НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПОКУТНИЙ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСІЙОВИЧ

УДК 517.9

НОРМАЛЬНО-РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 - диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ-2017

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики Національної академії наук України

Науковий консультант -

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
БОЙЧУК Олександр Андрійович,
Інститут математики НАН України, завідувач лабораторії крайових задач теорії диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України.

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Слюсарчук Василь Юхимович,
кафедра вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне);

доктор фізико-математичних наук, професор
Петришин Роман Іванович,
перший проректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

доктор фізико-математичних наук, професор
Теплінський Юрій Володимирович,
завідувач кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Захист відбудеться "7" березня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розіслано "3" лютого 2017 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Потреби сучасної науки призводять до необхідності розвитку теорії крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь. Такі задачі моделюють багато фізичних, технічних, економічних, соціальних процесів. Розробка конструктивних методів аналізу лінійних та нелінійних крайових задач для широкого класу диференціальних, інтегральних, функціонально-диференціальних, інтегро-диференціальних систем, систем і рівнянь із запізненням та імпульсом займає одне з центральних місць в якісній теорії диференціальних рівнянь. Спочатку досліджувалися задачі про існування періодичних розв'язків таких рівнянь. Вони вивчалися М. Боголюбовим, Ю. Митропольським, А. Самойленком, І. Малкіним, Є. Грєбєніковим, Ю. Рябовим, А. Андроновим, А. Віттом, С. Хайкіним, В. Якубовичем, В. Старжинським. Системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і періодичні крайові задачі для них вивчалися А. Мишкісом, А. Самойленком, М. Перестюком, А. Халанаєм, Д. Векслером та іншими. Періодичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь із запізненням досліджувалися А. Мишкісом, А. Самойленком, С. Шимановим, Ю. Митропольським, Д. Мартинюком, В. Рубаніком, Л. Ельсгольцем, С. Норкіним, Дж. Хейлом. Класична теорія крайових задач почала свій розвиток задовго до появи методів функціонального аналізу. Постановка таких задач у загальному операторному вигляді стала можливою з використанням функціонального аналізу, який все частіше почав застосовуватися в якості апарату для дослідження загальних крайових задач для різних класів операторних рівнянь. Тут слід відзначити роботи Й. Мавіна, С. Швабіка, М. Твраи, О. Вейводи, Д. Векслера. Теорія крайових задач для операторних рівнянь знайшла своє застосування для інтегро-диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом. Розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь вивчалась Ю. Ландо, проекційно ітеративні методи побудови розв'язків крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь розроблені А. Лучкою та його учнями; методи, які засновані на застосуванні функціонального аналізу, – А. Антоневичем, Я. Радино. Вище зазначені крайові задачі, як правило, вивчалися у регулярному випадку, тобто коли операторне рівняння $Lz = f$ цих крайових задач має розв'язки при будь-якій правій частині, тобто оператор L вихідної задачі має обернений L^{-1}. Такі крайові задачі досліджувалися М. Азбєлєвим, Л. Рахматуліною, В. Максимовим у фредгольмовому випадку. В цих роботах зазначалося, що нефредгольмові крайові задачі ненульового індексу є набагато складнішими й потребують окремого дослідження. Загальна теорія таких задач у нетеровому випадку була розроблена О. Бойчуком, В. Журавльовим, А. Самойленком. Застосовуючи апарат узагальнено-обернених матриць та операторів, було доведено загальні теореми про розв'язність та представлення розв'язків критичних крайових задач (коли порушується єдиність розв'язку) для різних класів лінійних і нелінійних рівнянь та узагальнено простори, в яких розглядалися ці крайові задачі. О. Бойчуком та його учнями розроблено конструктивні методи аналізу крайових задач у відповідних просторах для автономних та неавтономних систем звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням, диференціальних рівнянь з імпульсною дією у загальному нетеровому випадку, коли кількість крайових умов m не співпадає з порядком n диференціальної системи. Такі та більш загальні задачі належать згідно з класифікацією С. Крейна до типу нормально-розв'язних задач, коли породжуючий оператор має замкнену множину значень. Питання розв'язності операторних рівнянь у випадку нетерових крайових задач розглядалися у роботах Ф. Аткінсона, О. Бойчука, В. Журавльова, Дж. Іллса, С. Нікольського. Для розв'язання таких типів рівнянь застосовується теорія псевдообернених матриць та операторів, якій присвячено роботи Е. Мура, Р. Пенроуза, М. Нашеда, Г. Вотруби, К. Рао, А. Албєрта, О. Бойчука, І. Сергієнка, В. Королюка, А. Турбіна, С. Кемпбелла, Е. Дойча, А. Бен-Ізраеля, Т. Гревілля та інших математиків. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь у банахових просторах досліджувалася у роботах Ю. Далецького, С. Крейна та М. Крейна, А. Самойленка, Ю. Теплінського, Р. Петришина, А. Баскакова. Дослідження диференціально-операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах пов'язане з розвитком теорії напівгруп операторів. Відзначимо фундаментальні результати Е. Хілле, К. Іосіди, В. Феллера, Т. Като, Р. Філіпса, І. Міядери, М. Крейна, М. Горбачука, М. Хазана, С. Крейна, Дж. Голдстейна, А. Пазі, А. Ягі, С. Якубова, К. Енгеля, Р. Нагеля, де ця теорія також застосовувалася до дослідження операторно-диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами. Окремий інтерес представляють роботи, де досліджуються диференціальні рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами. У роботах Дж. Голдстейна, А. Пазі, Д. Хенрі, А. Баскакова, Ю. Сільченка та інших досліджувалася гладкість розв'язків операторно - диференціальних рівнянь у залежності від властивостей операторних коефіцієнтів та неоднорідної частини. Диференціальними рівняннями з операторами зсуву займалися Г. Ліф, С. Канторовіц, А. Баскаков, М. Городній, А. Чайковський. Досліджувалася апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами відповідними різницевими схемами у роботах П. Соболевського, О. Самарського, В. Макарова, І. Гаврилюка, М. Городнього.

Одним із важливих питань у якісній теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання стосовно існування обмежених розв'язків. Важливим аспектом теорії крайових задач для такого класу рівнянь є дослідження питань розв'язності таких задач з умовами на нескінченності. Цей напрям бере свій початок від робіт А. Пуанкаре та А. Ляпунова. У середині XX сторіччя ця теорія була узагальнена на випадок операторно-диференціальних рівнянь М. Крейном, Х. Массерою, Х. Шеффером, В. Коппелем, Ф. Хартманом, Р. Саккером, Дж. Селлом, К. Палмером. Такі задачі досліджувалися у скінченновимірному випадку Я. Курцвейлем, А. Самойленком, В. Куліком, О. Бойчуком, Г. Пелюхом, В. Ткаченком, В. Журавльовим, І. Парасюком, а у нескінченновимірному випадку – Б. Левітаном, В. Жиковим, С. Якубовим, Е. Мухамадієвим, В. Слюсарчуком, А. Баскаковим, Д. Хенрі, Ю. Далецьким, М. Горбачуком, А. Руткасом. Умови існування та єдиності обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь досліджувалися В. Кімом, Д. Мартинюком, В. Слюсарчуком, І. Гайшуном, А. Самойленком, Ю. Теплінським, А. Руткасом, Ю. Томіловим, О. Бойчуком, І. Гайшуном у випадку обмежених операторних коефіцієнтів, а також А. Дороговцевим, А. Баскаковим, М. Городнім, А. Чайковським у випадку необмежених операторних коефіцієнтів.

Експоненціально-дихотомічні на всій осі системи утворюють клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так і необмежено зростати. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку розглядалися ще О. Перроном, А. Майзелем і далі у відомих роботах В. Коппеля, Р. Саккера, Дж. Селла, Ю. Митропольського, А. Самойленка, В. Кулика, а у нескінченновимірних просторах Банаха — у монографіях М. Крейна, Ю. Далецького, Х. Массери та Х. Шеффера, Ф. Хартмана, І. Чуєшова, В. Мельникова. У статтях К. Палмера умова експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи була послаблена з заміною на умову експоненціальної дихотомії на півосях і вперше була доведена нетеровість відповідного оператора при розв'язанні задачі про обмежені на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у роботах А. Самойленка, О.Бойчука, де з використанням узагальнено-обернених операторів і псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць досліджувалася задача про існування та біфуркацію обмежених на всій осі розв'язків при лінійних та нелінійних збуреннях. Поняття експоненціальної дихотомії для еволюційних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами систематично вивчалося у монографії Д. Хенрі. У роботах Х. Родрігеса, Дж. Філхо доведений аналог альтернативи Фредгольма (за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння). Дослідженню фредгольмовості оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами присвячено статті А. Баскакова, Ю. Латушкіна, Ю. Томілова. О. Станжицьким досліджено експоненціальну дихотомію стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм, а В. Слюсарчуком, Е. Мухамадієвим – експоненціальну дихотомію розв'язків дискретних систем. Зазначені крайові задачі, як правило, розглядалися у випадку, коли лінеаризована частина таких операторів є нетеровою або фредгольмовою. Тому, дослідження операторно-диференціальних крайових задач, лінеарізована частина яких є нормально-розв'язним оператором представляє науковий інтерес та є актуальним. Саме цим питанням і присвячена робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дана робота виконувалась згідно із загальним планом досліджень відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України у рамках держбюджетних тем "Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь" (номер державної реєстрації №0111U002035), "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь" (номер державної реєстрації №0116U003121) та проекту НДР "Розробка методів розв'язування крайових задач для операторно-диференціальних систем, які моделюють фізико-технічні та біологічні задачі" (номер державної реєстрації 0115U003791).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка методів дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта, лінійна частина яких є нормально-розв'язним оператором у резонансному (критичному) випадку, коли порушується єдиність розв'язку.

Об'єкт дослідження: крайові задачі для операторних та операторно - диференціальних рівнянь, лінійні, слабколінійні та нелінійні крайові задачі, сильні псевдообернені та узагальнено-обернені оператори, узагальнені оператори Гріна для представлення розв'язків, ітераційні процедури для побудови розв'язків нелінійних крайових задач.

Предмет дослідження: узагальнені розв'язки операторних та операторно - диференціальних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта, необхідні та достатні умови розв'язності крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використовуються методи функціонального аналізу, теорії напівгруп операторів та спектрального аналізу, апарат узагальнено-обернених та псевдообернених матриць і операторів. При аналізі теорії біфуркацій використовуються розвинення методів Ляпунова-Пуанкаре, Ляпунова-Шмідта та Вішика-Люстерніка, асимптотичні методи розв'язку некоректних задач.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації вперше отримано такі наукові результати:

1) для операторно-диференціальних крайових задач, лінеарізована частина яких є нормально-розв'язним оператором, побудована теорія розв'язності;

2) для лінійних рівнянь у просторах Банаха з нормально-розв'язним оператором

побудовано проектори на ядро та коядро оператора;

3) введено поняття сильного узагальнено-оберненого та псевдооберненого операторів у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Для лінійних операторних рівнянь з обмеженим оператором, що має не обов'язково замкнену множину значень, введено поняття узагальнених розв'язків та узагальнених квазірозв'язків. Побудовано теорію розв'язності таких рівнянь та представлено відповідні множини розв'язків;

4) для операторних рівнянь у просторах Банаха та Фреше з необов'язково стискаючим оператором узагальнено метод рядів Неймана;

5) доведено теореми розв'язності для нелінійних операторних рівнянь;

6) досліджено періодичну та двоточкову крайову задачу для операторно - диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта. Знайдено необхідні та достатні умови існування узагальнених розв'язків даної задачі та представлено відповідні узагальнені розв'язки. Досліджено умови біфуркацій розв'язків для операторно - диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта;

8) у просторі Банаха досліджено параметричну крайову задачу з періодичними операторними коефіцієнтами. Введено поняття відносного спектра оператора і за його допомогою знайдено необхідні та достатні умови розв'язності даної задачі;

9) отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних та нелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха, Фреше та Гільберта з необмеженими операторними коефіцієнтами за умов експоненціальної дихотомії на півосях та знайдено зв'язок між ними. Запропонований підхід продемонстровано на прикладі крайових задач для операторно-диференціального рівняння Шредінгера у просторі Гільберта;

10) з допомогою узагальненої центральної канонічної форми знайдено умови біфуркації розв'язків диференціально-алгебраїчної системи (диференціальної системи з прямокутною матрицею при похідній). Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійно збурених диференціально-алгебраїчних систем;

11) досліджено операторне рівняння з запізненням типу Соболєва - Гальпєрна. Отримано умови керованості рівняння Соболєва- Гальпєрна;

12) знайдено умову розв'язності крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ляпунова;

13) отримано необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі для операторно - диференціального рівняння Ріккаті у просторі Гільберта.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, які отримані у роботі, можуть бути використані в якісній теорії крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь, теорії керування та стійкості у випадках, коли вихідне рівняння є нормально-розв'язним;

при дослідженні різноманітних фізичних, економічних, біологічних процесів. Також ці результати можна використати у спеціальних курсах з диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дослідження та його основний напрямок визначено спільно з науковим консультантом - членом-кореспондентом НАН України О. А. Бойчуком. Результати дисертаційної роботи є новими та отримані автором самостійно. У спільних роботах співавторам належить постановка задач та обговорення можливих шляхів їх розв'язання.

Апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації доповідались і обговорювались на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях, наукових семінарах. Зокрема результати дисертації доповідалися на:

- International Conference "Conference on Differential and Difference Equations and Applications (CDDEA-2010)" (Словаччина, 2010 р.);

- XVI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2010)" (Ялта, 2010 р.);

- XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2011)" (Східниця, 2011 р.);

- 4th Chaotic Modelling and Simulation International Conference (Греція, 2011 р.);

- International Conference "Analysis and singularities" dedicated to the 75th anniversary of Vladimir Igorevich Arnold (Москва, 2012 р.);

- International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Львів, 2012 р.);

- International Conference KROMSH-2012, The twenty third Crimea Autumn Mathematical School (Крим, Ласпі-Батіліман, 2012 р.);

- 2nd International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery Sergeevich Melnik (Київ, 2012 р.);

- Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin readings - XXIII" (Воронєж, 2012 р.);

- International conference "Glushkov readings" on the occasion of the 90th anniversary of academician V. M. Glushkov (Київ, 2013 р.);

- Crimea International mathematical Conference (CIMC-2013) (Судак, 2013 р.);

- International mathematical conference "Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications" on the occasion of the 75th anniversary of academician A. M. Samoilenko (Севастополь, 2013 р.);

- XVI International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Київ, 2013 р.);

- 2nd EUMLS Conference, Mathematics for Life Sciences (Крим, 2013 р.);

- Humboldt Kolleg "Education and science and their role in social and industrial progress of society" (Київ, 2014 р.);

- міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2015 р.);

- Third conference "Mathematics for life sciences" (Рівне, 2015 р.);

- Київських семінарах з функціонального аналізу (керівник – чл. - кор. НАН України Горбачук М. Л.) (2011, 2013 рр.);

- кафедрі математики КАУ Інституту математики НАН України (2016 р.);

- Президії НАН України (2016 р.);

- Бюро відділення математики Президії НАН України (2016 р.);

- семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник – академік НАН України, Самойленко А. М.) (2016 р.);

- засіданнях вченої ради Інституту математики НАН України (2015, 2016 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у працях [1 - 29], що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus, Thomson Reuters, zbMath та відповідають вимогам щодо публікації результатів дисертаційних робіт у фахових наукових виданнях, 14 праць опубліковано без співавторів. Додатково результати дисертації відображені у 17 збірниках матеріалів і тез міжнародних конференцій та наукових шкіл.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, восьми розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 475 найменувань. Повний обсяг роботи складає 345 сторінок.

Автор висловлює подяку науковому консультанту члену-кореспонденту НАН України О. А.Бойчуку за постановку задач та обговорення отриманих результатів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і задачі дослідження, виділено наукову новизну та практичне значення результатів дисертації, вказано особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації.

Перший розділ містить огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи. Висвітлено результати інших авторів з даної тематики. Викладено теоретичні відомості, які необхідні для отримання основних результатів.

У **другому розділі** дисертації розроблено апарат теорії сильних узагальнено-обернених та псевдообернених операторів. Розглядається рівняння

$$Lx = y. \tag{1}$$

Тут $L : B_1 \to B_2$ – лінійний та обмежений оператор, B_1, B_2 – простори Фреше, Банаха або Гільберта. Доведено наступні твердження.

Теорема 1. (Теорема 2.1.). *Нехай для оператора L, що діє у просторах Фреше, існує (X, Y) – узагальнена L – допустима пара (тобто ці підпростори є доповнювальними).*

a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y = 0; \tag{2}$$

якщо $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

2. Якщо умова (2) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1) буде мати вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in B_1;$$

b) 1. Узагальнені квазірозв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y \neq 0; \tag{3}$$

2. Якщо умова (3) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in B_1,$$

де $L^{-}_{X,Y}$ – сильний (X, Y)-узагальнено-обернений до оператора L, $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}$ – проектори на ядро оператора L та спряженого $\overline{L}^*$.

Тут $B_1 = N(L) \oplus X$, $B_2 = \overline{R(L)} \oplus Y$. Зауважимо, що оператор L у загальному випадку не є нормально-розв'язним. Побудована у роботі конструкція дозволяє розширити простір B_1 і оператор L на нього таким чином, щоб розширений оператор $\overline{L}$ став нормально-розв'язним ($\overline{R(\overline{L})} = R(\overline{L})$) і застосовувати раніше відомі результати. За рахунок наявності скалярного добутку у просторах Гільберта цю теорему можна уточнити, відмовившись від умов доповнювальності відповідних підпросторів. Тоді до розширеного оператора $\overline{L}$ завжди існує псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор $\overline{L}^+$.

Наслідок. *a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y = 0 \Longleftrightarrow (\varphi, y) = 0, \tag{4}$$

для всіх φ таких, що $\overline{L}^* \varphi = 0$; якщо ж $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

2. Якщо умова (4) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1) буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^{+}y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in H_1;$$

b) 1. Узагальнені псевдорозв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}y \neq 0 \Longleftrightarrow (\varphi, y) \neq 0; \tag{5}$$

2. Якщо умова (5) виконується, то множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^{+}y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in H_1.$$

У **наступній частині** цього розділу розглядається випадок, коли оператор L має вигляд $I - A$, тобто рівняння (1) має вигляд

$$(I - A)x = y. \tag{6}$$

Підрозділ 2.4. присвячено узагальненню методу рядів Неймана для рівнянь із не обов'язково стискуючим оператором A й у тому випадку, коли оператор $I - A$ не має оберненого. Тут $A : B \to B$ – лінійний обмежений оператор, B – простір Банаха з нормою $|| \cdot ||$ (або Фреше зі зліченним набором напівнорм $|| \cdot ||_n, n \in \mathbb{N}$) такий, що існує стала $c > 0 : ||A^n|| \le c, n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $|| \cdot ||_m$ існує напівнорма $|| \cdot ||_k$ така, що $||A^n x||_m \le c||x||_k$), $\overline{0} \in B$).

Надалі оператор $A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}$ є проектором на ядро оператора $I - A$. Основні результати можна подати у вигляді теореми.

Теорема 2. (Теорема 2.4.). *Нехай лінійний обмежений оператор A, що діє у рефлексивному просторі Банаха або Фреше B такий, що його степені рівномірно обмежені. Тоді:*

(a) рівняння (6) має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{7}$$

якщо $y \in R(I - A)$, то розв'язки рівняння (6) будуть класичними;

(б) якщо умова (7) виконується, то множина розв'язків рівняння (6) може бути представлена у вигляді операторного ряду

$$x = A_0 c + \overline{G}[y],$$

де $\overline{G}[y]$– відповідне розширення оператора Гріна $G[y]$ на простір $\overline{B}$, що отримується поповненням простору B за певною нормою;

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(A - A_0)^l\}^{k+1} y - A_0 y, \tag{8}$$

(в) якщо умова (7) не виконується, то рівняння (6) має множину квазірозв'язків, яку можна подати у вигляді

$$x = A_0 c + \overline{G}[y],$$

де $\overline{G}[y] = (\overline{I - A})^{-}y$, узагальнено-обернений оператор до розширеного на відповідний простір $\overline{B}$ оператора $\overline{I - A}$.

У **наступній частині**, враховуючи отримані вище теореми, досліджуються задачі про існування неявних функцій. Розглядається рівняння

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = 0, \tag{9}$$

де $\mathcal{F}(x, \varepsilon)$ – нелінійний оператор, визначений і неперервний (достатньо гладкий, аналітичний) у околі $w = w(x_0, \varepsilon_0) \subset E_1 + E$ відомого розв'язку $x = x_0$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ зі значеннями в E_2; E_1, E_2, E – простори Фреше ($\mathcal{F} : w(x_0, \varepsilon_0) \subset E_1 \times E \to E_2$). Необхідно побудувати розв'язок $x = x(\varepsilon)$ рівняння (9) в околі w точки (x_0, ε_0). У подальшому будемо для зручності вважати, що $x_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$. Тоді (9) можна записати у вигляді

$$Qx = R(x, \varepsilon), R(0, 0) = 0, \tag{10}$$

за припущення на нелінійність: $R_x(0, 0) = 0$ (похідна Фреше за першою змінною). Якщо $\varepsilon = \lambda$ – числовий параметр, і при всіх можливих значеннях λ: $R(0, \lambda) = 0$, то рівняння (10) буде визначати умови біфуркації задачі (9).

У **підрозділі 2.6** розглядається нелінійне рівняння вигляду

$$Qx = \varepsilon R(x, \varepsilon), \tag{11}$$

у просторах Фреше E_1 та E_2 з неперервною нелінійністю $R(x, \varepsilon)$, що задовольняє умову $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$ (похідна у сенсі Фреше за першою змінною існує в околі $(0, 0)$). Задача полягає у знаходженні такого розв'язку $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої задачі $Qx = 0$, і визначений та неперервний у околі цього розв'язку. Необхідні та достатні умови існування розв'язків рівняння (11) отримано у наступному вигляді.

Теорема 3. (Теорема 2.5.). (Необхідна умова). *Нехай рівняння (11) має неперервний розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої задачі $P_{N(Q)}c$ з елементом $c = c_0 \in E_1$. Тоді c_0 повинен задовольняти рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c, 0) = 0. \tag{12}$$

Рівняння для породжуючих елементів є аналогом рівняння для породжуючих амплітуд у випадку періодичної крайової задачі. У роботі показано, що достатня умова існування розв'язків рівняння (11) отримується з використанням оператора $B_0 = P_{N(Q^*)} l P_{N(Q)}$, де лінійний та обмежений оператор l визначений за наступним правилом $ly(\varepsilon) = R_x(P_{N(Q)}c_0, 0)y(\varepsilon)$.

Теорема 4. (Теорема 2.6.). (Достатня умова). *Нехай виконуються умови:*

1. B_0 та Q – узагальнено-оборотні оператори;

2. $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in E_1$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (12), існує неперервний розв'язок рівняння (11). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = Q^- R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

$$y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Наслідок. *Нехай $F(c)$ має похідну Фреше для кожного елемента $c = c_0$ простору E_1, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (12). Якщо похідна Фреше $F^{(1)}(c_0) = B_0$ є обмеженим оборотним оператором, то рівняння (11) має єдиний розв'язок для кожного $c_0 \in E_1$.*

Використовуючи запропоноване у другому розділі поняття сильного узагальнено - оберненого оператора, можна довести більш загальні твердження.

Якщо розглядати те саме рівняння, але визначене у гільбертових просторах $E_1 = H_1, E = H, E_2 = H_2$, то за рахунок наявності скалярного добутку результат спрощується до наступного:

Наслідок. *Нехай $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.*

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (12), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(\varepsilon)$ рівняння (11).

Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -\overline{B}_0^+ P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = \overline{Q}^+ R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$; $\overline{B}_0^+, \overline{Q}^+$ *– сильні псевдообернені за Муром-Пенроузом оператори.*

Використовуючи результати цього розділу, досліджуються нелінійні крайові задачі, що розглянуті нижче.

Третій розділ присвячений дослідженню операторного-диференціального рівняння Хіла

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \ t \in [0; w], \tag{13}$$

у просторі Гільберта H з періодичною крайовою умовою

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w). \tag{14}$$

Тут T – додатний самоспряжений оператор.

Увівши до розгляду новий простір Гільберта $H_{T^{\frac{1}{2}}} = D(T^{\frac{1}{2}}) \oplus D(T^{\frac{1}{2}})$ зі скалярним добутком $(< u, v >, < u, v >)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}} = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) + (T^{\frac{1}{2}}v, T^{\frac{1}{2}}v)$ та вектор $\varphi = (x_1, x_2)^T$, задачу (13), (14) на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ перепишемо у вигляді

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + f(t), \tag{15}$$

$$\varphi(0) = \varphi(w) + \alpha, \tag{16}$$

де оператор A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

вектор-функція $f(t) = (rcos(tT^{\frac{1}{2}})z, \ rsin(tT^{\frac{1}{2}})z)^T$, $y(t) = x_1(t), \dot{x}_1(t) = T^{\frac{1}{2}}x_2(t) + rcos(tT^{\frac{1}{2}})z$, $z \in H$, вектор $\alpha = (0, rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^T$. Основний результат наступний.

Теорема 5. (Теорема 3.1.). *Нехай задана крайова задача (15), (16).*

1. Сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (15), (16) існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} = 0; \tag{17}$$

якщо додатково вектор $(rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z; rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^T$ *належить множині значень* $R(I - U(w))$*, то розв'язки будуть класичними узагальненими.*

За виконання умови (17) розв'язки крайової задачі (15), (16) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f,\alpha])}(t),$$

для довільного $\overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$*, де* $\overline{(G[f,\alpha])}(t)$ *– розширення узагальненого оператора Гріна* $(G[f,\alpha])(t)$ *на поповнений простір* $\overline{H}_{T^{\frac{1}{2}}}$*;*

2. Пeвдорозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

За виконання умови (18) псевдорозв'язки крайової задачі (15), (16) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f,\alpha])}(t).$$

Тут $U(t)$ – еволюційний оператор, що має вигляд

$$U(t) := U(t,0) = \begin{pmatrix} cos(tT^{\frac{1}{2}}) & sin(tT^{\frac{1}{2}}) \\ -sin(tT^{\frac{1}{2}}) & cos(tT^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix},$$

$$U_0(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(w)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U(kw)}{n} -$$

усереднений оператор до оператора $U(w)$ (ортопроектор).

Нехай елемент α такий, що крайова задача

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \quad \varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{19}$$

не розв'язна у класичному узагальненому сенсі, тобто $U_0(w)\alpha \neq 0$. Знайдемо умови, які повинна задовольняти збурена операторна система

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \tag{20}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{21}$$

для того, щоб вона була розв'язною. Тут оператор $A_1(t)$ – лінійний та обмежений при всіх $t \in [0; w]$. У **підрозділі 3.2** наведено достатні умови, за яких ця операторна система є розв'язною у класичному узагальненому сенсі, тобто має місце біфуркація розв'язків.

Для отримання достатніх умов існування класичних узагальнених розв'язків операторної системи (20), (21) будемо застосовувати аналог методу Вішика - Люстерніка й використовувати оператор

$$B_0 = U_0(w) \int_0^w A_1(t)U(t)dtU_0(w) : H_{T^{\frac{1}{2}}} \to H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 6. (Теорема 3.2.). *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1) B_0 - псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Якщо незбурена крайова задача (19) не має класичних узагальнених розв'язків, то операторна система (20), (21) має ρ - параметричну множину розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi_0(t, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i [\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}};$$

абсолютно збіжного для достатньо малого параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Тут

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t)U_0(w)\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t, \overline{c}_0) = U(t)U_0(w)\overline{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t),$$

$$\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) = U(t)U_0(w)\overline{c}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(t), i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha,$$

$$\overline{c}_0 = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau,$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\mathcal{F}_0 = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w),$$

$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{X}_{-1}(t) = U(t)U_0(w),$$

$$\overline{X}_i(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t), i = 0, 1, 2, ...$$

Наступний підрозділ присвячений дослідженню параметричної крайової задачі з періодичними операторними коефіцієнтами. Результати, що у ньому отримано узагальнюють відомі результати М. Г. Крейна на нерегулярний випадок, та при його дослідженні використовується узагальнений метод рядів Неймана.

У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглядається множина крайових задач:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda A(t)x(t) + f(t), \tag{22}$$

$$x(0) - x(w) = \overline{0}. \tag{23}$$

Тут $A(t)$ – періодична оператор-функція на $\mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathcal{L}(\mathbf{B})$, $f(t)$ – неперервна на $[0; w]$ періодична вектор-функція зі значеннями у просторі $\mathbf{B}$ та періодом $w > 0$, $A(t+w) = A(t)$, $f(t+w) = f(t)$. З допомогою введеного поняття відносної (узагальненої) резольвентної множини

$$\rho_{NS} = \{\lambda : \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ \ R(I - U(w,\lambda)) \ = \ \overline{R(I - U(w,\lambda))}\ \}$$

доводиться наступний результат.

Теорема 7. (Теорема 3.3.). *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}$ є точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w, \lambda)$ задачі (22) у рефлексивному просторі Банаха $\mathbf{B}$ (тобто степені оператора монодромії є рівномірно обмеженими). Тоді:*

а) крайова задача (22), (23) має періодичні розв'язки тоді й тільки тоді, коли вектор - функція $f(t)$ задовольняє умову

$$U_0(\lambda)\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0, \quad \text{де} \ \ U_0(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n}; \tag{24}$$

б) за виконання (24) періодичні розв'язки крайової задачі (22), (23) мають наступний вигляд:

$$x(t,c) = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{25}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$,

$$G(t,\tau) = U(t,\lambda)(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1} - U_0(\lambda))U^{-1}(\tau,\lambda) +$$

$$+K(t,\tau)$$

– узагальнений оператор Гріна крайової задачі (22), (23) та

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq t, \\ U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda), & t > \tau. \end{cases}$$

Тут $U(t,\lambda)$ – еволюційний оператор однорідного операторного рівняння.

Четвертий розділ присвячений питанню існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь у просторах Фреше та Банаха за умов експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння.

У підрозділі 4.1 вивчається лінійне операторно-диференціальне рівняння у просторі Банаха $\mathbf{B}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{26}$$

з необмеженою оператор-функцією $A(t)$. Для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, оператор-функція $A(t)$ є замкненим оператором з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, що не залежить від t. Основним результатом є наступне твердження.

Теорема 8. (Теорема 4.2.). *Нехай $\{T(t,s)|\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ сильно неперервний еволюційний оператор, асоційований з однорідним рівнянням. Припустимо, що наступні умови виконано:*

1) $T(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ й $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно;

2) оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ є узагальнено-оборотним.

Тоді:

1) для того, щоб існували слабкі обмежені на всій осі розв'язки рівняння (26), необхідно та достатньо, щоб вектор - функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{27}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t)$;

2) за виконання умови (27) множина розв'язків рівняння (26) має наступний вигляд:

$$x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0), \quad c \in \mathbf{B}, \tag{28}$$

де

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + T(t,s)P_+(s)D^-[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^s T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ t \geq s \\ \int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^s T(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + T(t,s)(I - P_-(s))D^-[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^s T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ s \geq t \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки:

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt;$$

$$\mathcal{L}(G[f])(t,0) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

та

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx}{dt} - A(t)x(t),$$

D^- – узагальнено - обернений до оператора D; $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D$, $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$ – проектори на ядро та коядро оператора D.

Підрозділ 4.3 присвячений дослідженню нелінійного диференціального рівняння у просторі Банаха $\mathbf{B}$

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + f(t), \tag{29}$$

з необмеженим оператором у лінійній частині. Шукається такий обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$ цього рівняння, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння.

Ця проблема може бути розв'язана з допомогою, побудованого у роботі, операторного рівняння, яке будемо називати операторним рівнянням для породжуючих елементів

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c), t, 0)dt = 0. \tag{30}$$

Теорема 9. (Теорема 4.3.). (Необхідна умова). *Припустимо, що однорідне рівняння (26) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно та нелінійне рівняння (29) має обмежений розв'язок $x(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (26) з елементом $c = c^0 \in \mathbf{B} : x(t,0) = x_0(t,c^0)$, $\varepsilon = 0$. Тоді цей елемент повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів (30).*

Достатня умова може бути отримана з допомогою оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : \mathbf{B} \to \mathbf{B},$$

де $A_1(t) = Z^1(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0;\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше).

Теорема 10. (Теорема 4.4.). (Достатня умова). *Припустимо, що однорідне рівняння (26) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно, а неоднорідне рівняння має обмежені розв'язки. Нехай для оператора B_0 виконано наступні умови:*

1) оператор B_0 є узагальнено - оборотним;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathbf{B}$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (30), існує принаймні один слабкий обмежений розв'язок рівняння (29). Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою збіжного ітераційного *процесу*

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon)=\varepsilon G[Z(x_0(\tau,c^0)+y_k,\tau,\varepsilon)](t,0),$$

$$c_k=-B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty}H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon)+\mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon)=T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k+\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon)=x_0(t,c^0)+y_k(t,\varepsilon), k=0,1,2,...,\quad y_0(t,\varepsilon)=0,$$

$$x(t,\varepsilon)=\lim_{k\to\infty}x_k(t,\varepsilon).$$

Надалі вивчається неоднорідне рівняння (26) у локально-опуклому топологічному просторі E та просторі Фреше F. Запропоновано означення експоненціальної дихотомії у цих просторах. Основний результат сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 11. (Теорема 4.6.). *Нехай однорідне рівняння є експоненціально - дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P_+ та P_- відповідно, а оператор*

$$D=P_+-I+P_-:F\to F,$$

є сильним (X,Y) — узагальнено-оборотним.

Тоді:

1) для того, щоб існували узагальнені, обмежені на всій осі розв'язки рівняння (26), необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f\in BC(\mathbb{R},F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)f(t)dt=0, \tag{31}$$

де $H(t)=(I-\overline{D}D_{X,Y}^-)P_-U^{-1}(t)$, $D_{X,Y}^-$ — сильний (X,Y) – узагальнено-обернений до оператора D, $\overline{D}$ - розширення оператора D на поповнений простір $\overline{F}$;

2) за виконання умови (31) узагальнені розв'язки рівняння (26) мають вигляд:

$$x_0(t,c)=U(t)P_+\mathcal{P}_{N(\overline{D})}c+\overline{(G[f])}(t),\quad c\in\overline{F} \tag{32}$$

де

$$\overline{(G[f])}(t)=\begin{cases}\begin{array}{r}\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+f(\tau)d\tau-\\ -\int_t^{+\infty}U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau+\\ +U(t)P_+D_{X,Y}^-[\int_0^{\infty}U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau+\\ \int_{-\infty}^0U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau],\ \ t\geq 0\\ \\ \int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau-\\ -\int_t^0U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_-)f(\tau)d\tau+\\ +U(t)(I-P_-)D_{X,Y}^-[\int_0^{\infty}U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau+\\ +\int_{-\infty}^0U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau],\ \ t\leq 0\end{array}\end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна, розширений на простір $\overline{F}$, що є поповненням вихідного простору.

У підрозділі 4.4 вивчаються крайові задачі на всій осі. Розглядається наступна крайова задача у просторі Банаха $\mathbf{B}$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{33}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \tag{34}$$

з лінійним обмеженим оператором $l : BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B}) \to \mathbf{Y}$, що діє з простору $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ (обмежених та неперервних разом із похідною на всій осі вектор - функцій) у банахів простір $\mathbf{Y}$. Основним результатом є теорема.

Теорема 12. (Теорема 4.8.). *Нехай оператор*

$$B_0 = lU(\cdot)P\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B} \to \mathbf{Y},$$

що діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ у простір Банаха $\mathbf{Y}$ узагальнено - оборотний. Тоді:

(i) для того, щоб існували обмежені розв'язки крайової задачі (33) (34) необхідно та достатньо, щоб

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}(\alpha - l(G[f])(\cdot)) = 0; \tag{35}$$

(ii) за виконання умови (35) розв'язки крайової задачі (33), (34) мають вигляд

$$x(t, \overline{c}) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\overline{c} + U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}B_0^-(\alpha - l(G[f])(\cdot)) + (G[f])(t),$$

для довільного елемента $\overline{c} \in \mathbf{B}$, де $(G[f])(\cdot)$ – узагальнений оператор Гріна, визначений у попередніх теоремах; B_0^- – узагальнено - обернений до B_0, $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}$ – проектор, який проектує $\mathbf{B}$ на ядро спряженого оператора B_0^*.

Остання частина цього розділу присвячена апроксимації обмежених на всій осі розв'язків лінійних диференціальних рівнянь у просторі Банаха.

П'ятий розділ присвячений дослідженню операторного рівняння Шредінгера.

Розглядається рівняння

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), t \in J, \tag{36}$$

у просторі Гільберта $\mathcal{H}$, де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; тут $H_0 = H_0^*$ – необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$; відображення $t \to V(t)$ — сильно неперервне, $U(t,s)$ – еволюційний оператор відповідного однорідного рівняння. У роботі отримано умови розв'язності та представлення слабких розв'язків рівняння (36).

Далі досліджується нелінійне рівняння Шредінгера на всій осі за аналогічною процедурою попереднього розділу.

У **підрозділі 5.3** досліджуються умови біфуркації узагальнених розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера на скінченному відрізку.

У просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядається наступна крайова задача

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon H_1(t)\varphi(t) + f(t), t \in J \tag{37}$$

$$l\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1\varphi(\cdot). \tag{38}$$

Тут для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$ оператор $H(t)$ має вигляд, зазначений вище, $H_1(t)$ – лінійний та обмежений оператор, l, l_1 – лінійні та обмежені оператори, що діють з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_1$.

Шукається сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (37), (38) для тих правих частин $f(t)$ рівняння (37), для яких незбурена крайова задача ($\varepsilon = 0$) їх не має. Використовується при цьому оператор

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot, s) - l\int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau)H_1(\tau)U(\tau, s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Теорема 13. (Теорема 5.4.). *Припустимо, що виконується наступна умова:* $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$.

Якщо незбурена операторна крайова задача не має сильних узагальнених розв'язків, то крайова задача (37), (38) має ρ - параметричну множину сильних узагальнених розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi(t, s, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i[\overline{\varphi}_i(t, s, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t, s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad \textit{для довільного} \ \ c_\rho \in \mathcal{H},$$

абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$; тут

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, s, \overline{c}_{-1}) = U(t, s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t, s, \overline{c}_0) = U(t, s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0 + U(t, s)\overline{Q}^+\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, s, \overline{c}_{-1})\} +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, s, \overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(t, s),$$

$$\overline{\varphi}_i(t, s, \overline{c}_i) = U(t, s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t, s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, s, \overline{c}_{i-1}) +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, s, \overline{c}_{i-1})]}(t, s); \quad i \in \mathbb{N}.$$

Наступний підрозділ присвячений дослідженню у просторі Гільберта $\mathcal{H}$ нелінійного диференціального рівняння Шредінгера

$$\frac{d\varphi(t, \varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + f(t), t \in J, \tag{39}$$

з операторною крайовою умовою вигляду

$$l\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{40}$$

де $J \subset \mathbb{R}$ – скінченний відрізок.

Основними результатами є наступні теореми.

Теорема 14. (Теорема 5.5.). (Необхідна умова). *Нехай крайова задача (39), (40) має сильний узагальнений розв'язок $\varphi(t,s,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $\varphi_0(t,s,c^0)$ з елементом $c = c^0$. Тоді елемент $c^0 \in \mathcal{H}$ повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{J(\varphi_0(\cdot,s,c),0) - l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi_0(\tau,s,c),\tau,0)d\tau\} = 0. \tag{41}$$

Достатня умова отримується з використанням оператора

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot,s) - l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau,s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)},$$

де $A_1(t) = A_1(t,c^0) = Z^{(1)}_{\varphi}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0(t,s,c^0),\varepsilon=0}$, $l_1 = J^{(1)}(\varphi_0,0)$ – похідні Фреше у точці $(\varphi = \varphi_0, \varepsilon = 0)$.

Теорема 15. (Теорема 5.6.). (Достатня умова). *Нехай для оператора B_0 виконується наступна умова:*

$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (41), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (39), (40). Цей розв'язок може бути знайдений із використанням ітераційного процесу

$$\overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+ J(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

$$c_k = \overline{B}_0^+\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}_k(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi_k(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau -$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}_k(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\},$$

$$\psi_{k+1}(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + \overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi_k(t,s,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \psi_0(t,s,\varepsilon) = 0,$$

$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t,s,\varepsilon).$$

У **наступному підрозділі** вивчається двоточкова крайова задача у просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH_0\varphi(t) + f(t),\ t \in [0; w] \tag{42}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha \in D, \tag{43}$$

де $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ – простір Гільберта й вектор-функція $f(t)$ інтегровна; розглядається необмежений оператор H_0, який має вигляд:

$$H_0 = i\begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Тут T – додатний самоспряжений оператор у просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Доведено наступний результат.

Теорема 16. (Теорема 5.7.). *Для крайової задачі (42), (43) справедливі наступні твердження.*

1. a) Існують класичні або сильні узагальнені розв'язки (42), (43) тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \tag{44}$$

Якщо $(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \in R(I - U(w))$, *то розв'язки (42), (43) будуть класичними узагальненими.*

b) За виконання умови (44) розв'язки (42), (43) мають вигляд

$$\varphi_0(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f,\alpha]})(t),$$

де $(\overline{G[f,\alpha]})(t)$ *– розширення оператора* $(G[f,\alpha])(t)$*;*

2. a) Існують сильні псевдорозв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \neq 0. \tag{45}$$

b) За виконання умови (45) сильні псевдорозв'язки (42), (43) мають вигляд

$$\varphi_0(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f,\alpha]})(t),$$

де

$$(\overline{G[f,\alpha]})(t) = U(t)\overline{G}[\alpha + U(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau] + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= U(t)\overline{(I - U(w))}^{+}\{\alpha + U(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\} + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Надалі у просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$, означеному вище, розглядається крайова задача

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH_0\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \tag{46}$$

$$\varphi(0,\varepsilon) - \varphi(w,\varepsilon) = \alpha. \tag{47}$$

Задача полягає у знаходженні розв'язку $\varphi(t,\varepsilon)$ крайової задачі (46), (47), який перетворюється в один із розв'язків $\varphi_0(t,\overline{c})$ породжуючої крайової задачі (42), (43) при $\varepsilon = 0$.

Ця проблема може бути розв'язаною з допомогою операторного рівняння для породжуючих амплітуд

$$F(\overline{c}) = U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)Z(\varphi_0(\tau,\overline{c}),\tau,0)d\tau = 0. \tag{48}$$

Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі (46), (47).

Теорема 17. (Теорема 5.8.). (Необхідна умова). *Нехай нелінійна крайова задача (46), (47) має сильний узагальнений розв'язок $\varphi(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється в один з сильних узагальнених розв'язків $\varphi_0(t,\overline{c})$ породжуючої задачі (42), (43) з елементом $\overline{c} = c^0$, $\varphi(t,0) = \varphi_0(t,c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді цей елемент повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих амплітуд (48).*

Введемо оператор $B_0 = \frac{dF(\overline{c})}{d\overline{c}}|_{\overline{c}=c_0} = U_0(w)\int_0^w U^{-1}(t)A_1(t)dt : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, де оператор $A_1(t) = Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}$ – похідна Фреше у точці $(\varphi_0,0)$.

Теорема 18. (Теорема 5.9.). (Достатня умова). *Нехай виконуються умови:*

1) B_0 має псевдообернений за Муром - Пенроузом;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}_T$, що задовольняє операторне рівняння для породжуючих амплітуд (48), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок (46), (47).

Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою ітеративного процесу:

$$\overline{v}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau,c^0)+v_k,\tau,\varepsilon),\alpha](t),$$

$$c_k = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)\{A_1(\tau)\overline{v}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(v_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(v_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(\varphi_0(t,c^0)+v_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(\varphi_0(t,c^0),t,0) - A_1(t)v_k(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_x^1(0,t,0) = 0,$$

$$v_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t)U_0(w)c_k + \overline{v}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,c^0) + v_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \quad v_0(t,\varepsilon) = 0, \varphi(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t,\varepsilon).$$

У **наступному підрозділі** отримані вище результати проілюстровано на прикладі крайової задачі

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = \varepsilon(1 - ||y(t)||^2)\dot{y}(t), \tag{49}$$

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w), \tag{50}$$

для рівняння Ван дер Поля у сепарабельному просторі Гільберта H. Тут T – необмежений оператор з компактним оберненим T^{-1}. Необхідна умова розв'язності цієї задачі полягає у наступному.

Теорема 19. (Теорема 5.10.). (Необхідна умова розв'язності рівняння Ван дер Поля). *Нехай крайова задача (49), (50) має розв'язок $y(\cdot, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння з набором пар констант $(c_1^k, c_2^k), k \in \mathbb{N}$. Тоді серед них може бути не більше скінченної кількості ненульових. Більше того, якщо $(c_1^{k_i}, c_2^{k_i}) \neq (0,0), i = \overline{1,N}$, то ці константи знаходяться на N-вимірному торі скінченновимірного підпростору констант*

$$(c_1^{k_i})^2 + (c_2^{k_i})^2 = (\frac{2}{\sqrt{2N-1}})^2, i = \overline{1,N}.$$

Наведено й інші приклади крайових задач з необмеженим операторним коефіцієнтом.

У підрозділі 6.1 розглядається задача про існування періодичних розв'язків операторного різницевого рівняння

$$x_{n+1} = \lambda A_{n+1} x_n + h_{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{51}$$

з умовою

$$x_0 = x_m, \tag{52}$$

де $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$, $A_{n+m} = A_n$ для кожного $n \geq 0$, λ – комплексний параметр, $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ – обмежена послідовність у просторі Банаха $\mathbf{B}$.

Теорема 20. (Теорема 6.1.). *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}(I - U(m,\lambda))$ точка стійкості праворуч для рівняння (51). Тоді:*

а) крайова задача (51), (52) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, h_n \in \mathbf{B}$ задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} U^k(m,\lambda)\Phi(m,i,\lambda)h_i}{n} = 0; \tag{53}$$

б) за виконання умови (53) розв'язки крайової задачі (51), (52) мають вигляд:

$$x_n = U(n,\lambda)U_0(m,\lambda)c + U(n,\lambda)G(n,\lambda)[h_n], \tag{54}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$*,* $G(n,\lambda)$ *– узагальнений оператор Гріна крайової задачі (51), (52), який визначається рівністю*

$$G(n,\lambda)[h_n] = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\mu)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(m,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i-$$

$$-U_0(\lambda)\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i+\sum_{i=0}^{n}\Phi(n,i,\lambda)h_i.$$

Тут

$$\Phi(m,n,\lambda) = \lambda^{m-n}A_{m+1}A_m...A_{n+1}, \quad m>n$$

– еволюційний оператор задачі (51); $\Phi(m,m,\lambda) = I$, де I – тотожний оператор, $U(m,\lambda) = \Phi(m,0,\lambda)$.

У підрозділі 6.2 вивчається рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, n\in\mathbb{Z}, \tag{55}$$

де $A_n : \mathbf{B}\to\mathbf{B}$ – множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені та діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе. Припускається, що

$$A = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathcal{L}(\mathbf{B})), h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbf{B}),$$

тобто

$$|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}||A_n|| < +\infty, |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}||h_n|| < +\infty.$$

Встановлено необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків рівняння (55) за умови, коли відповідне однорідне рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n, \tag{56}$$

є експоненціально-дихотомічним на півосях. Наступна теорема дає умови розв'язності рівняння (55).

Теорема 21. (Теорема 6.2.). *Нехай однорідне рівняння (56) є експоненціально-дихотомічним на півосях* $\mathbb{Z}_+$ *та* $\mathbb{Z}_-$ *з проекторами* P *та* Q *відповідно й оператор* $D = P-(E-Q)$ *– узагальнено-оборотний. Тоді для того, щоб існували, обмежені на всій осі, розв'язки рівняння (55), необхідно і достатньо, щоб виконувалась наступна умова*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0. \tag{57}$$

Якщо умова (57) виконується, то обмежені розв'язки мають наступний вигляд :

$$x_n(c) = U(n)PP_{N(D)}c + (G[h])(n), \tag{58}$$

де

$$G[h](n) = U(n)Z(n),$$

$$Z(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} PU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad +PD^{-}[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \;\; n \geq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{n-1} QU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{-1}(E-Q)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad +(E-Q)D^{-}[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \;\; n \leq 0, \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на $\mathbb{Z}$ розв'язки з наступними властивостями:

$$(G[h])(0+0) - (G[h])(0-0) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0,$$

$$(LG[h])(n) = h_n, n \in \mathbb{Z},$$

де

$$(Lx)(n) := x_{n+1} - A_n x_n : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \to l_\infty(\mathbb{Z}, X),$$

$H(n+1) = P_{N(D^*)}QU^{-1}(n+1) = P_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(n+1)$, D^- *– узагальнено - обернений оператор до оператора D, $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ – проектори, що проектують $\mathbf{B}$ на ядра $N(D)$ та $N(D^*)$ операторів D та D^* відповідно.*

У підрозділі 6.3 досліджуються умови біфуркації розв'язків рівняння (55).

Розглядається збурене різницеве рівняння вигляду

$$x_{n+1} = A_n x_n + \varepsilon B_n x_n + h_n, \;\; n \in \mathbb{Z}, \tag{59}$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ – послідовність обмежених операторів, що мають обмежені обернені та діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе; $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ – обмежена послідовність векторів з $\mathbf{B}$. $|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| < +\infty, |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|h_n\| < +\infty$; B_n – послідовність обмежених операторів, що задовольняє такі ж умови, як і послідовність A_n; $\varepsilon << 1$ – достатньо малий параметр.

Умова існування, обмеженого на всій осі, розв'язку рівняння (59) може бути отримана з допомогою оператора

$$B_0 := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)B_k U(k)PP_{N(D)}.$$

Теорема 22. (Теорема 6.6.). *Нехай однорідне рівняння (56) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ з проекторами P та Q відповідно та обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ має узагальнено-обернений оператор D^-. Припустимо, що виконуються умови:*

$$1) B_0 - \text{узагальнено-оборотний оператор}; \tag{60}$$

$$2) P_{N(B_0^*)} P_{N(D^*)} Q = 0. \tag{61}$$

Тоді, якщо рівняння (55) не має, обмежених на всій осі, розв'язків для послідовності $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, то рівняння (59) має принаймні один обмежений розв'язок у вигляді ряду:

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_n^{(i)}, \tag{62}$$

абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Сьомий розділ присвячений дослідженню матричних та операторних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної.

У підрозділі 7.1 досліджується система

$$\Lambda_1 x(t) := A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t),\ t \in T = [\alpha, \beta], \tag{63}$$

де $A(t),\ B(t) - (m \times n)$-матриці, $x(t), f(t)-$ шукана й задана вектор-функції відповідно, $\dot{z}(t) := dz(t)/dt$, rank $A(t) < \min\{m, n\}, \quad t \in T$. Ця система може бути дослідженою з допомогою узагальненої канонічної форми. Розглядається біфуркація розв'язків задачі (63):

$$A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t) + \varepsilon V_1(t)x(t), \tag{64}$$

$$x(\alpha) = b + \varepsilon l_1 x(.). \tag{65}$$

Основний результат отримується з допомогою матриці

$$B_0 = \mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(l_1 X_\nu(\cdot)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)} - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j (V_1(t)X_\nu(t))|_{t=\alpha}),$$

де $X_\nu(t)$ - розв'язок однорідної системи.

Теорема 23. (Теорема 7.2). *Крайова задача (64), (65) за виконання умови:*

$$\text{rank } B_0 = p,$$

має ρ-параметричну множину лінійно незалежних розв'язків у вигляді ряду:

$$x(t, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i [\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho], \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho,$$

коефіцієнти $\overline{x}_i(t,\overline{c}_i), \overline{c}_i, \overline{X}_i(t)$ *якого знаходяться ітеративно.*

У **підрозділі 7.2** досліджується нелінійна система вигляду

$$L_1x := A(t)\dot{x}(t,\varepsilon) + B(t)x(t,\varepsilon) = f(t) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), t \in T = [\alpha,\beta], \tag{66}$$

з крайовою умовою

$$Kx(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{67}$$

де $A(t), B(t)$ – $(m \times n)$ – матриці, $x(t,\varepsilon), f(t)$ – шукана та задана вектор-функції відповідно; K – лінійний $(p \times n)$ вектор-функціонал, α – p -вимірний вектор, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, $J(x(t,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійні вектор-функції, неперервні за сукупністю змінних (в околі породжуючого розв'язку), відповідного розміру. Заміною змінних $x(t) = Q(t)z(t)$ з відповідною матрицею $Q(t)$ ця система зводиться до узагальненої канонічної форми. Основні результати представлено у наступних теоремах.

Теорема 24. (Теорема 7.3.).(Необхідна умова). *Нехай крайова задача має розв'язок* $z(t,\varepsilon)$, *що перетворюється у породжуючий розв'язок* $z_0(t,c_r)$ *з фіксованим вектором сталих* $c_r = c_r^0$, *коли* $\varepsilon = 0$. *Тоді вектор сталих* c_r^0 *повинен задовольняти матричне рівняння для породжуючих векторних констант*

$$F(c_r) = \mathcal{P}_{B_d^*}(J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r),0) - KQ(\cdot)\overline{z}([Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r),\cdot,0)])(\cdot)) = 0. \tag{68}$$

Достатня умова отримується з допомогою матриці

$$B_0 = \mathcal{P}_{B_d^*}\{lQ(\cdot)X_r(\cdot) - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)X_r(\cdot)])(\cdot)\},$$

тут $\overline{z}$ – частинний розв'язок породжуючої лінійної неоднорідної системи, а матриця $l = J^1(v,\varepsilon)|_{v=Q(t)z_0(t,c_r),\varepsilon=0}$ – похідна Фреше у точці $v = Q(t)z_0(t,c_r), \varepsilon = 0$.

Теорема 25. (Теорема 7.4.).(Достатня умова). *Нехай матриця* B_0 *задовольняє умову:*

(i) $\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*} = 0$.

Тоді для довільного вектора $c = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, *що задовольняє матричне рівняння для породжуючих вектор-констант (68), існує принаймні один розв'язок крайової задачі (66), (67). Цей розв'язок можна знайти з допомогою ітераційного процесу*

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t),$$

$$c_r^k = B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\},$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r^k + \overline{y}_k(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = Q(t)z_0(t,c_r^0) + Q(t)y_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,...; y_0(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t,\varepsilon) = 0, c_r^0 = 0;$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Тут $\mathcal{P}_{B_0^*}$, $\mathcal{P}_{B_d^*}$ – проектори на ядро та коядро матриць B_0^* та B_d^* відповідно.

Останній підрозділ присвячений дослідженню рівняння типу "Соболєва - Гальпєрна" з чистим запізненням. Це рівняння наступного вигляду:

$$A_1\frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t-\tau) = 0, t \in (0;+\infty); \tag{69}$$

$$y(t) = \varphi(t), t \in [-\tau;0], \tag{70}$$

де $A_j : H \to H$ – лінійні необмежені оператори, які діють у оснащеному просторі Гільберта H, $V_j \subset H \subset V_j^{'}$, з областями визначення $D(A_j) = V_j$, щільно й неперервно вкладеними у простір Гільберта H. Простір $V = V_1 \cap V_2$ також припускається щільним у просторі V_j, а тому й у просторі H. Оператори A_j самоспряжені $A_j = A_j^* \in \mathcal{L}(V;V^{'})$, а оператор A_1 додатково припускається додатньо-визначеним $((A_1 v,v) \geq \alpha_1 ||v||_1^2, \alpha_1 > 0)$.

Теореми про представлення розв'язків операторно-диференціального рівняння (70) можуть бути отриманими з використанням введеного у роботі операторного запізнюючого експоненціала вигляду

$$e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = \begin{cases} \Theta, -\infty < t < -\tau, \\ I, \quad -\tau \leq t < 0, \\ I - \frac{1}{1!}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}tI, \quad 0 \leq t < \tau, \\ ... \\ I - \frac{1}{1!}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}tI + \frac{1}{2!}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2(t-\tau)^2 I + ... + \frac{(-1)^k}{k!}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(t-(k-1)\tau)^k I, \\ (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases}$$

де I – тотожний оператор. Теореми про представлення розв'язків мають вигляд.

Теорема 26. (Теорема 7.5.). *Нехай функція $\varphi(t)$ така, що $\varphi(t) = \varphi \in V_2$,*

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_2|^2 ||e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi||_{H(\lambda_1,\lambda_2)}^2 d\mu(\lambda_1,\lambda_2) < \infty.$$

Тоді розв'язок задачі (69), (70) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\varphi(t) \in C^1([-\tau;0];V)$. У цьому випадку справедливий наступний результат.

Теорема 27. (Теорема 7.6.). *Нехай* $\varphi(t) \in C^1([-\tau;0];V)$,

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda_2|^2||e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)}\mathcal{U}\frac{d}{ds}\varphi(s)ds||^2_{H(\lambda)}d\mu(\lambda)<\infty.$$

Тоді розв'язок задачі (69), (70) може бути представлений у вигляді

$$y(t)=\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)}\mathcal{U}\frac{d}{dt}\varphi(s)ds.$$

Тут $\widehat{y}(t,\lambda)=\widehat{y}(t,\lambda_1,\lambda_2)=(\mathcal{U}y(t))(\lambda)$, а $\mathcal{U}$ – ізометрія; $e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}$ – операторний запізнюючий експоненціал. У випадку, коли H – сепарабельний гільбертів простір, у дисертації розглядається задача керованості рівняння

$$A_1\frac{dy(t)}{dt}+A_2y(t-\tau)=Bu(t), \tag{71}$$

$$y(t)=\varphi, t\in[-\tau;0), \tag{72}$$

де оператор $B\in\mathcal{L}(H)$. Необхідно підібрати керування $u(t)$ таким чином, щоб розв'язок $y(t)$ у заданий момент часу t_1 приймав задане значення y^*. Керування $u(t)$ будемо шукати з простору $L_2([-\tau;0],H)$. Основними результатами є наступні теореми.

Теорема 28. (Теорема 7.7.). *Для керованості рівняння (71) з* $B=I$, $u(t)\in L_2([-\tau;0],H)$ *та* $\widehat{c}(s)\neq 0$ *на* $[-\tau;0]$, *необхідно та достатньо виконати умову*

$$\sum_{k=0}^{\infty}((y^*,e_k)-(\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi,e_k))^2<\infty.$$

За виконання умови керованості відповідне керування може бути знайденим у вигляді наступного ряду:

$$u(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\tau\hat{c}(s)}e_k.$$

Тут e_k – ортонормований базис в H, а $\widehat{c}(s)=\mathcal{U}c(s)$, де $c(s)$ многочлен, що визначається з допомогою оператора $e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t_1-\tau-s)}$.

Теорема 29. (Теорема 7.8.). *Для керованості рівняння (71) з компактним оператором* $B\neq 0$ *й* $\widehat{c}(s)\neq 0$ *на* $[-\tau;0]$, *необхідно та достатньо виконати умову*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}((y^*,e_k)-(\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi,e_k))^2<\infty.$$

Восьмий розділ присвячений дослідженню крайових задач для рівняння Ляпунова та Ріккаті. Розглядаєтья крайова задача для операторно-диференціального рівняння Ляпунова

$$\dot{Z}(t)=AZ(t)+Z(t)B+\Phi(t), t\in[a;b] \tag{73}$$

$$lZ(\cdot) = \alpha, \tag{74}$$

у просторах Гільберта H_1 та H_2. Оператори $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$, оператор-функція $\Phi(t) \in C([a;b];\mathcal{L}(H_1))$; $l : C^1([a;b];\mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ – лінійний та обмежений оператор, α – елемент простору H_2. З допомогою оператора

$$LM := lK_a^{\cdot}[M] : \mathcal{L}(H_1) \to H_2$$

та оператор-фукції $K_\tau^t[\Phi] := e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)}$ отримано наступний результат.

Теорема 30. (Теорема 8.1.). *Нехай задана крайова задача (73), (74). Тоді:*

a) сильні узагальнені розв'язки існують тоді і тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}[\alpha - l\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] = 0; \tag{75}$$

якщо $\alpha - l\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau \in R(L)$, то розв'язки будуть класичними;

в) за виконання умови (75) множина сильних узагальнених розв'язків буде мати вигляд:

$$Z(t) = K_a^t[\mathcal{P}_{N(L)}C] + (G[\Phi,\alpha])(t),\ C \in \mathcal{L}(H_1), \tag{76}$$

де $(G[\Phi,\alpha])(t)$ – узагальнений оператор Гріна вигляду

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = K_a^t[\overline{L}^+\alpha] - K_a^t[\overline{L}^+ l\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] + \int_a^t K_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau;$$

c) узагальнені квазірозв'язки існують тоді і тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}[\alpha - l\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] \neq 0; \tag{77}$$

d) за виконання умови (77) множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд:

$$Z(t) = K_a^t[\mathcal{P}_{N(L)}C] + (G[\Phi,\alpha])(t),\ C \in \mathcal{L}(H_1). \tag{78}$$

У **наступній частині** досліджується крайова задача для операторно - диференціального рівняння Ріккаті вигляду

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = A(t)Z(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B(t) + \Phi(t) + \varepsilon Z(t,\varepsilon)\Psi(t)Z(t,\varepsilon), \tag{79}$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha, \tag{80}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ – невідома оператор-функція $A(t), B(t), \Phi(t), \Psi(t) \in \mathcal{L}(H_1)$ для довільного $t \in [a;b]$, $l : C^1([a;b];\mathcal{L}(H_1)) \to H_2$. Шукаємо такий розв'язок $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (79), (80), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з розв'язків $Z_0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dZ_0(t)}{dt} = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{81}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \tag{82}$$

Теорема 31. (Теорема 8.3.). (Необхідна умова). *Нехай крайова задача (79), (80) має розв'язок $Z(t, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $Z_0(t, C_0)$ породжуючої крайової задачі (81), (82) з оператором $C = C_0$. Тоді оператор C_0 задовольняє наступне операторне рівняння для породжуючих операторів*

$$F(C) = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C] +$$

$$+(G[\Phi, \alpha])(\tau))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(\tau))]d\tau = 0. \tag{83}$$

ВИСНОВКИ

· У дисертаційній роботі запропоновано новий підхід до розв'язання крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь в просторах Фреше, Банаха та Гільберта у тому випадку, коли лінеаризована частина таких задач є нормально-розв'язним оператором. Крім того, у роботі запропоновано підхід до розв'язання крайових задач й у тому випадку, коли породжуючий оператор може мати незамкнену множину значень, тобто лінеаризована частина такої задачі не є нормально-розв'язним оператором.

· Для лінійних операторних рівнянь із не обов'язково стискаючим оператором узагальнено метод рядів Неймана.

· Доведено теореми про існування неявних функцій нелінійних операторних рівнянь.

· Досліджено періодичні крайові задачі для операторно-диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта та параметричної крайової задачі в просторі Банаха. Із допомогою введеного поняття відносного спектра оператора знайдено необхідні та достатні умови розв'язності параметричної крайової задачі.

· Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних та нелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха, Фреше та Гільберта з необмеженими операторними коефіцієнтами за умов експоненціальної дихотомії на півосях. Основні результати продемонстровано на прикладі задачі для операторно-диференціального рівняння Шредінгера.

· Отримано умови біфуркації розв'язків диференціально-алгебраїчної системи з прямокутною матрицею при похідній. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійно збурених диференціально-алгебраїчних систем.

· Отримано умови розв'язності та керованості рівняння Соболєва - Гальпєрна.

· Досліджено крайові задачі для операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова та Ріккаті у просторах Гільберта.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Покутний О. О.* Розв'язки лінійних різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій цілочисельній вісі / О. О. Покутний // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — No 1. — С. 182–188.

2. *Покутний О. О.* Розв'язки лінійних слабко збурених різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій вісі цілих чисел / О. О. Покутний // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — No 3. — С. 240–245.

3. *Покутный А. А.* Новые формулы для нахождения матриц псевдообратных по Муру-Пенроузу / А. А. Покутный // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — No 3 (102). — С. 110–114.

4. *Покутний О. О.* Апроксимація узагальнених обмежених розв'язків еволюційних рівнянь з необмеженим оператором / О. О. Покутний // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, 1. — С. 93-–99 (translated in Nonlinear Oscillations. — 2011. — **14** (1). — P. 95–101).

5. *Pokutnyi O. O.* Periodic problems of difference equations and Ergodic Theory / B. A. Biletskyi, A. A. Boichuk, O. O. Pokutnyi // Abstract and Applied Analysis. — 2011. — 12 pages. — http://dx.doi.org/10.1155/2011/928587.

6. *Покутный А. А.* Бифуркация двухточечной краевой задачи для уравнения Хилла / А. А. Покутный // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — No 4 (110). — С. 77–85.

7. *Покутный А. А.* Линейные нормально-разрешимые уравнения в пространстве Банаха / А. А. Покутный // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — No 1 (107). — С. 146-–153.

8. *Покутный А. А.* Ограниченные решения линейных и слабо нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченным оператором в линейной части / А. А. Покутный // Дифференциальные уравнения. — 2012. — **48**, 6. — С. 803-–813 (translated in Differential Equations. — 2012. — **48**(6). — P. 809–819).

9. *Pokutnyi O. O.* Dichotomy and boundary value problems on the whole line / A. A. Boichuk, O. O. Pokutnyi // Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12–15 June 2012, Athens Greece. — P. 81-–89.

10. *Pokutnyi O. O.* Dichotomy and boundary value problems on the whole line / A. A. Boichuk, O. O. Pokutnyi // Chaotic modeling and simulation (CMSIM). –– 2013. –– No 2. — P. 247—255.

11. *Pokutnyi O. O.* Exponential dichotomy and bounded solutions of the Schrodinger equation / O. O. Pokutnyi // Chaotic modeling and simulation (CMSIM). –– 2013. –– No 4. — P. 625—630.

12. *Pokutnyi O. A.* Exponential dichotomy and bounded solutions of the Schrodinger equation / O. A. Pokutnyi // Proceedings, 6th Chaotic Modeling and Simulation International Conference 11 - 14 June 2013 Istanbul, Turkey. — P. 451–457.

13. *Покутний О. О.* Періодичні розв'язки рівняння Хіла / О. О. Покутний // Нелінійні коливання. –– 2013. — **16**, 1. –– С. 111-–117 (translated in Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2014. — **197**(1). — P. 114–121).

14. *Покутний О. О.* Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі оператора в просторах Банаха та Фреше / О. О. Покутний // Доповіді Національної академії наук України. — 2013. — No 1. –– С. 19-–23.

15. *Покутный А. А.* Нормально-разрешимые операторные уравнения / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. А. Покутный // УМЖ. — 2013. — **65**, No 2. — С. 163-–175 (translated in Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — **65**(2). — P. 179–192).

16. *Покутный А. А.* Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом. / А. А. Бойчук, А. А. Покутный // УМЖ. — 2013. — **65**, 3. — С. 329-–339 (tranlated in Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — **65**(3). — P. 366–376).

17. *Покутный А. А.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / А. А. Бойчук, А. А. Покутный, В. Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — **53**, 6. — С. 958-–969 (translated in Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**(6). — P. 777–788).

18. *Покутний О. О.* Керованість еволюційного рівняння Соболєва-Гальрєрна з чистим запізненням / О. О. Покутний, В. В. Семенов // Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2013. — No 8. — С. 190–197.

19. *Покутний О. О.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором у лінійній частині / Є. В. Панасенко, О. О. Покутний // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, No 4. — С. 518-–526 (translated in Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2014. — **203**(3). — P. 366–374).

20. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта / О. О. Покутний // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. — 2013.— No 4. — С. 158–161.

21. *Покутный А. А.* Исследование разрешимости слабо - нелинейных дифференциально-алгебраических систем / А. А. Покутный, М. А. Перепелица // Вестник южно-уральского университета. Серия: математическое моделирование и программирование. — 2013. — 6, 4. — С. 55–62.

22. *Pokutnyi A. A.* Solutions of the Schrodinger equation in a Hilbert space / A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi // Boundary Value Problems. — 2014. — http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2014/1/4.

23. *Покутный А. А.* Экспоненциальная дихотомия и ограниченные решения дифференциальных уравнений в пространстве Фреше / А. А. Бойчук, А. А. Покутный // УМЖ. — 2014. — **66**, 12. — С. 1587–1597 (translated in Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **66**(12). — pp. 1781–1792).

24. *Покутний О. О.* Представлення розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера у просторі Гільберта / О. О. Покутний // Нелінійні коливання. — 2014. — **17**, 1. — С. 102–111 (translated in Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2015. — **205**(6). — P. 821–831).

25. *Покутный А.* Применение вероятностного анализа для оценки риска травмирования механизаторов агропромышленного комплекса / О. Гнатюк, А. Покутный, Т. Билько // MOTROL. — 2014. — 16, 3. — С. 144–152.

26. *Pokutnyi O. O.* Boundary Value Problem for an Operator-Differential Riccati Equation in the Hilbert Space on the Interval / O. O. Pokutnyi // Advances in pure mathematics. — 2015. — **5**. — P. 865–873. — http://dx.doi.org/10.4236/apm.2015.514081

27. *Покутний О. О.* Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта / О. А. Бойчук, О. О. Покутний // УМЖ. — 2015. — **67**, 9. — С. 1181–1188 (translated in Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — **67**(9). — P. 1327–1335).

28. *Покутний О. О.* Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта / Є. В. Панасенко, О. О. Покутний // Вісник Запорізького університету, математичне моделювання і прикладна механіка. — 2015. — No 3. — С. 213–220.

29. *Покутний О. О.* Крайові задачі для рівняння Ляпунова у банаховому просторі / Є. В. Панасенко, О. О. Покутний // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, 2. — С. 240–247.

АНОТАЦІЯ

Покутний О. О. Нормально - розв'язні крайові задачі для операторно - диференціальних рівнянь. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню умов розв'язності та побудові розв'язків крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь, лінеарізована частина яких є нормально-розв'язним оператором. Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків операторно-диференціальних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта за умови, що відповідне однорідне рівняння допускає експоненціальну дихотомію на півосях.

Для лінійних операторних рівнянь з обмеженим оператором у просторах Фреше та Банаха, коли відповідний оператор має незамкнену множину значень, введено поняття сильних узагальнених розв'язків та квазірозв'язків. Побудовано теорію розв'язності таких рівнянь та вказано загальний вигляд розв'язків.

Узагальнено метод рядів Неймана на операторні рівняння з необов'язково стискаючим оператором.

Отримано необхідні та достатні умови розв'язності нелінійних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Запропоновано алгоритми побудови наближених розв'язків. Отримані результати застосовано до дослідження операторно-диференціальних крайових задач, зокрема, досліджено періодичну та двоточкову крайову задачу для операторно-диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта. Знайдено необхідні та достатні умови існування узагальнених розв'язків даної задачі та представлено відповідні узагальнені розв'язки. Досліджено параметричну крайову задачу з періодичними операторними коефіцієнтами. Запропоновано означення відносного спектра оператора. Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних та нелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха з необмеженими операторними коефіцієнтами за умов експоненціальної дихотомії на півосях. Слід зауважити, що дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь в просторах Фреше має більш широкі застосування, ніж в просторах Банаха та Гільберта. Наприклад, виділено клас задач, розв'язки яких є розподілами в просторах узагальнених функцій або просторі Шварца функцій повільного росту. Отримані результати у просторах Фреше дозволяють знаходити фундаментальні розв'язки таких задач, де праві частини представлені у вигляді дельта-функцій.

Знайдено необхідні та достатні умови існування та біфуркації обмежених та узагальнених розв'язків крайових задач для лінійного та нелінійного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта. Відповідні розв'язки будуються з допомогою введеного у роботі узагальненого оператора Гріна.

Досліджено розв'язність нелінійної диференціально-алгебраїчної системи та умови біфуркації розв'язків у припущенні, що система зводиться до узагальненої центральної канонічної форми.

Досліджено операторне рівняння типу Соболєва-Гальпєрна та отримано умови керованості.

Ключові слова: крайові задачі, експоненціальна дихотомія, узагальнено - обернені та псевдообернені оператори, рівняння Шредінгера, метод Вішика-Люстерніка, метод Неймана.

АНОТАЦИЯ

Покутный А. А. Нормально - разрешимые краевые задачи для операторно - дифференциальных уравнений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию условий разрешимости и построению решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений, линеаризированная часть которых является нормально-разрешимым оператором. Получены необходимые и достаточные условия существования ограниченных на всей оси решений операторно-дифференциальных уравнений в пространствах Фреше, Банаха и Гильберта при условии, что соответствующее однородное уравнение допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях.

Для линейных операторных уравнений с ограниченным оператором в пространствах Фреше и Банаха, когда соответствующий оператор имеет незамкнутое множество значений, введены понятия сильных обобщенных решений и квазирешений. Построено теорию разрешимости таких уравнений и представлен общий вид решений. Для линейных нормально-разрешимых уравнений в банаховых пространствах построены проекторы на ядро и коядро оператора.

Обобщен метод рядов Неймана на операторные уравнения с нерастягивающими операторами.

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости нелинейных уравнений в пространствах Фреше, Банаха и Гильберта. Предложены итерационные алгоритмы построения приближенных решений. Полученные результаты применяются к исследованию операторно - дифференциальных краевых задач. Среди них отметим периодическую и двухточечную краевую задачу для операторно - дифференциального уравнения Хилла в пространстве Гильберта. Получены необходимые и достаточные условия существования обобщенных решений данной задачи и представлены соответствующие обобщенные решения. Предложено определение относительного спектра оператора. Исследована параметрическая краевая задача с периодическими операторными коэффициентами. Следует отметить, что исследование краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в пространствах Фреше покрывает более широкий класс задач, чем в пространствах Банаха или Гильберта. Например, выделено класс задач, решения которых представляют собой распределения в пространстве обобщенных функций или пространстве Шварца функций медленного роста. Полученные результаты в пространствах Фреше позволяют находить фундаментальные решения таких задач, где правые части могут представлять собой дельта-функции.

Получены необходимые и достаточные условия существования ограниченных и обобщенных решений краевых задач для линейного и нелинейного операторно - дифференциального уравнения Шредингера в пространстве Гильберта и найдены условия бифуркации решений соответствующего уравнения. Решения строятся при помощи введенного в работе обобщенного оператора Грина.

С помощью обобщенной центральной канонической формы исследована разрешимость нелинейной дифференциально - алгебраической системы и найдены условия бифуркации решений.

Введен операторный запаздывающий экспоненциал при помощи которого исследовано операторное уравнения типа Соболева-Гальперна и получены условия управляемости.

Ключевые слова: экспоненциальная дихотомия, обобщенно-обратные и псевдообратные по Муру-Пенроузу операторы, уравнение Шредингера, метод Вишика-Люстерника, метод Неймана.

SUMMARY

Pokutnyi O. O. Normally-resolvable boundary value problems for operator-differential equations. - Manuscript.

Doctor of Sciences thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is dedicated to the investigation of solvability conditions of boundary value problems for the operator-differential equations. For operator-differential boundary value problems linearized part of which is a normally resolvable operator a theory of solvability has been constructed. The necessary and sufficient conditions of the existence of bounded on the entire real axis solutions of the operator-differential equations in the Frechet, Banach and Hilbert spaces are obtained under assumption that the corresponding homogeneous equation admits an exponential dichotomy on the semi-axes. The criteria of solvability of operator-differential boundary value problems in the Frechet, Banach and Hilbert spaces are obtained in the thesis. For linear operator equations with a bounded operator in Frechet and Banach spaces, when the corresponding operator has a nonclosed set of values, notions of strong generalised solutions and quasisolutions are proposed. The theory of solvability and the corresponding solutions of such equations have been constructed in the thesis. For linear normally resolvable equations in Banach spaces projectors onto kernel and cokernel of operator have been constructed.

Neymann series method is generalised on the case of equations with nonexpansive operator.

Necessary and sufficient conditions of the solvability of weakly nonlinear equations in the Frechet, Banach and Hilbert spaces have been obtained. Iterative processes of constructing of solutions are proposed. It should be noted investigations of periodic and two point boundary value problems for the operator-differential Hill and Schrödinger equations in the Hilbert space.

Key words: boundary value problems, exponential dichotomy, generalized invertible and pseudoinvertble operators, Schrödinger equation, Vishik-Lyusternik method, Neymann method.

Підп. до др. 25.01.2017 р. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Умов. друк. арк. 2,44. Фіз. др. арк. 2,60. Тираж 110 прим. Зам. № 19
Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.