ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертацію Глиняної Катерини Валеріївни

"Стохастичні потоки з дискретним часом",

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертаційна робота Глиняної К.В. присвячена дослідженню властивостей стохастичних потоків броунівських частинок із сингулярною взаємодією та їх аналогів з дискретним часом.

Задачі, пов'язані з побудовою моделей систем взаємодіючих частинок виникають, зокрема, в теорії турбулентності та статистичній механіці. Найбільш відомими прикладами таких моделей є так званий потік Арратья та його узагальнення, що розглядали в своїх роботах D.A. Dawson і H. Wang, А.А. Дороговцев, В.В. Конаровський, М.П. Карликова. Основним припущенням у цих моделях є те, що броунівські частинки, які стартують з усіх точок дійсної прямої і до моменту "зустрічі" рухаються незалежно, після зіткнення склеюються і рухаються разом, проте характер їх руху не змінюється. Потік Арратья можна розглядати також як окремий випадок потоку Гарріса за умови, що його локальна характеристика є нерегулярною функцією спеціального вигляду (у випадку, коли локальна характеристика потоку Гарріса є достатньо гладкою функцією, то цей потік може бути отриманий як розв'язок задачі Коші деякого стохастичного диференціального рівняння). Нагадаємо, що згаданий стохастичний потік броунівських частинок, що склеюються, був отриманий в праці Р. Арратья як границя випадкових блукань на цілочислених гратах. Інші підходи до побудови потоку Арратья розглядали в своїх роботах C. Newman, K. Ravishankar, R. Sun, I. Norris, A. Turner, А.А. Дороговцев, І.І. Ніщенко. Зокрема, в роботі І.І. Ніщенко потоки Арратья і Гарріса отримано як границі випадкових потоків з дискретним часом. Такого типу потоки описуються за схемою, аналогічною до схеми Ейлера-Маруямі для наближення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Звернемо увагу ще на той факт, що в стохастичних потоках з дискретним часом, на відміну від потоків Гарріса, можливими є перетини траєкторій. У зв'язку з цією обставиною важливим моментом у застосуванні стохастичних потоків з дискретним часом до побудови потоків Арратья і Гарріса є дослідження функціоналу, що дорівнює часу, який дві частинки з дискретного потоку проводять у порядку, відмінному від початкового. Представляють інтерес також проблеми, пов'язані з описом білого шуму, який породжує потік з дискретним часом, та побудовою розкладу Іто-Вінера функціоналів m - точкового руху потоку. Не дослідженою протягом тривалого часу залишалася і задача побудови аналітичними методами напівгрупи m - точкового руху потоку Арратья. Всі ці, а також деякі інші питання є предметом дослідження даної дисертаційної роботи.

Отже, запропонована тема дисертації є актуальною як з точки зору загальної теорії випадкових процесів, так і її за2стосування.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів і висновків до них, а також списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, формулюються мета і задачі дослідження, визначаються наукова новизна, практичне значення отриманих результатів, їх апробації, а також викладено короткий зміст дисертації.

Перший розділ дисертації має назву "Безпорядки в дискретному стохастичному потоці". Він присвячений вивченню властивостей потоків випадкових відображень з дискретним часом. Цей потік побудовано у підрозділі 1.1. за допомогою послідовності незалежних стаціонарних гауссівських процесів, що мають неперервну коваріаційну функцію та нульове середнє значення з використанням рекурентного співвідношення (1.1.3.). Тут обґрунтовано коректність визначення такої послідовності відображень та встановлено їх неперервність в середньому довільного порядку. Крім того, доведено, що послідовність векторів, яка представляє так званий m -точковий рух потоку , а також послідовність, складена з різниць елементів двоточкового руху потоку є ланцюгом Маркова. Ці властивості потоку відображені у твердженнях лем 1.1.4 та 1.1.5. Основний результат підрозділу 1.2 сформульовано в теоремі 1.2.2, з якої випливає, що при деяких додаткових припущеннях відносно коваріаційної функції стаціонарні випадкові відображення потоку мають властивість ергодичності.

Підрозділ 1.3 має допоміжний характер. У ньому наведені відомі результати про збіжність апроксимаційних схем, що використовуються як наближення потоків броунівських частинок. Зокрема, тут описані схеми, які стосуються наближення розв'язку звичайного стохастичного рівняння (схема Ейлера-Маруямі) і потоку Гарріса, до того ж окремо проаналізовано випадок, коли локальна характеристика потоку Гарріса є достатньо гладкою функцією та випадок, коли ця характеристика задовольняє умову, при виконанні якої частинки в потоці склеюються. Найбільш важливим серед них з точки зору завдань, що вирішуються в дисертації, є результат теореми 1.1.3, де сформульовано умови, які забезпечують збіжність m - точкового руху потоку з дискретним часом до m - точкового потоку Арратья. Тут наведено також приклади, які характеризують зміст цих умов.

В останньому параграфі розділу вивчається функціонал (1.4.1) двоточкового руху потоку з дискретним часом, що визначає час, протягом якого дві частинки знаходяться у порядку, протилежному до вихідного. Як вже відзначалося, необхідність дослідження такого функціоналу пов'язана з тим фактом, що в потоці, визначеному співвідношенням (1.1.3), вихідний порядок між частинками може змінюватися, у той час як в граничному потоці Гарріса цей порядок зберігається. Тут дисертанткою доведено ряд важливих тверджень, в яких встановлено асимптотику спадання до нуля послідовності згаданих функціоналів за умови, коли послідовність потоків з дискретним часом наближають потік Арратья.

Другий розділ дисертації присвячений питанням, пов'язаним з описом білого шуму, що породжує стохастичний потік з дискретним часом і побудові розкладу типу Іто-Вінера функціоналів m - точкового руху потоку. У підрозділі 2.1 наведено основні відомості про розклад Іто-Вінера випадкових величин, вимірних відносно білого шуму в гільбертовому просторі. Опис білого шуму, що породжує потік з дискретним часом подано в підрозділі 2.2. Спочатку тут побудовано білий шум, що породжує стаціонарний гауссівський процес. При цьому доводиться , що цей шум може бути заданий різними способами (див. леми 2.2.1 і 2.2.2). Потім будується білий шум, що породжує всю послідовність стаціонарних незалежних гауссівських процесів, за допомогою якої керується стохастичний потік з дискретним часом. Побудову розкладу Іто-Вінера функціоналів m - точкового руху потоку реалізовано автором у підрозділі 2.3 (див. теорему 2.3.2). Цей розклад, який виражається в термінах полілінійних форм від білого шуму, що породжує потік, є дискретним аналогом представлення Крилова-Веретенникова для функції від розв'язку стохастичного диференціонального рівняння. Крім того, тут сформульовані умови (див. твердження леми 2.3.4 і теореми 2.3.3), при виконанні яких згаданий розклад можна записати в термінах інтегралів від значень гауссівських процесів, що породжують потік з дискретним часом

Важливі результати отримано автором у третьому розділі дисертації, який присвячено вивченню деяких функціоналів від m - точкового руху потоку Арратья. З означення потоку Арратья (див. Означення 3.1.1) видно, що його m -точковий рух у внутрішніх точках відповідного m - вимірного симплексу збігається за розподілом з m -вимірним вінеровим процесом. Це означає, що вивчення m - точкового руху Арратья практично зводиться до вивчення моментів і положення виходу на межу симплексу броунівського руху. Відомо, що важливим об'єктом на шляху вивчення цих характеристик є перша початково-крайова задача для рівняння теплопровідності, яка в дисертації фігурує як задача (3.1.1) – (3.1.3). В розглядуваному випадку розв'язок цієї задачі представляється в інтегральній формі (див. формулу (3.1.5)) з використанням функції Гріна, яка одночасно є густиною перехідних ймовірностей процесу броунівського руху, що розглядається в межах даного симплексу. Добре відома є також ймовірнісна інтерпретація розв'язку задачі (3.1.1) – (3.1.3), яку відображено у твердженні леми 3.1.2. Відзначені тут властивості m - точкового руху Арратья складають основний зміст підрозділу 3.1. У підрозділі 3.2 потік Арратья охарактеризовано з позиції теорії феллерівських напвгруп, оскільки процес m - точкового потоку можна також визначити як марковський процес. Основний результат цього підрозділу сформульовано у теоремі 3.2.2, де виписано ядро для генератора напівгрупи m - точкового руху потоку Арратья, а також знайдено вигляд генератора при його дії на функції з цього ядра.

Маючи опис ядра для генератора напівгрупи m - точкового руху потоку Арратья, дисертантці вдається отримати для цієї напівгрупи систему параболічних початково-крайових задач, яка виписана у підрозділі 3.3 за допомогою співвідношень (3.3.1) – (3.3.3). Основний результат даного підрозділу сформульовано в теоремі 3.3.1, в якій встановлено існування розв'язку системи крайових задач (3.3.1) – (3.3.3), до того ж цей розв'язок представлено у вигляді суми інтегралів, де кожен доданок є індексований за допомогою так званого бінарного лісу, що відповідає за порядок склеювання в потоці Арратья.

Підсумовуючи наш огляд змісту дисертації, відзначимо, що при встановленні отриманих в ній результатів автор використовує різні достатньо складні методи, ідеї та факти з функціонального та стохастичного аналізу. Їх широке та грамотне застосування забезпечило високий науковий рівень проведених досліджень.

Перейдемо до загальної оцінки дисертаційної роботи.

1. Тема роботи є актуальною. Вона тісно пов'язана як з попередніми, так і теперішніми дослідженнями, які ведуться у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України.

2. Дисертація є завершеною науково-дослідною працею. У ній отримано нові строго математично обґрунтовані теоретичні результати з теорії випадкових процесів, які можна кваліфікувати як суттєві для розвитку напрямку "Аналіз складних систем". Основні результати роботи, що підтверджують цей висновок такі:

- для стохастичного потоку з дискретним часом встановлено такі властивості як стаціонарність та ергодичність за просторовою змінною, а у випадку, коли ці потоки наближають потік Арратья, то для них описано також асимтотику швидкості збіжності до нуля функціоналу, який дорівнює часу, протягом якого спостерігається порушення впорядкованості двох частинок з потоку;
- отримано аналог зображення Крилова-Веретенникова для стохастичного потоку з дискретним часом у термінах полілінійних форм від білого шуму, що породжує потік;
- для генератора напівгрупи процессу m - точкових рухів потоку Арратья знайдено його ядро і вигляд при дії на функції з цього ядра , а для самої напівгрупи виписано систему параболічних початково-крайових задач, розв'язок якої отримано в інтегральній формі.

3. Достовірність результатів роботи в цілому не викликає сумніву. Доведення сформульованих теорем повні та детальні.

До зауважень можна віднести такі:

а) у третьому розділі дисертації на стор. 110, аналізуючи початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності (3.1.1) – (3.1.3), дисертантка відзначає, що "наступна лема (мова йде про лему 3.1.2) містить відоме ([45], гл. VIII, § 5, теорема 1, с. 493) ймовірнісне представлення цієї крайової задачі". Звертаємо увагу автора на те, що у згаданій теоремі 1 мова йде про ймовірнісне представлення початково-крайової задачі, яка дещо відрізняється від задачі (3.1.1) – (3.1.3);

б) у третьому розділі дисертації сформульовано і доведено теорему 3.3.1 (див. стор. 122), де встановлено існування класичного розв'язку системи початково-крайових задач (3.3.1) – (3.3.3). Для повноти викладу тут, на наш погляд, доцільно було з'ясувати також питання щодо єдиності цього розв'язку;

в) в роботі трапляються деякі описки, наприклад, на стор. 90, у подвійній рівності, що записана відразу після формули (2.3.11), у виразі для x на місці множника r має стояти u.

Дані зауваження не мають принципового значення, а тому вони не впливають на загальну оцінку роботи.

4. Робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх одержання можуть використовуватися в подальших дослідженнях проблем, що стосуються складних стохастичних систем. Ці результати можна рекомендувати для застосування в дослідженнях, які ведуться в Інституті прикладних проблем механіки і математики НАН України (м. Львів), а також у національних університетах: Київському, Львівському, Чернівецькому, Прикарпатському, "Львівська політехніка" та "Київський політехнічний інститут".

5. Основні результати дисертації опубліковано в п'яти наукових статтях у фахових виданнях, чотири з яких в журналі, що індексується в науко метричній базі Scopus. Ці результати пройшли достатню апробацію в доповідях автора на чотирьох наукових семінарах та шести наукових конференціях, п'ять з яких – міжнародні. Автореферат дисертації правильно відображає її зміст.

Отже, є підстави зробити такий висновок.

Дисертаційна робота "Стохастичні потоки з дискретним часом" задовольняє вимогам пп. 9, 11-13 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24. 07. 2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Глиняна Катерина Валеріївна заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики
Львівського національного університету
імені Івана Франка Б.І. Копитко

20. 09. 2016 р.

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.02 21.09.2016 р.
Секретар ради /Антоненко Ж.Я./

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія

Підпис Копитка Б.І.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987