_k^m$ на функцию $f : \Delta_m \to \mathbb{R}$ по правилу:

$$f_T = f \circ \pi_{i_{m-1}}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_{i_k}^{-1}.$$

Теорема 3.3.1. *Пусть $f \in D_m$ и G_m – функция Грина краевой задачи* (3.3.1) – (3.3.3). *Тогда*

$$Q_{m,t} f(\vec{u}) = \int_{\Delta_m} f(\vec{y}) G_m(\vec{u}, \vec{y}, t, 0) d\vec{y} +$$

$$+ \sum_{T \in T_{m-1}^m} (-1)^{\varepsilon(T)} \int_0^1 \int_{\Delta_{m-1}} \int_{\Delta_{m-1}} f_T(\vec{y}) G_{m-1}(\vec{u}^{(m-1)}, \vec{y}, t_{m-1}, 0)$$

$$|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},t,t_{m-1})|d\vec{u}^{(m-1)}dydt_{m-1}+$$

$$+\sum_{T\in T^m_{m-2}}\int_0^t\int_0^{t_{m-1}}\int_{\Delta_{m-1}}\int_{\Delta_{m-2}}\int_{\Delta_{m-2}}(-1)^{\varepsilon(T)}f_T(\vec{y})$$

$$G_{m-2}(\vec{u}^{(m-2)},\vec{y},t_{m-2},0)|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},\vec{u}^{(m-2)},t,t_{m-1},t_{m-2})|\cdot$$

$$\cdot d\vec{y}d\vec{u}^{(m-2)}d\vec{u}^{(m-1)}dt_{m-2}dt_{m-1}+\dots$$

$$+\sum_{T\in T^m_1}(-1)^{\varepsilon(T)}\int_0^t\int_0^{t_{m-1}}\dots\int_0^{t_2}\int_{\Delta_{m-1}}\int_{\Delta_{m-2}}\dots\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}$$

$$f_T(\vec{y})G_1(u^{(1)},y,t_1,0)|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},\dots,\vec{u}^{(2)},\vec{u}^{(1)},t,t_{m-1},$$

$$\dots,t_1)|dydu^{(1)}\dots d\vec{u}^{(m-1)}dt_1\dots dt_{m-1}.$$

Глава 1

Беспорядки в дискретном стохастическом потоке

1.1 Дискретный поток, построенный по набору гауссовских стационарных процессов

В этом параграфе строится модель стохастического потока с дискретным временем. Как было отмечено во введении, одним из основных объектов теории стохастических потоков являются потоки броуновских частиц. В таких потоках движение отдельных частиц описывается винеровскими процессами. Сложность устройства и свойства потока обуславливаются связью этих винеровских процессов между собой [28]. Одной из целей диссертационной работы является построение и исследование стохастических потоков с дискретным временем. Сейчас движение отдельной частицы естественно описывать случайным блужданием, а сам поток задавать указывая связь таких блужданий между собой. В том случае, когда речь идет о блужданиях на целочисленной решетке, соответствующие потоки были построены и изучались в ряде работ [2, 29, 53]. В диссертационной работе строится поток с дискретным временем, в котором траектории отдельных частиц описываются гауссовскими случайными блужданиями. Отметим, что такой подход естественен с точки зрения разностной аппроксимации стохастических дифференциальных уравнений. Действительно, одним из первых примеров стохастических потоков является поток решений стохастического дифференциального уравнения с гладкими коэффициентами [52].

Пример 1.1.1. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = \sin(x(t))dw_1(t) + \cos(x(t))dw_2(t), \tag{1.1.1}$$

где $\{w_1(t), t \geq 0\}, \{w_2(t), t \geq 0\}$ – независимые винеровские процессы. Совокупность решений задачи Коши для уравнения (1.1.1) с начальным условием $x(0) = u, u \in \mathbb{R}$ образует стохастический поток [52]. Дискретная аппроксимация решения уравнения (1.1.1) получается заменой приращений винеровского процесса w_i на малых интервалах времени независимыми гауссовскими стандартными случайными величинами $\{\gamma_n^i\}_{n\geq 1}, i = 1, 2$ [54]:

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = x_k + \frac{1}{\sqrt{n}}(\gamma_{k+1}^1 \sin(x_k) + \gamma_{k+1}^2 \cos(x_k)) \\ &x_0 = u. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Процесс $x_n(t)$, определенный на отрезке времени $[0; 1]$ как ломаная с узлами разбиения в точках $\left(\frac{k}{n}, x_k\right)$ приближает решение уравнения (1.1.1) с начальным условием $x(0) = u$. Обозначим $\xi_k(u) = \gamma_k^1 \sin u + \gamma_k^2 \cos u$. Процесс $\{\xi_k(u), u \in \mathbb{R}\}$ является стационарным гауссовским процессом с ковариационной функцией $\Gamma(u) = \cos u$ и нулевым средним.

Аналогично аппроксимационной схеме для стохастических дифференциальных уравнений строится поток с дискретным временем, в котором частицы стартуют из каждой точки прямой [31]. В качестве шума, управляющего движением, выступает последовательность независимых стационарных гауссовских процессов $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$. Последовательность отображений $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ дискретного потока определяется с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u)), \\ &x_0(u) = u. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Далее считаем, что процессы $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ имеют нулевое среднее и непрерывную ковариационную функцию Γ, причем $\Gamma(0) = 1$.

Следующая лемма устанавливает корректность определения потока с дискретным временем (1.1.3).

Лемма 1.1.1. *При каждом $n \geq 1$ $\xi_{n+1}(x_n(u))$ является случайной величиной и значение $x_n(u)$ не зависит от выбора модификаций процессов ξ_n.*

Доказательство. Непрерывность ковариационной функции процессов $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ влечет существование измеримой модификации процессов $\{\xi_n\}$ [55]. Значит, $\xi_{n+1}(x_n(u))$ является случайной величиной как композиция измеримых отображений.

Пусть $\widetilde{\xi}_n$ – некоторая измеримая модификация процесса $\xi_n, n \geq 1$. Обозначив через $\widetilde{x}_n$ отображения, построенные по последовательности

$\{\widetilde{\xi}_n\}_{n\geq 1}$ с помощью рекуррентного соотношения (1.1.3), получим:

$$\mathbb{P}\{x_n(u) = \widetilde{x}_n(u)\} =$$
$$\mathbb{E}\mathbb{P}\{x_{n-1}(u) + \xi_n(x_{n-1}(u)) = \widetilde{x}_{n-1}(u) + \widetilde{\xi}_n(x_{n-1}(u)) | x_{n-1}(u), \widetilde{x}_{n-1}(u)\} =$$
$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{P}\{v + \xi_n(v) = \widetilde{v} + \widetilde{\xi}_n(\widetilde{v})\Big|_{\substack{v = x_{n-1}(u)\\ \widetilde{v} = \widetilde{x}_{n-1}(u)}}\}\Big) =$$
$$= \mathbb{P}\{x_{n-1}(u) = \widetilde{x}_{n-1}(u)\} = \ldots = \mathbb{P}\{x_0(u) = \widetilde{x}_0(u)\} = 1.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.1.2. *При каждом* $n \geq 0$ *процесс* $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}$ *непрерывен в среднем любого порядка.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что процесс $\{x_{n-1}(u), u \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в $L_p, p > 0$. Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left(x_n(u) - x_n(v)\right)^{2k} =$$
$$= \mathbb{E}\left(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v) + \xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v))\right)^{2k} =$$
$$= \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^l (\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2k-l}.$$

Оценим каждое слагаемое: для $l = 2j$

$$\mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^l (\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2k-l} \leq$$
$$\leq \left(\mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^{2l} \mathbb{E}(\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{4k-2l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вычислим

$$\mathbb{E}(\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2m} =$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2m}|x_{n-1}) =$$
$$= \mathbb{E}(2 - 2\Gamma(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v)))^m(2m-1)!!,$$

где мы воспользовались независимостью процессов ξ_n и x_{n-1}, а также тем, что $(\xi_n(u) - \xi_n(v))$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией $2 - 2\Gamma(u - v)$. По предположению индукции $\mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^{2l} \to 0$ при $|u - v| \to 0$, поэтому, при $l = 2j$

$$\mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^l(\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2k-l} \to 0$$

при $|u - v| \to 0$.

При $l = 2j + 1$

$$\mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^l(\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2k-l} =$$
$$= \mathbb{E}(x_{n-1}(u) - x_{n-1}(v))^l\mathbb{E}((\xi_n(x_{n-1}(u)) - \xi_n(x_{n-1}(v)))^{2k-l}|x_{n-1}) = 0.$$

Таким образом, $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в L_{2k} для $k \geq 1$. Из неравенства Ляпунова вытекает непрерывность в среднем любого порядка процесса x_n. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1.1.1. При любом $n \geq 1$ процесс $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}$ имеет измеримую модификацию.

Доказательство. Достаточно отметить, что непрерывный по вероятности процесс имеет измеримую модификацию [55]. $\square$

В построенной модели взаимное поведение траекторий частиц оказывается более сложным чем в случае блуждания по решетке. Теперь траектории частиц могут пересекаться, т.е. может нарушаться исходный взаимный порядок расположения частиц. При этом каждая частица совершает гауссовское случайное блуждание, являющееся дискретным аналогом броуновского движения, а именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1.3. *Для любого $u \in \mathbb{R}$ последовательность $\{x_n(u)\}_{n\geq 1}$ является случайным блужданием со стандартными гауссовскими приращениями, т.е.*

$$\{x_n(u)\}_{n\geq 1} \overset{d}{=} \{z_n\}_{n\geq 1},$$

где

$$z_0 = u,\ z_{n+1} = z_n + \zeta_{n+1},$$

и $\{\zeta_n\}_{n\geq 1}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Доказательство. Для произвольного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ рассмотрим

$$\mathbb{P}\{x_{n+1}(u) \in \Delta | x_1(u), \ldots, x_n(u)\} =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}1\!\!1_\Delta\big(x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u))|\xi_1, \ldots, \xi_n\big)|x_1(u), \ldots, x_n(u)\Big) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Delta \exp\Big\{-\frac{1}{2}(x_n(u) - y)^2\Big\}dy|x_1(u), \ldots, x_n(u)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Delta \exp\{-\frac{1}{2}(x_n(u) - y)^2\}dy.$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались независимостью процессов $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$. Полученное равенство дает возможность заключить, что $\{x_n\}$ – симметричное случайное блуждание с гауссовскими приращениями. Лемма доказана. $\square$

Семейство $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ можно рассматривать как поток случайных блужданий на прямой, стартующих из каждой точки. Для фиксированного набора точек $u_1, \ldots, x_N$ $(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_N))$ будем называть $N-$точечным движением потока $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

Лемма 1.1.4. *Последовательность векторов*

$$\{\vec{x}_n(\vec{u}) = (x_n(u_1), \ldots, x_n(u_N))\}_{n\geq 1},\ u_1 < u_2 < \ldots < u_N$$

образуют марковскую цепь в $\mathbb{R}^N$ *с переходной вероятностью*

$$P(\vec{x}, \Delta) = \mathbb{P}\{(\zeta(x_1), \ldots, \zeta(x_N)) \in \Delta\},$$

где $\vec{x} \in \mathbb{R}^N,\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\ \{\zeta(u),\ u \in \mathbb{R}\}$ *– гауссовский процесс со средним* $\mathbb{E}\zeta(u) = u$ *и ковариационной функцией* $\mathbb{E}(\zeta(u)-u)(\zeta(v)-v) = \Gamma(u-v)$.

Доказательство. Используя рекуррентное представление для потока $\{x_n\}_{n\geq 1}$ вычислим вероятность:

$$\mathbb{P}\{\vec{x}_{n+1}(\vec{u}) \in \Delta | \vec{x}_1(\vec{u}), \ldots, \vec{x}_n(\vec{u})\} = \\ = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(1\!\!\mathrm{I}_\Delta(\vec{x}_n(\vec{u}) + \vec{\xi}_{n+1}(\vec{x}_{n+1}(\vec{u})))|\xi_1, \ldots, \xi_n\big)|\vec{x}_1(\vec{u}), \ldots, \vec{x}_n(\vec{u})\Big),$$

где мы обозначили $\vec{\xi}_n(\vec{v}) = (\xi_n(v_1), \ldots, \xi_n(v_N)),\ \vec{v} \in \mathbb{R}^N$. Пользуясь независимостью случайных процессов $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, получаем:

$$\mathbb{P}\{\vec{x}_{n+1}(\vec{u}) \in \Delta | \vec{x}_1(\vec{u}), \ldots, \vec{x}_n(\vec{u})\} = \\ = \mathbb{E}\Big(\mathbb{P}\{(v_1+\xi_{n+1}(v_1), \ldots, v_N+\xi_{n+1}(v_N)) \in \Delta\}\Big|_{v_i = x_n(u_i)}\Big|\vec{x}_1(\vec{u}), \ldots, \vec{x}_n(\vec{u})\Big) = \\ = \mathbb{P}\{(v_1 + \xi_{n+1}(v_1), \ldots, v_N + \xi_{n+1}(v_N)) \in \Delta\}\Big|_{v_i = x_n(u_i)}.$$

Лемма доказана $\square$

Одной из топологических характеристик потоков является спиральность поля, которое задает поток [41]. Спиральность поля является мерой зацепления траекторий в фазовом потоке. В случае одномерных потоков с дискретным временем такой характеристикой может служить количество пересечений траекторий. Поскольку в системе из N частиц число пересечения их траекторий состоит из числа попарных пересечений траекторий, достаточно исследовать взаимное поведение каждой пары частиц. В параграфе 1.4 мы установим оценку на время, которое пара частиц проводит в порядке, отличном от исходного. Функционал, который паре траекторий $\{x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$, $\{x_n(u_2)\}_{n\geq 1}$ ставит в соответствие такое время, зависит от разности $\{x_n(u_2)-x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$. Отметим, что последовательность $\{x_n(u_2)-x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$ является марковской цепью.

Лемма 1.1.5. *Последовательность $\{z_n = x_n(u_2)-x_n(u_1)\}_{n\geq 1}$ образует цепь Маркова такую, что*

$$\{z_n\}_{n\geq 1} \stackrel{d}{=} \{v_n\}_{n\geq 1},$$

где последовательность $\{v_n\}_{n\geq 1}$ задается соотношением:

$$v_{n+1} = v_n + \sqrt{2-2\Gamma(v_n)}\eta_{n+1},$$
$$v_0 = u_2 - u_1,$$

и $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Доказательство. Вычислим переходную вероятность процесса $\{z_n\}_{n\geq 1}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{z_n\in\Delta|z_1,\ldots,z_{n-1}\}=\\
&=\mathbb{E}\Big(1\!\!1_\Delta\big(x_{n-1}(u_1)-x_{n-1}(u_2)+\xi_n(x_{n-1}(u_1))-\xi_n(x_{n-1}(u_2))\big)|z_1,\ldots,z_{n-1}\Big)=\\
&\qquad=\mathbb{E}(\mathbb{P}\{v_1-v_2+\xi_n(v_1)-\xi_n(v_2)\in\Delta\}\Big|_{v_i=x_{n-1}(u_i)}\Big|z_1,\ldots,z_{n-1})=\\
&\qquad\qquad=\mathbb{E}\Big(\int_\Delta[2\pi(2-2\Gamma(x_{n-1}(u_1)-x_{n-1}(u_2)))]^{-\frac{1}{2}}\cdot\\
&\qquad\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\frac{(x_{n-1}(u_1)-x_{n-1}(u_2)-y)^2}{2-2\Gamma(x_{n-1}(u_1)-x_{n-1}(u_2))}\Big\}dy\Big|z_1,\ldots,z_{n-1}\Big)=\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\Gamma(z_{n-1}))}}\int_\Delta\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\frac{(z_{n-1}-y)^2}{2-2\Gamma(z_{n-1})}\Big\}dy,
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались тем, что $(\xi_n(u_1)-\xi_n(u_2))$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией $(2-2\Gamma(u_1-u_2))$. Полученная переходная вероятность совпадает с переходной вероятностью случайного блуждания $\{v_n\}_{n\geq 1}$. Лемма доказана. □

1.2 Свойства случайных отображений, составляющих поток с дискретным временем

Стационарность процессов ξ_n, которые управляют потоком (1.1.3), является математическим выражением условия однородности окружающей среды. Это условие приводит к стационарности отображений $\{x_n(u)-u, u\in\mathbb{R}\}$.

Лемма 1.2.1. *Следующий процесс со значениями в* $\mathbb{R}^\infty$

$$\{(\xi_1(u),x_1(u)-u,\xi_2(u),x_2(u)-u,\ldots,\xi_n(u),x_n(u)-u,\ldots),u\in\mathbb{R}\}$$

является стационарным в узком смысле.

Доказательство. Поскольку σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ порождается алгеброй $\mathcal{A} = \{B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), n \geq 1\}$, то достаточно проверить выполнение следующего равенства для процесса
$\varkappa_n(u) = (\xi_1(u), x_1(u) - u, \ldots, \xi_n(u), x_n(u) - u) :$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\varkappa_n(u_i + h) \in B_1^i \times B_2^i \times \ldots \times B_{2n-1}^i \times B_{2n}^i\}\Big) =$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\varkappa_n(u_i) \in B_1^i \times B_2^i \times \ldots \times B_{2n-1}^i \times B_{2n}^i\}\Big)$$

для всех $k, n \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{R}, u_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство проведем методом математической индукции по n. При $n = 1$ $\;x_1(u) - u = \xi_1(u)$ и требуемое равенство выполняется в силу стационарности процесса ξ_1. Предположим, что равенство справедливо при n, тогда для $n + 1$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\varkappa_{n+1}(u_i + h) \in B_1^i \times \ldots \times B_{2n+2}^i\}\Big) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^{k} 1\!\!1_{B_1^i \times \ldots \times B_{2n}^i}(\varkappa_n(u_i+h))\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\xi_{n+1}(u_i+h), x_n(u_i+h)-(u_i+h)+$$
$$+\xi_{n+1}(x_n(u_i+h)-(u_i+h)+(u_i+h)\Big) \in B_{2n+1}^i \times B_{2n+2}^i\}\Big|\xi_1, \ldots, \xi_n)\Big) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^{k} 1\!\!1_{B_1^i \times \ldots \times B_{2n}^i}(\varkappa_n(u_i + h))\cdot$$
$$\cdot\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\xi_{n+1}(u_i+h), v_i+\xi_{n+1}(v_i+(u_i+h)) \in B_{2n+1}^i \times B_{2n+2}^i\}\Big)\Big|_{v_i = x_n(u_i+h)-(u_i+h)}\Big),$$

где мы воспользовались независимостью процессов $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$. Выражение под знаком математического ожидания является измеримой функцией от процесса $\{\varkappa_n(u), u \in \mathbb{R}\}$. Пользуясь тем, что по предположению индукции процесс $\varkappa_n$ является стационарным в узком смысле, последнее выражение равно

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{k} 1\!\!1_{B_1^i\times\ldots\times B_{2n}^i}(\varkappa_n(u_i))\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{(\xi_{n+1}(u_i+h), x_n(u_i)-u_i+$$

$$+\xi_{n+1}(x_n(u_i)-u_i+u_i+h)\in B_{2n+1}^i\times B_{2n+2}^i\Big|\xi_1,\ldots,\xi_n\}\Big)\Big]=$$

$$=\mathbb{E}\prod_{i=1}^{k} 1\!\!1_{B_1^i\times\ldots\times B_{2n}^i}(\varkappa_n(u_i))\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{(\xi_{n+1}(u_i), x_{n+1}(u_i)-u_i)$$

$$\in B_{2n+1}^i\times B_{2n+2}^i\}\Big|\xi_1,\ldots,\xi_n\Big)$$

где мы воспользовались стационарностью процесса ξ_{n+1} и получили требуемое выражение, не зависящее от h. Лемма доказана. □

Для исследования свойств отображения $x_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ в фиксированный момент времени n рассмотрим вопросы, связанные с его эргодичностью. Приведем необходимые определения и утверждения [42]. Пусть $\{X(u), u\in\mathbb{R}\}$ – стационарный в узком смысле процесс. Обозначим через $M(\mathbb{R})$ множество всех функций на $\mathbb{R}$ с σ-алгеброй $\mathfrak{S}$, порожденной цилиндрическими множествами. Определим меру μ_X, соответствующую процессу X, положив на цилиндрических множествах

$$\mu_X\{f\in M(\mathbb{R}) : f(u_1\in\Delta_1,\ldots,f(u_k)\in\Delta_k)\}=$$
$$=\mathbb{P}\{X(u_1)\in\Delta_1,\ldots,X(u_k)\in\Delta_k\}.$$

Определение 1.2.1. (i) Измеримая функция F на $M(\mathbb{R})$ называется инвариантной, если при всех $f\in M(\mathbb{R})$

$$F(f(\cdot+x))=F(f(\cdot)),\ x\in\mathbb{R};$$

(ii) множество $A \in \mathfrak{S}$ называется инвариантным, если $1\!\!\mathrm{I}_A$ является инвариантной функцией.

Определение 1.2.2 ([42]). Стационарный в узком смысле процесс $\{X(u), u \in \mathbb{R}\}$ назовем эргодическим, если для любого инвариантного множества A $\mu_X(A) \in \{0, 1\}$.

Для эргодических процессов справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.1 (теорема Биркгофа–Хинчина [42]). *Пусть* $\{X(u), u \in \mathbb{R}\}$ *– эргодический процесс и* $F \in L^1(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$. *Тогда для* μ_X*-почти всех* $f \in M$ *существуют и равны пределы*

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \int_0^U F(f(\cdot{+}u))du = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U F(f(\cdot{+}u))du = \int_M F(f)\mu_X(df). \tag{1.2.1}$$

Приведем полезные для дальнейшего примеры функционалов на пространстве функций.

Пример 1.2.1. (а) Пусть $F(f(\cdot)) = \varphi(f(0))$, где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $\mathbb{E}\varphi(X(0)) < +\infty$. Тогда в терминах процесса X теорема Биркгофа–Хинчина принимает вид:

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \varphi(X(u))du = \mathbb{E}\varphi(X(0)) \text{ п.н.}$$

(б) Определим F на множестве дифференцируемых функций по правилу $F(f(\cdot)) = f'(0)$. Тогда, для эргодического процесса с непрерывно дифференцируемой модификацией теорема Биркгофа–Хинчина принимает вид:

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \int_0^U X'(u)du = \lim_{U\to\infty} \frac{X(U) - X(0)}{U} = \mathbb{E}X'(0).$$

Для проверки эргодичности процесса бывает удобнее пользоваться следующим свойством перемешивания:

Определение 1.2.3 ([42]). Стационарный в узком смысле процесс X обладает свойством перемешивания, если для любых двух функций $F, G \in L^2(M(\mathbb{R}), \mathfrak{S}, \mu_X)$

$$\lim_{u\to\infty} \int_M F(f(\cdot+u))G(f(\cdot))\mu_X(df) = \\ = \int_M F(f)\mu_X(df) \int_M G(f)\mu_X(df). \quad (1.2.2)$$

Заметим, что если процесс X обладает свойством перемешивания, то он является эргодическим. Действительно, для функций $F = G = \mathbb{1}_A$, где A – инвариантное множество, соотношение (1.2.2) примет вид:

$$\mu_X(A) = \mu_X(A) \cdot \mu_X(A),$$

откуда следует, что $\mu_X(A) \in \{0, 1\}$.

Основным результатом настоящего параграфа является теорема об эргодичности процесса $\{x_n(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть поток с дискретным временем* $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ *построен по последовательности независимых стационарных гауссовских процессов* $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ *с ковариационной функцией* Γ *такой, что* $\Gamma(u) \to 0$ *при* $u \to \infty$, *то есть*

$$x_{n+1}(u) = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u))$$
$$x_0(u) = u.$$

Тогда процесс $\{x_N(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$ *является эргодическим при каждом* $N \geq 1$.

Доказательство. Как было отмечено, для доказательства эргодичности стационарного процесса $\{x_N(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$ достаточно проверить свойство перемешивания. Применим метод математической индукции по N. При $N = 1$ $x_1(u) - u = \xi_1(u)$. Известно [42], что стационарный гауссовский процесс с ковариационной функцией Γ такой, что $\Gamma(u) \to 0$ при $u \to \infty$ является эргодичным. Отметим, что свойство перемешивания достаточно проверять на классе функций

$$\mathcal{E} = \{F \in M(\mathbb{R}) : F(X) = \exp\{i(\vec{\lambda}, \vec{X}(\vec{u}))\}\},\ \lambda \vec{\in} \mathbb{R}^m,$$

$$\vec{X}(\vec{u}) = (X(u_1), \ldots, X(u_m)),\ \vec{u} \in \mathbb{R}^m, m \geq 1.$$

Действительно, из теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что для ограниченной билинейной формы

$$\int_{M(\mathbb{R})} F(f(\cdot + u))G(f(\cdot))\mu_X(df)$$

условие (1.2.2) для всех $F, G \in L^2(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$ вытекает из справедливости этого свойства на всюду плотном относительно нормы $\|F\|^2 = \int_{M(\mathbb{R})} F(f)\mu_X(df)$ подмножестве $\mathcal{E}$.

Предположим, что процесс $\{x_N(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяет условию перемешивания. Тогда для $N + 1$ и функций F, G из класса $\mathcal{E}$:

$$\int_{M(\mathbb{R})} F(f(\cdot + h))G(f(\cdot))\mu_{x_{N+1}(u)-u}(df) =$$
$$= \mathbb{E}\exp\{i(\vec{\alpha}, \vec{x}_{N+1}(\vec{u} + \vec{h})) - (\vec{u} + \vec{h})\}\exp\{i(\vec{\beta}, \vec{x}_{N+1}(\vec{v}) - \vec{v})\},$$

где $\vec{x}_n(\vec{u}) = (x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m)), \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m, \vec{h} = (h, \ldots, h) \in \mathbb{R}^m$, и

$$F(f) = \exp\{i(\vec{\alpha}, f(\vec{u}))\},\ G(f) = \exp\{i(\vec{\beta}, f(\vec{v}))\}.$$

Применяя рекуррентное соотношение для x_n, получим:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\alpha}, \vec{x}_{n+1}(\vec{u}+\vec{h}) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\vec{\beta}, \vec{x}_{n+1}(\vec{v}) - \vec{v})\} = \\
&\quad = \mathbb{E}\Big(\exp\{i(\vec{\alpha}, \vec{x}_{n+1}(\vec{u}+\vec{h}) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\vec{\beta}, \vec{x}_{n+1}(\vec{v} - \vec{v}))\}\cdot \\
&\quad \cdot\mathbb{E}(\exp\{i(\vec{\alpha}, \vec{\xi}_{n+1}(\vec{x}_n(\vec{u}+\vec{h})))\}\exp\{i(\vec{\beta}, \vec{\xi}_{n+1}(\vec{x}_n(\vec{v})))\}|x_n)\Big) = \\
&\quad = \mathbb{E}\Big(\exp\{i(\vec{\alpha}, \vec{x}_n(\vec{u}+\vec{h}) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\vec{\beta}, \vec{x}_n(\vec{v}) - \vec{v})\}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\exp\{-\frac{1}{2}K(\vec{x}_n(\vec{u}+\vec{h}), \vec{x}_n(\vec{v}))\vec{\alpha\beta}, \vec{\alpha\beta})\}\Big),
\end{aligned}$$

где мы воспользовались независимостью процесса ξ_{n+1} от $\sigma\{x_n\}$ и обозначили через $K(\vec{u}, \vec{v})$ коварианционную матрицу гауссовского вектора $(\xi_n(u_1), \ldots, \xi_n(u_m), \xi_n(v_1), \ldots, \xi_n(v_m))$ в $\mathbb{R}^{2m}$ и $\vec{\alpha\beta} = (\alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Продолжая равенство, получим выражение:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp\{i(\vec{\alpha}, x_n(\vec{u}+\vec{h}) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\vec{\beta}, x_n(\vec{v}) - \vec{v})\}\cdot \\
&\qquad \cdot\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{m}\Gamma(x_n(u_i+h) - x_n(u_j+h))\alpha_i\alpha_j\}\cdot \\
&\qquad\quad \cdot\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{m}\Gamma(x_n(v_i) - x_n(v_j))\beta_i\beta_j\}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{m}\Gamma(x_n(u_i+h) - x_n(v_j))\alpha_i\beta_j\}].
\end{aligned}$$

Заметим, что $|x_n(u_i+h) - x_n(v_j)| \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$ при $h \to \infty$, следовательно, $\Gamma(x_n(u_i+h) - x_n(v-j)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $h \to \infty$. По предположению индукции, процесс $\{x_n(u) - u, u \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяет условию перемешивания, поэтому полученное выражение имеет предел, равный:

$$\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\alpha},\vec{x}_n(\vec{u}-\vec{u}))-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{m}\Gamma(x_n(u_i)-x_n(u_j))\alpha_i\alpha_j\}\cdot$$

$$\cdot\,\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\beta},\vec{x}_n(\vec{v}-\vec{v}))-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{m}\Gamma(x_n(v_i)-x_n(v_j))\beta_i\beta_j\}=$$

$$=\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\alpha},\vec{x}_{n+1}(\vec{u})-\vec{u})\}\cdot\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\beta},\vec{x}_{n+1}(\vec{v})-\vec{v})\}.$$

Таким образом, процесс $\{x_n(u)-u, u\in\mathbb{R}\}$ удовлетворяет условию перемешивания, а значит, является эргодическим. Теорема доказана.

□

Используя эргодичность процесса $\{x_n(u)-u, u\in\mathbb{R}\}$ сделаем некоторые выводы о свойствах отображения $x_n(\cdot)$.

Следствие 1.2.1. Пусть λ – мера Лебега на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда для произвольного множества $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2U}\lambda\{u\in[-U,U]: x_n(u)-u\in\Delta\}\to\mathbb{P}\{x_n(0)\in\Delta\} \text{ при } U\to\infty.$$

Доказательство. Применяя теорему Биркгофа–Хинчина к процессу $\{x_n(u)-u, u\in\mathbb{R}\}$ с функцией $F(X)=1\!\!\mathrm{I}_{\{X(0)\in\Delta\}}$ имеем:

$$\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}1\!\!\mathrm{I}_{\{x_n(u)-u\in\Delta\}}du\to\mathbb{E}1\!\!\mathrm{I}_{\{x_n(0)\in\Delta\}}.$$

□

При условии на ковариационную функцию процессов $\{\xi_n(u), u\in\mathbb{R}\}$ $\Gamma\in C^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$, процесс $\{x_n(u)-u, u\in\mathbb{R}\}$ имеет дифференцируемую модификацию [55] и $\{x'_n(u), u\in\mathbb{R}\}$ является эргодическим процессом. Используя это, сделаем вывод о том, насколько нарушается монотонность отображения $x_n(\cdot)$.

Следствие 1.2.2. Пусть $\Gamma \in C^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$. Тогда существует константа $c > 0$ такая, что

$$\lim_{U\to\infty} -\frac{1}{U}\int_0^U x_n'(u)1\!\!1_{\{x_n'(u)<0\}}du = c. \tag{1.2.3}$$

Доказательство. Из эргодической теоремы следует, что

$$\lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U x_n'(u)du = \lim_{u\to\infty}\frac{x_n(U)-x_n(0)}{U} = \mathbb{E}x_n'(0) = 1. \tag{1.2.4}$$

С другой стороны

$$\lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U |x_n'(u)|du = \mathbb{E}|x_n'(0)|. \tag{1.2.5}$$

Отметим, что $\{|x_n'(u)|\}_{n\geq 1}$ является супермартингалом и $|x_0'(u)| = 1$. Поэтому $\mathbb{E}|x_n'(u)| > 1$, поскольку супермартингал $|x_n'(u)|$ не является детерминированным. Сравнивая (1.2.4) и (1.2.5) получаем:

$$-\frac{1}{u}\int_0^u x_n'(u)1\!\!1_{\{x_n'(u)<0\}}du \to c,\ c>0$$

для каждого n.

Будем говорить, что точки $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ меняют порядок при отображении x_n, если $(u_1-u_2)(x_n(u_1)-x_n(u_2)) < 0$. Тогда предельное соотношение (1.2.3) влечет, что мера Лебега множества точек $\{u\in\mathbb{R}|\exists\ u_1 : u$ и u_1 поменяли порядок при отображении $x_n\}$ является бесконечной. □

1.3 Приближение потоков броуновских частиц

Потоки с дискретным временем построены с целью приближения стохастических потоков. Приведем в этом параграфе известные результаты о сходимости аппроксимационных схем. Как было отмечено в первом параграфе, одним из первых примеров стохастических потоков является поток решений стохастических дифференциальных уравнений. Поэтому начнем с результата о приближении решения обыкновенного стохастического дифференциального уравнения [54].

Рассмотрим процесс $\{x(t), t \in [0,T]\}$, являющийся решением задачи Коши:

$$\begin{aligned} &dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t), \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где $\{w(t), t \geq 0\}$ – стандартный винеровский процесс. Схема Эйлера–Маруямы [54] для уравнения (1.3.1) по равномерному разбиению $\tau = \{t_k = \frac{k}{n},\ k = 0, \ldots, Tn\}$ строится с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} &y_{k+1}^n = y_k^n + \frac{1}{n} a\left(y_k^n\right) + b\left(y_k^n\right) \Delta\left(\frac{k}{n}\right), \\ &y_0^n = x_0, \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

где $\Delta\big(\frac{k}{n}\big) = w\big(\frac{k+1}{n}\big) - w\big(\frac{k}{n}\big)$.

Через $\{y_n(t), t \in [0,T]\}$ будем обозначать кусочно-линейный процесс, построенный по точкам $\{(\frac{k}{n}, y_k^n), k = 0, \ldots, Tn\}$.

Процессы $\{y_n(t), t \in [0,T]\}$ приближают решение стохастического дифференциального уравнения (1.3.1), и имеет место теорема.

Теорема 1.3.1 ([54])**.** *Пусть коэффициенты уравнения* (1.3.1) *удовлетворяют условию*

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq L|x - y|. \tag{1.3.3}$$

Тогда

$$\mathbb{E} \sup_{[0,T]} (x(t) - y_n(t))^2 \leq \frac{c}{n}. \tag{1.3.4}$$

В дальнейшем нам понадобится зависимость константы c в оценке (1.3.4) от константы Липшица коэффициентов уравнения. Из доказательства теоремы 7.1 в [54] на стр. 396 можно получить, что

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}(x(t)-y_n(t))^2 \leq \mathrm{const}\,\frac{L^2\exp\{L^2\}}{n}. \tag{1.3.5}$$

Потоки с дискретным временем, построенные по схеме (1.1.3) приближают потоки Харриса броуновских частиц со взаимодействием [31]. Приведем определение потоков Харриса [1]. Пусть φ – непрерывная, положительно определенная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $\varphi(0)=1$ и удовлетворяет условию Липшица вне любой окрестности нуля.

Определение 1.3.1. Потоком Харриса с локальной характеристикой φ называется семейство $\{x(u,\cdot), u\in\mathbb{R}\}$ броуновских мартингалов относительно общей фильтрации такое, что

(i) $x(u,0)=u,\ u\in\mathbb{R}$;

(ii) для всех $u_1\leq u_2,\ t\geq 0$

$$x(u_1,t)\leq x(u_2,t);$$

(iii) совместная характеристика удовлетворяет уравнению

$$d\langle x(u_1,\cdot),x(u_2,\cdot)\rangle(t)=\varphi(x(u_1,t)-x(u_2,t))dt. \tag{1.3.6}$$

Известно, что поток Харриса существует [1]. Как было отмечено в статье И. Нищенко [31], при достаточно гладкой функции φ поток Харриса может быть получен как поток решений стохастического дифференциального уравнения. Действительно, пусть $\{w_k, k\geq 1\}$ – последовательность стандартных винеровских процессов. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} dx(u,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x(u,t))dw_k(t), \\ x(u,0) &= u, \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

где $a = (a_k)_{k\geq 1}$ – отображение из $\mathbb{R}$ в l_2, удовлетворяющее условию Липшица такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(u)a_k(v) = \varphi(u-v).$$

Тогда поток решений уравнения (1.3.7) является потоком Харриса с локальной характеристикой φ. Более того, такой поток является потоком гомеоморфизмов.

Также гладкий поток Харриса может быть получен с помощью стохастического дифференциального уравнения по винеровскому листу [50]:

$$\begin{aligned} dz(u,t) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(z(u,t)-p)W(dp,dt), \\ z(u,0) &= u, \ u \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

где $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} \psi^2(u)du = 1,\ W$-винеровский лист на $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$. При таких условиях на ψ существует единственное сильное решение [50] и поток решений образует поток Харриса с локальной характеристикой

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u-p)\psi(-p)dp.$$

Отметим, что в случае, когда локальная характеристика φ потока Харриса такова, что

$$\int_0^1 \frac{x}{1-\varphi(x)}dx < +\infty,$$

то в потоке частицы склеиваются [1]. Следовательно, такой поток не может быть получен как решение стохастического дифференциального уравнения с гладкими коэффициентами. Несмотря на это поток броуновских частиц может быть приближен потоками с дискретным временем, построенными по схеме (1.1.3) так же, как и решение стохастического дифференциального уравнения с хорошими коэффициентами. Приведем здесь результаты о сходимости потоков с дискретным временем, которые получены И. Нищенко [31].

Будем обозначать через $\widetilde{x}_n(u, \cdot)$ ломаную на отрезке времени $[0, 1]$, построенную по узлам $(\frac{k}{n}, x_k(u))$, где $x_k(u)$ определены рекуррентным соотношением:

$$x_{k+1}(u) = x_k(u) + \xi_{k+1}(x_k(u)),$$
$$x_0(u) = u,$$

где $\{\xi_k(u), u \in \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ – последовательность независимых стационарных гауссовских процессов с нулевым средним и ковариационной функцией Г. Следующая теорема устанавливает сходимость l-точечных движений потока с дискретным временем к l-точечным движениям потока Харриса с гладкой локальной характеристикой.

Теорема 1.3.2 ([31])**.** *Пусть* Γ *– непрерывная положительно определенная функция на* $\mathbb{R}$ *такая, что* $\Gamma(0) = 1$ *и* Γ *имеет две непрерывных и ограниченных производных. Построим последовательность* $\{\widetilde{x}_n\}_{n\geq 1}$ *по последовательности гауссовских процессов* $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ *с ковариационной функцией* $\frac{1}{\sqrt{n}}\Gamma$*. Тогда для всех* $u_1, \ldots, u_l \in \mathbb{R}$ *случайный процесс* $\{\widetilde{x}_n(u_j, \cdot), j = 1, \ldots, l\}$ *слабо сходится в* $C([0, 1], \mathbb{R}^l)$ *к* l*-точечному движению потока Харриса с локальной характеристикой* Γ.

Случай, когда в предельном потоке происходит склеивание частиц, является более сложным с точки зрения аппроксимации. Мы рассмотрим приближение потоком Арратья, в котором частицы, стартующие из каждой точки прямой, совершают стандартное броуновское движение и каждые две частицы движутся независимо до момента встречи, после чего склеиваются и продолжают движение как одна. Именно, потоком Арратья является поток Харриса с локальной характеристикой $\varphi = 1\!\!1_{\{0\}}$. Для обеспечения сходимости к потоку Арратья необходимо приближать ковариационные функции управляющего шума $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ к функции $\varphi = 1\!\!1_{\{0\}}$. Следующая теорема содержит условия, обеспечивающие сходимость l-точечного движения потока с дискретным временем к l-точечному движению потока Арратья.

Теорема 1.3.3 ([31]). *Пусть для каждого $m \geq 1$ $\widetilde{x}_m$ построены по последовательности $\{\xi_n^m, n \geq 1\}$, где независимые стационарные гауссовские процессы ξ_n^m имеют ковариационную функцию $\frac{1}{\sqrt{m}}\Gamma_m$, удовлетворяющую условию Липшица. Для $m \geq 1$ определим*

$$c_m = \sup_{\mathbb{R}} \frac{2 - 2\Gamma_m(x)}{x^2}.$$

Если

(i) $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m e^{c_m}}{m} = 0$;

(ii) для всякого $\delta > 0$ $\sup_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} |\Gamma_m(x)| \to 0, m \to \infty$;

тогда случайный процесс $\{\widetilde{x}_m(u_1, \cdot), \ldots, \widetilde{x}_m(u_l, \cdot); m \geq 1\}$ слабо сходится к l-точечному движению потока Арратья.

Условие теоремы (ii) отвечает за сходимость Γ_m к $1\!\!1_{\{0\}}$, а условие (i) накладывает ограничение на скорость сходимости этой сходимости: Γ_m приближают $1\!\!1_{\{0\}}$ не слишком быстро.

Условие (i) естественным образом возникает, если мы рассмотрим разность между двумя точками в потоке с дискретным временем $y_m(t) =$

$\widetilde{x}_m(u_2) - \widetilde{x}_m(u_1), u_1 < u_2$. По лемме 1.1.4

$$\left\{ y_m \left(\frac{k}{m} \right) \right\}_{k \geq 0} \stackrel{d}{=} \{v_k\}_{k \geq 0},$$

где $\{v_k\}$ удовлетворяют разностному уравнению

$$\begin{aligned} &v_{k+1} = v_k + \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{2 - 2\Gamma_m(v_k)} \eta_{k+1}, \\ &v_0 = u_2 - u_1, \end{aligned}$$

где $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Заметим, $y_m(t)$ совпадает по распределению с разностной аппроксимацией Эйлера–Маруямы по равномерному разбиению с шагом $\frac{1}{m}$ для уравнения

$$\begin{aligned} &d\widetilde{y}_m(t) = \sqrt{2 - 2\Gamma_m(\widetilde{y}_m(t))} dw(t), \\ &\widetilde{y}(0) = u_2 - u_1. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Согласно оценке (1.3.5)

$$\mathbb{E} \sup_{[0,1]} (y_m(t) - \widetilde{y}_m(t))^2 \leq c \frac{c_m e^{c_m}}{m}.$$

Таким образом, условие (i) обеспечивает сходимость последовательности $\{y_m\}$ к решению уравнения (1.3.9), которое, являясь неотрицательным мартингалом, после попадания в ноль остается там. Это обеспечивает упорядоченность в предельном потоке и склейку частиц при их встрече.

Приведем пример последовательности функций $\{\Gamma_m\}_{m \geq 1}$, удовлетворяющей условиям теоремы 1.3.3.

Пример 1.3.1. Пусть $\Gamma_m(u) = e^{-\frac{a_m u^2}{2}}$. Очевидно, что функции Γ_m удовлетворяют условию Липшица. Не трудно проверить, что при $a_m > 1$

функция $\frac{2-2\exp\{-\frac{a_m u}{2}\}}{u^2}$ монотонно убывает на $[0,+\infty)$, а значит,

$$c_m = \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{2-2\Gamma_m(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{2-2\Gamma_m(u)}{u^2} = \\ = \lim_{u\to 0}\frac{2a_m u\exp\{-\frac{1}{2}a_m u^2\}}{2u} = a_m.$$

Выберем в качестве констант $a_m = \alpha \ln m$, где $\alpha \in (0,1)$. Тогда

$$\frac{c_m e^{c_m}}{m} = \frac{\alpha \ln m \cdot m^\alpha}{m} = \alpha\frac{\ln m}{m^{1-\alpha}} \to 0$$

при $m\to\infty$ и

$$\sup_{\mathbb{R}\backslash[-\delta,\delta]} \Gamma_m(u) = e^{-\frac{a_m\delta^2}{2}} \to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

В следующем примере мы покажем, что нарушение условий теоремы 1.3.3 может повлечь отсутствие упорядоченности частиц в предельном потоке. Мы рассмотрим двухточечное движение в дискретном потоке $\{x_k^n(u_1), x_k^n(u_2)\}_{k\geq 1}$ и докажем, что ломаные, построенные по узлам $(y_k^n, \frac{k}{n})$, где $y_k^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k^n(u_2) - x_k^n(u_1))$ слабо сходятся к броуновскому движению, если $\Gamma_n(u) = \exp\{-n^7u^2\}$.

Пример 1.3.2. Пусть поток с дискретным временем построен по последовательности независимых стационарных гауссовских процессов $\{\xi_k^n\}_{k=1}^n$ с ковариационной функцией $\Gamma_n(u) = \exp\{-n^7u^2\}$:

$$x_{k+1}^n(u) = x_k^n(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{k+1}^n(x_k^n(u)),$$
$$x_0^n(u) = u.$$

Для точек $u_1 < u_2$ рассмотрим последовательность $\{y_k^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k^n(u_2) - x_k^n(u_1))\}_{k\geq 1}$. Согласно лемме 1.1.4, $\{y_k^n\}_{k\geq 1}$ является случайным блужданием, определенным по рекуррентному соотношению

$$y_{k+1}^n = y_k^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \Gamma_n(\sqrt{2}y_k^n)}\eta_{k+1},$$
$$y_0 = (u_2 - u_1)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

где $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ – последовательность независимых стандартных гауссовских величин. Обозначим через $y_n(\cdot)$ ломаную, построенную по узлам $\{(\frac{k}{n}, y_k^n), k = 1, \ldots, n\}$.

Введем вспомогательное случайное блуждание $\{z_k^n\}_{k\geq 1}$, построенное по рекуррентному соотношению:

$$z_{k+1}^n = z_k^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi_n(z_k)\eta_{k+1},$$
$$z_0^n = (u_2 - u_1),$$

где $\varphi_n(u) = 1\!\!1_{\mathbb{R}\setminus[-\gamma_n,\gamma_n]}(u)$ и $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ – последовательность такая, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Как и ранее, через $z_n(\cdot)$ обозначим ломаную, построенную по узлам разбиения $\{(\frac{k}{n}, z_k^n), k = 1, \ldots, n\}$. Пусть $\{v_k^n\}_{k\geq 1}$ – случайное блуждание, построенное по рекуррентному соотношению:

$$v_{k+1}^n = v_k^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\eta_{k+1},$$
$$v_0^n = u_2 - u_1.$$

Известно [57], что случайный процесс $v_n(\cdot)$, определенный как ломаная с узлами в точках $(\frac{k}{n}, v_k^n)$ слабо сходится в $C([0,1])$ к стандартному броуновскому движению, стартовавшему из точки $u_2 - u_1$.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и покажем, что

$$\mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - w(u)| > \delta\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - w(u)| \le \delta\} \ge \mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - z_n(u)| +$$
$$+ \max_u |z_n(u) - v_n(u)| + \max_u |v_n(u) - w(u)| \le \delta\} \ge$$

$$\ge \mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - z_n(u)| \le \frac{\delta}{3}, \max_u |z_n(u) - v_n(u)| \le \frac{\delta}{3},$$
$$\max_u |v_n(u) - w(u)| \le \frac{\delta}{3}\} \ge$$

$$\ge 1 - \mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - z_n(u)| > \frac{\delta}{3}\} - \mathbb{P}\{\max_u |z_n(u) - v_n(u)| > \frac{\delta}{3}\} -$$
$$- \mathbb{P}\{\max_u |v_n(u) - w(u)| > \frac{\delta}{3}\}.$$

Оценим отдельно каждую из вероятностей, входящих в последнее выражение. Для этого рассмотрим множество $A_n = \{\omega : |z_k^n| > \gamma_n, k = 1, \ldots, n\}$. Поскольку при $u_2 - u_1 > \gamma_n$

$$\mathbb{P}\{|z_1^n| > \gamma_n\} = 1 - \mathbb{P}\{|u_2 - u_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\eta_1| \le \gamma_n\} \ge$$
$$\ge 1 - \mathbb{P}\{|\frac{1}{\sqrt{n}}\eta_1| \le \gamma_n\} = 1 - \int_{-\sqrt{n}\gamma_n}^{\sqrt{n}\gamma_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{-\frac{x^2}{2}}}} dx \ge$$
$$\ge 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}\gamma_n,$$

получим оценку на $\mathbb{P}(A_n)$:

$$\mathbb{P}\{A_n\} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|z_1^n| > \gamma_n\}} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{\{|z_{n-1}^n| > \gamma_n\}} \mathbb{P}\{|z_n^n| > \gamma_n \big| z_{n-1}\}) \ge$$
$$\ge (1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}\gamma_n) \cdot \mathbb{P}\{|z_1^n| > \gamma_n, \ldots, |z_{n-1}^n| > \gamma_n\} \ge \ldots$$
$$\ge (1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}\gamma_n)^n.$$

Заметим, что из определения случайных блужданий $\{z_k^n\}_{k\geq 1}$ и $\{v_k^n\}_{k\geq 1}$ следует, что $z_n(\cdot)1\!\!1_{A_n} = v_n(\cdot)1\!\!1_{A_n}$. Тогда

$$\mathbb{P}\{\max_u |z_n(u) - v_n(u)| > \frac{\delta}{3}\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\max_u |z_n(u) - v_n(u)| > \frac{\delta}{3}, A_n\} + \mathbb{P}\{\max_u |z_n(u) - v_n(u)| > \frac{\delta}{3}, \overline{A}_n\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\max_u |z_n(u) - v_n(u)| > \frac{\delta}{3}, \overline{A}_n\} \leq \mathbb{P}\{\overline{A}_n\}.$$

Поскольку при условии $n\sqrt{n}\gamma_n \to 0$

$$(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}\gamma_n)^n \sim \exp\{-\frac{2}{\pi}n\sqrt{n}\gamma_n\} \text{ при } n \to \infty,$$

то $\mathbb{P}\{\overline{A}_n\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для получения оценки на вероятность $\mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - z_n(u)| > \frac{\delta}{3}\}$ рассмотрим множество $B_n = \{\omega : |y_k^n| > \gamma_n, k = 1, \ldots, n\}$. Поскольку

$$\mathbb{P}\{|y_1^n| > \gamma_n\} = \mathbb{P}\{|u_2 - u_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \Gamma_n(u_2 - u_1)}\eta_1| > \gamma_n\} \geq$$

$$\geq 1 - \mathbb{P}\{|\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \Gamma_n(u_2 - u_1)}\eta_1| \leq \gamma_n\} \geq$$

$$\geq 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n}\gamma_n}{1 - \exp\{-n^7\gamma_n^2\}}$$

при $|u_2 - u_1| > \gamma_n$, получим:

$$\mathbb{P}(B_n) \geq \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n}\gamma_n}{1 - \exp\{-n^7\gamma_n^2\}}\right)^n.$$

Возьмем в качестве $\gamma_n = \frac{1}{n^2}$, тогда

$$\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n}\gamma_n}{1 - \exp\{-n^7\gamma_n^2\}}\right)^n \sim \exp\Big\{ - n\sqrt{n}\gamma_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big\} \text{ при } n \to \infty.$$

Далее заметим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{\substack{|u-v|<\varepsilon \\ |u|>\gamma^n \\ |v|>\gamma^n}} |\sqrt{1-\Gamma_n(u)} - \varphi_n(v)| = \max_{|u|>\gamma_n} |\sqrt{1-\Gamma_n(u)} - 1| =$$

$$= \max_{|u>\gamma_n|} \frac{\Gamma_n(u)}{1-\Gamma_n(u)+1} \le \Gamma_n(\gamma_n) = \exp\{-n^7\gamma_n^2\}.$$

Отсюда получим:

$$\mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - z_n(u)| \le \frac{\delta}{3}\} \ge$$

$$\ge \mathbb{P}(\{\max_u |y_n(u) - z_n(u)| \le \frac{\delta}{3}\} \bigcap A_n \bigcap B_n) =$$

$$= \mathbb{P}\{\bigcap_{k=1}^{n} \{|y_k^n - z_k^n| \le \frac{\delta}{3}\} \bigcap A_n \bigcap B_n\} \ge$$

$$\ge \mathbb{P}\{\bigcap_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n^7\gamma_n^2} |\eta_j| \le \frac{\delta}{3} \bigcap A_n \bigcap B_n\}.$$

Последнее выражение стремится к 1 при $n \to \infty$, поскольку $\mathbb{P}(A_n) \to 1$, $\mathbb{P}(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$ и

$$\mathbb{P}\{\bigcap_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n^7\gamma_n^2} |\eta_j| \le \frac{\delta}{3}\} = \mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n^7\gamma_n^2} \sum_{j=1}^{k} |\eta_j| \le \frac{\delta}{3}\} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{n\mathbb{E}|\eta_1|}{\sqrt{n}\exp\{n^7\gamma_n^2\}\frac{\delta}{3}}.$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\{\max_u |y_n(u) - w(u)| \le \delta\} \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

откуда следует слабая сходимость процесса $y_n(\cdot)$ к винеровскому процессу.

1.4 Асимптотика времени беспорядка в потоке с дискретным временем

Как было отмечено ранее, одной из черт потока с дискретным временем является то, что исходный порядок между частицами может нарушаться. Однако в предельном потоке броуновских частиц, согласно пункту (ii) определения 1.3.1 упорядоченность сохраняется со временем. Одним из функционалов, учитывающих пересечения в потоке с дискретным временем является следующий:

$$\Phi_m = \int_0^1 1\!\!\mathrm{I}_{\{x_m(u_2,t)-x_m(u_1,t)<0\}} dt, \tag{1.4.1}$$

где $\{x_m(u,t), u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}_{m\geq 1}$ – последовательность потоков с дискретным временем, которая приближает поток Харриса и $u_2 > u_1$ – некоторые фиксированные точки прямой. Функционал Φ_m является функционалом от двухточечного движения потока и определяет время, которое две частицы проводят в порядке, противоположном исходному. В настоящем параграфе мы установим асимптотику убывания к нулю последовательности $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$, когда последовательность потоков с дискретным временем приближает поток Арратья.

Пусть $\{x_m(u,t), u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}_{m\geq 1}$ – последовательность потоков с дискретным временем, удовлетворяющая условиям теоремы 1.3.3. Обозначим через $y_m(t) = x_m(u_2,t) - x_m(u_1,t)$. Из леммы 1.1.4 следует, что при каждом m последовательность $\{y_m(\frac{k}{m})\}_{k=0,\ldots,m}$ одинаково распределена с последовательностью $\{y_k^m\}_{k=0,\ldots,m}$, которая определена рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} &y_{k+1}^m = y_k^m + \sqrt{2 - 2\Gamma_m(y_k^m)}\Delta w\left(\frac{k}{m}\right) \\ &y_0^m = u_2 - u_1, \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

где $\Delta w(\frac{k}{m}) = w(\frac{k+1}{m}) - w(\frac{k}{m})$ – приращение стандартного броуновского движения $\{w(t), t \geq 0\}$. Таким образом, при каждом m процесс $\{y_m(t), t \geq 0\}$ одинаково распределен с m-м членом схемы Эйлера–Маруямы для стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} d\widetilde{y}_m(t) = \sqrt{2 - 2\Gamma_m(\widetilde{y}_m(t))}dw(t) \\ \widetilde{y}_m(0) = u_2 - u_1. \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Из оценки (1.3.5) получим, что

$$\mathbb{E}\max_{[0,1]}(y_m(t) - \widetilde{y}_m(t))^2 \leq c\frac{c_m e^{c_m}}{m}, \tag{1.4.4}$$

где константы c_m определены в условии теоремы 1.3.3.

Для доказательства основного результата о скорости сходимости $\{\Phi_m\}_{m\geq 1}$ к нулю нам понадобится лемма, в которой мы сравним решение уравнения (1.4.3) с броуновским движением. Положим $u_2 - u_1 = 1$.

Лемма 1.4.1. *Пусть $\widetilde{y}_m$ является решением уравнения* (1.4.3). *Предположим, что функции $B_m := \sqrt{2 - 2\Gamma_m} \in C^1((0, +\infty)), m \geq 1$ и выполняются условия:*

(i) B_m возрастает на $(0, +\infty)$,

(ii) Существует константа $K > 0$ такая, что

$$B_m\left(\frac{1}{\sqrt{c_m}}\right) \geq \frac{1}{K}, m \geq 1.$$

Пусть $\tau = \inf\{t : \widetilde{y}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{c_m}}\}$. Тогда для $t \in [0, \tau)$ почти наверное выполняется

$$\widetilde{y}_m(t) \leq \sqrt{2}(K + w(t)) + \frac{1}{\sqrt{c_m}},$$

где $\{w(t), t \geq 0\}$ – винеровский процесс, который задает уравнение (1.4.3).

Доказательство. Для функции

$$f(x) = \int_{\frac{1}{\sqrt{c_m}}}^{x} \frac{1}{B_m(u)} du$$

по формуле Ито

$$f(\widetilde{y}_m(t)) - f(1) = \int_0^t dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t B_m'(\widetilde{y}_m(s))ds. \tag{1.4.5}$$

Поскольку $B_m(0) = 0$ и $\widetilde{y}_m(0) = 1 > 0$, то процесс $\widetilde{y}_m(t)$ является положительным для всех $t \geq 0$ как решение уравнения (1.4.3). Используя условие (i) леммы, $B_m'(\widetilde{y}_m(s)) > 0$ для $s \geq 0$. Значит, из (1.4.5) получим:

$$f(\widetilde{y}_m(t)) \leq f(1) + w(t). \tag{1.4.6}$$

Пользуясь оценкой $B_m(u) \leq \sqrt{2}$ и условием (ii) получаем, что

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{c_m}}\right) \text{ при } x > \frac{1}{\sqrt{c_m}}$$

и

$$f(1) \leq \frac{1}{B_m\left(\frac{1}{\sqrt{c_m}}\right)} \leq K.$$

Объединяя последние оценки с (1.4.6) имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{y}_m(t) - \frac{1}{\sqrt{c_m}}\right) \leq f(\widetilde{y}_m(t)) \leq K + w(t)$$

для всех t таких, что $\widetilde{y}_m(t) \geq \frac{1}{\sqrt{c_m}}$. Лемма доказана. □

Теорема 1.4.1. *Предположим, что для всех* $m \geq 1$ *ковариационная функция* Γ_m *удовлетворяет условиям теоремы 1.3.3. Тогда*

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > 0\} \leq m \cdot F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right),$$

где $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$.

Если к тому же $\{\Gamma_m\}_{m\geq 1}$ *таковы, что*

(i) $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m^2 e^{c_m}}{m} = 0$;

(ii) $\frac{u}{\sqrt{2-2\Gamma_m(u)}}$ *возрастает при* $u > 0$;

(iii) $2 - 2\Gamma_m\left(\frac{1}{\sqrt{c_m}}\right) \geq \frac{1}{K^2}, m \geq 1$ *для некоторой константы* K,

тогда для всех $\varepsilon > 0$ *существует константа* $A > 0$ *такая, что*

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\}}{F\Big(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\Big)} \geq A.$$

Доказательство. Пользуясь рекуррентным соотношением (1.4.2) получим оценку на вероятность того, что за один шаг две частицы не поменяют порядок:

$$\begin{aligned}
&1\!\!\mathrm{I}_{\{y_{k-1}^m>0\}}\mathbb{P}\{y_k^m > 0|y_{k-1}^m\} = \\
&\quad = 1\!\!\mathrm{I}_{\{y_{k-1}^m>0\}}\mathbb{P}\Big\{y_{k-1}^m + \sqrt{2-2\Gamma_m(y_{k-1}^m)}\Delta w\Big(\frac{k}{m}\Big) > 0\Big|y_{k-1}^m\Big\} = \\
&\quad = 1\!\!\mathrm{I}_{\{y_{k-1}^m>0\}}\mathbb{P}\Big\{\Delta w\Big(\frac{k}{m}\Big) > -\frac{y_{k-1}^m}{\sqrt{2-2\Gamma_m(y_{k-1}^m)}}\Big|y_{k-1}^m\Big\} \geq \\
&\quad \geq 1\!\!\mathrm{I}_{\{y_{k-1}^m>0\}}\int_{-\sqrt{\frac{m}{c_m}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2}\Big\}dx = \\
&\quad = 1\!\!\mathrm{I}_{\{y_{k-1}^m>0\}}\Big(1 - F\Big(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\Big)\Big), \qquad (1.4.7)
\end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством

$$\frac{|u|}{\sqrt{2-2\Gamma_m(u)}} \geq \frac{1}{\sqrt{c_m}},$$

которое следует из определения константы c_m.

Используя полученное неравенство, имеем:

$$\mathbb{P}\{\Phi_m = 0\} = \mathbb{P}\{y_1^m > 0, y_2^m > 0, \ldots, y_m^m > 0\} =$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m-1} 1\!\!1_{\{y_i^m>0\}} \cdot \mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{y_m^m>0\}} | y_1^m, y_2^m, \dots, y_{m-1}^m\right)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m-1} 1\!\!1_{\{y_i^m>0\}} \cdot \mathbb{P}\{y_m^m > 0 | y_{m-1}^m\}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m-1} 1\!\!1_{\{y_i^m>0\}}\right) \geq \ldots \geq \left(1 - F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right)^m \geq$$

$$\geq 1 - mF\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right).$$

Таким образом, мы получили:

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > 0\} = 1 - \mathbb{P}\{\Phi_m = 0\} \leq mF\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right).$$

Для доказательства второй части теоремы введем моменты остановки:

$$\varkappa_m = \min\left\{\frac{k}{m} : y_k^m < \sqrt{\frac{2}{c_m}}\right\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\} \geq \sum_{k=1}^{[m(1-\varepsilon)]} \mathbb{P}\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y_{k+j}^m < 0, j = 1, \ldots, m-k\}.$$

Оценим каждое слагаемое в последней сумме:

$$\mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y_{k+j}^m = 0, j = 1, \ldots, m-k\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\}} \cdot \prod_{j=1}^{m-k-1} 1\!\!1_{\{y_{k+j}^m<0\}} \mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{y_m^m<0\}} | y_{m-1}^m\right)\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right) \mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y_{k+j}^m < m, j = 1, \ldots, m-k-1\right\},$$

где мы воспользовались оценкой (1.4.7).

Продолжая неравенство получим:

$$\mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y^m_{k+j} = 0, j = 1, \dots, m-k\right\} \geq$$
$$\geq \left(1 - F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right)^{m-k-1} \mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y^m_{k+j} < 0\right\}.$$

Для $\mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y^m_{k+j} = 0\right\}$ получим оценку:

$$\mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}, y^m_{k+j} < 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\left\{y^m_i > \sqrt{\frac{2}{c_m}}\right\}, y^m_k < \sqrt{\frac{2}{c_m}}, y^m_{k+1} < 0\right\} =$$
$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\}}\mathbb{P}\left\{y^m_{k+1} < 0 | y^m_k < \sqrt{\frac{2}{c_m}}\right\}\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\}}\mathbb{P}\left\{\Delta w\left(\frac{k}{m}\right) < -\frac{y^m_k}{\sqrt{2 - 2\Gamma_m(y^m_k)}} | y^m_k < \sqrt{\frac{2}{c_m}}\right\}\right) \geq$$
$$\geq \mathbb{P}\left\{\Delta w\left(\frac{k}{m}\right) < -K\sqrt{\frac{2}{c_m}}\right\}\mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\right\},$$

где мы воспользовались условиями (ii), (iii) теоремы.

Таким образом, мы приходим к следующей оценке:

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\} \geq F\left(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\sum_{k=1}^{[m(1-\varepsilon)]}\left(1 - F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right)^{n-k-1}\mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\right\} \geq$$
$$\geq \left(1 - F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right)^{m-2} F\left(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\sum_{k=1}^{[m(1-\varepsilon)]}\mathbb{P}\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\}.$$

Для того, чтобы получить оценку на $\sum_{k=1}^{[m(1-\varepsilon)]}\mathbb{P}\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\}$ мы воспользуемся тем, что последовательность процессов $\{y_m(t), t \geq 0\}_{m\geq 1}$ приближает решение стохастического дифференциального уравнения (1.4.3).

Обозначим $\tau_m = \inf\left\{t : \widetilde{y}_m(t) = \sqrt{\frac{1}{c_m}}\right\}$, где $\widetilde{y}_m$ – решение уравнения (1.4.3). Пользуясь оценкой (1.4.4), получим:

$$\sum_{k=1}^{[m(1-\varepsilon)]} \mathbb{P}\left\{\varkappa_m = \frac{k}{m}\right\} \geq$$
$$\geq \mathbb{P}\left\{\varkappa_m \leq \frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}, \max_{[0,1]} |\widetilde{y}_m(t) - y_m(t)| \leq \sqrt{\frac{1}{c_m}}\right\} \geq$$
$$\geq 1 - \mathbb{P}\left\{\tau_m > \frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}\right\} - \mathbb{P}\left\{\max_{[0,1]} |\widetilde{y}_m(t) - y_m(t)|^2 > \frac{1}{c_m}\right\} \geq$$
$$\geq \mathbb{P}\left\{\tau_m > \frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}\right\} - c\frac{c_m^2 e^{c_m}}{m}.$$

Пользуясь леммой 1.4.1 мы можем сравнить моменты попадания на уровень процессов $\widetilde{y}_m$ и w. Именно, обозначим

$$\theta_m = \inf\left\{t : \sqrt{2}(w(t) + K) + \sqrt{\frac{1}{c_m}} = \frac{1}{\sqrt{c_m}}\right\} =$$
$$= inf\{t : w(t) + K = 0\}.$$

Тогда из леммы 1.4.1 имеем:

$$\mathbb{P}\left\{\tau_m \leq \frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}\right\} \geq \mathbb{P}\left\{\theta_m \leq \frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}\right\} =$$
$$= 2\mathbb{P}\left\{w\left(\frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}\right) > K\right\},$$

где мы воспользовались методом отражения для винеровского процесса.

Окончательно получаем:

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\} \geq F\left(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right) A_m,$$

где

$$A_m = \left(1 - (m-2)F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right)\right)\left(2\mathbb{P}\left\{w\left(\frac{[m(1-\varepsilon)]}{m}\right) > K\right\} - c\frac{c_m^2 e^{c_m}}{m}\right).$$

Поскольку при $m \to \infty$

$$A_m \to 2\mathbb{P}\{w(1-\varepsilon) > K\} \equiv A > 0.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.4.1. При выполнении условий предыдущей теоремы имеют место оценки:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{2c_m}{m} \ln \mathbb{P}\{\Phi_m > 0\} \le -1,$$

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{2c_m}{m} \ln \mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\} \ge -K^2.$$

Доказательство. Логарифмируя оценки на $\mathbb{P}\{\Phi_m > 0\}$ из теоремы 1.4.1 получаем:

$$\ln \mathbb{P}\{\Phi_n > 0\} \le \ln m + \ln F\left(\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right).$$

Используя известное асимптотическое соотношение для гауссовского распределения:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ при } x \to \infty$$

мы получим первое неравенство утверждения.

Для получения второго соотношения мы воспользуемся оценкой из доказательства теоремы 1.4.1:

$$\mathbb{P}\{\Phi_m > \varepsilon\} \ge F\left(K\sqrt{\frac{m}{c_m}}\right) A_m.$$

Логарифмируя, получим требуемое соотношение. Следствие доказано.

$\square$

Выводы к главе 1

1. Определен поток с дискретным временем, изучены его свойства по пространственной переменной такие как стационарность и эргодичность;

2. Получена асимптотика времен нарушения упорядоченности двух точек в потоке с дискретным временем.

Глава 2

Разложение Крылова–Веретенникова для дискретного потока

2.1 Разложение Ито–Винера. Общие сведения

Потоки с дискретным временем, построенные в предыдущей главе, являются приближающими агрегатами потоков броуновских частиц со взаимодействием. Поэтому совместное поведение частиц в дискретном потоке связано со свойствами предельных потоков. Так, в параграфе 1.4 мы рассмотрели функционал от потока с дискретным временем, характеризующий нарушение порядка между парой частиц. Значение такого функционала от потока с непрерывным временем равняется нулю, поскольку в таком потоке сохраняется упорядоченность между частицами. Мы установили скорость убывания значения этого функционала от потока с дискретным временем к нулю, когда дискретный поток приближает поток Арратья. Таким образом, представляет интерес исследование различных функционалов от потоков с дискретным временем. Поскольку такие потоки построены по последовательности гауссовских процессов, для исследования функционалов от дискретных потоков можно использовать разложение Ито–Винера гауссовских функционалов. Настоящая глава посвящена описанию белого шума, порождающего поток с дискретным временем, и разложению Ито–Винера функций от m-точечных движений потока по этому шуму. Отметим, что стохастический поток с дискретным временем в главе 1 построен по аналогии с аппроксимацией решения стохастического дифференциального уравнения. Поэтому полученное нами в этой главе разложение можно рассматривать как дискретный аналог представления Крылова–Веретенникова функций от решения стохастического дифференциального уравнения [32].

В начале этой главы мы приведем основные результаты о разложении Ито–Винера гауссовских функционалов [34, 58, 43, 49]. Дальнейшее изложение следует [49].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство и H – действительное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 2.1.1. Линейное отображение ξ, которое каждому элементу $h \in H$ ставит в соответствие гауссовскую случайную величину (h, ξ) такую, что

$$\mathbb{E}(h, \xi) = 0 \text{ и } \mathbb{E}(h, \xi)^2 = \|h\|^2$$

называется обобщенным гауссовским элементом в H с нулевым средним и единичным ковариационным оператором.

Элемент ξ из определения 2.1.1 будем также называть белым шумом в H.

Обозначим через $H_k, k \geq 1$ пространство симметричных k-линейных форм Гильберта–Шмидта на H, т.е. таких отображений $A_k : H \times \ldots \times$

$H \to \mathbb{R}$, которые линейны по каждой переменной, не зависят от всевозможных перестановок координат и для любого ортонормированного базиса $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ в H

$$\|A_k\|_k^2 := \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} A_k^2(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) < +\infty. \tag{2.1.1}$$

Отметим, что значение $\|A_k\|_k$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в H. Тогда скалярное произведение элементов A_k и B_k из пространства H_k задается формулой:

$$(A_k, B_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} A_k(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) B_k(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}). \tag{2.1.2}$$

Определим значение полилинейной формы $A_k \in H_k$ от белого шума ξ по правилу:

$$A_k(\xi,\ldots,\xi) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} A_k(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})(e_{i_1},\xi) * \ldots * (e_{i_k},\xi), \tag{2.1.3}$$

где символ $*$ обозначает произведение Вика [43, 44].

Напомним определение Вика совместно гауссовских случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_m$ с нулевым средним. Обозначим через $\mathcal{H}$ линейную оболочку $\{\sum_{i=1}^m t_i\xi_i, t_i \in \mathbb{R}\}$. Положим

$\mathcal{P}_n = \{p(\zeta_1,\ldots,\zeta_k) : p$ – многочлен степени $\le n, \zeta_1,\ldots,\zeta_k \in \mathcal{H}, k < \infty\}$,

$\overline{\mathcal{P}}_n$ – замыкание $\mathcal{P}_n$ в $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

Определим $\mathcal{H}_n = \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$ и обозначим через π_n ортогональную проекцию на подпространство $\mathcal{H}_n$ в $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Произведением Вика [43] называется

$$\xi_1 * \ldots * \xi_m \stackrel{def}{=} \pi_n(\xi_1,\cdot\ldots\cdot\xi_m).$$

Отметим, что произведение Вика коммутативно. В случае независимых гауссовских величин произведение Вика записывается через полиномы Эрмита. А именно, для независимых случайных величин $\{\eta_n\}_{n\ge1}$,

$\eta_i \sim N(0,1)$

$$\eta_1^{*r_1} * \eta_2^{*r_2} * \ldots * \eta_n^{*r_n} = \mathrm{H}_{r_1}(\eta_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{H}_{r_n}(\eta_n), \qquad (2.1.4)$$

где H_k – многочлен Эрмита степени k.

Можно проверить, что значения полилинейных форм Гильберта–Шмидта от белого шума обладают свойствами [34]:

1) $\forall\ k \geq 1\ \forall\ A_k, B_k \in H_k$

$$\mathbb{E}A_k(\xi,\ldots,\xi) = 0,$$

$$\mathbb{E}A_k(\xi,\ldots,\xi)B_k(\xi,\ldots,\xi) = k!(A_k, B_k); \qquad (2.1.5)$$

2) $\forall\ k \neq n\ \forall\ A_k \in H_k, B_n \in H_n$

$$\mathbb{E}A_k(\xi,\ldots,\xi)B_n(\xi,\ldots,\xi) = 0.$$

Случайная величина $\eta \in L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, измеримая относительно σ-алгебры $\sigma(\xi) = \sigma\{(h,\xi), h \in H\}$ раскладывается в ряд из значений полилинейных форм от шума ξ, а именно, справедлива теорема.

Теорема 2.1.1 ([49] разложение Ито–Винера)**.** *Пусть $\eta \in L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ измерима относительно $\sigma(\xi)$. Тогда существует единственная последовательность форм $A_k \in H_k$ такая, что*

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi,\ldots,\xi), \qquad (2.1.6)$$

где ряд сходится в среднем квадратическом.

Пример 2.1.1 ([43])**.** Пусть $H = \mathbb{R}^n$ и $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Белый шум ξ в H зададим по правилу: для $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$

$$(\xi,\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i.$$

Тогда разложение Ито–Винера квадратично интегрируемой случайной величины η, измеримой относительно белого шума ξ, представляет собой разложение по многочленам Эрмита. Действительно, формы Гильберта–Шмидта в $\mathbb{R}^n$ имеют вид:

$$A_k(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1\ldots i_k}(\vec{x}_1, \vec{e}_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (\vec{x}_k, \vec{e}_{i_k}),$$

где $A_{i_1\ldots i_k} \in \mathbb{R}$, $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Согласно (2.1.4) значение полилинейной формы A_k от белого шума в $\mathbb{R}^n$ представляет собой произведение многочленов Эрмита.

Пример 2.1.2. Пусть $H = L_2([0,1])$. Зададим белый шум по правилу: для $f \in L_2([0,1])$

$$(\xi, f) = \int_0^1 f(t)dw(t),$$

где $\{w(t), t \in [0,1]\}$ – винеровский процесс.

Для произвольнй формы Гильберта–Шмидта на $L_2([0,1])$ существует единственная функция a_k, симметричная относительно перестановок своих аргументов такая, что

$$A_k(h_1, \ldots, h_k) = \int_0^1 \overset{k}{\ldots} \int_0^1 a_k(t_1, \ldots, t_k) h_1(t_1) \cdot \ldots \cdot h_k(t_k) dt_1 \ldots dt_k. \tag{2.1.7}$$

Значение полилинейной формы A_k вида (2.1.7) от белого шума ξ представляет собой кратный интеграл по винеровскому процессу w [49]:

$$A_k(\xi, \ldots, \xi) = \int_0^1 \overset{k}{\ldots} \int_0^1 a_k(t_1, \ldots, t_k) dw(t_1) \ldots dw(t_k).$$

Тогда для случайной величины $\eta \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, измеримой относительно $\sigma(w)$ разложение Ито–Винера имеет вид:

$$\eta = \mathbb{E}\eta + \int_0^1 f_1(t)dw(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_n)dw(t_1)\dots dw(t_n). \tag{2.1.8}$$

Широкий класс случайных величин, измеримых относительно белого шума в примере 2.1.2 имеет вид $\varphi(x(t))$, где $\{x(t), t \in [0,1]\}$ – решение стохастического дифференциального уравнения. Явный вид ядер разложения таких случайных величин был получен Н. В. Крыловым и А. Ю. Веретенниковым в [32].

Пример 2.1.3. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = \sigma(x(t))dw(t) + b(x(t))dt,$$

$$x(0) = x_0,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и σ, b – функции, удовлетворяющие условию Липшица и σ такова, что существует постоянная $\mu > 0$:

$$|\sigma(x)| \geq \mu \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $a(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)$ и рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}U(s,x) + a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(s,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}U(s,x) = 0, \ s \in [0,t] \\ U(t,x) = \varphi(x), \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Обозначим через $\{T_t\varphi(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ – решение задачи (2.1.9) и положим $Q_t\varphi(x) = \sigma(x)\frac{\partial}{\partial x}T_t\varphi(x)$. Тогда разложение Ито–Винера для $\varphi(x(t))$ имеет вид [32]:

$$\varphi(x(t)) = T_t\varphi(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \dots \int_{0<t_1<\dots<t_k<t} T_{t_1}Q_{t_2-t_1}\dots Q_{t-t_k}\varphi(x_0)dw(t_1)\dots dw(t_k). \tag{2.1.10}$$

В следующем примере мы рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение по винеровскому листу W ([50]), которое описывает поток броуновских частиц со взаимодействием.

Определение 2.1.2. [50] Винеровским листом W в $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ называется гауссовская случайная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, имеющих конечную меру Лебега λ, такая, что

(i) для произвольного $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times [0, +\infty])$ $W(A)$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и ковариацией $\lambda(A)$;

(ii) для произвольных непересекающихся множеств A и B таких, что $\lambda(A) < +\infty$, $\lambda(B) < +\infty$

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B).$$

Для случайной функции $\{f(u, s), u \in \mathbb{R}, s \geq 0\}$, согласованной относительно потока σ-алгебр

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{W(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times [0, t])\right\}_{t \geq 0}$$

и такой, что

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} f^2(u, s) du ds < +\infty$$

определен стохастический интеграл Ито по винеровскому листу [50]:

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u, s) W(du, ds). \tag{2.1.11}$$

Интеграл (2.1.11) строится при помощи предельного перехода следующим образом. Для функции f выберем последовательность $\{f_n, n \geq 1\}$ ступенчатых функций вида

$$f_n(u, s) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^n(u) 1\!\!1_{[t_k^n, t_{k+1}^n)}(s),$$

сходящуюся в $L_2(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ к f и такую, что при каждом $k = 0,\ldots,n$ случайная функция φ_k^n имеет вид

$$\varphi_k^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj}^n 1\!\!1_{\Delta_j^n},$$

где $\Delta_j^n, j = 0,\ldots,n$ – непересекающиеся борелевские подмножества $\mathbb{R}$ с конечной мерой Лебега и a_{kj}^n – $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримые случайные величины. Для каждого $n \geq 1$ положим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f_n(u,s)W(du,ds) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{k_j}^n W(\Delta_j^n \times [t_k^n, t_{k+1}^n]).$$

Можно проверить, что

$$\mathbb{E}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(u,s)W(du,ds) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(u,s)W(du,ds)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n^2(u,s)duds.$$

Переходя к пределу в среднем квадратическом, получаем стохастический интеграл от f :

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(u,s)W(du,ds) := \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(u,s)W(du,ds).$$

Пример 2.1.4. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение:

$$x(u,t) = u + \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \psi(x(u,s)-v)W(dv,ds), \tag{2.1.12}$$

где W – винеровский лист на $\mathbb{R}\times[0,+\infty), \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi^2(u)du = 1,\ \psi(u) = \psi(-u), u \in \mathbb{R}.$$

Случайная величина вида $f(x(u_1,t),\ldots,x(u_m(t)))$, где $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция, $\{x(u_i,t), t \geq 0\}$ – решение уравнения (2.1.12), измерима относительно белого шума ξ в $L_2(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, определенного по правилу:

$$(\xi,\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\varphi(u,s)W(du,ds),\ \varphi\in L_2(\mathbb{R}\times[0,+\infty)).$$

Рассмотрим семейство операторов в $L_2(\mathbb{R}^m)$, определенных по правилу: $G_tf(\vec{u})=f(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))$ и соответствующую полугруппу $T_tf(\vec{u})=\mathbb{E}G_tf(\vec{u})$. Обозначим $A_vf(\vec{u})=\sum_{i=1}^m\psi(u_i-v)\frac{\partial}{\partial u_i}f(\vec{u})$ Тогда, согласно теореме 1.1 из [35]

$$f(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))=T_{0,t}f(\vec{u})+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^k}\int\limits_{0<t_1<\ldots<t_k<t}\ldots\int$$

$$T_{t,t_k}A_{v_1}T_{t_k,t_{k-1}}\ldots A_{v_k}T_{0,t_1}f(\vec{u})W(dv_k,dt_k)\ldots W(dv_1,dt_1)$$

2.2 Представление гауссовских стационарных процессов как интеграла по белому шуму

В предыдущем параграфе были приведены примеры разложения Ито–Винера функционалов от белого шума. В последних двух примерах белый шум определялся с помощью винеровского процесса и винеровского листа на $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Поскольку поток с дискретным временем управляется последовательностью гауссовских стационарных процессов, то для получения разложения функционала от потока необходимо представить последовательность гауссовских процессов в терминах белого шума. Такое представление может быть осуществлено различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

Произвольный стационарный процесс $\{X(t),t\in\mathbb{R}\}$ можно представить в виде интеграла по ортогональной случайной мере z [56]:

$$X(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}z(d\lambda),\ t\in\mathbb{R}.$$

В случае, когда процесс X является гауссовским, мера z представляет собой белый шум в пространстве $L_2(\mathbb{R},\mu)$, где μ – спектральная мера процесса X. В этих терминах можно записать:

$$X(t) = (e^{it\cdot}, z).$$

Пусть $\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\}$ – произвольный стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $\Gamma, \Gamma(0) = 1$. Белый шум определим в специальном гильбертовом пространстве H^Γ – воспроизводящем ядре [43], построенном по функции $\{\Gamma(\cdot - v), v \in \mathbb{R}\}$. Обозначим через $\widetilde{H}^\Gamma = \{\sum_{k=1}^n c_k\Gamma(u_k - \cdot), c_k, u_k \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$. Тогда H^Γ – это замыкание $\widetilde{H}^\Gamma$ по норме

$$\|\sum_{k=1}^n c_k\Gamma(u_k - \cdot)\|^2 = \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \Gamma(u_k - u_j).$$

Лемма 2.2.1. *Отображение η, которое на функции $f \in \widetilde{H}^\Gamma$ действует по правилу*

$$(\eta, \sum_{k=1}^n c_k\Gamma(u_k - \cdot)) = \sum_{k=1}^n c_k\xi(u_k),$$

продолджается по непрерывности в L_2 до белого шума в H^Γ.

Доказательство. Заметив, что $\mathbb{E}(\eta, f)^2 = \|f\|^2$, доказательство проводится стандартными рассуждениями. Лемма доказана. □

Итак, для каждого $u \in \mathbb{R}$ значение гауссовского процесса можно получить действием белого шума η на функцию $\Gamma(u - \cdot)$:

$$\xi(u) = (\eta, \Gamma(u - \cdot)).$$

В случае, когда ковариационная функция Γ стационарного гауссовского процесса представима в виде свертки $\Gamma = \psi * \psi$, где функция $\psi \in L_2(\mathbb{R}), \psi(u) = \psi(-u), u \in \mathbb{R}, \|\psi\|_{L_2} = 1$, белый шум в $L_2(\mathbb{R})$ зададим с помощью винеровского процесса.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\Gamma = \psi * \psi$. *Тогда на (возможно расширенном) вероятностном пространстве существует винеровский процесс* $\{w(u), u \in \mathbb{R}\}$ *такой, что для всех* $u \in \mathbb{R}$

$$\xi(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u-v)dw(v).$$

Доказательство. Рассмотрим пространство гауссовских случайных величин $H^\xi = \overline{\text{ЛО}\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\}}$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2$, $\xi_i \in H^\xi$. Определим отображение J из H^ξ в $L_2(\mathbb{R})$ по правилу:

$$H^\xi \ni \xi(u) \overset{J}{\mapsto} \psi(u - \cdot) \in L_2(\mathbb{R})$$

и продолжим линейно на случайные величины вида $\sum_{i=1}^m a_i\xi(u_i)$:

$$J\left(\sum_{i=1}^m a_i\xi(u_i)\right) = \sum_{i=1}^m a_i\psi(u_i - \cdot).$$

Проверим, что значение отображения J не зависит от способа представления случайной величины в виде линейной комбинации. Пусть

$$\sum_{i=1}^m a_i\xi(u_i) = \sum_{j=1}^m b_j\xi(v_j).$$

Тогда, воспользовавшись тем, что

$$(\xi(u_i), \xi(u_j))_{H^\xi} = (\psi(u_i - \cdot), \psi(u_j - \cdot))_{L_2},$$

получим:

$$0 = \| \sum_{i=1}^m a_i\xi(u_i) - \sum_{j=1}^m b_j\xi(v_j)\|^2_{H^\xi} = \| \sum_{i=1}^m a_i\psi(u_i - \cdot) -$$

$$- \sum_{j=1}^m b_j\psi(v_j - \cdot)\|^2_{L_2} = \|J\left(\sum_{i=1}^m a_i\xi(u_i)\right) - J\left(\sum_{j=1}^m b_j\xi(v_j)\right)\|^2.$$

Значит, $J\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\xi(u_i)\right) = J\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\xi(v_j)\right)$.

Таким образом, J является линейным отображением из H^ξ в $L_2(\mathbb{R})$ и $(J\xi_1, J\xi_2)_{L_2(\mathbb{R})} = (\xi_1, \xi_2)_{H^\xi}$.

Обозначим через $\mathcal{M} = J(H^\xi)$. Тогда для всех $f \in \mathcal{M}$ случайная величина $J^{-1}(f) \sim N(0, \|f\|^2)$, т.е. J^{-1} определяет белый шум $\varkappa$ в $\mathcal{M}$:

$$(\varkappa, f) = J^{-1}(f).$$

Пусть $\mathcal{M}^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$ и $\varkappa'$ – белый шум в $\mathcal{M}^\perp$, не зависящий от $\varkappa$. Отметим, что $\varkappa'$ может быть задан на расширении исходного вероятностного пространства. Определим белый шум $\widetilde{\varkappa}$ в $L_2(\mathbb{R})$ по правилу: для $f \in L_2(\mathbb{R}),\ f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in \mathcal{M}, f_2 \in \mathcal{M}^\perp$, положим

$$(\widetilde{\varkappa}, f) = (\varkappa, f_1) + (\varkappa', f_2).$$

Зададим винеровский процесс на $\mathbb{R}$ с помощью шума $\widetilde{\varkappa}$

$$w(u) = (\widetilde{\varkappa}, 1\!\!\mathrm{I}_{[0,u]}),\ w(-u) = (\varkappa, 1\!\!\mathrm{I}_{[-u,0]}), u > 0.$$

Тогда для $f \in L_2(\mathbb{R})$ действие белого шума можно записать в виде интеграла

$$(\widetilde{\varkappa}, f) = \int_{\mathbb{R}} f(u)dw(u)$$

и $\xi(u) = (\widetilde{\varkappa}, \psi(u - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u - v)dw(v)$.

Лемма доказана. $\square$

Замечание. Из доказательства леммы следует, что если множество функций $\{\psi(u - \cdot), u \in \mathbb{R}\}$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$, то белый шум задается на том же вероятностном пространстве, на котором задан сам процесс ξ.

Достаточным условием для этого является невырожденность преобразования Фурье функции ψ. Действительно, пусть $\widehat{\psi} \neq 0$ и функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ такова, что $\int_{\mathbb{R}} f(v)\psi(u-v)dv = 0$. Тогда $\widehat{f}\widehat{\psi} = 0$, и если $\widehat{\psi} \neq 0$, то $\widehat{f} = 0$, а значит, $f = 0$.

Поскольку для построения потока с дискретным временем мы используем последовательность независимых стандартных гауссовских процессов $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$, опишем гильбертово пространство и белый шум на нем, порождающий последовательность. Пусть η_k – белый шум на гильбертовом пространстве H, порождающий процесс ξ_k :

$$\xi_k(u) = (\eta_k, f_u), f_u \in H.$$

Рассмотрим гильбертово пространство

$$l_2(H) = \{F = (f_1, \ldots, f_k, \ldots) : f_j \in H, \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_H^2 < +\infty\}$$

со скалярным произведением

$$(F, G) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k, g_k).$$

Определим белый шум η на $l_2(H)$ по правилу:

$$(\eta, F) = \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k, f_k).$$

Тогда любой элемент последовательности $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ может быть получен действием белого шума η на некоторую функцию из $l_2(H)$:

$$\forall\ k \geq 1 \quad \xi_k(u) = (\eta, (\underbrace{0, \ldots, 0,}_{k-1} f_u, 0, \ldots)).$$

2.3 Разложение Крылова–Веретенникова для стохастического потока с дискретным временем

В настоящем параграфе мы получим разложение Ито–Винера случайной величины вида $f(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m))$, где $\{x_n\}_{n\geq 1}$ – поток с дискретным временем, т.е.

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n(u) + \xi_{n+1}(x_n(u)),\\ &x_0(u) = u, \end{aligned}$$

$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – независимые стационарные гауссовские процессы. Как было отмечено в предыдущем параграфе, такая случайная величина измерима относительно белого шума η в пространстве $l^2(H^\Gamma)$, где H^Γ – воспроизводящее ядро, построенное по ковариационной функции Γ. Если
$f(x_n(u_1),\ \ldots,\ x_n(u_m)) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, то согласно теореме 2.1.1 существует единственная последовательность полилинейных форм $\{A_k\}_{k\geq 1}$ такая, что

$$f(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\eta, \ldots, \eta).$$

Цель настоящего параграфа – получить явный вид полилинейных форм A_k. Мы получим разложение Ито–Винера для $f(x_n(u_1),\ \ldots,\ x_n(u_m))$ в терминах операторов $\{Q_k\}_{k\geq 0}$, которые определены через разложение Ито–Винера для $f(x_1(u_1), \ldots, x_1(u_m))$:

$$f(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1), \qquad (2.3.1)$$

где η_1 – белый шум, порождающий процесс ξ_1. Обозначим через

$$B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} | f\text{-измерима по Борелю, } \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} |f(\vec{u})| < +\infty\}.$$

Лемма 2.3.1. *(i) Для произвольного $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ отображение*

$$B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) \ni f \mapsto Q_k f(\vec{u}; \cdot, \dots, \cdot) \in H_k^\Gamma \tag{2.3.2}$$

является линейным и непрерывным отображением из $B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ в пространство k-линейных форм Гильберта–Шмидта на H^Γ.

(ii) Для произвольной функции $f \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ отображение

$$\mathbb{R}^m \ni \vec{u} \mapsto Q_k f(\vec{u}; \cdot, \dots, \cdot) \in H_k^\Gamma \tag{2.3.3}$$

измеримо и $\sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} \|Q_k f(\vec{u}; \cdot, \dots, \cdot)\|_k < +\infty$.

Доказательство. (i) Линейность отображения (2.3.2) вытекает из свойства единственности разложения Ито–Винера:

$$af(x_1(u_1), \dots, x_1(u_m)) + bf(x_1(u_1), \dots, x_1(u_m)) = a \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1) +$$

$$+ b \sum_{k=0}^{\infty} Q_k g(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} aQ_k f(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1) + bQ_k g(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f(af + bg)(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1).$$

Для доказательства непрерывности заметим, что согласно (2.1.4)

$$k! \|Q_k f(\vec{u}; \cdot, \dots, \cdot)\|_k^2 = \mathbb{E}(Q_k f(\vec{u}; \eta_1, \dots, \eta_1))^2 \leq$$

$$\leq \mathbb{E} f^2(u_1 + \xi_1(u_1), \dots, u_m + \xi_1(u_m)) \leq \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} |f(\vec{u})|. \tag{2.3.4}$$

(ii) Для доказательства измеримости отображения (2.3.3) прежде всего заметим, что непрерывность ковариационной функции Γ влечет существование измеримой модификации случайного процесса $\{f(u_1 + \xi_1(u_1), \dots, u_m + \xi_1(u_m)), \vec{u} \in \mathbb{R}^m\}$. Далее, для произвольной случайной величины $\varkappa \in L_2(\Omega, \sigma(\xi_1), \mathbb{P})$ по теореме Фубини функция $\{\mathbb{E}\varkappa f(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m)), \vec{u} \in \mathbb{R}^m\}$ является измеримой по Борелю как математическое ожидание от функции, измеримой по паре переменных (u, ω). Другими словами, для любого линейного непрерывного функционала l на $L_2(\Omega, \sigma(\xi_1), \mathbb{P})$ отображение

$$\mathbb{R}^m \ni \vec{u} \mapsto l(f(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m)) \in \mathbb{R} \tag{2.3.5}$$

измеримо. Поскольку борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ гильбертова пространства $L_2(\Omega, \sigma(\xi_1), \mathbb{P})$ порождается линейными непрерывными функционалами, то измеримость отображения (2.3.3) следует из измеримости отображения (2.3.6) для каждого линейного непрерывного функционала на $L_2(\Omega, \sigma(\xi_1), \mathbb{P})$.

Ограниченность отображения (2.3.3) следует из неравенства (2.3.4). Лемма доказана. $\square$

Для того, чтобы получить разложение Ито–Винера для $f(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m))$ в терминах операторов Q_k, нам будет необходимо определить разложение для полилинейной формы $Q_k f(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m); \cdot, \ldots, \cdot)$.

С этой целью мы расширим область определения операторов Q_k на измеримые функции со значением в гильбертовом пространстве. Пусть H – некоторое сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Обозначим

$$B(\mathbb{R}^m; H) = \{F : \mathbb{R}^m \to H | F \text{измерима по Борелю}, \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} \|F(\vec{u})\| < +\infty\}.$$

Тогда произвольная функция $F \in B(\mathbb{R}^m; H)$ представима в виде $F(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\vec{u}) e_j$, где $f_j \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$. Определим действие оператора Q_k на функции $F \in B(\mathbb{R}^m; H)$ по правилу:

$$Q_k F(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_k f_j(\vec{u}; \underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k}) e_j.$$

Отметим, что для произвольных $x_i \in H^\Gamma$

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_k f_j(\vec{u}; x_1, \ldots, x_k)^2 \leq \|x_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|x_k\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|Q_k f_j(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot)\|_k^2 \leq$$

$$\leq \|x_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|x_k\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E} f_j^2(\vec{u} + \xi_1(\vec{u})) \leq$$

$$\leq \mathrm{const} \frac{1}{k!} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(\vec{u} + \xi_1(\vec{u})) \leq \mathrm{const} \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^m} \|F(\vec{u})\|^2 < +\infty. \qquad (2.3.6)$$

Следовательно, действие оператора Q_k на функции из пространства $B(\mathbb{R}^m; H)$ определено корректно. В терминах определенных таким образом операторов, разложение Ито–Винера для гильбертовозначной функции в точке $\vec{u} + \xi_1(\vec{u})$ принимает вид: пусть $F \in B(\mathbb{R}^m; H)$, тогда

$$F(\vec{u} + \xi_1(\vec{u})) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} Q_k f_j(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1) e_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_k F(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1).$$

Аналогично лемме 2.3.1 доказываются свойства операторов Q_k, определенных на $B(\mathbb{R}^m; H)$:

Лемма 2.3.2. *(i) Для произвольного $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ отображение*

$$B(\mathbb{R}^m; H) \ni f \mapsto Q_k f(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot) \in (H_k^\Gamma, H) \qquad (2.3.7)$$

является линейным и непрерывным отображением из $B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ в пространство k-линейных форм Гильберта–Шмидта на H^Γ со значением в гильбертовом пространстве H.

(ii) Для произвольной функции $f \in B(\mathbb{R}^m; H)$ отображение

$$\mathbb{R}^m \ni \vec{u} \mapsto Q_k f(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot) \in (H_k^\Gamma, H) \tag{2.3.8}$$

измеримо и ограничено.

Рассмотрим в качестве примера гильбертова пространства H пространство k-линейных форм Гильберта–Шмидта на $L_2(\mathbb{R})$ с ортонормированным базисом $\{E_k^i(\underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k})\}_{i=1}^\infty$. Тогда для $A_k \in B(\mathbb{R}^m; L_2(\mathbb{R}^k))$

$$A_k(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot) = \sum_{i=1}^\infty a_i(\vec{u}) E_k^i(\underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k}),$$

и

$$A_k(\vec{u} + \xi_1(\vec{u}); \cdot, \ldots, \cdot) = \sum_{i=1}^\infty Q_j A_k(\vec{u}; \underbrace{\eta_1, \ldots, \eta_1}_{j} \underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k}),$$

где по определению

$$Q_j A_k(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1, \cdot, \ldots, \cdot) = \sum_{i=1}^\infty Q_j a_i(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1) E_k^i(\cdot, \ldots, \cdot).$$

В терминах операторов Q_k разложение Ито–Винера для функции от m-точечного движения потока с дискретным временем принимает вид:

Теорема 2.3.1. *Пусть $\{x_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ – поток с дискретным временем* (1.1.3)*. Тогда для произвольной $\varphi \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ разложение Ито–Винера для $\varphi(x_n(\vec{u}))$ имеет вид*

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{\substack{l_1, \ldots, l_n \geq 0 \\ l_1 + \ldots + l_n = k}} Q_{l_n} Q_{l_{n-1}} \ldots Q_{l_1} \varphi(\vec{u}; \underbrace{\eta_n, \ldots, \eta_n}_{l_n}, \ldots, \underbrace{\eta_1, \ldots, \eta_1}_{l_1}.) \tag{2.3.9}$$

Доказательство. Прежде всего проверим, что действие операторов Q_k в (2.3.9) корректно. По определению оператора Q_k,

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \varphi\left(x_{n-1}(\vec{u}) + \xi_n(x_{n-1}(\vec{u}))\right) = \sum_{k_1=0}^{\infty} Q_{k_1}\varphi(x_{n-1}(\vec{u}); \eta_n, \ldots, \eta_n). \tag{2.3.10}$$

Действие оператора Q_k на функцию $\{Q_{k_1}\varphi(\vec{u}; \underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k_1}), \vec{u} \in \mathbb{R}^m\}$ со значением в гильбертовом пространстве $H^{\Gamma}_{k_1}$ корректно определено в случае, когда $\|Q_{k_1}\varphi(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot)\|^2_{k_1}$ является измеримой и ограниченной функцией по $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$. Измеримость следует из (ii) леммы 2.3.1. Ограниченность вытекает из неравенства:

$$\|Q_{k_1}\varphi(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot)\|^2_{k_1} \le \frac{1}{k_1!}\mathbb{E}\varphi^2(\vec{u} + \xi_1(\vec{u})) \le \frac{1}{k_1!}\sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m}\varphi^2(\vec{u}).$$

Следовательно, действие оператора Q_{k_2} на функцию $Q_{k_1}\varphi$ корректно определено и

$$Q_{k_1}\varphi(x_{n-2}(\vec{u}) + \xi_{n-1}(x_{n-2}(\vec{u})); \cdot, \ldots, \cdot) =$$
$$= \sum_{k_2=0}^{\infty} Q_{k_2}Q_{k_1}\varphi(x_{n-2}(\vec{u}); \underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k_1}, \eta_{n-1}, \ldots, \eta_{n-1}).$$

Далее, представим гильбертово пространство $\mathcal{H} = l_2(H^{\Gamma})$ в виде прямой суммы подпространств

$$\mathcal{L}^n = \{F \in \mathcal{H} : F = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, f, 0, \ldots), f \in H^{\Gamma}\}.$$

В этих терминах k-линейная форма Гильберта–Шмидта $Q_{k_1}\varphi(x_{n-1}(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot))$ определена на подпространстве $\mathcal{L}^n$ и измерима относительно сужения белого шума η на $\oplus_{k=1}^{n-1}\mathcal{L}^k$. Таким образом, значение полилинейной формы $Q_{k_1}\varphi(x_{n-1}(\vec{u}; \cdot, \ldots, \cdot))$ от белого шума η_n

представляется в виде [34]:

$$Q_{k_1}\varphi(x_{n-2}(\vec{u})+\xi_{n-1}(x_{n-2}(\vec{u}));\eta_n,\ldots,\eta_n)=$$

$$=\sum_{k_2=0}^{\infty}Q_{k_2}Q_{k_1}\varphi(x_{n-2}(\vec{u});\underbrace{\eta_n,\ldots,\eta_n}_{k_1},\underbrace{\eta_{n-1},\ldots,\eta_{n-1}}_{k_2}).$$

Подставляя полученное разложение в (2.3.10), получим:

$$\varphi(x_n(\vec{u}))=\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}Q_{k_2}Q_{k_1}\varphi(x_{n-2}(\vec{u});\underbrace{\eta_n,\ldots,\eta_n}_{k_1},\underbrace{\eta_{n-1},\ldots,\eta_{n-1}}_{k_2}).$$

Продолжая рекуррентно, получим утверждение теоремы. $\square$

Рассматривая одноточечные движения потока с дискретным временем можно расширить множество функций φ, для которых записывается разложение Ито–Винера случайной величины $\varphi(x_n(u))$. Обозначим

$$L_2(\mathbb{R},N(0,n))=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{\mathbb{R}}f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2n}}dx<+\infty\}$$

– пространство функций, интегрируемых с квадратом по гауссовской мере с дисперсией $\sqrt{n}$. Определим норму в $L_2(\mathbb{R},N(0,n))$:

$$\|f\|^2_{N(0,n)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{\mathbb{R}}f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2n}}dx.$$

Рассмотрим пространство $\Phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}L_2(\mathbb{R};N(0,n))$. Зададим метрику в Φ так: для $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi$

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|\varphi_1-\varphi_2\|_{N(0,n)}}{1+\|\varphi_1-\varphi_2\|_{N(0,n)}}.$$

Проверим, что для произвольной $\varphi\in\Phi$ и $u\in\mathbb{R}$ случайная величина

$\varphi(u+\xi_1(u)) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$$\mathbb{E}\varphi^2(u+\xi_1(u)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) e^{-\frac{(u-x)^2}{2}} dx =$$
$$= \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) e^{-\frac{x^2}{2n}} e^{-x^2(\frac{n-1}{2n})+xu-\frac{u^2}{2}} dx \leq$$
$$\leq \sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2\frac{n-1}{2n}+xu-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) e^{-\frac{x^2}{2n}} dx =$$
$$= \sqrt{n} e^{\frac{u^2}{2(n-1)}} \|\varphi\|^2_{N(0,n)}, \quad (2.3.11)$$

где мы воспользовались тем, что для произвольного $n \geq 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2\frac{n-1}{2n}+xu-\frac{u^2}{2}} = e^{-x^2\frac{n-1}{2n}+xu-\frac{u^2}{2}}\Big|_{x=r\frac{n}{n-1}} = e^{\frac{u^2}{2(n-1)}}.$$

Таким образом, $\varphi(x_1(u)) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ для всех $\varphi \in \Phi$ и $u \in \mathbb{R}$, а значит, можно определить действие операторов Q_k на множестве функций Φ из разложения Ито–Винера:

$$\varphi(x_1(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k\varphi(u; \eta_1, \ldots, \eta_1).$$

Для операторов Q_k, определенных на множестве функций Φ справедлива лемма, аналогичная лемме 2.3.1:

Лемма 2.3.3. *(i) Для произвольного $u \in \mathbb{R}, k \geq 0$ отображение*

$$\Phi \ni \varphi \mapsto Q_k\varphi(u; \cdot, \ldots, \cdot) \in H_k^{\Gamma}$$

является линейным и непрерывным.

(ii) Для произвольной функции $\varphi \in \Phi$ отображение

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto Q_k\varphi(u; \cdot, \ldots, \cdot) \in H_k^{\Gamma}$$

измеримо и ограничено.

Доказательство. (i) Линейность отображения доказана в лемме 2.3.1. Непрерывность следует из оценки:

$$\|Q_k\varphi(u;\cdot,\ldots,\cdot)\|_k^2 \le \frac{1}{k!}\mathbb{E}\varphi^2(u+\xi_1(u)) \le$$
$$\le \frac{1}{k!}\sqrt{n}e^{\frac{u^2}{2(n-1)}}\|\varphi\|^2_{N(0,n)}, \tag{2.3.12}$$

где мы воспользовались оценкой (2.3.11).

(ii) измеримость отображения доказана в лемме 2.3.1. Лемма доказана. □

Аналогично рассуждениям в случае m-точечного движения, определим действие операторов Q_k на функции со значениями в гильбертовом пространстве H. Обозначим через $\Phi(\mathbb{R}, H)$ множество измеримых функций из $\mathbb{R}$ в H таких, что $\|f(\cdot)\|_H \in \Phi$. Определим метрику в $\Phi(\mathbb{R}; H)$: для $\varphi', \varphi'' \in \Phi(\mathbb{R}; H)$

$$d(\varphi', \varphi'') := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|\|\varphi'(\cdot) - \varphi''(\cdot)\|_H\|_{N(0,n)}}{1 + \|\|\varphi'(\cdot) - \varphi''(\cdot)\|_H\|_{N(0,n)}}.$$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортогональный базис в H. Тогда для произвольного $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(u)e_j,$$

причем

$$\|\|\varphi(\cdot)\|_H\|^2_{N(0,n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(x)\|^2_H e^{-\frac{x^2}{2n}} dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j^2(x) e^{-\frac{x^2}{2n}} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(\cdot)\|^2_{N(0,n)}.$$

Следовательно, $\varphi_j(\cdot) \in \Phi$ и мы можем определить действие оператора Q_k на множестве $\Phi(\mathbb{R}; H)$:

$$Q_k\varphi(u;\cdot,\ldots,\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_k\varphi_j(u;\cdot,\ldots,\cdot)e_j.$$

Аналогично оценке (2.3.6) получаем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_k\varphi_j(\vec{u}; x_1, \dots, x_k)^2 \leq \mathrm{const}\, \||\|\varphi(\cdot)\|_H\|^2_{N(0,n)} < +\infty.$$

Теорема 2.3.2. *Для произвольного $\varphi \in \Phi$, $u \in \mathbb{R}$ имеет место разложение* (2.3.9).

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.3.1 необходимо проверить корректность действия оператора Q_j на гильбертовозначную функцию $Q_k\varphi(u; \cdot, \dots, \cdot)$. Для этого проверим, что $\|Q_k\varphi(\cdot; \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{k})\|^2_k \in \Phi$. Для всех $n \geq 1$ имеем:

$$\|Q_k\varphi(u; \cdot, \dots, \cdot)\|^2_k \leq \frac{1}{k!}\mathbb{E}\varphi^2(u + \xi_1(u)) \leq$$
$$\leq \frac{1}{k!}\sqrt{n}e^{\frac{r^2}{2(n-1)}}\|\varphi\|^2_{N(0,n)},$$

где мы воспользовались (2.3.12). Для произвольного $m \geq 1$ выберем в полученной оценке $n > m + 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{\mathbb{R}} \|Q_k\varphi(u; \cdot, \dots, \cdot)\|^2_k e^{-\frac{u^2}{2m}} du \leq$$
$$\leq \frac{1}{k!}\sqrt{n}\|\varphi\|^2_{N(0,n)} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{u^2}{2(n-1)}} e^{-\frac{u^2}{2m}} du < +\infty.$$

Таким образом, действие оператора Q_j на $Q_k\varphi$ корректно определено. Завершается доказательство рассуждениями теоремы 2.3.1. Теорема доказана. □

Для произвольной $\varphi \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ случайная величина $\varphi(x_n(u_1), \dots, x_n(u_m))$ измерима относительно σ-алгебры $\sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \equiv \sigma\{\xi_1(u_1), \dots, \xi_n(u_n), \vec{u} \in \mathbb{R}^n\}$. Поэтому естественно представить разложение Ито–Винера в терминах процессов $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$. Как было отмечено в §2.1, действие оператора Q_k может быть представлено в терминах произведения Вика, а именно [43]:

$$Q_k\varphi(\vec{u};\eta_1,\ldots,\eta_1)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}a_{i_1,\ldots,i_k}\xi_1(u_{i_1})*\ldots*\xi_1(u_{i_k}).$$

Для того, чтобы выписать коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_k}$ в интегральной форме, мы рассмотрим случай, когда ковариационная функция Γ процесса $\{\xi_1(u),u\in\mathbb{R}\}$ такова, что для всех $u_1<u_2<\ldots<u_m$ случайный вектор $(\xi_1(u_1),\ldots,\xi_1(u_m))$ имеет плотность распределения. Приведем достаточные условия для выполнения этого свойства.

Лемма 2.3.4. *Пусть ковариационная функция Γ стационарного гауссовского процесса ξ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) Γ представима в виде $\Gamma=\psi*\psi$, где $\psi\in L_2(\mathbb{R})$;

(ii) Γ имеет спектральную плотность относительно меры Лебега.

Тогда для произвольных $u_1<u_2<\ldots<u_m$ случайный вектор $(\xi(u_1),\xi(u_2),\ldots,\xi(u_m))$ имеет плотность распределения.

Доказательство. Вектор $(\xi(u_1),\ldots,\xi(u_m))$ имеет плотность распределения тогда и только тогда, когда его ковариационная матрица невырождена. При выполнении условия (i) ковариационная матрица запишется в виде матрицы Грама:

$$(\Gamma(u_i-u_j))_{i,j=1}^m=((\psi(\cdot-u_i),\psi(\cdot-u_j))_{L_2(\mathbb{R})})_{i,j=1}^m.$$

Определитель матрицы Грама отличен от нуля тогда и только тогда, когда система $\{\psi(\cdot-u_1),\psi(\cdot-u_2),\ldots,\psi(\cdot-u_m)\}$ является линейно независимой в $L_2(\mathbb{R})$. Известно, что для произвольной ненулевой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ и всех различных $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}$ система $\{f(\cdot - u_1), \ldots, f(\cdot - u_k)\}$ линейно независима в $L_2(\mathbb{R})$ [46].

Если выполнено условие (ii), то ковариационная матрица вектора $(\xi(u_1), \ldots, \xi(u_m))$ имеет вид

$$(\Gamma(u_j - u_k))_{j,k=1}^m = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(u_j - u_k)}\rho(\lambda)d\lambda\right)_{j,k=1}^m,$$

где ρ – спектральная плотность функции Γ.

Невырожденность матрицы ковариаций доказывается аналогично предыдущему пункту. Лемма доказана. □

Обозначим преобразование Фурье для $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ через

$$\hat{\varphi}(\vec{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\vec{x}) e^{i(\vec{\alpha}, \vec{x})} d\vec{x}.$$

Лемма 2.3.5. *Пусть $p_\Gamma(\cdot, \vec{u})$ – плотность распределения случайного вектора $(u_1 + \xi_1(u_1), \ldots, u_m + \xi_1(u_m))$. Тогда для всех $\varphi \in B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) \bigcap L_1(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\hat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^m)$*

$$Q_k\varphi(\vec{u}; \eta_1, \ldots, \eta_1) =$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^m (-1)^k \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k}{\partial \alpha_{i_1} \ldots \partial \alpha_{i_k}} p_\Gamma(\vec{\alpha}, \vec{u}) \varphi(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha}\ \xi_1(u_{i_1}) * \ldots * \xi_1(u_{i_k}). \tag{2.3.13}$$

Доказательство. Мы получим утверждение леммы, используя известное разложение Ито–Винера для стохастической экспоненты [43]:

$$\mathcal{E}(\vec{\alpha}, \vec{\xi_1}(\vec{u})) \equiv \exp\{\sum_{i=1}^m \alpha_i \xi_1(u_i) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j \Gamma(u_i - u_j)\} =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^m \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \xi_1(u_{i_1}) * \ldots * \xi_1(u_{i_k}). \tag{2.3.14}$$

Используя преобразование Фурье для φ получим:

$$\varphi(\vec{u}+\vec{\xi}_1(\vec{u})) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\varphi}(\vec{\alpha})e^{-i(\vec{u}+\vec{\xi}_1(\vec{u}),\vec{\alpha})}d\vec{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i(\vec{u},\vec{\alpha})-\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{m}\alpha_l\alpha_j\Gamma(u_l-u_j)}\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\vec{\xi}_1(\vec{u}))\widehat{\varphi}(\vec{\alpha})d\vec{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int_{\mathbb{R}^m}\overline{\hat{p}_\Gamma(\vec{\alpha},\vec{u})}\hat{\varphi}(\vec{\alpha})\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))d\vec{\alpha}.$$

Заметим, что для всех $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^m$ $\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))\in L_2(\Omega,\sigma(\xi),\mathbb{P})$ и

$$||\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))||_{L_2} = \exp\{\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{m}\alpha_l\alpha_j\Gamma(u_l-u_j)\}.$$

Поскольку $\hat{\varphi}\in L_1(\mathbb{R}^m)$, то справедливо:

$$\int_{\mathbb{R}^m}||\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))||_{L_2}e^{-\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{m}\alpha_l\alpha_j\Gamma(u_l-u_j)}|\hat{\varphi}(\vec{\alpha})|d\vec{\alpha} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}|\hat{\varphi}(\vec{\alpha})|d\vec{\alpha} < +\infty,$$

таким образом, интеграл Бохнера

$$\int_{\mathbb{R}^m}\exp\{-i(\vec{u},\vec{\alpha})-\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{m}\alpha_l\alpha_j\Gamma(u_l-u_j)\}\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))\hat{\varphi}(\vec{\alpha})d\vec{\alpha}$$

корректно определен [47]. Обозначим через P_k оператор, который каждой случайной величине $\eta\in L_2(\Omega,\sigma(\xi),\mathbb{P})$ ставит в соответствие k-й член из разложения Ито-Винера для η. Поскольку интеграл Бохнера коммутирует с непрерывными линейными операторами [47],

$$\int_{\mathbb{R}^m}\overline{\hat{p}_\Gamma(\vec{\alpha},\vec{u})}\hat{\varphi}(\vec{\alpha})\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))d\vec{\alpha} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P_k\Big(\int_{\mathbb{R}^m}\overline{\hat{p}_\Gamma(\vec{\alpha},\vec{u})}\hat{\varphi}(\vec{\alpha})\mathcal{E}(-i\vec{\alpha},\xi_1(\vec{u}))d\vec{\alpha}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\hat{p}_{\Gamma}(\vec{\alpha}, \vec{u})} \hat{\varphi}(\vec{\alpha}) P_k\Big(\mathcal{E}(-i\vec{\alpha}, \xi_1(\vec{u}))\Big) d\vec{\alpha}.$$

Подставляя разложение (2.3.14) для стохастической экспоненты, получим:

$$\varphi(\vec{u} + \xi_1(\vec{u})) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \overline{\hat{p}_{\Gamma}(\vec{\alpha}, \vec{u})} \hat{\varphi}(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha}\; \xi_1(u_{i_1}) * \ldots * \xi_1(u_{i_k}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \alpha_{i_1} \ldots \partial \alpha_{i_k}} p_{\Gamma}(\vec{\alpha}; \vec{u}) \varphi(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} \cdot$$
$$\cdot\, \xi_1(u_{i_1}) * \xi_1(u_{i_2}) * \ldots * \xi_1(u_{i_k}).$$

Лемма доказана. $\square$

Замечание. Пусть ковариационная функция Γ представима в виде свертки: $\Gamma = \psi * \psi$, где функция $\psi \in L_2(\mathbb{R}), \psi(u) = \psi(-u), \|\psi\| = 1$. Тогда согласно лемме 2.2.2 на расширенном вероятностном пространстве существуют независимые винеровские процессы $\{w_i\}_{i \geq 1}$ такие, что $\xi_i(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u-v) dw_i(v)$. В этом случае, по определению произведения Вика, $Q_k\varphi(\vec{w}; w_1, \ldots, w_1)$ имеет вид:

$$Q_k\varphi(\vec{u}; w_1, \ldots, w_1) =$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} (-1)^k \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial^k}{\partial \alpha_{i_1} \ldots \partial \alpha_{i_k}} p_{\Gamma}(\vec{\alpha}, \vec{u}) \varphi(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} \cdot$$
$$\cdot\, \psi(u_{i_1} - v_1) \cdot \ldots \cdot \psi(u_{i_k} - v_k) dw_1(v_1) \ldots dw(v_k).$$

Для того, чтобы записать разложение Ито–Винера для $\varphi(x_n(u_1), \ldots, x_n(u_m))$ мы введем некоторые обозначения. Для произвольного $k \geq 0$ и $m \geq 1$ обозначим через $J(k, m)$ множество мультииндексов:

$$J(k, m) = \{r = (i_1, \ldots, i_k), i_j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Пусть вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, для мультииндекса $r = (i_1, \dots, i_k) \in J(k; m)$ будем писать $\vec{u}_r = (u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$ и

$$f^{(r)}(\vec{u}) = \frac{\partial^k}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} f(\vec{u}).$$

Произведение Вика $\xi(u_{i_1}) * \dots * \xi(u_{i_k})$ обозначим через $\xi^{\circledast k}(\vec{u}_r)$, где $r = (i_1, \dots, i_k)$. Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ пространство Шварца, т.е.

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} |\vec{u}^\alpha D^\beta f(\vec{u})| \le +\infty,$$
$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n),\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, n\}$$

Теорема 2.3.3. *Пусть ковариационная функция* Γ *имеет вид* $\Gamma(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u - \cdot)\psi(u)du$, *где* $\psi \in S(\mathbb{R})$ *и* $p(\cdot, \vec{u})$ *– плотность распределения вектора* $\{u_1 + \xi_1(u_1), \dots, u_m + \xi_1(u_m)\}$, $u_1 < \dots < u_m$. *Тогда для всех* $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$

$$\varphi(x_n(u_1), \dots, x_n(u_m)) =$$
$$= \sum_{k_1, \dots, k_n = 0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \sum_{r_n \in J(k_n, m)} \dots \sum_{r_n \in J(k_1, m)} \int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m}$$
$$p^{(r_n)}(\vec{\alpha}^{(n)}, \vec{\alpha}^{(n-1)}) p^{(r_{n-1})}(\vec{\alpha}^{(n-1)}, \vec{\alpha}^{(n-2)}) \dots p^{(r_1)}(\vec{\alpha}^{(1)}, \vec{u}) \varphi(\vec{\alpha}^{(n)}) \cdot$$
$$\cdot \xi_n^{\circledast k_n}(\vec{\alpha}_{r_n}^{(n-1)}) \xi_{n-1}^{\circledast k_{n-1}}(\vec{\alpha}_{r_{n-1}}^{(n-2)}) \dots \xi_1^{\circledast k_1}(\vec{u}_{r_1}) d\vec{\alpha}^{(n)} \dots d\vec{\alpha}^{(1)}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы мы получим при помощи итерации формулы для разложения (2.3.13) для $\varphi(x_1(\vec{u}))$. Основную сложность представляет собой проверка условий леммы 2.3.5 и возможности менять местами порядок бесконечной суммы и интеграла. Обозначим через

$$I_{i_1, \dots, i_k}(\varphi)(\vec{u}) = \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\vec{y}) \frac{\partial^k}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_k}} p(\vec{y}, \vec{u}) d\vec{y},$$

где вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ такой, что $u_j \neq u_i,\ j \neq i$. Используя обратное преобразование Фурье, получим другое представления для $I_{i_1,\dots,i_k}(\varphi)(\vec{u})$:

$$I_{i_1,\dots,i_k}(\varphi)(\vec{u}) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} (-i)^k \hat{\varphi}(\vec{y}) y_{i_1} \dots y_{i_k} \exp\{i(\vec{u}, \vec{y}) - \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{m} \Gamma(u_l - u_j) y_l y_j\} d\vec{y}.$$

Из этой формулы, функция $I_{i_1,\dots,i_k}(\varphi)(\cdot)$ корректно определена для всех $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$. Проверим, что для $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ функция $I_{i_1,\dots,i_k}(\varphi)(\cdot) \in S(\mathbb{R}^m)$. Действительно, для произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(\vec{y}) y_{i_1} \dots y_{i_k} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} \exp\{i(\vec{u}, \vec{y}) - \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{m} \Gamma(u_l - u_j) y_l y_j\} d\vec{y} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(\vec{y}) y_{i_1} \dots y_{i_k} e^{i(\vec{u},\vec{y}) - \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{m} \Gamma(u_l - u_j) y_l y_j} \mathcal{P}\Big(\vec{y}, \vec{u}\Big) d\vec{y},$$

где $\mathcal{P}$ – некоторый многочлен, зависящий от переменных $\{y_1, \dots, y_m, \Gamma(u_i - u_j), \dots,\ \Gamma^{(|\alpha|)}(u_i - u_j), i, j = 1, 2, \dots, m\}$. Поскольку $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$, то функция $\hat{\varphi}$ также принадлежит множеству $S(\mathbb{R}^m)$, и последний интеграл локально по $\vec{u}$ равномерно сходится, и значит функция $I_{i_1,\dots,i_k}(\varphi)(\cdot)$ является дифференцируемой. Заметим, что каждый член многочлена $\mathcal{P}$ имеет вид

$$C\vec{y}^{\gamma} \prod_{k=1}^{K_1} \Gamma(u_{i_k} - u_{j_k}) \dots \prod_{k=1}^{K_{|\alpha|}} \Gamma^{(|\alpha|)}(u_{i_k} - u_{j_k}),$$

где γ – некоторый мультииндекс. Поскольку $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ $\{\hat{\varphi}(\vec{y})\vec{y}^{\gamma},\ \vec{y} \in$

$\mathbb{R}^m\} \in S(\mathbb{R}^m)$, то достаточно доказать, что для $g \in S(\mathbb{R}^m)$ выражение

$$\sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} \Big|\vec{u}^\beta \prod_{k=1}^{K_1} \Gamma(u_{i_k} - u_{j_k}) \ldots \prod_{k=1}^{K_{|\alpha|}} \Gamma^{(|\alpha|)}(u_{i_k} - u_{j_k}) \cdot$$
$$\cdot \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(\vec{y}) \exp\{i(\vec{u}, \vec{y}) - \sum_{l,j=1}^{m} \Gamma(u_l - u_j) y_l y_j\} d\vec{y}\Big|$$

конечно.

Поскольку для всех $k \in \mathbb{N}_0$, $\Gamma^{(k)}$ ограничена, мы можем оценить последнее выражение следующим образом:

$$C \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} |\vec{u}^\beta \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{y}) p(\vec{y}, \vec{u}) d\vec{y}| = \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} |\vec{u}^\beta \mathbb{E} g(\vec{u} + \xi_1(\vec{u}))|.$$

Поскольку $g \in S(\mathbb{R}^m)$, $\sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m} |\vec{u}^\beta g(\vec{u})| < +\infty$ мы получаем, что $I_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi)(\cdot) \in S(\mathbb{R}^m)$.

Применяя формулу (2.3.13), получим:

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \varphi\Big(x_{n-1}(\vec{u}) + \xi_n\big((x_{n-1}(\vec{u}))\big)\Big) =$$
$$= \sum_{k_n=0}^{\infty} Q_{k_n} \varphi(x_{n-1}(\vec{u}); \dot{w}_n, \ldots, \dot{w}_n) =$$
$$= \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_n}}{k_n!} \sum_{i_1,\ldots,i_{k_n}}^{m} I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(x_{n-1}(\vec{u})) \cdot$$
$$\cdot\, \xi_n(v_1) * \xi_n(v_2) * \ldots * \xi_n(v_{k_n})\Big|_{v_j = x_{n-1}(u_{i_j})}.$$

При предположении, что ковариационная функция имеет вид $\Gamma(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u - \cdot)\psi(u) du$, произведение Вика запишется в виде интеграла:

$$\xi_j(u_{i_1}) * \xi_j(u_{i_2}) * \ldots * \xi_j(u_{i_k}) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k} \psi(u_{i_1} - v_1) \cdot \ldots \cdot \psi(u_{i_k} - v_k) d\widetilde{w}_j(v_1) \ldots d\widetilde{w}_j(v_k),$$

где $\{\widetilde{w}_j\}_{j\geq 1}$ – независимые винеровские процессы на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $K_{i_1,\ldots,i_k}(\vec{u},\vec{v}) = \psi(u_{i_1} - v_1)\cdot\ldots\cdot\psi(u_{i_k} - v_k)$, и в этих терминах предыдущее разложение примет вид:

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_n}}{k_n!}\sum_{i_1,\ldots,i_{k_n}}^{m}\int_{\mathbb{R}^k} I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(x_{n-1}(\vec{u}))\cdot$$
$$\cdot K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(x_{n-1}(\vec{u}),\vec{v})d\widetilde{w}_n(v_1)\ldots d\widetilde{w}_n(v_k).$$

Поскольку функция $\psi \in S(\mathbb{R})$, то для произвольного вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, функция $K_{i_1,\ldots,i_k}(\cdot,\vec{v}) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ и ограничена. Также $I_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^m)$, а значит $I_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi)(\cdot)K_{i_1,\ldots,i_k}(\cdot,\vec{v}) \in S(\mathbb{R}^m)$ и мы можем применить формулу (2.3.13):

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_n}}{k_n!}\sum_{i_1,\ldots,i_{k_n}}^{m}\int_{\mathbb{R}^{k_n}}\sum_{k_{n-1}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_{n-1}}}{k_{n-1}!}\sum_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^{k_{n-1}}}\cdot$$
$$\cdot I_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}}\big(I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\cdot)K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\cdot,\vec{v}^{(1)})\big)(x_{n-2}(\vec{u}))\cdot$$
$$\cdot K_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}}(x_{n-2}(\vec{u}),\vec{v}^{(2)})d\widetilde{w}_{n-1}(\vec{v}^{(2)})d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}).$$

Обозначим через

$$A_{k_{n-1}}(\vec{u},\vec{v}^{(1)},\dot{\widetilde{w}}_{n-1},\ldots,\dot{\widetilde{w}}_{n-1}) =$$
$$= \frac{(-1)^{k_{n-1}}}{k_{n-1}!}\sum_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^{k_{n-1}}} I_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}}\big(I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\cdot)K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\cdot,\vec{v}^{(1)})\big)(\vec{u})\cdot$$
$$\cdot K_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}}(\vec{u},\vec{v}^{(2)})d\widetilde{w}_{n-1}(\vec{v}^{(2)}).$$

Проверим, что возможно изменение порядка интегрирования и бесконечного суммирования:

$$\int_{\mathbb{R}^{k_n}}\sum_{k_{n-1}=0}^{\infty}A_{k_{n-1}}(x_{n-2}(\vec{u}),\vec{v}^{(1)},\dot{\widetilde{w}}_{n-1},\ldots,\dot{\widetilde{w}}_{n-1})d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}) =$$

$$= \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{k_n}} A_{k_{n-1}}(x_{n-2}(\vec{u}), \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}).$$

Заметим, что $A_{k_{n-1}}(\vec{u}; \vec{v}^{(1)}; \cdot, \ldots, \cdot)$ является $k_{n-1}-$линейной формой Гильберта-Шмидта. Для фиксированного N справедливо

$$\int_{\mathbb{R}^{k_n}} \sum_{k_{n-1}=0}^{N} A_{k_{n-1}}(x_{n-2}(\vec{u}), \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}) =$$

$$= \sum_{k_{n-1}=0}^{N} \int_{\mathbb{R}^{k_n}} A_{k_{n-1}}(x_{n-2}(\vec{u}), \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}).$$

По определению, ряд $\sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} A_{k_{n-1}}(x_{n-2}(\vec{u}), \vec{v}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1})$ сходится в среднем квадратическом к $I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(x_{n-1}(\vec{u}))K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(x_{n-1}(\vec{u}), \vec{v})$. Поскольку винеровские процессы $\widetilde{w}_{n-1}$ and $\widetilde{w}_n$ независимы, то случайные величины $\{\int_{\mathbb{R}^{k_n}} A_j(\vec{u}, \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)})\}_{j\geq 0}$ ортогональны в $L_2(\Omega)$.

Далее, ряд $\sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{k_n}} A_{k_{n-1}}(x_{n-2}(\vec{u}), \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)})$ сходится в среднем квадратическом, поскольку

$$\sum_{j\geq 0} \mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}^{k_n}} A_j(x_{n-2}(\vec{u}), \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)})\Big)^2 \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\varphi(x_n(\vec{u}))^2 < +\infty.$$

Таким образом, получили:

$$\int_{\mathbb{R}^{k_n}} \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} A_{k_{n-1}}(\vec{u}, \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}) =$$

$$= \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{k_n}} A_{k_{n-1}}(\vec{u}, \vec{v}^{(1)}, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}, \ldots, \dot{\widetilde{w}}_{n-1}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}).$$

Окончательно,

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \sum_{k_n=0}^{\infty} \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_{k_n}=1}^{m} \sum_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}=1}^{m} \frac{(-1)^{k_n}}{k_n!} \frac{(-1)^{k_{n-1}}}{k_{n-1}!} \int_{\mathbb{R}^{k_n}} \int_{\mathbb{R}^{k_{n-1}}} I_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}}\Big(I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\cdot) K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\cdot,\vec{v}^{(1)})\Big)(x_{n-2}(\vec{u}))\cdot$$
$$\cdot K_{j_1,\ldots,j_{k_{n-1}}}(x_{n-2}(\vec{u}),\vec{v}^{(2)}) d\widetilde{w}_{n-1}(\vec{v}^{(2)}) d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}). \quad (2.3.15)$$

По теореме Фубини для стохастических интегралов ([48], теорема IV.65) мы можем поменять порядок интегрирования:

$$\int_{\mathbb{R}^{k_n}} \int_{\mathbb{R}^m} I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\vec{y}) K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\vec{y},\vec{v}^{(1)}) \frac{\partial^{k_{n-1}}}{\partial y_{j_1}\ldots\partial y_{j_{k_{n-1}}}} p(\vec{y},\vec{u}) d\vec{y} d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}) =$$
$$= (-1)^{k_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{k_n}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial^{k_{n-1}}}{\partial y_{j_1}\ldots\partial y_{j_{k_{n-1}}}} \Big(I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\vec{y}) K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\vec{y},\vec{v}^{(1)})\Big)\cdot$$
$$\cdot p(\vec{y},\vec{u}) d\vec{y} d\widetilde{w}_n(\vec{v}^{(1)}),$$

поскольку $\frac{\partial^{k_{n-1}}}{\partial y_{j_1}\ldots\partial y_{j_{k_{n-1}}}} I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\vec{y}) K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\vec{y},\cdot) \in S(\mathbb{R}^{k_n})$ и

$$\int_{\mathbb{R}^{k_n}} \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\frac{\partial^{k_{n-1}}}{\partial y_{j_1}\ldots\partial y_{j_{k_{n-1}}}} I_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\varphi)(\vec{y}) K_{i_1,\ldots,i_{k_n}}(\vec{y},\vec{v}^{(1)})\Big)^2\cdot$$
$$\cdot p(\vec{y},\vec{u}) d\vec{y} d\vec{v}^{(1)} < +\infty.$$

Таким образом, мы можем записать уравнение (2.3.15) в терминах произведения Вика:

$$\varphi(x_n(\vec{u})) = \sum_{k_n=0}^{\infty} \sum_{r_n\in J(k_n,m)}^{m} \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{r_{n-1}\in J(k_{n-1},m)} \frac{(-1)^{k_n}}{k_n!} \frac{(-1)^{k_{n-1}}}{k_{n-1}!} \int_{\mathbb{R}^m}\cdot$$
$$\cdot \int_{\mathbb{R}^m} p^{(r_n)}(\vec{\alpha}^{(n)};\vec{\alpha}^{(n-1)}) \xi_n^{\circledast k_n}(\vec{\alpha}_{r_n}^{(n-1)}) p^{(r_{n-1})}(\vec{\alpha}^{(n-1)}; x_{n-2}(\vec{u})) d\vec{\alpha}^{(n-1)}$$
$$\xi_{n-1}^{\circledast k_{n-1}}(\vec{v})\Big|_{\vec{v}=x_{n-2}(\vec{u}_{r_n})} \varphi(\vec{\alpha}^{(n)}) d\vec{\alpha}^{(n)}.$$

Повторяя приведенные рассуждения рекуррентно, получим утверждение теоремы.

□

В следующем примере мы сравним первый член разложения функции от m-точечного движения потока, порожденного уравнением по винеровскому листу (2.1.12) с первым членом разложения Ито–Винера функции от его дискретной аппроксимации.

Пример 2.3.1. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$x(u,t) = u + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \psi(x(u,s) - s) W(dv, ds),$$

где W – винеровский лист на $\mathbb{R} \times [0, +\infty), \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,
$\int_{\mathbb{R}} \psi^2(u) du = 1, \psi(u) = \psi(-u)$.

Поток с дискретным временем построим по последовательности серий стационарных гауссовских процессов $\{\xi_k^n(u), u \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}_{n \geq 1}$:

$$\xi_k^n(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \psi(u - v) W(dv, ds)$$

с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^n(u) &= x_k^n(u) + \xi_{k+1}^n(x_k^n(u)) \\ x_0^n(u) &= u. \end{aligned}$$

Зафиксируем вектор $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m)$. Для произвольной функции $\varphi \in B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ первый член разложения Ито–Винера для $\varphi(x(u_1, t), \ldots, x(u_m(t))$, согласно примеру 2.1.4, имеет вид:

$$A_1 \varphi = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \int_0^t T_s \psi(u_i - v) \frac{\partial}{\partial u_i} T_{t-s} \varphi(\vec{u}) W(dv, ds),$$

где $T_t f(\vec{u}) = \mathbb{E} f(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))$.

Разложение Ито–Винера для функции от потока с дискретным временем выпишем в терминах полугруппы операторов $\{R_{\frac{k}{n}}\}_{k=1}^{n}$, определенных по правилу:

$$R_{\frac{1}{n}} f(\vec{u}) = \mathbb{E} f(x_1^n(u_1),\ldots,x_1^n(u_m)) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\vec{x}) p_n(\vec{x},\vec{u}) d\vec{x},$$

где $p_n(\cdot,\vec{u})$ – плотность распределения случайного вектора $(u_1+\xi_1^n(u_1),\ldots,u_m+\xi_1^n(u_m))$. Тогда

$$R_{\frac{k}{n}} := R_{\frac{1}{n}}^{k} f(\vec{u}) = \mathbb{E} f(x_k^n(u_1),\ldots,x_k^n(u_m)).$$

Обозначим

$$S_n^i f(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}} f(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} p_n(\vec{x},\vec{u}) dx.$$

По теореме 2.3.1 первый член разложения Ито–Винера для $\varphi(x_k^n(u_1),\ldots,x_k^n(u_m))$ имеет вид:

$$A_{1,n}\varphi = \sum_{j=0}^{k-1} Q_0^j Q_1 Q_0^{k-j-1} \varphi(\vec{u}; \dot{w}_j),$$

где

$$\{w_k(v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \psi(v-y) W(dy,ds), v \in \mathbb{R}\}$$

– винеровский процесс.

Поскольку $Q_0^k f = R_{\frac{k}{n}} f$ и согласно лемме 2.3.4

$$Q_1 f(\vec{u}) = -\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\frac{1}{n}} S_n^i f(\vec{u}) \psi(u_i - v) W(dv,ds),$$

получим, что первый член разложения $\varphi(x_k^n(u_1),\ldots,x_k^n(u_m))$ имеет вид:

$$A_{1,n}\varphi = -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} R_{\frac{j}{n}}(\psi(u_j - v)S_n^i R_{\frac{k-j-1}{n}}\varphi(\vec{u}))W(dv,ds).$$

Интегрируя по частям, получим:

$$S_n^i R_{\frac{k-j-1}{n}}\varphi(\cdot) = -\int_{\mathbb{R}^m} p_n(\vec{x},\cdot)\frac{\partial}{\partial x_i}R_{\frac{k-j-1}{n}}\varphi(\vec{x})d\vec{x} =$$

$$= R_{\frac{1}{n}}\frac{\partial}{\partial x_i}R_{\frac{k-j-1}{n}}\varphi(\cdot).$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$A_{1,n}\varphi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}\int_{\mathbb{R}} R_{\frac{j}{n}}(\psi(u_i - v)S_n^i R_{\frac{k-j-1}{n}}\varphi(\vec{u}))W(dv,ds).$$

Выводы к главе 2

1. Получен аналог представления Крылова-Веретенникова для потока с дискретным временем в терминах полилинейных форм от белого шума, порождающего поток.

2. Дискретный аналог формулы Крылова-Веретенникова выписан в терминах интегралов от значений гауссовских процессов, задающих поток.

Глава 3

m-точечные движения потока Арратья и бинарные леса

Настоящая глава посвящена функционалам от m-точечных движений потока Арратья. В отличие от диффузионных процессов с “хорошими” коэффициентами, распределение $m-$точечного движения в потоке Арратья в момент t не имеет плотности относительно меры Лебега. Наличие сингулярной компоненты связано с возможностью склеивания частиц. Поэтому, явный вид получающегося распределения и его свойства представляет интерес. Мы выпишем в интегральном виде действие переходной полугруппы m-точечного движения потока Арратья. В этом случае наглядным оказался язык бинарных лесов, отвечающих за порядок склеивания частиц в потоке.

3.1 Броуновское движение в симплексе

Напомним, для удобства читателя, следующее определение.

Определение 3.1.1. Потоком Арратья называется семейство $\{x(u,t), t \geq 0\}_{u\in\mathbb{R}}$ непрерывных мартингалов согласованных с общей фильтрацтей $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, удовлетворяющее условиям:

(i) для каждого $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\cdot)$ – $\mathcal{F}_t$-броуновское движение, стартующее из точки u;

(ii) для каждых $u, v \in \mathbb{R}$ совместная квадратическая ковариация такова, что

$$d\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle(t) = 1\!\!1_{\{x(u,t)=x(v,t)\}}dt;$$

(iii) $x(\cdot,t)$ монотонна при каждом t.

Обозначим через $\Delta_m = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^m : u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_m\}$ и для произвольного множества A его внутренность будем обозначать $\overset{\circ}{A}$.

Рассмотрим m-точечное движение потока Арратья $\{x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)\}_{t\geq 0}$, где $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_m) \in \overset{\circ}{\Delta}_m$. Обозначим через δ_{m-k} часть границы симплекса Δ_m, где совпадает ровно k координат, т.е.

$$\delta_{m-k} = \{\vec{u} \in \Delta_m | \exists\ i_1,\ldots,i_k : \\ u_{i_l} = u_{i_{l+1}}, l = 1,\ldots,k-1, u_j < u_{j+1}, j \notin \{i_1,\ldots,i_k\}\}$$

и введем случайный момент временем

$$\tau_k = \inf\{t : (x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)) \in \delta_{m-k}\}.$$

Пусть $\{w(\vec{u},t)\}_{t\geq 0}$ – m-мерный стандартный броуновский процесс, стартующий из точки $\vec{u} \in \overset{\circ}{\Delta}_m$ и $\theta = \inf\{t : w(\vec{u},t) \notin \Delta_m\}$. Тогда

$$\{(x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t))1\!\!1_{\{t\leq\tau_1\}}\}_{t\geq 0} \overset{d}{=} \{w(\vec{u},t)1\!\!1_{\{t\leq\theta\}}\}_{t\geq 0}.$$

При $t \in [\tau_1,\tau_2)$ m-точечное движение потока Арратья совпадает по распределению с $(m-1)$-мерным винеровским процессом w_{m-1}, стартующим из точки $(x(u_1,\tau_1),\ldots,x(u_m,\tau_1)) \in \overset{\circ}{\Delta}_{m-1}$, до момента его попадания на границу симплекса Δ_{m-1}. Причем, точка старта

$(x(u_1,\tau_1),\ldots,x(u_m,\tau_1))$ не зависит от σ-алгебры, порожденной винеровским процессом w_{m-1}.

Таким образом, изучение m-точечного движения потока Арратья сводится к изучению моментов и положения выхода на границу симплекса броуновского движения. В связи с этим возникает следующая краевая задача:

$$\frac{\partial}{\partial s}F(\vec{u},s) = -\frac{1}{2}\Delta F(\vec{u},s),\ (\vec{u},s)\in \mathring{\Delta}_m\times[0,t), \tag{3.1.1}$$

$$\lim_{s\to t}F(\vec{u},s)=0, \tag{3.1.2}$$

$$F(\vec{u},s)=\varphi(\vec{u}),\ \vec{u}\in\partial\Delta_m, \tag{3.1.3}$$

$$F\in C_0^2(\mathring{\Delta}_m\times(0,t))$$

Решение такой задачи существует и может быть записано с помощью функции Грина [59]. Функцией Грина краевой задачи является переходная плотность броуновского движения, не вышедшего из симплекса. Используя принцип отражения, можно получить формулу Карлина–Мак Грегора [60] для такой плотности:

$$\mathbb{P}\Big\{w(u_1,t)\in dy_1,\ldots,w(u_m,t)\in dy_m, w(u_1,s)<\ldots<w(u_m,s), s\in[0,t]\Big\}$$
$$=\det\left(p_t(u_i,y_j)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,m}} dy_1\ldots dy_m, \tag{3.1.4}$$

где $p_t(u,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{(u-y)^2}{2t}\}$.

Пусть $0\le s\le r\le t$, обозначим через $G(\vec{x},\vec{y},s,r)$ функцию Грина задачи (3.1.1)–(3.1.3), т.е.

$$G(\vec{x},\vec{y},s,r)=\det\left(p_{r-s}(x_i,y_j)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,m}}.$$

Тогда решение краевой задачи имеет [59]:

$$F(\vec{u},s) = -\sum_{i=1}^{m-1}\int_s^t\int_{K_i}\frac{1}{2}\varphi(\vec{y})\frac{\partial}{\partial N_y}G(\vec{u},\vec{y},s,r)dS_y dr, \tag{3.1.5}$$

где $\frac{\partial}{\partial N}$ – оператор дифференцирования по внешней нормали к $K_i = \{\vec{u} \in \partial\Delta_m : u_i = u_{i+1}, u_j < u_{j+1}, j \neq i\}$ и S_y – поверхностная мера.

Используя интегральное представление решения (3.1.5), установим свойства решения, которые оно наследует от граничного условия. Для этого введем классы функций:

$$D_m = \left\{ f \in C_0^2(\Delta_m) : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C_0(\Delta_m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathbb{1}_{\{x_i = x_j\}}(\vec{x}) = 0, i \neq j \right\},$$

и, обозначив, $\pi_i^{-1}(u_1, \ldots, u_{m-1}) = (u_1, u_2, \ldots, u_i, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{m-1})$,

$$D(\partial\Delta_m) = \{\varphi \in C^2(\partial\Delta_m) : \varphi \circ \pi_i^{-1} \in D_{m-1}, i = 1, \ldots, m\}.$$

Лемма 3.1.1. *Пусть F – решение краевой задачи* (3.1.1)–(3.1.3) *и φ – произвольная функция класса $D(\partial\Delta_m)$. Тогда $F(\cdot, 0) \in D_m$.*

Доказательство. Подставляя в представление решения (3.1.5) явный вид оператора дифференцирования по внешней нормали: для $y \in K_i$ $\frac{\partial}{\partial N_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \right)$, получим:

$$F(\vec{u}, s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \int_s^t \int_{K_i} \varphi(\vec{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} G(\vec{u}, \vec{y}, s, r) dS_y dr =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \int_s^t \int_{\Delta_{m-1}} \varphi(\pi_i^{-1}\vec{v}) \left(\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial y_i} \right) G(\vec{u}, \vec{y}, s, r) \Big|_{\substack{y_1 = v_1, \ldots, y_i = v_i, \\ y_{i+1} = v_i, \ldots, y_m = v_{m-1}}}.$$

Обозначим

$$G^{(i)}(\vec{u}, \vec{v}, s, r) = \left(\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial y_i} \right) G(\vec{u}, \vec{y}, s, r) \Big|_{\substack{y_1 = v_1, \ldots, y_i = v_i, \\ y_{i+1} = v_i, \ldots, y_m = v_{m-1}}},$$

где $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \Delta_m, \vec{v} = (v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \Delta_{m-1}$. Дифференцируя определитель Карлина–МакГрегора получим:

$$G^{(i)}(\vec{u},\vec{v},s,r) = 2\begin{vmatrix} p_{r-s}(u_1,v_1) & \dots & p_{r-s}(u_m,v_1) \\ & \vdots & \\ p_{r-s}(u_1,v_i) & \dots & p_{r-s}(u_m,v_i) \\ p_{r-s}(u_1,v_i)\frac{u_1-v_i}{r-s} & \dots & p_{r-s}(u_m,v_i)\frac{u_m-v_i}{r-s} \\ p_{r-s}(u_1,v_{i+1}) & \dots & p_{r-s}(u_m,v_{i+1}) \\ & \vdots & \\ p_{r-s}(u_1,v_{m-1}) & \dots & p_{r-s}(u_m,v_{m-1}) \end{vmatrix}$$

Условие $\varphi\circ\pi_i^{-1}\in C_0(\Delta_{m-1})$ и $p_t\in C^\infty$ позволяет дифференцировать под знаком интеграла в представлении для $F(\cdot,s)$ и $F(\cdot,s)\in C_0^2(\Delta_m)$. Свойство $\frac{\partial^2 F}{\partial u_k\partial u_j}1\!\!1_{\{u_k=u_j\}}=0$ следует из выполнения этого свойства для $G^{(i)}$. Лемма доказана. □

Как было отмечено ранее, краевая задача (3.1.1)–(3.1.3) служит для исследования винеровского процесса в симплексе. Следующая лемма содержит известное ([45], Гл. VIII,§5, теорема 1, с.493) вероятностное представление решения этой краевой задачи. Мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Лемма 3.1.2. *Пусть F – решение краевой задачи* (3.1.1)–(3.1.3) *и $\{w_s(u_i,t),t\geq s\}_{i=1}^m$ – независимые броуновские движения такие, что $w_s(u_i,s)=u_i,\ \vec{u}\in\Delta_m$. Обозначим $\tau=\inf\{t\geq s:(w_s(u_1,t),\dots,w_s(u_m,t))\in\partial\Delta_m\}$. Тогда для всех $\varphi\in C_0^2(\partial\Delta_m)$ и $t>s$*

$$\mathbb{E}1\!\!1_{\{t\geq\tau\}}\varphi(w_0(u_1,\tau),\dots,w_0(u_m,\tau))=F(\vec{u},0).$$

Доказательство. Применяя формулу Ито к $F(w_s(u_1,t),\dots,w_s(u_m,t),t)$ имеем:

$$F\left(w_s(u_1,t\wedge\tau),\dots,w_s(u_m,t\wedge\tau),t\wedge\tau\right)=F(\vec{u},s)+\\+\sum_{i=1}^{m}\int_s^{t\wedge\tau}F_i'\left(w_s(u_1,r\wedge\tau),\dots,w_s(u_m,r\wedge\tau),r\wedge\tau\right)dw_s(u_i,r)+\\+\int_s^{t\wedge\tau}F_{m+1}'\left(w_s(u_1,r\wedge\tau),\dots,w_s(u_m,r\wedge\tau),r\wedge\tau\right)dr+\\+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_s^{t\wedge\tau}F_{ii}''\left(w_s(u_1,r\wedge\tau),\dots,w_s(u_m,r\wedge\tau),r\wedge\tau\right)dr.$$

Поскольку F удовлетворяет условию (3.1.3), получим:

$$F(w_s(u_1,t\wedge\tau),\dots,w_s(u_m,t\wedge\tau),t\wedge\tau)=F(\vec{u},s)+\\+\sum_{i=1}^{m}\int_s^{t\wedge\tau}F_i'(w_s(u_1,r),\dots,w_s(u_m,r),r)dw_s(u_i,r).$$

Взяв математическое ожидание и используя теорему Дуба об остановке с ограниченным моментом остановки $t\wedge\tau$:

$$F(\vec{u},s)=\mathbb{E}F(w_s(u_1,t\wedge\tau),\dots,w_s(u_m,t\wedge\tau),t\wedge\tau).$$

Из условий (3.1.2) и (3.1.3) следует, что

$$F(\vec{u},0)=\mathbb{E}F(w_0(u_1,t\wedge\tau),\dots,w_0(u_m,t\wedge\tau),t\wedge\tau)1\!\!1_{\{t<\tau\}}+\\+\mathbb{E}F(w_0(u_1,t\wedge\tau),\dots,w_0(u_m,t\wedge\tau),t\wedge\tau)1\!\!1_{\{t\geq\tau\}}=\\=\mathbb{E}\varphi(w_0(u_1,\tau),\dots,w_0(u_m,\tau))1\!\!1_{\{t\geq\tau\}}.$$

Лемма доказана. $\square$

3.2 Ядро генератора полугруппы $m-$точечного движения потока Арратья

В предыдущем параграфе мы характеризовали поток Арратья как семейство мартингалов. Процесс m-точечного движения потока $\{x(u_1,t),\ldots,x(u_m,t)\}_{t\geq 0}$ можно также определить как марковский процесс. В работе [28] Y.Le Jan и O.Raimond построили систему из n частиц со склеиванием в терминах переходных полугрупп. Приведем здесь соответствующее утверждение. Пусть $\{P_t^{(n)}, n\geq 1\}$ – семейство согласованных феллеровских полугрупп на локально компактном сепарабельном метрическом пространстве M, т.е. для всех $k\leq n$

$$P_t^{(k)}f(x_1,\ldots,x_k)=P_t^{(n)}g(y_1,\ldots,y_n),$$

где f,g – непрерывные функции такие, что

$$g(y_1,\ldots,y_n)=f(y_{i_1},\ldots,y_{i_k}),$$

$\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,n\}$ и $(x_1,\ldots,x_k)=(y_{i_1},\ldots,y_{i_k})$. Обозначим через $X_t^{(n)}$ марковский процесс, соответствующий полугруппе $P_t^{(n)}$ и пусть $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(n)}$ – закон распределения процесса $X_t^{(n)}$, стартующего из точки $(x_1,\ldots,x_n)\in M^n$. Распределение $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(n)}$ задано на пространстве функций, определенных на M^n, непрерывных справа и имеющих предел слева. Положим $\delta_n=\{x\in M^n : \exists\ i\neq j, x_i=x_j\}$ и $T_{\delta_n}=\inf\{t>0 : X_t^{(n)}\in\delta_n\}$.

Теорема 3.2.1 (теорема 4.1, [28])**.** *Существует единственное согласованное семейство* $(P_t^{(n),c}, n\geq 1)$ *марковских полугрупп на* M *такое, что если* $X^{(n),c}$ *– соответствующее* n*-точечное движение и* $T_{\delta_n}^c=\inf\{t>0 : X_t^{(n),c}\in\delta_n\}$, *тогда* *(i)* $\{X_t^{(n),c}, t \le T_{\delta_n}^c\}$ *совпадает по распределению с* $\{X_t^{(n)}, t \le T_{\delta_n}\}$;

(ii) для $t \ge T_{\delta_n}^c \quad X_t^{(n),c} \in \delta_n$.

Более того, это семейство состоит из феллеровских полугрупп, если выполнено следующее условие:

для всех $t > 0, \varepsilon > 0, x \in M$

$$\lim_{y \to x} P_{(x,y)}^{(2)}(\{T_{\delta_2} > t\} \cap \{d(X_t, Y_t) > \varepsilon\}) = 0,$$

где $(X_t, Y_t) = X_t^{(2)}$,

и для некоторых x *и* y *из* M

$$P_{(x,y)}^{(2)}\{T_{\delta_2} < \infty\} > 0.$$

В этом случае семейство $(P_t^{(n),c}, n \ge 1)$ *удовлетворяет свойству*

$$P_t^{(n),c} f^{\otimes 2}(x, x) = P_t f^2(x)$$

и соответствует потоку со склеиванием.

Для того, чтобы получить m-точечное движение потока Арратья, достаточно применить эту теорему с $M = \mathbb{R}$ и семейством феллеровских полугрупп $(P_t^{\otimes n}, n \ge 1)$, где P_t – полугруппа броуновского движения (пример 4.4.1, [28]).

Обозначим через $\Delta_m = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^m; u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_m\}$ и для $\vec{u} \in \Delta_m$ будем писать $X(\vec{u}, t) = (x(u_1, t), \ldots, x(u_m, t))$ – m-точечное движение потока Арратья, стартующее из точек $u_1, \ldots, u_m$. В настоящем параграфе мы укажем ядро генератора $\{Q_{m,t}\}_{t \ge 0}$ m-точечного движения потока Арратья.

Напомним определение ядра замкнутого линейного оператора A с областью определения $\mathcal{D}(A)$ [51].

Определение 3.2.1 ([51])**.** Подмножество $D \subset \mathcal{D}(A)$ называется ядром для оператора A, если замыкание сужения оператора A на D равно A.

Для проверки того, что некоторое подмножество является ядром, потребуется следующее понятие.

Определение 3.2.2. Подмножество $D \subset C_0$ называется инвариантным относительно действия полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$, если $T_t D \subset D$ для всех $t \geq 0$.

Утверждение 3.2.1 ([51])**.** *Если* $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ – *генератор феллеровской полугруппы, то любое плотное инвариантное подмножество* $D \subset \mathcal{D}$ *является ядром для* $\mathcal{A}$.

Теорема 3.2.2. *Множество функций*

$$D_m = \left\{ f \in C_0^2(\Delta_m) : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C_0(\Delta_m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathbb{1}_{\{x_i = x_j\}} = 0, i \neq j \right\}$$

является ядром для генератора $\mathcal{A}$ *полугруппы* $Q_{m,t}$ *и для произвольной* $f \in D_m$

$$\mathcal{A} f(\vec{u}) = \frac{1}{2} \Delta f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ – область определения оператора $\mathcal{A}$. Прежде всего проверим, что $D_m \subset \mathcal{D}$, т.е. для всех $f \in D_m$

$$\frac{Q_{m,t} f - f}{t} \to \mathcal{A} f \text{ в } C_0(\Delta_m) \text{ при } t \to 0.$$

По формуле Ито для $f \in D_m$:

$$f(X(\vec{u},t)) = f(\vec{u}) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t f_i'(X(\vec{u},s))dx(u_i,s)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t f_{ij}''(X(\vec{u},s))d\langle x(u_i,\cdot),x(u_j,\cdot)\rangle(s) =$$
$$= f(\vec{u}) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t f_i'(X(\vec{u},s))dx(u_i,s)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t f_{ij}''(X(\vec{u},s))1\!\!1_{\{x(u_i,s)=x(u_j,s)\}}ds,$$

где мы воспользовались свойством (ii) из определения 3.1.1 потока Арратья. Поскольку для функций f из класса D_m выполняется $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} 1\!\!1_{\{x_i=x_j\}} = 0, i \neq j$, то получим:

$$f(X(\vec{u},t)) =$$
$$= f(\vec{u}) + \sum_{i=1}^{m}\int_0^t f_i'(X(\vec{u},s))dx(u_i,s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_0^t f_{ii}''(X(\vec{u},s))ds,$$

Взяв математическое ожидание, получим:

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}\left(f(X(\vec{u},t)) - f(\vec{u})\right) = \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\int_0^t f_{ii}''(X(\vec{u},s))ds =$$
$$= \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{m}\int_0^t Q_{m,s}f_{ii}''(\vec{u})ds.$$

Для произвольной $g \in C_0(\Delta_m)$, используя сильную непрерывность феллеровской полугруппы $(Q_{m,t})_{t\geq 0}$:

$$\|\frac{1}{t}\int_0^t Q_{m,s}g ds - g\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|g - Q_{m,s}g\| ds \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

По предположению $f''_{ii} \in C_0(\Delta_m)$, значит,

$$\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{m}\int_0^t Q_{m,s}f''_{ii}(u)ds \to \frac{1}{2}\Delta f(\vec{u}), t \to 0$$

равномерно по $\vec{u} \in \Delta_m$.

Далее, проверим инвариантность множеств D_m под действием полугруппы Q_m, т.е установим включение $Q_{m,t}D_m \subset D_m$. Воспользуемся методом математической индукции. Для базы индукции установим, что включение имеет место при $m = 2$. Отметим, что 2-точечное движение потока Арратья можно получить с помощью двух независимых броуновских движений $\{w(u_1, t)\}_{t\geq 0}, \{w(u_2, t)\}_{t\geq 0}, w(u_i, 0) = u_i$:

$$\begin{aligned} &x(u_2, t) = w(u_2, t), \\ &x(u_1, t) = w(u_1, t)1\!\!1_{\{t<\tau\}} + w(u_2, t)1\!\!1_{\{t\geq\tau\}}, \end{aligned}$$

где $\tau = \inf\{t : w(u_1, t) = w(u_2, t)\}$.

Используя формулу Карлина–МакГрегора для переходной плотности непересекающихся броуновских движений, получим для $f \in D_2$:

$$\begin{aligned} &Q_{2,t}f(u_1, u_2) = \\ &\quad = \mathbb{E}f(w(u_1, t), w(u_2, t))1\!\!1_{\{t<\tau\}} + \mathbb{E}f(w(u_2, t), w(u_2, t))(1 - 1\!\!1_{\{t<\tau\}} = \\ &\qquad = \iint_{y_1\leq y_2}(f(y_1, y_2) - f(y_2, y_2))\begin{vmatrix} p_t(u_1, y_1) & p_t(u_1, y_2) \\ p_t(u_2, y_1) & p_t(u_2, y_2)\end{vmatrix} dy_2dy_1 + \\ &\qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}} f(y_2, y_2)p_t(u_2, y_2)dy_2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в полученном выражении принадлежит классу D_2, поскольку не зависит от u_1. Для проверки того, что первое слагаемое принадлежит D_2, заметим, что при предположении $f \in D_2$, функция

$$g(u_1,u_2,y_1)=\int_{y_1}^{+\infty}(f(y_1,y_2)-f(y_2,y_2))\begin{vmatrix}p_t(u_1,y_1) & p_t(u_1,y_2)\\ p_t(u_2,y_1) & p_t(u_2,y_2)\end{vmatrix}dy_2$$

дифференцируема по u_1 и u_2 и

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_2}\int_{\mathbb{R}}g(u_1,u_2,y_1)dy_1=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_2}g(u_1,u_2,y_1)dy_1=$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{y_1}^{+\infty}(f(y_1,y_2)-f(y_2,y_2))\begin{vmatrix}p_t(u_1,y_1)\frac{y_1-u_1}{t} & p_t(u_1,y_2)\frac{y_2-u_1}{t}\\ p_t(u_2,y_1)\frac{y_1-u_2}{t} & p_t(u_2,y_2)\frac{y_2-u_2}{t}\end{vmatrix}dy_2dy_1,$$

где мы воспользовались

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix}\varphi(u) & \varphi(u)\\ \varphi(v) & \varphi(v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi'(u) & \varphi'(u)\\ \varphi(v) & \varphi(v)\end{vmatrix}.$$

Из этого представления и свойств гауссовского распределения можно заключить, что

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_2}\int_{\mathbb{R}}g(u_1,u_2,y_1)dy_1\in C_0(\Delta_2).$$

Заметим, что $\begin{vmatrix}p_t(u_1,y_1)\frac{y_1-u_1}{t} & p_t(u_1,y_2)\frac{y_2-u_1}{t}\\ p_t(u_2,y_1)\frac{y_1-u_2}{t} & p_t(u_2,y_2)\frac{y_2-u_2}{t}\end{vmatrix}=0$ когда $u_1=u_2$, значит

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_2}\int_{\mathbb{R}}g(u_1,u_2,y_1)dy_1\Big|_{u_1=u_2}=0.$$

Таким образом, $Q_{2,t}f\in D_2$.

Предположим теперь, что $Q_{m-1,t}f\subset D_{m-1}$ и докажем справедливость этого включения для m. Для произвольной функции $f\in D_m$

$$Q_{m,t}f(\vec{u})=\mathbb{E}f(X(\vec{u},t))1\!\!1_{\{\tau>t\}}+\mathbb{E}f(X(\vec{u},t))1\!\!1_{\{\tau\le t\}}=$$
$$=\mathbb{E}f(w(u_1,t),\dots,w(u_m,t))1\!\!1_{\{\tau>t\}}+\mathbb{E}f(X(\vec{u},t))1\!\!1_{\{\tau\le t\}},\quad(3.2.1)$$

где $\{w(u_1,t)\}_{t\ge 0},\ldots,\{w(u_m,t)\}_{t\ge 1}$ – независимые броуновские движения, $w(u_i,0)=u_i$ и

$$\tau=\inf\{t: X(\vec{u},t)\in\partial\Delta_m\}\stackrel{d}{=}\inf\{t:(w(u_1,t)\}_{t\ge 0},\ldots,\{w(u_m,t))\in\partial\Delta_m\}.$$

Используя формулу Карлина–МакГрегора для плотности переходной вероятности непересекающихся броуновских движений, получим:

$$\mathbb{E}f(w(u_1,t),\ldots,w(u_m,t))1\!\!1_{\{t<\tau\}}=\int\limits_{y_1<\ldots<y_m}\!\!\!\ldots\int f(\vec{y})\det(p_t(u_i,y_j))_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,m}}d\vec{y}.$$

Используя свойства гауссовской плотности, не сложно проверить, что последний интеграл, как функция от $\vec{u}$ принадлежит классу D_m. Докажем, что первое слагаемое в (3.2.1) принадлежит D_m. Используя строго марковское свойство m-точечного движения потока Арратья, можно записать:

$$\mathbb{E}f(X(\vec{u},t))1\!\!1_{\{\tau\le t\}}=\mathbb{E}\mathbb{E}(f(X(\vec{u},t))1\!\!1_{\{\tau\le t\}}\Big|\mathcal{F}_\tau^{u_1,\ldots,u_m})=$$
$$=\mathbb{E}1\!\!1_{\{\tau\le t\}}Q_{m,t-\tau}f(X(\vec{u},\tau))=\mathbb{E}1\!\!1_{\{\tau\le t\}}Q_{m,t-\tau}f(w(u_1,\tau),\ldots,w(u_m,\tau)),$$

где $\mathcal{F}_t^{u_1,\ldots,u_m}=\sigma\{x(u_1,s),\ldots,x(u_m,s),s\le t\}$.

Согласно лемме 3.1.2

$$\mathbb{E}1\!\!1_{\{\tau\le t\}}Q_{m,t-\tau}f(w(u_1,\tau),\ldots,w(u_m,\tau))=F(\vec{u},0),$$

где F – решение краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial s}F(\vec{u},s)=-\frac{1}{2}\Delta F(\vec{u},s),\ (\vec{u},s)\in\mathring{\Delta}_m\times[0,t),$$
$$\lim_{s\to t}F(\vec{u},s)=0,$$
$$F(\vec{u},s)=Q_{m,t-\tau}f(\vec{u}),\vec{u}\in\partial\Delta_m,$$
$$F\in C_0^2(\mathring{\Delta}_m\times(0,t)).$$

Отметим, что при $\vec{u} \in \partial\Delta_m$

$$Q_{m,s}f(\vec{u}) = Q_{m-1,s}f(\vec{u}).$$

По предположению индукции, $Q_{m-1,t}f(\cdot)$ как функция, определенная на $\partial\Delta_m$, принадлежит классу $D(\partial\Delta_m) = \{\varphi \in C^2(\partial\Delta_m) : \varphi_i \circ \pi_i^{-1} \in D_m, i = 1, \ldots, m\}$. Тогда из леммы 3.1.1 следует, что $Q_{m,t}f(\cdot) \in D_m$, если $f \in D_m$. Доказательство того, что D_m всюду плотно в $C_0(\Delta_m)$ проводится стандартными рассуждениями. Теорема доказана. $\square$

3.3 Описание полугруппы $m-$точечных движения потока Арратья в терминах бинарных лесов

В предыдущем параграфе мы описали ядро D_m для генератора полугруппы $Q_{m,t}$ и установили действие генератора на функции из D_m. Известно, что функция $Q_{m,t}f, f \in D_m$ удовлетворяет уравнению Колмогорова [51]:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{m,t}f(\vec{u}) = \mathcal{A}Q_{m,t}f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m, t > 0.$$

Отметим, что действие $Q_{m,t}$ на функцию f в точке $\vec{u} \in \partial\Delta_m$ можно записать в виде:

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = \mathbb{E}f(x(u_1,t), \ldots, x(u_i,t), x(u_i,t), x(u_{i+2},t), \ldots, x(u_m,t)) =$$
$$= \mathbb{E}f \circ \pi_i^{-1}(x(u_1,t), \ldots, x(u_i,t), x(u_i,t), x(u_{i+2},t), \ldots, x(u_m,t)) =$$
$$= Q_{m-1,t}f \circ \pi_i^{-1}(\pi_i\vec{u})$$

для $\vec{u} \in K_i^m = \{\vec{u} \in \partial\Delta_m : u_i = u_{i+1}, u_j < u_{j+1}, i \neq j\}$. Таким образом, получим систему краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{m,t}f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Delta Q_{m,t}f(\vec{u}), \vec{u} \in \Delta_m, t \geq 0, \tag{3.3.1}$$

$$Q_{m,0}f(\vec{u}) = f(\vec{u}), \tag{3.3.2}$$

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = (Q_{m-1,t}f \circ \pi_i^{-1})(\pi_i\vec{u}), \vec{u} \in K_i^m, \tag{3.3.3}$$

$$Q_{m,t}f(\cdot) \in D_m.$$

Решение системы краевых задач мы запишем в виде суммы, каждое слагаемое в которой заиндексировано лесом из определенного множества. Для этого введем соответствующие определения и обозначения.

Определим класс бинарных лесов $T_k^m, k < m$, где k – число корней и m – число листьев. Обозначим через U_k^m множество вершин:

$$U_k^m = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_k^{(k)}, u_1^{(k+1)}, \dots, u_{k+1}^{(k+1)}, \dots, u_1^{(m)}, \dots, u_m^{(m)}, \vec{u}^{(j)} \in \mathring{\Delta}_j\}.$$

Ребра графа определим при помощи множества отображений:

$$\mathcal{G}_j = \{\sigma_j : \{1, 2, \dots, j\} \to \{1, 2, \dots, j-1\}, \sigma_j \text{– сюръекция}\}.$$

Для каждого отображения $\sigma_j \in \mathcal{G}_j$ существует единственная пара чисел

$$(l_1, l_2) \equiv (l_1(\sigma_j), l_2(\sigma_j)) \subset \{1, 2, \dots, j\}$$

такая, что $\sigma_j(l_1) = \sigma_j(l_2), l_1 < l_2$. Для фиксированного множества отображений $\{\sigma_m, \sigma_{m-1}, \dots, \sigma_{k+1}\}$, где $\sigma_j \in \mathcal{G}$ определим множество ребер:

$$R_k^m \equiv R_k^m(\sigma_m, \sigma_{m-1}, \dots, \sigma_{k+1}) = \\ = \{(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}), i = k+1, \dots, m, j = 1, \dots, i\}.$$

В этих терминах определим множество бинарных лесов:

$$T_k^m = \{(U_k^m, R_k^m(\sigma_m, \dots, \sigma_{k+1})), \sigma_j \in \mathcal{G}_j\}.$$

Будем говорить, что ребра $\left(u_j^{(n)}, u_{\sigma_n(j)}^{(n-1)}\right)$ и $\left(u_i^{(n)}, u_{\sigma_n(i)}^{(n-1)}\right)$ пересекаются, если $i < j$ и $\sigma_n(i) > \sigma_n(j)$. Для каждого леса $T \in T_k^m$ количество пересечений его ребер будем обозначать через $\varepsilon(T)$. Множеству

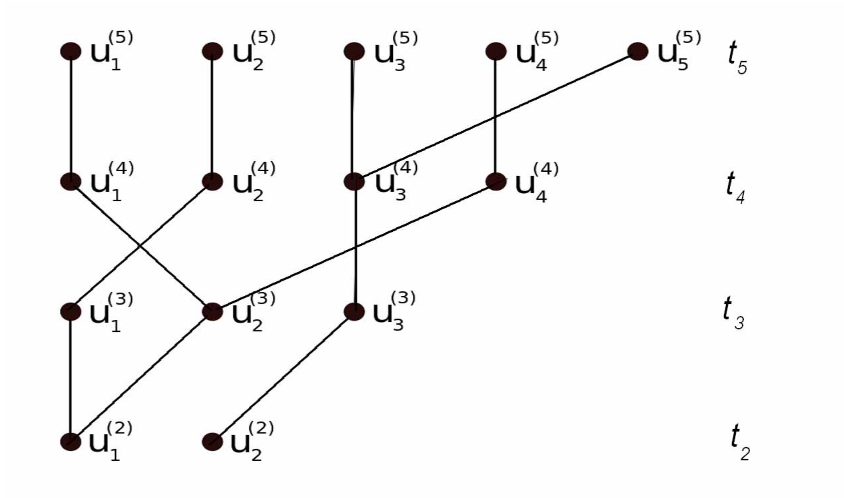

Рис. 3.1: Пример леса $T \in T_2^5$.

вершин $\{u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_j^{(j)}\}$ леса $T \in T_k^m$ поставим в соответствие время $t_j, j \in \{k, \ldots, m\}$. Каждому ребру леса T припишем вес, который зависит от соединяющих их вершин и соответствующих моментов времени:

$$g\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}\right) = \sqrt{\frac{u_{l_2}^{(i)} - u_{l_1}^{(i)}}{t_i - t_{i-1}}} p_{t_i - t_{i-1}}\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i)}\right)$$

для $j \in \{l_1, l_2\}$, где $l_1 < l_2$ такие, что $\sigma_i(l_1) = \sigma_i(l_2)$ и

$$g\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}\right) = p_{t_i - t_{i-1}}\left(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}\right)$$

для $j \notin \{l_1, l_2\}$, где $p_s(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(u_1-u_2)^2}{2s}}$.

Обозначим через $|T|$ произведение весов всех ребер леса $T \in T_k^m$:

$$|T| = |T(\vec{u}^{(m)}, \ldots, \vec{u}^{(k)}, t_m, \ldots, t_k)| =$$
$$= \prod_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{i} g(u_j^{(i)}, u_{\sigma_i(j)}^{(i-1)}, t_i, t_{i-1}).$$

Каждому лесу поставим в соответствие набор индексов $(i_{m-1}, i_{m-2}, \ldots, i_k)$, где каждый индекс i_j является координатой вектора $\vec{u}^{(j)}$ такой, что $\sigma_{j+1}(l_1) = \sigma_{j+1}(l_2) = i_j, l_1 \neq l_2$.

Определим действие леса $T \in T_k^m$ на функцию $f : \Delta_m \to \mathbb{R}$ по правилу:

$$f_T = f \circ \pi_{i_{m-1}}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_{i_k}^{-1}.$$

Теорема 3.3.1. *Пусть* $f \in D_m$ *и* G_m *– функция Грина краевой задачи* (3.3.1) – (3.3.3). *Тогда*

$$\begin{aligned}
Q_{m,t}f(\vec{u}) &= \int_{\Delta_m} f(\vec{y})G_m(\vec{u},\vec{y},t,0)d\vec{y}+ \\
&+ \sum_{T\in T_{m-1}^m}(-1)^{\varepsilon(T)}\int_0^1\int_{\Delta_{m-1}}\int_{\Delta_{m-1}} f_T(\vec{y})G_{m-1}(\vec{u}^{(m-1)},\vec{y},t_{m-1},0)\cdot \\
&\cdot|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},t,t_{m-1})|d\vec{u}^{(m-1)}dydt_{m-1}+ \\
&+ \sum_{T\in T_{m-2}^m}\int_0^t\int_0^{t_{m-1}}\int_{\Delta_{m-1}}\int_{\Delta_{m-2}}\int_{\Delta_{m-2}}(-1)^{\varepsilon(T)}f_T(\vec{y})\cdot \\
&\cdot G_{m-2}(\vec{u}^{(m-2)},\vec{y},t_{m-2},0)|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},\vec{u}^{(m-2)},t,t_{m-1},t_{m-2})|\cdot \\
&\cdot d\vec{y}d\vec{u}^{(m-2)}d\vec{u}^{(m-1)}dt_{m-2}dt_{m-1}+\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ldots &+ \sum_{T\in T_1^m}(-1)^{\varepsilon(T)}\int_0^t\int_0^{t_{m-1}}\cdots\int_0^{t_2}\int_{\Delta_{m-1}}\int_{\Delta_{m-2}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \\
&f_T(\vec{y})G_1(u^{(1)},y,t_1,0)|T(\vec{u},\vec{u}^{(m-1)},\ldots,\vec{u}^{(2)},\vec{u}^{(1)},t,t_{m-1},\ldots,t_1)| \\
&dydu^{(1)}\ldots d\vec{u}^{(m-1)}dt_1\ldots dt_{m-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Запишем решение задачи (3.3.1)–(3.3.3) с помощью функции Грина:

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = \int_{\Delta_m} f(\vec{y}) G_m(\vec{u}, \vec{y}, t, 0) d\vec{y} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^t \int_{K_i^m} Q_{m-1,t_{m-1}} f \circ \pi_i^{-1}(\pi_i v) \left(\frac{\partial}{\partial v_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \cdot \\ \cdot G_m(\vec{u}, \vec{v}, t_{m-1}, t) \frac{1}{\sqrt{2}} dS_v dt_{m-1}.$$

Обозначим

$$G_m^{(i)}(\vec{u}, \vec{y}, s, t) = \left(\frac{\partial}{\partial v_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial v_i} \right) G_m(\vec{u}, \vec{v}, s, t) \Big|_{\substack{v_1 = y_1, \ldots, v_i = y_i, \\ v_{i+1} = y_i, \ldots, v_m = y_{m-1},}}$$

тогда решение запишется в виде:

$$Q_{m,t}f(\vec{u}) = \int_{\Delta_m} f(\vec{y}) G_m(\vec{u}, \vec{y}, t, 0) d\vec{y} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^t \int_{\Delta_{m-1}} Q_{m-1,t_{m-1}} f \circ \pi_i^{-1}(\vec{y}) G_m^{(i)}(\vec{u}, \vec{y}, t_{m-1}, t) d\vec{y} dt_{m-1}.$$

Поскольку $G_m(\vec{u}, \vec{v}, t, s) = \det(p_{t-s}(u_i, v_j))_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,m}}$, получим:

$$G_m^{(i)}(\vec{u}, \vec{y}, s, t) \quad = \quad 2 \begin{vmatrix} p_{t-s}(u_1, y_1) & \ldots & p_{t-s}(u_m, y_1) \\ & \vdots & \\ p_{t-s}(u_1, y_i) & \ldots & p_{t-s}(u_m, y_i) \\ p_{t-s}(u_1, y_i) \frac{u_1 - y_i}{t-s} & \ldots & p_{t-s}(u_m, y_i) \frac{u_m - y_i}{t-s} \\ p_{t-s}(u_1, y_{i+1}) & \ldots & p_{t-s}(u_m, y_{i+1}) \\ & \vdots & \\ p_{t-s}(u_1, y_{m-1}) & \ldots & p_{t-s}(u_m, y_{m-1}) \end{vmatrix} \quad =$$

$$= \sum_{l_1<l_2} (-1)^{l_1+l_2+1} \begin{vmatrix} p_{t-s}(u_{l_1}, y_i) & \dots & p_{t-s}(u_{l_2}, y_i) \\ p_{t-s}(u_{l_1}, y_i)\frac{u_{l_1}-y_i}{t-s} & \dots & p_{t-s}(u_{l_2}, y_i)\frac{u_{l_2}-y_i}{t-s} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \det(p_{t-s}(u_j, y_k))_{\substack{j\neq l_1,l_2 \\ k\neq i}} =$$

$$= \sum_{l_1<l_2} (-1)^{l_1+l_2+1} p_{t-s}(u_{l_1}, y_i) p_{t-s}(u_{l_2}, y_i) \frac{u_{l_2}-u_{l_1}}{t-s}) \det(p_{t-s}(u_j, u_k))_{\substack{j=l_1,l_2 \\ k\neq i}}.$$

Проверим теперь, что

$$G_m^{(i)}(\vec{u}, \vec{y}, t, s) = \sum_{T\in T_{m-1}^m, i_{m-1}=i} |T(\vec{u}, \vec{y}, t, s)|, \tag{3.3.4}$$

где последняя сумма берется по тем деревьям T из класса T_{m-1}^m, для которых $i = \sigma_m(l_1) = \sigma_m(l_2), l_1 \neq l_2$. Обозначим

$$\mathcal{G}_m^{l_1,l_2,i} = \{\sigma \in \mathcal{G}_m : \sigma_m(l_1) = \sigma_m(l_2) = i\}.$$

Тогда

$$\sum_{T\in T_{m-1}^m, i_{m-1}=i} |T(\vec{u}, \vec{y}, t, s)| =$$

$$= \sum_{l_1<l_2} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_m^{l_1,l_2,i}} p_{t-s}(u_{l_1}, y_i) p_{t-s}(u_{l_2}, y_i) \frac{u_{l_2}-u_{l_1}}{t-s} (-1)^{\varepsilon(T)} \prod_{j\neq l_1,l_2} p_{t-s}(u_j, y_{\sigma(j)}) =$$

$$= \sum_{l_1<l_2} p_{t-s}(u_{l_1}, y_i) p_{t-s}(u_{l_2}, y_i) \frac{u_{l_2}-u_{l_1}}{t-s} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_m^{l_1,l_2,i}} \prod_{j\neq l_1,l_2} p_{t-s}(u_j, y_{\sigma(j)}) (-1)^{\varepsilon(T)}.$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_m^{l_1,l_2,i}} \prod_{j\neq l_1,l_2} p_{t-s}(u_j, y_{\sigma(j)}) (-1)^{\varepsilon(T)} =$$

$$= (-1)^{l_1+l_2+1} \det(p_{t-s}(u_j, y_k))_{\substack{j\neq l_1,l_2, \\ k\neq i}},$$

применяя которое, получим (3.3.4).

Таким образом, решение задачи (3.3.1)–(3.3.3) записывается в виде:

$$\begin{aligned}Q_{m,t}f(\vec{u}) = \int_{\Delta_m} f(\vec{y})G_m(\vec{u},\vec{y},t,0)d\vec{y}+\\ + \sum_{T\in T^m_{m-1}} \int_0^t \int_{\Delta_{m-1}} (-1)^{\varepsilon(T)} Q_{m-1,t_{m-1}} f_T(\vec{y}^{(m-1)})\cdot\\ \cdot |T(\vec{u},\vec{y}^{(m-1)},t,t_{m-1})| d\vec{y}^{(m-1)} dt_{m-1}.\end{aligned}$$

Подставим в полученную формулу вместо $Q_{m-1,t_{m-1}}f_T(\vec{y}^{(m-1)})$ решение соответствующей краевой задачи и учитывая, что для
$T\in T^m_{m-1}, T_1\in T^{m-1}_{m-2}$

$$T\cup T_1 \in T^m_{m-2}, (f_T)_{T_1} = f_{T\cup T_1}, |T||T_1| = |T\cup T_1|,$$

получим:

$$\begin{aligned}Q_{m,t}f(\vec{u}) = \int_{\Delta_m} f(\vec{u})G_m(\vec{u},\vec{y},t,0)d\vec{y}+\\ + \sum_{T\in T^m_{m-1}} \int_0^t \int_{\Delta_{m-1}} \int_{\Delta_{m-1}} (-1)^{\varepsilon(T)} f_T(\vec{y}) G_{m-1}(\vec{y}^{(m-1)},\vec{y},t_{m-1},0)\cdot\\ \cdot |T(\vec{u},\vec{y}^{(m-1)},t,t_{m-1})| d\vec{y}d\vec{y}^{(m-1)} dt_{m-1}+\\ + \sum_{T\in T^m_{m-2}} \int_0^t \int_0^{t_{m-1}} \int_{\Delta_{m-1}} \int_{\Delta_{m-2}} (-1)^{\varepsilon(T)} Q_{m-2,t_{m-2}} f_T(\vec{y}^{(m-2)})\cdot\\ \cdot |T(\vec{u},\vec{y}^{(m-1)},\vec{y}^{(m-2)},t,t_{m-1},t_{m-2})| d\vec{y}^{(m-2)} d\vec{y}^{(m-1)} dt_{m-2} dt_{m-1}.\end{aligned}$$

Продолжая рекуррентно подстановку решения соответствующей краевой задачи вместо $Q_{k,t_k}f, k = 1,\ldots,m-1$, получаем утверждение теоремы.

$\square$

Выводы к главе 3

1. Найдено ядро для генератора полугруппы процесса $m-$точечых движений потока Арратья и записано действие генератора на функции из этого ядра.

2. Записана система краевых задач для полугруппы $m-$точечных движений потока Арратья. Действие полугруппы $m-$точечных движений на функцию представлено в виде суммы интегралов, где каждое слагаемое индексировано бинарным лесом, отвечающим порядку склейки в потоке Арраятья.

Список использованной литературы

[1] Harris T. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}$ / T. Harris // Stoch. Proc. and Appl. – 1984. – №17 – P.187-210.

[2] Arratia R. Brownian motion on the line / R. Arratia // PhD dissertation, Univ. Wisconsin – 1979. – 128 p.

[3] Dorogovtsev A.A. One Brownian stochastic flow / A.A. Dorogovtsev // Theory of Stoch. Processes – 2004. – V. 10(26), №3-4 – P.21-25.

[4] Дороговцев А.А. Стохастический интеграл по потоку Арратья / А.А. Дороговцев // Доклады академии наук. Математика. – 2006. – 410, № 2 – С. 156-157.

[5] Dorogovtsev A. A. Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow / A. A. Dorogovtsev, A. V. Gnedin, M. B. Vovchanskii // Theory Stoch. Process – 2012. – V.18, №2 – P.1–7.

[6] Shamov A. Short-time asympototics of one-dimensional Harris flows. // Comm. on Stoch. Analysis – V. 5, No. 3 – 2011 – P.527-539

[7] Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations / H. Kunita // Cambridge University Press – 1990 – 347 p.

[8] Carverhill A. , Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory / A. Carverhill // Stochastics –1985 – V. 14, № 4 – P.273–317.

[9] Le Jan Y. On isotropic Brownian motions / Y. Le Jan // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete – 1985. – V.70, № 4 – P.609–620.

[10] Arnold L. Random dynamical systems / L. Arnold // Berlin: Springer-Verlag, 1998. – xvi+586 pp.

[11] Baxendale P. Isotropic stochastic flows / P. Baxendale, T. Harris // Ann. Probab – 1986. – V.14 № 4 – P.1155–1179.

[12] Le Jan Y. Stochastic flows of diffeomorphisms / Y. Le Jan, S. Watanabe // Stochastic analysis – 1984. – 32 – P.307–332.

[13] Zirbel C. Rotation of particles in polarized Brownian flows / C. Zirbel, W. Woyczynski // Stoch. Dyn. – 2002. – V.2 №1 – P. 109–129.

[14] Pitman J. W. The asymptotic joint distribution of windings of planar Brownian motion / J. W. Pitman, M. Yor. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1984. – V.10, №1 – P.109–111.

[15] Кузнецов В. А. Интегральные инварианты Концевича для случайных траекторий / В. А. Кузнецов // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 1. – С. 57–67

[16] Cinlar E. Dispersion of particle systems in Brownian flows / E. Cinlar, C. L. Zirbel // Advances in Applied Probability – 1996. – 34 – P.53-74.

[17] Дороговцев А.А. Мерозначные марковские процессы и стохастические потоки / А.А. Дороговцев // Укр. мат. журнал – 2002. – Т. 54 № 2 – С. 178-189.

[18] Dorogovtsev A.A. Stochastic flows with interactions and measure-values processes / A.A. Dorogovtsev // International J. of Math. and Math. Sciences – 2003. – 63 – P.3963-3977.

[19] Dorogovtsev A. A. Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic partial differential equations: 1. Finite mass / A. A. Dorogovtsev, A. Kotelenez // Preprint 97 - 145 Department of

Mathematics Case Western Reserv University Clevelan, Ohio. – 1997. – 19 p.

[20] Dorogovtsev A.A. Long-time behaviour of measure-valued processes correspondent to stochastic flows with interaction / A.A. Dorogovtsev, M.P. Karlikova // Theory of stoch. Processes – 2003 – V. 9(25), №1-2 – P.52-59.

[21] Карликова М. П. О слабом решении уравнения для эволюционного потока со взаимодействием / М. П. Карликова // Укр. мат. журн. – 2005. - 57, № 7. – С. 895–903.

[22] Karlikova M.P. The martingale problem for stochastic differential equations with interaction / M.P.Karlikova // Theory of Stoch. Processes – 2005 – V.11 (27) – P. 69-74.

[23] Пилипенко А. Ю. Теорема Струка–Варадана для потоков, порожденных стохастиическими дифференциальными уравнениями с взаимодействием / А. Ю. Пилипенко // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 2 – с.227–238.

[24] Dorogovtsev A. A. Large deviations for flows of interacting Brownian motions / A. A. Dorogovtsev, O.V. Ostapenko // Stochastics and Dynamics, – 2010 – Vol. 10, № 3 – P.315–339.

[25] Tsirelson B. Scaling Limit, Noise, Stability / B. Tsirelson // Lect. Notes Math. – 2004. – 1840 – P.1-106.

[26] Tsirelson B. Nonclassical stochastic flows and continuous products / B. Tsirelson // Probab. Surv. – 2004. – 1 – P. 173–298.

[27] Warren J. On spectra of noises associated with Harris flows / J. Warren, S. Watanabe // Adv. Stud. Pure Math. – 2004 – 41 – P. 351–373.

[28] Le Jan Y. Flows, coalescence and noise / Y.Le Jan, O.Raimond // Ann. Probab. – 2004. – 32 – P.1247–1315.

[29] Sun R. Convergence of coalescing nonsimple Random walks to the Brownian Web / R.Sun, C.M.Newman, K.Ravishankar, // El.J.Probab. – 2005 – V. 10 – P.21–60.

[30] Norris J. Weak convergence of the localized disturbance flow to the coalescing Brownian flow / J. Norris, A. Turner // The Annals of Probability – 2015. – V.43, №3 – P.935–970.

[31] Nishcenko I. Discrete time approximation of coalescing flows on the real line / I.Nishcenko // Theory Stoch. Process – 2011. – V. 17, №1 – P.70–78.

[32] Веретенников А. Ю. О явных формулах для решений стохастических уравнений / А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов // Матем. сб. – 1976. – Т.100(142), №2(6), С.266–284.

[33] Дороговцев А. А. О суперпозиции случайных отображений в гильбертовом пространстве / А. А. Дороговцев // ТВП – 1989. – Т.34, №2 – С.364–370.

[34] Дороговцев А. А. Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве / А. А. Дороговцев – Киев: Наукова думка, 1992. – 120 с.

[35] Dorogovtsev A. A. Krylov-Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows / A. A. Dorogovtsev // Communications on Stochastic Analysis – 2012. – V.6,№3 – P.421-435.

[36] Dorogovtsev A. A. Transformations of Wiener Measure and Orthogonal Expansions / A. A. Dorogovtsev, G. V. Riabov //arXiv:1310.4722 – 2013.

[37] Riabov G. V. Ito-Wiener expansion for functionals of the Arratia's flow n-point motion / G. V. Riabov // Theory of Stoch. Processes – 2015. – V.19, №2 – P.64-89.

[38] Dorogovtsev A. A. One version of the Clark representation theorem for Arratia flows / A. A. Dorogovtsev // Theory of Stoch. Processes. — 2005. — T. 11 (27), №3-4. — P. 63–70.

[39] Dorogovtsev A. A. An analysis of stochastic flows / A. A.Dorogovtsev, I. I. Nishchenko //Commun. Stoch. Anal. – 2014. – V.8,№3 – P.331–342.

[40] Маловичко Т. В. Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием / Т. В. Маловичко // Укр. мат. журн. - 2009. - 61, № 3. - С. 384-390

[41] Арнольд В.И. Топологические методы в гидродинамике /В.И.Арнольд, Б.А.Хесин. Перевод с англ – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.

[42] Корнфельд И.П. Эргодическая теория / И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. – М.:Наука, 1980. – 384 с.

[43] Janson S., Gaussian Hilbert Spaces / S.Janson. – Cambridge: University Press, 1997. – 340 p.

[44] Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля / Б. Саймон – М.: Мир, 1976, – 357 с.

[45] Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход – М.: 1977, - 568 с.

[46] Edgar G. A. Difference equations over locally compact abelian groups / G. A. Edgar and J. M. Rosenblatt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – 253 – P. 273-289.

[47] Yosida K. Functional analysis / K. Yosida. – 6 edition. – New York: Springer-Verlag, 1980, – 501 p.

[48] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations / P. Protter. – Berlin: Springer-Verlag, 2005, – 416 p.

[49] Скороход А.В., Об одном обобщении стохастического интеграла / А.В.Скороход // ТВП – 1975. – Т.20, № 2 – С. 223–238.

[50] Дороговцев А.А. Мерозначные процессы и стохастические потоки / А.А.Дороговцев – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 2007. – 289 с.

[51] Kallenberg O. Foundation of modern Probability / O.Kallenberg – New York: Springer, 1997. – 523 p.

[52] Ватанабе С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С.Ватанабе, Н.Икеда,– М.: Наука, 1968. – 448 с.

[53] Howitt C., Consistent families of Brownian motions and stochastic flows of kernels / C.Howitt, J.Worren, // Ann. of Probab. – 2009. – V. 37, №4 – P. 1237–1272.

[54] Кузнецов Д.Ф., Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения / Д.Ф. Кузнецов – 4-е изд., испр. и доп. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 816 с.

[55] Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч.посібник / А. В.Скороход – К.: Либідь, 1990. – 168 с.

[56] Крамер Г. Стационарные случайные процессы / Г.Крамер, М. Лидбеттер – М.: Мир, 1969. – 398 с.

[57] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер /П.Биллингсли – М.: Наука, 1977. – 352 с.

[58] Malliavin P. Stochastic Analysis / P. Malliavin – Verlag: Springer, 1997.– 343 p.

[59] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин, – М: Физматлит, 2001. – 576с.

[60] Karlin S. Coincidence probabilities / S. Karlin, J.G.McGregor // Pacific J.Math. – 1959. – 9 –P. 1141–1164.

[61] Glinyanaya E.V., Discrete analogue of the Krylov-Veretennikov expansion / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2011. – V. 17(33), №1 – p. 39-49.

[62] Glinyanaya E. V. Disordering asymptotics in the discrete approximation of an Arratia flow / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2012. – V. 18(34), №2 – p. 8-14.

[63] Glinyanaya E. V. Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2014. – V. 19(35), №2 – p. 31-41.

[64] Glinyanaya E. V. Krylov-Veretennikov representation for the m-point motion of a discrete-time flow / E.V. Glinyanaya // Theory of Stoch. Processes – 2015. – V.20(36),№1 – p. 63-77.

[65] Глиняная Е. В. Эргодичность относительно пространственной переменной дискретных по времени стохастических потоков / Е. В. Глиняная // Докл. НАНУ. – 2015 – 8 – С. 13-20.