Національна Академія наук України

Інститут математики

ПОКУТНИЙ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСІЙОВИЧ

УДК 517.9

На правах рукопису

НОРМАЛЬНО-РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант
Бойчук Олександр Андрійович,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Z}^n$) – n-вимірний евклідів простір (з цілочисельними координатами);

J – відрізок на дійсній прямій (скінченний або нескінченний);

$BC(J, \mathcal{H})$ – банахів простір неперервних та обмежених на J вектор-функцій зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$;

$l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ – банахів простір обмежених послідовностей зі значеннями у просторі Банаха $\mathbf{B}$;

$\mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ – банахів простір лінійних обмежених операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ у простір Банаха $\mathbf{B_2}$;

$SGI(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$ – простір лінійних сильно узагальнено-оборотних операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ в простір Банаха $\mathbf{B_2}$;

$GI(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$ – простір лінійних узагальнено-оборотних операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ в простір Банаха $\mathbf{B_2}$;

$PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ – простір лінійних псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, що діють з простору Гільберта $\mathcal{H}_1$ у простір Гільберта $\mathcal{H}_2$;

$L_2([a; b]; \mathcal{H})$ – гільбертів простір інтегровних із квадратом на відрізку $[a; b]$ функцій зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$;

l_p – банахів простір послідовностей, сумовних з p-степенем;

c – банахів простір збіжних послідовностей;

c_0 – банахів простір збіжних до нуля послідовностей;

m або l_∞ – банахів простір обмежених послідовностей;

$R(L)$ – множина значень оператора L;

$N(L)$ – ядро оператора L;

$(G[\cdot])(t)$ – узагальнений оператор Гріна;

$L^-_{X,Y}$ – сильний (X, Y)-узагальнено-обернений;

$\overline{L}^+$ – сильний псевдообернений до оператора L;

$P_Y(\mathcal{P}_Y)$ – проектор (ортопроектор) на підпростір Y простору Банаха (Гільберта);

$U_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} U^k}{n}$ – оператор усереднення;

σ_{NS} – відносний спектр оператора;

$V \subset H \subset V^*$ – оснащена трійка просторів Гільберта;

$e_{\tau}^{A_1,A_2,t}$ – операторний запізнюючий експоненціал;

$AP(\mathbb{R},\mathbf{B})$ - простір майже періодичних функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$;

$WAP(\mathbb{R},\mathbf{B})$ - простір слабко майже періодичних функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$.

ВСТУП

Актуальність теми. Потреби сучасної науки призводять до необхідності розвитку теорії крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь. Такі задачі моделюють багато природних, фізичних, технічних, економічних, соціальних процесів. Розробка конструктивних методів аналізу лінійних та нелінійних крайових задач для широкого класу диференціальних, інтегральних, функціонально-диференціальних, інтегро-диференціальних систем, систем і рівнянь із запізненням та імпульсом займає одне з центральних місць в якісній теорії диференціальних рівнянь. Спочатку досліджувалися задачі про існування періодичних розв'язків таких рівнянь. Вони вивчалися М.Боголюбовим, Ю. Митропольським, А. Самойленком, І. Малкіним, Є. Грєбєніковим, Ю.Рябовим, А.Андроновим,А.Віттом,С.Хайкіним, В. Якубовичем, В. Старжинським. Системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і періодичні крайові задачі для них вивчалися А. Мишкісом, А. Самойленком, М. Перестюком, А. Халанаєм, Д. Векслером та іншими. Періодичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь із запізненням досліджувалися А. Мишкісом, А. Самойленком, С. Шимановим, Ю. Митропольським, Д. Мартинюком, В. Рубаніком, Л. Ельсгольцем, С. Норкіним, Дж. Хейлом. Класична теорія крайових задач почала свій розвиток задовго до появи методів функціонального аналізу. Постановка таких задач у загальному операторному вигляді стала можливою з використанням функціонального аналізу, який все частіше почав застосовуватися в якості апарату для дослідження загальних крайових задач для різних класів операторних рівнянь. Тут слід відзначити роботи Й. Мавіна, С. Швабіка, М. Тврди, О. Вейводи, Д. Векслера. Теорія крайових задач для операторних рівнянь знайшла своє застосування для інтегро-диференціальних рівнянь з відхилен им аргументом. Розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь вивчалась Ю. Ландо, проекційно ітеративні методи побудови розв'язків крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь розроблені А. Лучкою та його учнями; методи, які засновані на застосуванні функціонального аналізу - А. Антоневичем, Я. Радино. Вище зазначені крайові задачі, як правило, вивчалися у регулярному випадку, тобто коли операторне рівняння $Lz = f$ цих крайових задач має розв'язки при будь-якій правій частині, тобто оператор L вихідної задачі має обернений L^{-1}. Такі крайові задачі досліджувалися М. Азбєлєвим, Л. Рахматуліною, В. Максимовим у фредгольмовому випадку. В цих роботах зазначалося, що нефредгольмові крайові задачі ненульового індексу є набагато складнішими й потребують окремого дослідження. Загальна теорія таких задач у нетеровому випадку була розроблена О. Бойчуком, В. Журавльовим, А. Самойленком. Застосовуючи апарат узагальнено-обернених матриць та операторів, було доведено загальні теореми про розв'язність та представлення розв'язків критичних крайових задач (коли порушується єдиність розв'язку) для різних класів лінійних і нелінійних рівнянь та узагальнено простори, в яких розглядалися ці крайові задачі. О.Бойчуком та його учнями розроблено конструктивні методи аналізу крайових задач у відповідних просторах для автономних та неавтономних систем звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням, диференціальних рівнянь з імпульсною дією у загальному нетеровому випадку, коли кількість крайових умов m не співпадає з порядком n диференціальної системи. Такі та більш загальні задачі належать згідно класифікації С. Крейна до типу нормально-розв'язних задач, коли породжуючий оператор має замкнену множину значень. Питання розв'язності операторних рівнянь у випадку нетерових крайових задач розглядалися у роботах Ф. Аткінсона, О. Бойчука, В. Журавльова, Дж. Іллса, С. Нікольського. Для розв'язання таких типів рівнянь застосовується теорія псевдообернених матриць та операторів, якій присвячено роботи Е. Мура, Р. Пенроуза, М. Нашеда, Г. Вотруби, К. Рао, А. Албєрта, О. Бойчука, І. Сергієнка, В. Королюка, А. Турбіна, С. Кемпбелла, Е. Дойча, А. Бен-Ізраеля, Т. Гревілля та інших математиків. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь у банахових просторах досліджувалася у роботах Ю. Далецького, С. Крейна та М. Крейна, А. Самойленко, Ю. Теплінського, Р. Петришина, А. Баскакова. Дослідження диференціально-операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах пов'язано з розвитком теорії напівгруп операторів. Відзначимо фундаментальні результати Е. Хілле, К. Іосіди, В. Феллера, Т. Като, Р. Філіпса, І. Міядери, М. Крейна, М. Горбачука, М. Хазана, С. Крейна, Дж. Голдстейна, А. Пазі, А. Ягі, С. Якубова, К. Енгеля, Р. Нагеля, де ця теорія також застосовувалася до дослідження операторно-диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами. Окремий інтерес представляють роботи, де досліджуються диференціальні рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами. В роботах Дж. Голдстейна, А. Пазі, Д. Хенрі, А. Баскакова, Ю. Сільченка та інших досліджувалася гладкість розв'язків операторно- диференціальних рівнянь у залежності від властивостей операторних коефіцієнтів та неоднорідної частини. Диференціальними рівняннями з операторами зсуву займалися Г. Ліф, С. Канторовіц, А. Баскаков, М. Городній, А. Чайковський. Досліджувалася апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами відповідними різницевими схемами в роботах П. Соболевського, О. Самарського, В. Макарова, І. Гаврилюка, М. Городнього.

Одним із важливих питань у якісній теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання стосовно існування обмежених розв'язків. Важливим аспектом теорії крайових задач для такого класу рівнянь є дослідження питань розв'язності таких задач з умовами на нескінченності. Цей напрям бере свій початок від робіт А. Пуанкаре та А. М. Ляпунова. У середині XX сторіччя ця теорія була узагальнена на випадок операторно-диференціальних рівнянь М. Крейном, Х. Массерою, Х. Шеффером, В. Коппелем, Ф. Хартманом, Р. Саккером, Дж. Селлом, К. Палмером. Такі задачі досліджувалися у скінченновимірному випадку Я. Курцвейлем, А.Самойленком, В. Куліком, О. Бойчуком, Г. Пелюхом, В. Ткаченком, В. Журавльовим, І. Парасюком, а у нескінченновимірному випадку – Б. Левітаном, В. Жиковим, С. Якубовим, Е. Мухамадієвим, В. Слюсарчуком, А. Баскаковим, Д. Хенрі, Ю. Далецьким, М. Горбачуком, А. Руткасом. Умови існування та єдиності обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь досліджувалися В. Кімом, Д. Мартинюком, В. Слюсарчуком, І. Гайшуном, А. Самойленком, Ю. Теплінським, А. Руткасом, Ю. Томіловим, О. Бойчуком, І. Гайшуном у випадку обмежених операторних коефіцієнтів, а також А. Дороговцевим, А. Баскаковим, М. Городнім, А. Чайковським у випадку необмежених операторних коефіцієнтів.

Експоненціально-дихотомічні на всій осі системи утворюють клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так й необмежено зростати. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку розглядалися ще О. Перроном, А. Майзелем й далі у відомих роботах В. Коппеля, Р. Саккера, Дж. Селла, Ю. Митропольского, А. Самойленко, В. Кулика, а в нескінченновимірних просторах Банаха — в монографіях М. Крейна, Ю. Далецького, Х. Массери та Х. Шеффера, Ф. Хартмана, І. Чуєшова, В. Мельникова. У статтях К. Палмера умова експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи була послаблена з заміною на умову експоненціальної дихотомії на півосях й вперше була доведена нетеровість відповідного оператора при розв'язанні задачі про обмежені на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у роботах А.Самойленко, О.Бойчука, де з використанням узагальнено-обернених операторів й псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць досліджувалася задача про існування та біфуркацію обмежених на всій осі розв'язків при лінійних та нелінійних збуреннях. Поняття експоненціальної дихотомії для еволюційних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, систематично вивчалося у монографії Д. Хенрі. У роботах Х. Родрігеса, Дж. Філхо доведений аналог альтернативи Фредгольма (за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння). Дослідженню фредгольмовості оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами присвячено статті А. Баскакова, Ю. Латушкіна, Ю. Томілова. О.Станжицьким досліджено експоненціальну дихотомію стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм, а В. Слюсарчуком, Е. Мухамадієвим – експоненціальну дихотомію розв'язків дискретних систем. Зазначені крайові задачі, як правило розглядалися у випадку, коли лінеарізована частина таких операторів є нетеровою або фредгольмовою. Тому, дослідження операторно-диференціальних крайових задач, лінеарізована частина яких є нормально-розв'язним оператором представляє науковий інтерес та є актуальним. Саме цим питанням й присвячена робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно загального плану досліджень відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України в рамках держбюджетних тем "Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь"(номер державної реєстрації №0111U002035), "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь"(номер державної реєстрації №0116U003121) та проекту НДР "Розробка методів розв'язування крайових задач для операторно-диференціальних систем, які моделюють фізико-технічні та біологічні задачі"(номер державної реєстрації 0115U003791).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка методів дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь в просторах Фреше, Банаха та Гільберта, лінійна частина яких є нормально-розв'язним оператором у резонансному (критичному) випадках, коли порушується єдиність розв'язку.

Об'єкт дослідження. Крайові задачі для операторних та операторно-диференціальних рівнянь, лінійні, слабколінійні та нелінійні крайові задачі, сильні псевдообернені та узагальнено-обернені оператори, узагальнені оператори Гріна для представлення розв'язків, ітераційні процедури для побудови розв'язків нелінійних крайових задач.

Предмет дослідження. Операторно - диференціальні рівняння у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Крайові задачі для операторно-дифренціальних рівнянь.

Методи дослідження. у дисертаційній роботі використовуються методи функціонального аналізу, теорії напівгруп операторів та спектрального аналізу, апарат узагальнено-обернених та псевдообернених матриць й операторів. При аналізі теорії біфуркацій використовуються розвинення методів Ляпунова-Пуанкаре, Ляпунова-Шмідта та Вішика-Люстерніка, асимптотичні методи розв'язку некоректних задач.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації вперше отримано такі наукові результати:

1) Для операторно-диференціальних крайових задач, лінеарізована частина яких є нормально-розв'язним оператором побудована теорія розв'язності та проектори на ядро та коядро;

2) Введено поняття сильного узагальнено-оберненого та псевдооберненого операторів в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Для лінійних операторних рівнянь з обмеженим оператором, що має необов'язково замкнену множину значень, введено поняття узагальнених розв'язків та узагальнених квазірозв'язків. Побудовано теорію розв'язності таких рівнянь та представлено їх множини розв'язків;

3) Для операторних рівнянь у просторах Банаха та Фреше з необов'язково стискуючим оператором узагальнено метод рядів Неймана;

4) Доведено теореми розв'язності для нелінійних операторних рівнянь;

5) Досліджено періодичну та двоточкову крайову задачу для операторно - диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта. Знайдено необхідні та достатні умови існування узагальнених розв'язків даної задачі та представле-

но відповідні узагальнені розв'язки. Досліджено умови біфуркацій розв'язків для операторно-диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта;

6) У просторі Банаха досліджено параметричну крайову задачу з періодичними операторними коефіцієнтами. Введено поняття відносного спектра оператора й за допомогою нього знайдено необхідні та достатні умови розв'язності даної задачі;

7) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних та нелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха, Фреше та Гільберта з необмеженими операторними коефіцієнтами за умов експоненціальної дихотомії на півосях та знайдено зв'язок між ними. Запропонований підхід продемонстровано на прикладі крайових задач для операторно-диференціального рівняння Шредінгера в просторі Гільберта;

8) З допомогою узагальненої центральної канонічної форми досліджено розв'язність диференціально-алгебраїчної системи та розвинено теорію біфуркацій. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійно збурених диференціально-алгебраїчних систем;

9) Досліджено операторне рівняння з запізненням типу Соболєва- Гальпєрна. Отримано умови керованості рівняння Соболєва- Гальпєрна;

10) Знайдено умову розв'язності крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ляпунова;

11) Отримано необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі для операторно- диференціального рівняння Ріккаті в просторі Гільберта.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, які отримані у роботі, можуть бути використані в якісній теорії крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь, теорії керування та стійкості у випадках, коли вихідне рівняння є нормально-розв'язним; при дослідженні різноманітних фізичних, економічних, біологічних процесів. Також ці результати можна використати у спеціальних курсах з диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дослідження та його основний напрямок визначено спільно з науковим консультантом - членом кореспондентом НАН України О.А.Бойчуком. Результати дисертаційної роботи є новими та отримані автором самостійно. У спільних роботах співавторам належить постановка задач та обговорення можливих шляхів їх розв'язання.

Апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації доповідались і обговорювались на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях, наукових семінарах. Зокрема результати дисертації доповідалися на:

- International Conference "Conference on Differential and Difference Equations and Applications (CDDEA-2010)"(Slovak Republic, 2010);

- XVI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2010)"(Yalta, 2010);

- XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2011)"(Skhidnytsya, 2011);

- 4th Chaotic Modelling and Simulation International Conference(Agios Nikolaos, Crete Greece, 2011);

- International Conference "Analysis and singularities"dedicated to the 75th anniversary of Vladimir Igorevich Arnold (Moscow, 2012);

- International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 2012);

- International Conference KROMSH-2012, The twenty third Crimea Autumn Mathematical School (Crimea, Laspi-Batiliman, 2012);

- 2nd International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery Sergeevich Melnik (Kyiv, 2012);

- Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin readings - XXIII"(Voronezh, 2012);

- International conference "Glushkov readings"on the occasion of the 90th anniversary of academician V.M.Glushkov (Kiev, 2013), Crimea International mathematical Conference (CIMC-2013) (Sudak, 2013);

- International mathematical conference "Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications"on the occasion of the 75th anniversary of academician A. M. Samoilenko (Sevastopol, 2013);

- XVI International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation"(Kiev, 2013);

- 2nd EUMLS Conference, Mathematics for Life Sciences (Crimea, 2013);

- Humboldt Kolleg “Education and science and their role in social and industrial progress of society” (Kyiv, 2014);

- міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2015);

- Third conference “Mathematics for life sciences” (Rivne, 2015);

- Київських семінарах з функціонального аналізу (керівник - чл. - кор. НАН України Горбачук М.Л.) (2011 р., 2013 р.);

- кафедрі математики КАУ Інституту математики НАН України (2016 р.);

- Президії НАН України (2016 р.);

- Бюро відділення математики Президії НАН України (2016 р.);

- семінарах відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник - академік НАН України, Самойленко А.М.) (2015 р., 2016 р.);

- засіданнях вченої ради Інституту математики НАН України (2015 р., 2016 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 29 працях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus, Thomson Reuters, zbMath та відповідають вимогам фахових наукових видань, 14 праць опубліковано без співавторів. Додатково результати дисертації відображені у 17 збірниках матеріалів і тез міжнародних конференцій та наукових шкіл.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 475 найменувань. Повний обсяг роботи складає 331 сторінку.

Автор висловлює подяку науковому консультанту члену-кореспонденту НАН України О.А.Бойчуку за постановку задач та обговорення отриманих результатів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Теорія лінійних обмежених операторних рівнянь займається питанням розв'язності операторного рівняння

$$Lx = y, \tag{1}$$

де L – лінійний обмежений оператор у різного типу топологічних векторних просторах. В такій постановці оператор L може бути нормально-розв'язним оператором, тобто таким, що має замкнену множину значень. Для розв'язання таких типів рівнянь широко застосовується теорія псевдообернених матриць та операторів, якій присвячено роботи [1, 5, 38, 73, 74, 84, 132, 172, 314, 326, 327, 345, 349, 390, 404, 409, 410, 426, 427, 445]. Для операторів з незамкненою множиною значень така теорія є важливою, але мало дослідженою. Саме тому у другому розділі у просторах Фреше, Банаха та Гільберта вводяться поняття сильного псевдооберненого та сильного узагальнено-оберненого операторів до лінійного неперервного у тому випадку, коли множина його значень не обов'язково замкнена. Ці означення застосовуються при встановленні умов розв'язності та представленні розв'язків операторних рівнянь типу (1) у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Слід зауважити, що отримані при цьому розв'язки у загальному випадку є узагальненими. Серед інших результатів доведено наступні твердження.

Теорема 2.1. *Нехай для оператора L, що діє у просторах Фреше існує (X,Y) узагальнена L - допустима пара (тобто ці підпростори є доповнювальними).*

a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y = 0; \tag{2}$$

якщо $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

2. Якщо умова (2) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1) буде мати вигляд

$$x = L^-_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in B_1;$$

b) 1. Узагальнені квазірозв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y \neq 0; \tag{3}$$

2. Якщо умова (3) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд

$$x = L^-_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in B_1,$$

де $L^-_{X,Y}$ – сильний (X,Y)-узагальнено-обернений до оператора L уведений у роботі [206], $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}$ – проектори на ядро оператора L та спряженого $\overline{L}^*$. Тут $B_1 = N(L) \oplus X$, $B_2 = \overline{R(L)} \oplus Y$. Зауважимо, що оператор L в загальному випадку не є нормально-розв'язним. Побудована в роботі конструкція оператора $\overline{L}$ дозволяє розширити оператор L таким чином, щоб розширений оператор $\overline{L}$ став нормально-розв'язним ($\overline{R(\overline{L})} = R(\overline{L})$) й застосовувати раніше відомі результати. За рахунок наявності скалярного добутку у просторах Гільберта цю теорему можна уточнити, відмовившись від умов доповнювальності відповідних підпросторів.

Наслідок. *а) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y = 0 \Longleftrightarrow (\varphi, y) = 0, \tag{4}$$

для всіх φ, що є розв'язками спряженого рівняння $\overline{L}^* \varphi = 0$; якщо ж $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

2. Якщо умова (4) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1) буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in H_1;$$

b) 1. Узагальнені псевдорозв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y \neq 0 \Longleftrightarrow (\varphi, y) \neq 0; \tag{5}$$

2. Якщо умова (5) виконується, то множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in H_1.$$

Оскільки в отриманих твердженнях фігурує проектор на ядро розглядуваного у рівнянні оператора, то природнім є питання стосовно його побудови. Саме тому, наступна частина цієї глави присвячена представленню проекторів на відповідні підпростори та конструктивній побудові розв'язків рівняння (1) з нормально-розв'язним оператором. Питання нормальної розв'язності операторних рівнянь розглядалося у роботах [17, 40, 96, 120, 184]. Для представлення розв'язків таких рівнянь використовуються оператори проектування на ядро та образ. При їх побудові у просторах Банаха використовуються біортогонально спряжені системи. Як правило розглядаються випадки, коли такі оператори є скінченновимірними. Побудова аналогічних результатів у тому випадку, коли відповідні оператори не є скінченновимірними вимагає додаткових вимог на простори. У роботі узагальнюються відповідні представлення операторів проектування на ядро та образ відповідного оператора на випадок нескінченновимірних просторів. Наведемо один з отриманих результатів для випадку сепарабельних просторів Банаха E_1 та F_1 (в яких розглядається рівняння (1)).

Наслідок. *Рівняння (1) є розв'язним для тих й лише тих $y \in F_1$, що задовольняють рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{Y_2}^{(n)} J_2 y = \overrightarrow{0}. \tag{6}$$

За виконання умови (6) розв'язки рівняння (1) будуть мати вигляд

$$x = \lim_{n\to\infty} J_1^{-1} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)} J_2 z + L^- y,$$

для довільного елемента $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1} \mathcal{L}^- J_2$ — узагальнено-обернений до оператора L; $J_1 : E_1 \to E_4 \subset l_\infty$, $J_2 : F_1 \to F_4 \subset l_\infty$ - пара ізометрій, $\mathcal{P}_{Y_2}^{(n)}, \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)}$ – проектори, які можуть бути знайденими у вигляді матриць.

У **наступній частині** цього розділу розглядається випадок, коли оператор L має вигляд $I - A$. Як відомо [9], теорія операторних рівнянь вигляду

$$(I - A)x = y, \tag{7}$$

є досить важливою у застосуваннях при розв'язанні різного класу інтегральних та диференціальних рівнянь. Найрозповсюдженішим методом при розв'язанні таких рівнянь є метод рядів Неймана. Він застосовується при дослідженні таких рівнянь зі стискуючим оператором A, який має у цьому випадку обернений. Для рівнянь з нестискуючими операторами така теорія важлива, але не розвинена. **Підрозділ 2.4** присвячений узагальненню методу рядів Неймана для рівнянь із не обов'язково стискуючим оператором A й у тому випадку, коли оператор $I - A$ не має оберненого. Тут $A : B \to B$ - лінійний обмежений оператор, B - простір Банаха з нормою $|| \cdot ||$ (або Фреше зі зліченним набором напівнорм $|| \cdot ||_n, n \in \mathbb{N}$) такий, що існує стала $c > 0 : ||A^n|| \le c, n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $|| \cdot ||_m$ існує напівнорма $|| \cdot ||_k$ така, що $||A^n x||_m \le c||x||_k$), $\overline{0} \in B$. Основні результати можна подати у вигляді наступних двох тверджень.

Теорема. *Нехай $R(I - A) = \overline{R(I - A)}$ й степені оператора A є рівномірно обмеженими. Тоді* *a)* $\mu = 1 \in \rho_{NS}(A)$ *(відносно регулярна точка);*

b) оператор $I - A + A_0$ *є оборотним, а оператор* $I - A$ *є узагальнено-оборотним та* $(I - A)^{-} = (I - A + A_0)^{-1} - A_0$*;*

c) рівняння (7) розв'язне для тих й тільки тих y*, які задовольняють умову*

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{8}$$

d) якщо умова (8) виконана, то множина розв'язків рівняння (7) буде мати вигляд

$$x = A_0 c + G[y], \forall c \in B, \tag{9}$$

де

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (A - A_0)^l\}^{k+1} y - A_0 y, \tag{10}$$

- узагальнений оператор Гріна, для будь-якого $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu(A)||}$*, за допомогою якого знаходиться частинний розв'язок неоднорідного рівняння.* Тут оператор $A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}$ є проектором на ядро оператора $I - A$.

Теорема 2.4. *Нехай у рівнянні (7) лінійний обмежений оператор* A*, що діє у рефлексивному просторі* B *Банаха або Фреше такий, що його степені рівномірно обмежені. Тоді:*

(a) Рівняння (7) має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{11}$$

якщо $y \in R(I - A)$*, то розв'язки рівняння (7) будуть класичними;*

(б) якщо умова (11) виконується, то множина розв'язків рівняння (7) може бути представлена у вигляді операторного ряду

$$x = A_0 c + \overline{G}[y],$$

де $\overline{G}[y]$ *– відповідне розширення (10) оператора Гріна на простір* $\overline{B}$*, що отримується поповненням простору* B *за певною нормою;*

(в) якщо умова (11) не виконується, то рівняння (7) має множину псевдорозв'язків, яку можна подати у вигляді

$$x = A_0 c + \overline{G}[y],$$

де $\overline{G}[y] = (\overline{I-A})^{-}y$ *- узагальнено-обернений оператор до розширеного на відповідний простір* $\overline{B}$ *оператора* $\overline{I-A}$ *(*$I - A \in SGI(B)$*).*

У наступній частині отримані вище теореми проілюстровано при дослідженні задач про існування неявних функцій. Задачі математичної фізики часто можуть бути зведеними до розв'язання нелінійних рівнянь, чи систем рівнянь виду

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = 0, \tag{12}$$

де $\mathcal{F}(x, \varepsilon)$ - нелінійний оператор, визначений і неперервний (достатньо гладкий, аналітичний) у околі $w = w(x_0, \varepsilon_0) \subset E_1 + E$ відомого розв'язку $x = x_0$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ зі значеннями в E_2; E_1, E_2, E - простори Фреше ($\mathcal{F} : w(x_0, \varepsilon_0) \subset E_1 \times E \to E_2$). Необхідно побудувати розв'язок $x = x(\varepsilon)$ рівняння (12) в околі w точки (x_0, ε_0). Якщо похідна Фреше $\mathcal{F}_x(x_0, \varepsilon_0)$ існує і є оборотним оператором, то в околі w, як випливає з класичної теореми про неявну функцію [185], існує єдиний неперервний (гладкий, аналітичний) розв'язок $x = x_0 + y(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Теорія розгалуження [154] розглядає питання про існування й кількість малих розв'язків $y(\varepsilon - \varepsilon_0)$, а також побудову їх асимптотики за малим параметром $\varepsilon - \varepsilon_0$ у тому випадку, коли оператор $B = -\mathcal{F}_x(x_0, \varepsilon_0)$ має нетривіальний підпростір нулів $N(B)$, тобто не виконуються припущення класичної теореми про неявну функцію. В околі $w(x_0, \varepsilon_0)$ може існувати декілька розв'язків чи сімей розв'язків, залежних від одного або декількох параметрів; (x_0, ε_0) називається тоді точкою розгалуження розв'язків рівняння (12). У подальшому будемо для зручності вважати, що $x_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$. Тоді (12) можна записати у вигляді

$$Qx = R(x, \varepsilon), R(0, 0) = 0, \tag{13}$$

за припущення на нелінійність : $R_x(0,0) = 0$ (похідна Фреше за першою змінною). Якщо $\varepsilon = \lambda$ - числовий параметр, і при всіх можливих значеннях λ: $R(0,\lambda) = 0$, то рівняння (13) називається задачею про точки біфуркації [185, 154]. Точками біфуркації є ті значення параметра λ, в околі яких існують нетривіальні розв'язки рівняння. Основи теорії розгалуження функціональних рівнянь було закладено на початку XX сторіччя у роботах видатних математиків О. М. Ляпунова й Е. Шмідта. Дослідження О.М.Ляпунова були пов'язані з відомою задачею про рівноважні фігури, а Е. Шмідта - з загальною теорією лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь. Якщо $N(Q)$ скінченновимірне, то у такому випадку ця задача досліджувалась, наприклад у [63], з допомогою леми Шмідта для фредгольмових та нетерових операторів [314]. Метод, що застосовується при розв'язанні задач теорії розгалуження, дістав назву методу Ляпунова-Шмідта.

Інші теореми про неявні функції було отримано у роботах [408, 414], а також [185, 361, 135, 277]. Теорема про неявну функцію пов'язана також із добре відомою лемою Морса [185].

У **підрозділі 2.6** розглядається нелінійне рівняння вигляду

$$Qx = \varepsilon R(x,\varepsilon), \tag{14}$$

у просторах Фреше E_1 та E_2 з неперервною нелінійністю $R(x,\varepsilon)$, що задовольняє умову $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$ (похідна у сенсі Фреше за першою змінною існує в околі $(0,0)$). Задача полягає у відшуканні такого розв'язку $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з розв'язків породжуючої задачі $Qx = 0$, і визначений та неперервний у околі цього розв'язку. Необхідні та достатні умови існування розв'язків рівняння (14) отримано у наступному вигляді [52].

Теорема 2.5. (Необхідна умова). *Нехай рівняння (14) має неперервний розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з розв'язків породжуючої задачі $P_{N(Q)}c$ з елементом $c = c_0 \in E_1$. Тоді c_0 повинен задо-*

вольняти рівняння для породжуючих елементів

$$F(c) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c, 0) = 0. \tag{15}$$

Рівняння для породжуючих елементів є аналогом рівняння для породжуючих амплітуд у випадку періодичної крайової задачі [163]. У роботі показано, що достатня умова існування розв'язків рівняння (14) отримується з використанням оператора $B_0 = P_{N(Q^*)} l P_{N(Q)}$, де лінійний та обмежений оператор l визначений за наступним правилом $ly(\varepsilon) = R_x(P_{N(Q)} c_0, 0) y(\varepsilon)$.

Теорема 2.6. (Достатня умова). *Нехай виконуються умови:*

1. B_0 та Q - узагальнено-оборотні оператори;

2. $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in E_1$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (15), існує неперервний розв'язок рівняння (14). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)} c_0, 0) - l y_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k \to \infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = Q^- R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c_0, 0) = 0,$$

$$y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Наслідок. *Нехай $F(c)$ має похідну Фреше для кожного елемента $c = c_0$ простору E_1, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (15). Якщо похідна Фреше $F^{(1)}(c_0) = B_0$ є обмеженим оборотним оператором, то рівняння (14) має єдиний розв'язок для кожного $c_0 \in E_1$.*

Використовуючи запропоноване у другому розділі поняття сильного узагальнено-оберненого оператора можна довести більш загальні твердження.

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови:*

1. Q та B_0 – сильні (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) - узагальнено-оборотні оператори відповідно;

2. $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (15), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(\varepsilon)$ рівняння (14). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B^-_{0X_2,Y_2}P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = Q^-_{X_1,Y_1}R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$; $B^-_{0X_1,Y_1}, B^-_{X_2,Y_2}$ – сильні узагальнено-обернені оператори.

Якщо розглядати те саме рівняння, але визначене у просторах Гільберта $E_1 = H_1, E = H, E_2 = H_2$, то за рахунок наявності скалярного добутку результат спрощується до наступного:

Наслідок. *Нехай $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.*

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (15), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(h)$

рівняння (14). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -\overline{B}_0^+ P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon),\varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon),\varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon),\varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = \overline{Q}^+ R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon),\varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$*;* $\overline{B}_0^+, \overline{Q}^+$ *– сильні псевдообернені за Муром-Пенроузом оператори.*

Цей підрозділ роботи є ключовим. Основні результати дисертації, що стосуються нелінійних крайових задач, отримуються з використанням наведених вище тверджень.

У наступних частинах результати, що отримано у цьому розділі застосовуються до дослідження різного типу крайових операторно-диференціальних задач. Серед них можна відзначити крайові задачі для рівняння Хіла, як у скінченновимірному так і нескінченновимірному випадках, що відносяться до актуальних практичних задач небесної механіки. Виділимо тут роботи [166, 321, 322, 323, 365, 362, 370, 371, 386, 401, 402] в яких вивчається рівняння Хіла.

Третій розділ присвячений дослідженню операторного рівняння Хіла у просторі Гільберта. Зокрема, вивчається періодична крайова задача та умови біфуркації розв'язків. Відмінність отриманих результатів від вже відомих полягає у тому, що задача досліджується у критичному (резонансному) випадку у нескінченновимірному просторі, й оператор, який відповідає правій частині рівняння, не обов'язково має замкнену множину значень. При дослідженні використовується узагальнений метод рядів Неймана, запропонований вище.

Основним об'єктом є рівняння

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \tag{16}$$

у просторі Гільберта H з періодичною умовою

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w). \tag{17}$$

У рівнянні (16) T - додатний самосопряжений оператор.

Увівши до розгляду новий простір Гільберта $H_{T^{\frac{1}{2}}} = D(T^{\frac{1}{2}}) \oplus D(T^{\frac{1}{2}})$ зі скалярним добутком $(< u, v >, < u, v >)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}} = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) + (T^{\frac{1}{2}}v, T^{\frac{1}{2}}v)$ та вектор $\varphi = (x_1, x_2)^T$, задачу (16), (17) на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ перепишемо у вигляді

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + f(t), \tag{18}$$

$$\varphi(0) = \varphi(w) + \alpha, \tag{19}$$

де оператор A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

вектор-функція $f(t) = (rcos(tT^{\frac{1}{2}})z, rsin(tT^{\frac{1}{2}})z)^T$, а вектор $\alpha = (0, rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^T$. Основний результат наступний.

Теорема 3.1. *Нехай задана крайова задача (18), (19).*

1. Сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (18), (19) існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w) \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin\ (wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos\ (wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} = 0;$$

якщо додатково вектор $(rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z; rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^T$ належить множині значень $R(I - U(w))$, то розв'язки будуть класичними узагальненими.

За виконання цієї умови, розв'язки крайової задачі (18), (19) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f, \alpha])}(t),$$

для довільного $\overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$*, де* $\overline{(G[f,\alpha])}(t)$ *– розширення узагальненого оператора Гріна* $(G[f,\alpha])(t)$ *на поповнений простір* $\overline{H}_{T^{\frac{1}{2}}}$*;*

2. Певдорозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} \neq 0.$$

За виконання цієї умови, псевдорозв'язки крайової задачі (18), (19) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f,\alpha])}(t).$$

Тут $U(t)$ – еволюційний оператор, що має вигляд

$$U(t) := U(t,0) = \begin{pmatrix} cos(tT^{\frac{1}{2}}) & sin(tT^{\frac{1}{2}}) \\ -sin(tT^{\frac{1}{2}}) & cos(tT^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix},$$

$$U_0(w) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(w)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} U(kw)}{n} -$$

усереднений оператор до оператора $U(w)$ (ортопроектор).

Нехай елемент α такий, що крайова задача

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \quad \varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{20}$$

не розв'язна у класичному узагальненому сенсі, тобто $U_0(w)\alpha \neq 0$. Знайдемо умови, яким повинна задовольняти збурена операторна система

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \tag{21}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{22}$$

для того, щоб вона була розв'язною. Тут оператор $A_1(t)$ - лінійний обмежений при всіх $t \in [0; w]$. У **підрозділі 3.2** наведено достатні умови за яких ця операторна система є розв'язною у класичному узагальненому сенсі, тобто має місце біфуркація розв'язків.

Для отримання достатніх умов існування класичних узагальнених розв'язків операторної системи (21), (22) будемо застосовувати аналог методу Вішика - Люстерніка [70] й використовувати оператор

$$B_0 = U_0(w)\int_0^w A_1(t)U(t)dtU_0(w) : H_{T^{\frac{1}{2}}} \to H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 3.2. *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1) B_0 - псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор ($B_0 \in PI(H_{T^{\frac{1}{2}}})$);

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Якщо незбурена двоточкова операторна система (18), (19) не має класичних узагальнених розв'язків, то операторна система (21), (22) має ρ - параметричну множину розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi_0(t, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i[\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}};$$

абсолютно збіжного для достатньо малого параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Тут

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t)U_0(w)\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t, \overline{c}_0) = U(t)U_0(w)\overline{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t),$$

$$\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) = U(t)U_0(w)\overline{c}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(t), i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+U_0(w)\alpha,$$

$$\overline{c}_0 = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau,$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\mathcal{F}_0 = I - B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w),$$

$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{X}_{-1}(t) = U(t)U_0(w),$$

$$\overline{X}_i(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t), i = 0, 1, 2, ...$$

Наступний підрозділ присвячений дослідженню параметричної крайової задачі з періодичними операторними коефіцієнтами. Результати, що у ньому отримано узагальнюють відомі результати М. Г. Крейна [103, 137] на нерегулярний випадок та при дослідженні також застосовується узагальнений метод рядів Неймана.

У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглядається множина крайових задач:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda A(t)x(t) + f(t), \tag{23}$$

$$x(0) - x(w) = \overline{0}. \tag{24}$$

Тут $A(t)$ - періодична оператор-функція на $\mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathcal{L}(\mathbf{B})$, $f(t)$ - неперервна на $[0; w]$ періодична вектор-функція зі значеннями в $\mathbf{B}$ та періодом $w > 0$, $A(t + w) = A(t), f(t + w) = f(t)$. З допомогою введеного поняття відносної (узагальненої) резольвентної множини

$$\rho_{NS} = \{\lambda : \quad \lambda \in \mathbb{C}, \;\; R(I - U(w, \lambda)) \; = \; \overline{R(I - U(w, \lambda))} \; \}$$

доводиться наступний результат.

Теорема 3.3. *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}$ є точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w, \lambda)$ задачі (23) у рефлексивному просторі Банаха $\mathbf{B}$ (тобто степені оператора монодромії є рівномірно обмеженими). Тоді:*

а) крайова задача (23), (24) має періодичні розв'язки тоді й тільки тоді, коли вектор - функція $f(t)$ задовольняє умові

$$U_0(\lambda) \int_0^w U^{-1}(\tau, \lambda) f(\tau) d\tau = 0, \quad \text{де} \;\; U_0(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w, \lambda)}{n}; \tag{25}$$

б) за виконання умови (25) періодичні розв'язки крайової задачі (23), (24) мають наступний вигляд:

$$x(t, c) = U(t, \lambda) U_0(\lambda) c + \int_0^w G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \tag{26}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$,

$$G(t, \tau) = U(t, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l \}^{k+1} - U_0(\lambda)) U^{-1}(\tau, \lambda) +$$

$$+K(t,\tau)$$

- узагальнений оператор Гріна крайової задачі (23), (24) та

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq t, \\ U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda), & t > \tau. \end{cases}$$

Тут $U(t,\lambda)$ – еволюційний оператор однорідного операторного рівняння.

Четвертий розділ присвячений питанню існування обмежених розв'язків різного класу як лінійних, так й нелінійних диференціальних рівнянь та крайових задач у просторах Фреше та Банаха за умов експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння. Одним із центральних питань якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання про поведінку розв'язків на нескінченності. Експоненціально-дихотомічні на всій осі системи утворюють клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так й необмежено зростати. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку розглядалися ще О. Перроном, А. Майзелем [428],[161] й далі у відомих роботах В. Коппеля [339], Р. Саккера, Дж. Селла [452, 453, 455], Ю. Мітропольского, А. Самойленка, В. Кулика [177, 228], а у нескінченновимірних просторах Банаха — у монографіях М. Крейна [137], Ю. Далецкого и М. Крейна [103], Х. Массери та Х. Шеффера [169], Ф. Хартмана [258], І. Чуєшова [336].

У статтях К. Палмера [417], [418] умова експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи була послаблена з заміною на умову експоненціальної дихотомії на півосях й вперше була доведена нетеровість відповідного оператора при розв'язанні задачі про обмежені на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у роботах О. Бойчука, А. Самойленко, де з використанням узагальнено-обернених операторів й псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць досліджувалася задача про існування обмежених на всій осі розв'язків при лінійних та нелінійних збуреннях системи. Ці й інші результати знайшли своє відображення у монографії [314].

Поняття експоненціальної дихотомії для еволюційних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, систематично вивчалося у монографії Д.Хенрі [261]. У статті Х. Родрігеса, Дж. Філхо [449] доведений аналог альтернативи Фредгольма (за припущення, що відповідне однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічних на півосях). Дослідженню фредгольмовості оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами присвячено статті А. Баскакова [23], Ю. Латушкіна, Ю. Томілова [379].

У **підрозділі 4.1** вивчається лінійне операторно-диференціальне рівняння у просторі Банаха $\mathbf{B}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{27}$$

з сильно-неперервною операторнозначною функцією $A(t)$ та неперервною на всій осі вектор-функцією $f(t)$. Еволюційний оператор відповідного рівняння позначається $U(t)$. Сформульовано наступний результат [41].

Теорема. *Припустимо, що однорідне рівняння є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P та Q, відповідно. Якщо оператор*

$$D = P - (I - Q) : \mathbf{B} \to \mathbf{B}, \tag{28}$$

який діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе узагальнено-оборотний $D \in GI(\mathbf{B})$, то

(i) для того, щоб існували розв'язки рівняння (27), обмежені на всій осі, необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ задовольняла умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{29}$$

де

$$H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}QU^{-1}(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}(I - P)U^{-1}(t),$$

(ii) за виконання умови (29), розв'язки рівняння (27), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$x_0(t,c) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t), \; c \in \mathbf{B}, \tag{30}$$

де $(G[f])(t)$ *[41] — узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки,* D^- *— узагальнено обернений до оператора* D*, проектори* $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D$ *й* $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$*,* c *— довільний елемент простору Банаха* $\mathbf{B}$*.*

Надалі розглядається операторно-диференціальне рівняння у тому ж просторі Банаха, але вже з необмеженою оператор-функцією $A(t)$. Припускається, що при кожному $t \in J \subset \mathbb{R}$, оператор-функція $A(t)$ є замкненим оператором з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, що не залежить від t. У подальшому традиційно $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ означає простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з простору $\mathbf{B}$ у себе. Основним результатом є наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай* $\{T(t,s) |\; t \geq s \in \mathbb{R}\}$ *сильно неперервний еволюційний оператор, асоційований з однорідним рівнянням. Припустимо, що наступні умови виконано:*

1) $T(t,s)$ *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *й* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$ *відповідно;*

2) оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ *є узагальнено-оборотним (*$D \in GI(\mathbf{B})$*).*

Тоді:

1) для того, щоб існували слабкі обмежені на всій осі розв'язки рівняння (27) необхідно та достатнъо, щоб вектор - функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *задовольняла умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{31}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t)$*;*

2) за виконання умови (31), слабкі розв'язки рівняння (27) мають наступний вигляд:

$$x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0), \quad \forall c \in \mathbf{B} \tag{32}$$

де

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad +T(t,s)P_+(s)D^-[\int_s^\infty T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^s T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ t \geq s \\ \int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^s T(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad +T(t,s)(I - P_-(s))D^-[\int_s^\infty T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^s T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ s \geq t \end{cases}$$

- узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки :

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt;$$

$$\mathcal{L}(G[f])(t,0) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

та

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx}{dt} - A(t)x(t),$$

D^- - узагальнено - обернений до оператора D; $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D$, $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$ - проектори [97] на ядро та коядро оператора D.

Підрозділ 4.3 присвячений дослідженню нелінійного диференціального рівняння у просторі Банаха $\mathbf{B}$

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \tag{33}$$

з необмеженим оператором у лінійній частині. Шукається такий обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$ цього рівняння, який при $\varepsilon = 0$ перетваорюється в один із розв'язків породжуючого рівняння.

Ця проблема може бути розв'язана з допомогою побудованого у роботі операторного рівняння, яке будемо називати операторним рівнянням для породжуючих елементів

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c),t,0)dt = 0. \tag{34}$$

Теорема 4.3. (Необхідна умова). *Припустимо, що однорідне рівняння (27) є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$ *відповідно, та нелінійне рівняння (33) має обмежений розв'язок* $x(\cdot,\varepsilon)$, *який перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (27) з елементом* $c = c^0 \in \mathbf{B} : x(t,0) = x_0(t,c^0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Тоді цей елемент повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів (34).*

Достатня умова може бути отримана з допомогою оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : \mathbf{B} \to \mathbf{B},$$

який будується з використанням лінійної частини нелінійного збурення Z; тут $A_1(t) = Z^1(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0;\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше).

Теорема 4.4. (Достатня умова). *Припустимо, що однорідне рівняння (27) допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$ *відповідно, а неоднорідне рівняння має обмежені розв'язки. Нехай для оператора* B_0 *виконано наступні умови:*

1) оператор B_0 *є узагальнено - оборотним* ($B_0 \in GI(\mathbf{B})$)*;*

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді, для довільного елемента $c = c^0 \in \mathbf{B}$, *що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (34), існує принаймні один слабкий обмежений розв'язок рівняння (33). Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0(\tau,c^0) + y_k,\tau,\varepsilon)](t,0),$$

$$c_k = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Надалі вивчається неоднорідне рівняння (27) у локально-опуклому топологічному просторі E та просторі Фреше F. Запропоновано означення експоненціальної дихотомії у цих просторах. Основний результат сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 4.6. *Нехай однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P_+ та P_- відповідно, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F,$$

є сильним (X, Y) — узагальнено-оборотним.

Тоді:

1) для того, щоб існували узагальнені, обмежені на всій осі, розв'язки рівняння (27), необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{35}$$

де $H(t) = (I - \overline{D} D^-_{X,Y}) P_- U^{-1}(t)$, $D^-_{X,Y}$— сильний (X, Y) узагальнено-обернений до оператора D, $\overline{D}$ - розширення оператора D на поповнений простір $\overline{F}$;

2) за виконання умови (35), узагальнені розв'язки рівняння (27) мають вигляд:

$$x_0(t, c) = U(t) P_+ \mathcal{P}_{N(\overline{D})} c + \overline{(G[f])}(t), \quad \forall c \in \overline{F} \tag{36}$$

де

$$\overline{(G[f])}(t) = \begin{cases} \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+f(\tau)d\tau - \\ -\int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)P_+D^-_{X,Y}[\int_0^\infty U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ t \geq 0 \\ \\ \int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau - \\ -\int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_-)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)(I-P_-)D^-_{X,Y}[\int_0^\infty U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ t \leq 0 \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна, розширений на простір $\overline{F}$, що є поповненням вихідного простору.

У **підрозділі 4.4** вивчаються крайові задачі на всій осі. Розглядається наступна крайова задача у просторі Банаха $\mathbf{B}$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \ , \tag{37}$$

$$lx(\cdot) = \alpha \ , \tag{38}$$

з лінійним обмеженим оператором l. Нехай в подальшому оператор $B_0 = lU(\cdot)P\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B} \to \mathbf{Y}$, $U(t)$ - еволюційний оператор відповідного однорідного рівняння. Основним результатом є теорема.

Теорема 4.8. *Нехай оператор*

$$B_0 : \mathbf{B} \to \mathbf{Y},$$

що діє з простору $\mathbf{B}$ у простір Банаха $\mathbf{Y}$ узагальнено - оборотний ($B_0 \in GI(\mathbf{B}, \mathbf{Y})$). Тоді:

(i) для того, щоб розв'язки крайової задачі (37), (38) існували, необхідно та достатньо, щоб

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}(\alpha - l(G[f])(\cdot)) = 0; \tag{39}$$

(ii) за виконання умови (39) розв'язки крайової задачі (37), (38) мають вигляд

$$x(t,\overline{c}) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\overline{c} + U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}B_0^-(\alpha - l(G[f])(\cdot)) + (G[f])(t),$$

для довільного елемента $\overline{c} \in \mathbf{B}$, *де* $(G[f])(\cdot)$ *- узагальнений оператор Гріна, визначений у попередніх теоремах;* B_0^- *- узагальнено - обернений до* B_0, $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}$ *- проектор, який проектує* $\mathbf{B}$ *на ядро спряженого оператора* B_0^*.

Остання частина цього розділу присвячена апроксимації обмежених розв'язків на всій осі у просторі Банаха лінійних диференціальних рівнянь, які розглядалися вище.

П'ятий розділ присвячений дослідженню операторного рівняння Шредінгера. Зазначимо, що рівняння Шредінгера є об'єктом постійної пильної уваги багатьох вчених вже понад вісімдесят років. Зробити повний огляд результатів стосовно його досліджень неможливо. Наведемо деякі класичні та достатньо недавні роботи [2], [6], [7], [36], [37], [59], [68], [72], [79], [80], [81], [82], [83], [98], [102], [107], [108], [113], [116], [118], [126], [145], [156], [157], [158], [167], [168], [170], [171], [175], [180], [183], [186], [187], [193], [209], [213], [214], [217], [245], [246], [248], [252], [253], [255], [263], [268], [269], [270], [281], [324], [350], [364], [373], [374], [406], [413], [442], [443], [444].

У даній частині вивчаються необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для лінійного й нелінійного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта. На відміну від вказаних вище робіт рівняння вивчається у критичних (резонансних) випадках. Досліджуються умови існування обмежених розв'язків та біфуркації розв'язків крайових задач стаціонарного та нестаціонарного рівняння у лінійному та нелінійному випадках. Знайдено алгоритми побудови таких розв'язків. Перейдемо до відповідної постановки та основних результатів.

Розглядається рівняння Шредінгера

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), t \in J, \tag{40}$$

у просторі Гільберта $\mathcal{H}$, де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; тут $H_0 = H_0^*$ необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$; відображення $t \to V(t)$ — сильно неперервне, $U(t,s)$ - еволюційний оператор відповідного однорідного рівняння. У роботі отримано умови розв'язності та представлення слабких розв'язків рівняння (40).

Лема. *Нехай* $\{U(t,s),\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ *сильно неперервний еволюційний оператор асоційований з однорідним рівнянням. Припустимо, що виконано умови :*

1. Оператор $U(t,s)$ *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$*, відповідно.*

2. Оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ *має псевдообернений за Муром-Пенроузом* $(D \in PI(\mathcal{H}))$*.*

Тоді справедливі такі твердження.

1. Існують слабкі розв'язки рівняння (40) обмежені на всій осі тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *задовольняє умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{41}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)} P_-(0) U(0,t)$*.*

2. За виконання умови (41), слабкі розв'язки рівняння (40), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0) P_+(0) \mathcal{P}_{N(D)} c + (G[f])(t,0) \quad \forall c \in \mathcal{H}, \tag{42}$$

де

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t U(t,\tau) P_+(\tau) f(\tau) d\tau - \int_t^{+\infty} U(t,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + \\ \qquad + U(t,s) P_+(s) D^+ [\int_s^{\infty} U(s,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^{s} U(s,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau], \ t \geq s \\ \int_{-\infty}^{t} U(t,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau - \int_t^s U(t,\tau)(I - P_-(\tau)) f(\tau) d\tau + \\ \qquad + U(t,s)(I - P_-(s)) D^+ [\int_s^{\infty} U(s,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^{s} U(s,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau], \ s \geq t \end{cases}$$

узагальнений оператор Гріна задачі відшукання обмежених на всій осі розв'язків

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt.$$

Далі досліджується нелінійне рівняння Шредінгера на всій осі за аналогічною процедурою попереднього розділу.

У **підрозділі 5.3** досліджуються умови біфуркації узагальнених розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера на скінченному відрізку.

У просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядається наступна крайова задача

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon H_1(t)\varphi(t) + f(t), t \in J \tag{43}$$

$$l\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1\varphi(\cdot). \tag{44}$$

Тут, для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$ необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$, $H_1(t)$ – лінійний та обмежений для всіх $t \in J$ оператор, l, l_1 – лінійні та обмежені оператори, що діють з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_1$.

Шукається сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (43), (44) для тих правих частин $f(t)$ рівняння (43), для яких незбурена крайова задача ($\varepsilon = 0$) їх немає. Використовується при цьому оператор

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot,s) - l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)H_1(\tau)U(\tau,s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Теорема 5.2. *Припустимо, що виконується наступна умова:* $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$

Якщо незбурена операторна крайова задача не має сильних узагальнених розв'язків, то операторна крайова задача (43), (44) має ρ - параметричну множину сильних узагальнених розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi(t,s,\varepsilon,c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i[\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) + \overline{X}_i(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad \textit{для довільного} \;\; c_\rho \in \mathcal{H},$$

абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$; *тут*

$$\overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0+U(t,s)\overline{Q}^+\{\alpha+l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})+f(\cdot)]}(t,s),$$
$$\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i+U(t,s)\overline{Q}^+l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(t,s);\quad i\in\mathbb{N}.$$

Наступний підрозділ присвячений дослідженню у просторі Гільберта $\mathcal{H}$ нелінійного диференціального рівняння Шредінгера

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt}=-iH(t)\varphi(t,\varepsilon)+\varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+f(t),t\in J, \tag{45}$$

з операторною крайовою умовою вигляду

$$l\varphi(\cdot,\varepsilon)=\alpha+\varepsilon J(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{46}$$

де $J\subset\mathbb{R}$ - скінченний відрізок.

Основними результатами є наступні теореми.

Теорема 5.1. (Необхідна умова). *Нехай крайова задача (45), (46) має сильний узагальнений розв'язок $\varphi(t,s,\varepsilon)$, який при $\varepsilon=0$ перетворюється в один з породжуючих розв'язків $\varphi_0(t,s,c^0)$ з елементом $c=c^0$. Тоді елемент $c^0\in\mathcal{H}$ повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c)=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{J(\varphi_0(\cdot,s,c),0)-l\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)Z(\varphi_0(\tau,s,c),\tau,0)d\tau\}=0. \tag{47}$$

Достатня умова отримується з використанням оператора

$$B_0=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot,s)-l\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau,s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)},$$

де $A_1(t)=A_1(t,c^0)=Z^{(1)}_{\varphi}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0(t,s,c^0),\varepsilon=0}$, $l_1=J^{(1)}(\varphi_0,0)$ - похідні Фреше у точці $(\varphi=\varphi_0,\varepsilon=0)$.

Теорема 5.2. (Достатня умова). *Нехай для оператора B_0 виконується наступна умова:*

$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$, *що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (47), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (45), (46). Цей розв'язок може бути знайдений з використанням ітераційного процесу*

$$\overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^{+} J(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon \overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

$$c_k = \overline{B}_0^{+}\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}_k(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi_k(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau -$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l\overline{\psi}_k(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\},$$

$$\psi_{k+1}(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + \overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi_k(t,s,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \psi_0(t,s,\varepsilon) = 0,$$

$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t,s,\varepsilon).$$

У **наступному підрозділі** вивчається двоточкова крайова задача у просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH_0\varphi(t) + f(t),\ t \in [0;w] \tag{48}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha \in D, \tag{49}$$

де $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ - простір Гільберта й вектор-функція $f(t)$ інтегровна; розглядається необмежений оператор H_0, який має вигляд [214]:

$$H_0 = i\begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Тут T – додатний самоспряжений оператор у просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Доведено наступний результат.

Лема. *Нехай оператор* $I - U(w)$ *має замкнену множину значень* $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$.

1. Сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (48), (49) існують тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \tag{50}$$

2. За виконання умови (50), сильні узагальнені розв'язки (48), (49) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f, \alpha])(t), \tag{51}$$

де

$$(G[f,\alpha])(t) = U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu - 1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w) - U_0(w))^l\}^{k+1}(\alpha +$$

$$+\int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) - U(t)U_0(w)(\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) +$$

$$+\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

узагальнений оператор Гріна крайової задачі (48), (49) для $0 < \mu - 1 < 1/||R_\mu(U(w))||$.

Надалі цей результат уточнено та доведено загальну теорему розв'язності.

Теорема. *Для крайової задачі (48), (49) справедливі наступні твердження.*

1. a) Існують класичні або сильні узагальнені розв'язки (48), (49) тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \tag{52}$$

Якщо $(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \in R(I - U(w))$, *то розв'язки (48), (49) будуть класичними узагальненими.*

b) За виконання (52) розв'язки (48), (49) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f, \alpha]})(t),$$

де $(\overline{G[f, \alpha]})(t)$ *- розширення оператора* $(G[f, \alpha])(t)$*;*

2. a) Існують сильні псевдорозв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \neq 0. \tag{53}$$

b) За виконання (53) сильні псевдорозв'язки (48), (49) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f, \alpha]})(t),$$

де

$$(\overline{G[f, \alpha]})(t) = U(t)\overline{G}[g] + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= U(t)\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))}^{-1}g + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Надалі у просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$, означеному вище, розглядається крайова задача

$$\frac{d\varphi(t, \varepsilon)}{dt} = -iH_0\varphi(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + f(t), \tag{54}$$

$$\varphi(0, \varepsilon) - \varphi(w, \varepsilon) = \alpha. \tag{55}$$

Задача полягає у знаходженні розв'язку $\varphi(t, \varepsilon)$ крайової задачі (54), (55), який перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (48), (49) $\varphi_0(t, \overline{c})$ вигляду (51) при $\varepsilon = 0$.

Ця проблема може бути розв'язаною з допомогою операторного рівняння для порождуючих амплітуд

$$F(\overline{c}) = U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)Z(\varphi_0(\tau, \overline{c}), \tau, 0)d\tau = 0. \tag{56}$$

Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі.

Теорема 5.8. (Необхідна умова). *Нехай нелінійна крайова задача (54), (55) має сильний узагальнений розв'язок $\varphi(\cdot, \varepsilon)$, який перетворюється в один із сильних узагальнених розв'язків $\varphi_0(t, \overline{c})$ породжуючої задачі (48), (49) з елементом $\overline{c} = c^0$, $\varphi(t, 0) = \varphi_0(t, c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді цей елемент повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів (56).*

Введемо оператор $B_0 = \frac{dF(\overline{c})}{d\overline{c}}|_{\overline{c}=c_0} = U_0(w)\int_0^w U^{-1}(t)A_1(t)dt : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, де оператор $A_1(t) = Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}$ - похідна Фреше у точці $(\varphi_0, 0)$.

Теорема 5.9. (Достатня умова). *Нехай оператор B_0, побудований з допомогою лінійної частини нелінійного збурення Z задовольняє наступним умовам:*

1) B_0 має псевдообернений за Муром - Пенроузом ($B_0 \in PI(\mathcal{H})$);

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}_T$, що задовольняє операторне рівняння для порождуючих амплітуд (56), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок (54), (55).

Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою ітеративного процесу:

$$\overline{v}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau,c^0) + v_k,\tau,\varepsilon),\alpha](t),$$

$$c_k = -B_0^+ U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)\{A_1(\tau)\overline{v}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(v_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(v_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(\varphi_0(t,c^0) + v_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(\varphi_0(t,c^0),t,0) - A_1(t)v_k(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_x^1(0,t,0) = 0,$$

$$v_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t)U_0(w)c_k + \overline{v}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,c^0) + v_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \quad v_0(t,\varepsilon) = 0, \varphi(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t,\varepsilon).$$

У **наступному підрозділі** отримані вище результати проілюстровано та продемонстровано на прикладі крайової задачі

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = \varepsilon(1 - ||y(t)||^2)\dot{y}(t), \tag{57}$$

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w), \tag{58}$$

для рівняння Ван дер Поля у сепарабельному просторі Гільберта; тут T – необмежений оператор з компактним оберненим T^{-1}. Необхідна умова розв'язності цієї задачі полягає у наступному.

Теорема 5.10. (Необхідна умова розв'язності рівняння ван дер Поля). *Нехай крайова задача (57), (58) має розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється в один з розв'язків породжуючого рівняння з набором пар констант*

$(c_1^k, c_2^k), k \in \mathbb{N}$. *Тоді серед них може бути не більше скінченної кількості ненульових. Більше того, якщо* $(c_1^{k_i}, c_2^{k_i}) \neq (0,0), i = \overline{1,N}$, *то ці константи знаходяться на* N*-вимірному торі скінченновимірного підпростору констант*

$$(c_1^{k_i})^2 + (c_2^{k_i})^2 = (\frac{2}{\sqrt{2N-1}})^2, i = \overline{1,N}.$$

Наведено й інші приклади крайових задач з необмеженим операторним коефіцієнтом. Теорія псевдообернених операторів може бути застосована також при дослідженні операторних різницевих рівнянь та операторних різницевих крайових задач, які представляють окремий інтерес і досліджувалися багатьма авторами. Серед них можна зазначити роботи Городнього М. Ф., Чайковського А. В., Слюсарчука В. Ю., Чуєшова І. Д., Баскакова А. Г. та багатьох інших. Зважаючи на це, **шостий розділ** роботи присвячений дослідженню різницевих рівнянь у просторах Банаха. Шукаються умови існування як обмежених на всій цілочисельній осі, так і періодичних розв'язків таких рівнянь.

У **підрозділі 6.1** розглядається задача про існування періодичних розв'язків операторного різницевого рівняння

$$x_{n+1} = \lambda A_{n+1} x_n + h_{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{59}$$

з умовою періодичності

$$x_0 = x_m, \tag{60}$$

де $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$, $A_{n+m} = A_n$ для кожного $n \geq 0$, λ - комплексний параметр, $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ - обмежена послідовність у просторі Банаха $\mathbf{B}$.

Теорема 6.1. *Нехай* $\lambda \in \rho_{NS}(I - U(m,\lambda))$ *точка стійкості праворуч для рівняння (59). Тоді:*

а) крайова задача (59), (60) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, h_n \in \mathbf{B}$ *задовольняє умову*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} U^k(m,\lambda)\Phi(m,i,\lambda)h_i}{n} = 0; \tag{61}$$

б) за виконання умови (61), розв'язки крайової задачі (59), (60) мають вигляд:

$$x_n = U(n,\lambda)U_0(m,\lambda)c + U(n,\lambda)G(n,\lambda)[h_n], \tag{62}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$, $G(n,\lambda)$ - узагальнений оператор Гріна крайової задачі (59), (60), який визначається рівністю

$$G(n,\lambda)[h_n] = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\mu)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(m,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i -$$

$$-U_0(\lambda)\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i + \sum_{i=0}^{n}\Phi(n,i,\lambda)h_i.$$

Тут

$$\Phi(m,n,\lambda) = \lambda^{m-n}A_{m+1}A_m...A_{n+1}, \quad m > n$$

- еволюційний оператор задачі (59); $\Phi(m,m,\lambda) = I$, де I - тотожний оператор, $U(m,\lambda) = \Phi(m,0,\lambda)$.

У **підрозділі 6.2** вивчається рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{63}$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ - множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені та діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе. Припускається, що

$$A = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{L}(\mathbf{B})), h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B}),$$

тобто

$$|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}||A_n|| < +\infty, |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}||h_n|| < +\infty.$$

Встановлено необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків рівняння (63) за умови, коли відповідне однорідне рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n, \tag{64}$$

є експоненціально-дихотомічним на півосях. Наступна теорема дає умови розв'язності рівняння (63).

Теорема 6.2. *Нехай однорідне рівняння (63) є експоненціально - дихотомічним на півосях* $\mathbb{Z}_+$ *та* $\mathbb{Z}_-$ *з проекторами* P *та* Q *відповідно й оператор* $D = P - (E - Q)$ *- узагальнено-оборотний. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисельній осі розв'язки рівняння (63) необхідно і достатньо, щоб виконувалась наступна умова*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0. \tag{65}$$

Якщо умова (65) виконується, то обмежені розв'язки мають наступний вигляд :

$$x_n(c) = U(n)PP_{N(D)}c + (G[h])(n), \tag{66}$$

де

$$G[h](n) = U(n)Z(n),$$

$$Z(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} PU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + PD^-[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \; n \geq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{n-1} QU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{-1}(E-Q)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + (E-Q)D^-[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \; n \leq 0, \end{cases}$$

- узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на $\mathbb{Z}$ *розв'язки з наступними властивостями:*

$$(G[h])(0+0) - (G[h])(0-0) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0,$$

$$(LG[h])(n) = h_n, n \in \mathbb{Z},$$

де

$$(Lx)(n) := x_{n+1} - A_n x_n : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \to l_\infty(\mathbb{Z}, X),$$

$H(n+1) = P_{N(D^*)}QU^{-1}(n+1) = P_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(n+1)$, D^- *- узагальнено - обернений оператор до оператора* D, $P_{N(D)}$ *та* $P_{N(D^*)}$ *- проектори, що проектують* $\mathbf{B}$ *на ядра* $N(D)$ *та* $N(D^*)$ *операторів* D *та* D^* *відповідно.*

У **підрозділі 6.3** досліджуються умови біфуркації розв'язків рівняння (63).

Розглядається збурене різницеве рівняння вигляду

$$x_{n+1} = A_n x_n + \varepsilon B_n x_n + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{67}$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ – множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені, та діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе; $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ – послідовність векторів з $\mathbf{B}$. $|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| < +\infty$, $|||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|h_n\| < +\infty$; B_n – послідовність обмежених операторів, що задовольняє такі ж умови, як і послідовність A_n; ε - малий параметр.

Задача про відшукання розв'язку рівняння (67), обмеженого на всій цілочисельній осі, може бути розв'язана з допомогою оператора

$$B_0 := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1) B_k U(k) P P_{N(D)}.$$

Теорема 6.6. *Нехай однорідне рівняння (64) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ з проекторами P та Q відповідно й обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ має узагальнено-обернений оператор. Припустимо, що виконуються умови:*

1) B_0 - узагальнено-оборотний оператор ($B_0 \in GI(\mathbf{B})$);

2) $P_{N(B_0^*)} P_{N(D^*)} Q = 0$.

Тоді, якщо рівняння (63) не має, обмежених на всій цілочисельній осі, розв'язків для послідовності $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, то рівняння (67) має принаймні один обмежений розв'язок у вигляді ряду:

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_n^{(i)}, \tag{68}$$

абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Теорія псевдообернених матриць та операторів може бути також застосована при дослідженні диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній. Теорія таких задач почала будуватися приблизно 40 років тому й активно розвивається й досі.**Сьомий розділ** присвячений дослідженню матричних та операторних диференціальних рівнянь не розв'язаних відносно похідної.

У **підрозділі 7.1** вивчається система

$$\Lambda_1 x(t) := A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t),\ t \in T = [\alpha, \beta], \tag{69}$$

де $A(t),\ B(t) - (m \times n)$-матриці, $x(t), f(t)-$ шукана й задана вектор-функції відповідно, $\dot{z}(t) := dz(t)/dt$, $\mathrm{rank}\ A(t) < \min\{m, n\}, \quad \forall t \in T$. Ця система може бути дослідженою з допомогою узагальненої канонічної форми. Розглядається біфуркація розв'язків задачі (69):

$$A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t) + \varepsilon V_1(t)x(t), \tag{70}$$

$$x(\alpha) = b + \varepsilon l_1 x(.). \tag{71}$$

Основний результат отримується з допомогою матриці

$$B_0 = \mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(l_1 X_\nu(\cdot)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)} - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(\frac{d}{dt})^j(V_1(t)X_\nu(t))|_{t=\alpha}),$$

де $X_\nu(t)$ - розв'язок однорідної системи.

Теорема 7.2. *Крайова задача (70), (71) за виконання умови:*

$$\mathrm{rank}\ B_0 = p,$$

має ρ-параметричну множину лінійно незалежних розв'язків у вигляді ряду:

$$x(t, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i[\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho] \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho,$$

коефіцієнти $\overline{x}_i(t, \overline{c}_i), \overline{c}_i, \overline{X}_i(t)$ якого знаходяться ітераційно.

У **підрозділі 7.2** досліджується нелінійна система вигляду

$$L_1 x := A(t)\dot{x}(t, \varepsilon) + B(t)x(t, \varepsilon) = f(t) + \varepsilon Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), t \in T = [\alpha, \beta], \tag{72}$$

з крайовою умовою

$$Kx(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{73}$$

де $A(t), B(t)$ – $(m \times n)$ – матриці, $x(t,\varepsilon), f(t)$ – шукана та задана вектор-функції відповідно; K - лінійний $(p \times n)$ вектор-функціонал, α – p -вимірний вектор, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), J(x(t,\varepsilon),\varepsilon)$ - нелінійні вектор-функції, неперервні за сукупністю змінних, відповідного розміру. Заміною змінних $x(t) = Q(t)z(t)$ з відповідною матрицею $Q(t)$ ця система зводиться до канонічного вигляду й для неї отримано необхідні та достатні умови розв'язності.

Теорема 7.3. (Необхідна умова). *Нехай крайова задача має розв'язок $z(t,\varepsilon)$, що перетворюється у породжуючий розв'язок $z_0(t,c_r)$ з фіксованим вектором сталих $c_r = c_r^0$, коли $\varepsilon = 0$. Тоді вектор сталих c_r^0 повинен задовольняти матричне рівняння*

$$F(c_r) = \mathcal{P}_{B_d^*}(J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r),0) - KQ(\cdot)\overline{z}([Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r),\cdot,0)])(\cdot)) = 0. \quad (74)$$

для породжуючих векторних констант.

Достатня умова отримується з допомогою матриці

$$B_0 = \mathcal{P}_{B_d^*}\{lQ(\cdot)X_r(\cdot) - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)X_r(\cdot)])(\cdot)\},$$

тут $\overline{z}$ - частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи, матриця $l = J^1(v,\varepsilon)|_{v=Q(t)z_0(t,c_r),\varepsilon=0}$ - похідна Фреше у точці $v = Q(t)z_0(t,c_r), \varepsilon = 0$.

Теорема 7.4. (Достатня умова). *Нехай матриця B_0 задовольняє умову:*

(i) $\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*} = 0$.

Тоді, для довільного вектора $c = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє матричне рівняння для породжуючих векторних констант (74), існує принаймні один розв'язок крайової задачі (72), (73). Цей розв'язок можна знайти з допомогою ітераційного процесу

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t),$$

$$c_r^k = B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\},$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r^k + \overline{y}_k(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = Q(t)z_0(t,c_r^0) + Q(t)y_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,...; y_0(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t,\varepsilon) = 0, c_r^0 = 0;$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Останній підрозділ присвячений дослідженню рівняння з чистим запізненням (типу Соболєва-Гальпєрна). Вводиться поняття операторного експоненціалу з запізненням для представлення його розв'язків. Досліджується керованість таким рівнянням. Це рівняння з запізненням типу:

$$A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t-\tau) = 0, t \in (0;+\infty); \tag{75}$$

$$y(t) = \varphi(t), t \in [-\tau; 0], \tag{76}$$

де $A_j : H \to H$ - лінійні необмежені оператори, які діють у оснащеному просторі Гільберта H, $V_j \subset H \subset V_j^{'}$, з областями визначення $D(A_j) = V_j$, щільно й неперервно вкладеними у простір Гільберта H. Простір $V = V_1 \cap V_2$ також припускається щільним у просторі V_j, а тому й у просторі H. Оператори A_j самоспряжені $A_j = A_j^* \in \mathcal{L}(V;V^{'})$, а оператор A_1 додатково припускається додатньо-визначеним ($(A_1 v, v) \geq \alpha_1 ||v||_1^2, \alpha_1 > 0$).

За аналогією із запізнюючим експоненціалом, введеним в роботах Хусаінова Д.Я. теореми про представлення розв'язків операторно-диференціального рівняння (76) можуть бути отриманими з використанням введеного у роботі операторного запізнюючого експоненціалу вигляду

$$e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = \begin{cases} \Theta, -\infty < t < -\tau, \\ I, \quad -\tau \leq t < 0, \\ I - \frac{1}{1!}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}tI, \quad 0 \leq t < \tau, \\ ... \\ I - \frac{1}{1!}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}tI + \frac{1}{2!}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2(t-\tau)^2 I + ... + \frac{(-1)^k}{k!}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(t-(k-1)\tau)^k I, \\ (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases}$$

Тут I - тотожний оператор. Теореми про представлення розв'язків мають вигляд.

Теорема 7.5. *Нехай функція* $\varphi(t)$ *така, що* $\varphi(t) = \varphi \in V_2$,

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_2|^2 ||e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi||^2_{H(\lambda_1,\lambda_2)} d\mu(\lambda_1, \lambda_2) < \infty.$$

Тоді розв'язок задачі (75), (76) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\varphi(t) \in C^1([-\tau; 0]; V)$. У цьому випадку справедливий наступний результат.

Теорема 7.6. *Нехай* $\varphi(t) \in C^1([-\tau; 0]; V)$,

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_2|^2 ||e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)} \mathcal{U}\frac{d}{ds}\varphi(s)ds||^2_{H(\lambda)} d\mu(\lambda) < \infty.$$

Тоді розв'язок задачі (75), (76) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)} \mathcal{U}\frac{d}{dt}\varphi(s)ds.$$

Тут $\widehat{y}(t, \lambda) = \widehat{y}(t, \lambda_1, \lambda_2) = (\mathcal{U}y(t))(\lambda)$, а $\mathcal{U}$ - ізометрія; $e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}$ – операторний запізнюючий експоненціал. У випадку, коли H - сепарабельний гільбертів простір, у дисертації розглядається задача керованості рівняння

$$A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t - \tau) = Bu(t), \tag{77}$$

$$y(t) = \varphi, t \in [-\tau; 0), \tag{78}$$

де оператор $B \in \mathcal{L}(H)$. Необхідно підібрати керування $u(t)$ таким чином, щоб розв'язок $y(t)$ у заданий момент часу t_1 приймав задане значення y^*. Керування $u(t)$ будемо шукати з простору $L_2([-\tau; 0], H)$. Основними результатами є наступні теореми.

Теорема 7.7. *Для керованості рівняння (77) з* $B = I$, $u(t) \in L_2([-\tau; 0], H)$ *та* $\widehat{c}(s) \neq 0$ *на* $[-\tau; 0]$, *необхідно та достатньо виконання* *умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty}((y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi, e_k))^2 < \infty.$$

Тут e_k - ортонормований базис в H, а $\widehat{c}(s) = \mathcal{U}c(s)$, де $c(s)$ многочлен, що визначається з допомогою оператора $e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t_1-\tau-s)}$.

Теорема 7.8. *Для керованості рівняння (77) з компактним оператором* $B \neq 0$ *й* $\widehat{c}(s) \neq 0$ *на* $[-\tau; 0]$, *необхідно й достатньо виконання умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}((y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi, e_k))^2 < \infty.$$

Восьмий розділ присвячений дослідженню крайових задач для рівняння Ляпунова та Ріккаті. Розглядаєтья крайова задача для операторно-диференціального рівняння Ляпунова

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), t \in [a; b] \tag{79}$$

$$lZ(\cdot) = \alpha, \tag{80}$$

в просторах Гільберта H_1 та H_2. Оператори $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$, оператор-функція $\Phi(t) \in C([a; b]; \mathcal{L}(H_1))$; $l : C^1([a; b]; \mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ - лінійний та обмежений оператор, α - елемент простору H_2. З допомогою оператора

$$LM := lK_a^{\cdot}[M] : \mathcal{L}(H_1) \to H_2$$

та оператор-фукції $K_\tau^t[\Phi] := e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)}$ отримано наступний результат.

Теорема 8.1. *Нехай задана крайова задача (79), (80). Тоді:*

а) сильні узагальнені розв'язки існують тоді і тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}[\alpha - l\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] = 0; \tag{81}$$

якщо $\alpha - l\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau \in R(L)$, *то розв'язки будуть класичними;*

в) за виконання умови (81) множина сильних узагальнених розв'язків буде мати вигляд:

$$Z(t) = K_a^t[\mathcal{P}_{N(L)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \ C \in \mathcal{L}(H_1), \tag{82}$$

де $(G[\Phi, \alpha])(t)$ *- узагальнений оператор Гріна вигляду*

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = K_a^t[\overline{L}^+\alpha] - K_a^t[\overline{L}^+ l \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] + \int_a^t K_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau;$$

c) узагальнені квазірозв'язки існують тоді і тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}[\alpha - l \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] \neq 0; \tag{83}$$

d) за виконання умови (83) множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд:

$$Z(t) = K_a^t[\mathcal{P}_{N(L)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \ C \in \mathcal{L}(H_1). \tag{84}$$

У **наступній частині** досліджується крайова задача для операторно - диференціального рівняння Ріккаті вигляду

$$\dot{Z}(t, \varepsilon) = A(t)Z(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon)B(t) + \Phi(t) + \varepsilon Z(t, \varepsilon)\Psi(t)Z(t, \varepsilon), \tag{85}$$

$$lZ(\cdot, \varepsilon) = \alpha, \tag{86}$$

де $Z = Z(t, \varepsilon)$ невідома оператор-функція $A(t), B(t), \Phi(t), \Psi(t) \in \mathcal{L}(H_1)$ для довільного $t \in [a; b]$, $l : C^1([a; b]; \mathcal{L}(H_1)) \to H_2$. Шукаємо такий розв'язок $Z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (85), (86), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $Z_0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dZ_0(t)}{dt} = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{87}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \tag{88}$$

Теорема 8.3. (Необхідна умова). *Нехай крайова задача (85), (86) має розв'язок* $Z(t, \varepsilon)$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в один із розв'язків*

$Z_0(t, C_0)$ *породжуючої крайової задачі (8.25), (8.26) з оператором* $C = C_0$. *Тоді оператор* C_0 *задовольняє наступне операторне рівняння для породжуючих операторів*

$$F(C) = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]+$$

$$+(G[\Phi, \alpha])(\tau))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(\tau))]d\tau = 0. \qquad (89)$$

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Попередні відомості

Наведено відомі означення та твердження з функціонального аналізу, топології, теорії топологічних векторних просторів та операторів, які будуть використовуватися в подальшому. Матеріал, представлений в цій частині є довідковим. Теореми викладено без доведень, з посиланнями на джерела, де можна більш детально та глибоко ознайомитися з ними.

1.1. Топологічні та векторні простори

Означення 1.1. *[215]. Векторний (лінійний) простір E над полем Φ дійсних (комплексних) чисел – це множина з операціями додавання та множення на скаляри ($x, y \in E \to x + y \in E$; $x \in E, \lambda \in \Phi \to \lambda x \in E$) з наступними властивостями :*

1)$x + y = y + x$;

2)$x + (y + z) = (x + y) + z$;

3)$\exists \theta : x + \theta = \theta + x = x$;

4)$\forall x \ \ \exists - x : x + (-x) = \theta$;

5)$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

6)$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

7)$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

8)$1 \cdot x = x$.

Лінійні операції над елементами простору E розповсюджуються на його підмножини таким чином:

для довільних $x \in E$ та $A \subset E$

$$x + A = \{x + y : y \in A\};$$

для довільних $A \subset E$ та $B \subset E$

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\};$$

для довільних $\lambda \in \Phi$ та $A \subset E$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Аналогічним чином, для довільної множини $\mathcal{A}$ підмножин з E

$$x + \mathcal{A} = \{x + A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Множина $A + A$ взагалі відрізняється від множини $2A$, але завжди має місце включення $2A \subset A + A$.

Підмножина M з E називається *векторним підпростором* простору E, якщо $x + y \in M$ та $\lambda x \in M$ для всіх $x, y \in M$ та $\lambda \in \Phi$ (тобто, якщо $M + M \subset M$ та $\lambda M \subset M$ для всіх $\lambda \in \Phi$).

Означення 1.2. *Підмножина A векторного простору E називається опуклою, якщо $\lambda x + \mu y \in A$ для довільних $x, y \in A$ та всіх $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ таких, що $\lambda + \mu = 1$.*

Означення 1.3. *Підмножина A векторного простору E називається врівноваженою, якщо $\lambda x \in A$ для довільних $x \in A$ та всіх λ таких, що $|\lambda| \leq 1$.*

Означення 1.4. *Підмножина A векторного простору E називається абсолютно-опуклою, якщо вона одночасно опукла та врівноважена.*

Слід зауважити, що попереднє означення рівносильне наступній вимозі [215, с.15] : $\lambda x + \mu y \in A$ для всіх $x, y \in A$, та λ, μ таких, що $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Означення 1.5. *Підмножина A векторного простору E називається поглинаючою, якщо для кожного $x \in E$ існує таке $\lambda > 0$, що $x \in \mu A$, де μ: $|\mu| \geq \lambda$.*

Топологічний простір - це множина наділена структурою відкритих множин, яка дає можливість розглядати збіжність та неперервність.

Означення 1.6. *Топологічний простір - це множина S з виділенною родиною підмножин $\mathcal{T} \subset 2^S$, які називаються відкритими множинами й задовольняють наступним властивостям :*

(i) $\mathcal{T}$ замкнена відносно скінченних перетинів, тобто якщо $A, B \in \mathcal{T}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{T}$;

(ii) $\mathcal{T}$ замкнена відносно довільних об'єднань, тобто якщо $A_\alpha \in \mathcal{T}$ для всіх α з деякої множини індексів I, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) $\emptyset, S \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ називається топологією в S.

Означення 1.7. *Множина $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ називається базою топології $\mathcal{T}$, якщо довільна $T \subset \mathcal{T}$ має вигляд $T = \bigcup_\alpha B_\alpha$ для деякої сім'ї $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$.*

Нехай x – точка топологічного простору S. Множина N називається *околом* точки x, якщо існує відкрита множина U така, що $x \in U \subset N$.

Множину $\mathcal{N}$ підмножин топологічного простору S називають *базою околів* точки x, якщо кожна з $N \in \mathcal{N}$ є околом точки x й для довільного околу M точки x існує така множина $N \in \mathcal{N}$, що $N \subset M$. Поширеною є також назва *фундаментальна система околів.*

Означення 1.8. *Нехай $< S, \mathcal{T} >$ та $< T, \mathcal{U} >$ – два топологічних простори. Функція $f : S \to T$ називається неперервною, якщо $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ для кожної $A \in \mathcal{U}$, тобто прообраз довільної відкритої множини є відкритою множиною.*

Функція f називається *відкритою*, якщо $f[B]$ відкрита для кожної $B \in \mathcal{T}$. Якщо f відкрита й неперервна, вона називається *взаємно неперервною.* Взаємно неперервна бієкція називається *гомеоморфізмом.*

Гомеоморфізми – це ізоморфізми топологічних просторів.

Означення 1.9. *Нехай $< S, \mathcal{T} >$ – топологічний простір та нехай $A \subset S$. Індукована (відносна) топологія на A визначається сім'єю множин $\mathcal{T}_A = \{O \bigcap A | O \in \mathcal{T}\}$. Підмножина $B \subset A$ називається відкритою в індукованій топології, якщо $B \in \mathcal{T}_A$.*

Топологічний простір називається *віддільним* або *гаусдорфовим*, якщо довільні дві його різні точки мають неперетинні околи. Важливий клас топологічних просторів утворюють метричні простори. За базу топології в ньому можна обрати сім'ю його куль.

Нехай E – векторний простір над полем Φ дійсних або комплексних чисел. Кажуть, що топологія $\mathcal{T}$ в E узгоджується з алгебраїчною структурою, якщо алгебраїчні операції в E неперервні, тобто $x+y$ є неперервною функцією пари змінних x, y та λx – неперервна функція пари змінних λ, x. *Топологічний векторний простір* над Φ – це векторний простір над Φ, наділений топологією, що узгоджується з його алгебраїчною структурою.

У кожному топологічному векторному просторі існує базис врівноважених околів. У найбільш важливих топологічних векторних просторах існує також базис опуклих околів. Такі простори називають *локально-опуклими.*

Означення 1.10. *Невід'ємна (скінченна) дійснозначна функція* p, *визначена на* E, *називається напівнормою, якщо вона задовольняє властивостям:*

1) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ *(напівадитивність);*

2) $p(\lambda x) = |\lambda| x$*;*

для всіх $x, y \in E$ *та* $\lambda \in \Phi$.

Кожній абсолютно опуклій та поглинаючій множині M векторного простору E можна співставити функціонал

$$p_M(x) = \inf_{\alpha>0, \alpha^{-1}x \in M} \alpha,$$

який називається *функціоналом Мінковського,* причому він буде утворювати деяку напівнорму в E [121]. І навпаки, для довільної напівнорми p на E множини $\{x : p(x) < \alpha\}$ та $\{x : p(x) \leq \alpha\}$ для довільного $\alpha > 0$ абсолютно опуклі та поглинаючі. Виявляється, що ця двоїстість між напівнормами та абсолютно опуклими поглинаючими множинами дає можливість по-іншому визначити поняття локально-опкулого простору.

Теорема 1.1. *[215, с.30]. Нехай на векторному просторі* E *задана довільна сім'я напівнорм* Q. *Тоді в* E *існує найслабша, узгоджена з алгебраїчною структурою, топологія, в якій кожна напівнорма з* Q *неперервна. У цій топології* E *є локально опуклим простором з базисом замкнених околів, утвореним можливими множинами вигляду*

$$\{x : \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0, p_i \in Q).$$

Локально - опуклий простір E буде віддільним тоді й тільки тоді, коли система напівнорм Q, що задає його топологію задовольняє наступній *аксіомі віддільності*: для кожного $x \neq 0$ існує напівнорма $p \in Q$ така, що $p(x) \neq 0$ [121], [215, с.30]. У літературі часто локально-опуклим простором називають віддільний локально-опуклий простір.

Якщо p – норма на E, то простір E, топологія якого визначається цією нормою, буде нормованим, а тому й метричним. Наступна теорема дає характеризацію метричних локально-опуклих просторів.

Теорема 1.2. *[213, с.150]. Нехай E – віддільний локально-опуклий топологічний простір. Наступні умови рівносильні:*

а) E метризований;

б) нуль має зліченний базис околів;

в) топологія на E породжується деякою зліченною сім'єю напівнорм.

Повний метризований локально-опуклий простір називається *простором Фреше*. Повний нормований простір називається *простором Банаха (банаховим)*.

Нехай E – векторний простір над полем Φ й M – його векторний підпростір. Тоді відношення $x - y \in M$ є відношенням еквівалентності у E та множина E/M всіх класів еквівалентності $X, Y, ...$ може бути зробленою векторним простором над Φ, який називається *факторпростором* E за відношенням M (якщо $X, Y \in E/M$, то $X + Y \in E/M$ та $\lambda X \in E/M$ при $\lambda \neq 0$; залишається покласти $0 \cdot X = M$) [215, с.115]. Класом еквівалентності $k(x)$, якому належить елемент $x \in E$ є $x + M$ й k – лінійне відображення; воно називається *канонічним відображенням* E на E/M.

Якщо E – локально-опуклий простір й $\mathfrak{U}$ – базис абсолютно опуклих околів, то множина $k(U)(U \in \mathfrak{U})$ утворює базис околів топології в E/M, яка називається *фактортопологією*; E/M наділений цією топологією, є локально-опуклим простором. Так як $U \subset k^{-1}(k(U))$ для кожного $U \in \mathfrak{U}$, то k неперервне; при цьому фактортопологія – найсильніша з топологій в E/M, за якої k неперервне.

Наведемо властивості факторизованого локально-опуклого простору у вигляді теорем з [215].

Теорема 1.3. *[215, с.116]. Факторпростір E/M, наділений фактортопологією, віддільний тоді й тільки тоді, коли M – замкнений векторний підпростір простору E.*

Теорема 1.4. *[215, с.117]. Довільне лінійне відображення t локально опуклого простору E у локально опуклий простір F розкладається у композицію $t = u \circ k$, де u – взаємно однозначне лінійне відображення $E/t^{-1}(0)$ в F, k – канонічне відображення E на $E/t^{-1}(0)$; t – неперервне тоді й тільки тоді, коли неперервне u.*

У загальному випадку факторпростір повного простору по його замкненому векторному підпростору не обов'язково буде повним. Простір Фреше має у цьому відношенні перевагу. А саме: виконується наступне твердження.

Теорема 1.5. *[215, с.175]. Факторпростір простору Фреше за замкненим векторним підпростором є простором Фреше.*

Нехай E – локально-опуклий простір, M та N – векторні підпростори простору E, які перетинаються лише у нулі. *Прямою (алгебраїчною) сумою* просторів M та N називається множина всіх векторів $x_1+x_2,\ \ x_1 \in M, x_2 \in N$, якщо вони породжують весь простір E (це означає виконання умов $M + N = E, M \cap N = \emptyset$). Позначається: $E = M\dot{+}N$. Якщо, крім того, M та N є замкненими підпросторами (наділеними відповідною індукованою топологією), то кажуть про розклад у пряму (топологічну) суму замкнених підпросторів та пишуть $E = M \oplus N$. У цьому випадку підпростір M називають *топологічним прямим доповненням* підпростору N у E. Підпростір, для якого існує топологічне пряме доповнення, називається *топологічно доповнювальним.* На жаль пряма сума двох підпросторів може не бути підпростором (тобто може бути незамкненою). Далі ми наведемо твердження стосовно доповнювальності та розкладу у топологічні суми підпросторів вихідного простору.

Теорема 1.6. *[97, с.45,46]. Нехай B – банахів простір й B_1 та B_2 два його підпростори, які перетинаються лише у нулі. Для того, щоб пряма сума $B_1 \oplus B_2$ була підпростором, необхідно та достатньо, щоб існувала константа $k \geq 0$, така, що:*

$$||x_1 + x_2|| \geq k(||x_1|| + ||x_2||), \quad x_1 \in B_1, x_2 \in B_2.$$

Якщо $B = H$ – простір Гільберта, то довільний його підпростір має пряме доповнення, в якості якого можна обрати ортогональне доповнення до підпростору.

Теорема 1.7. *[9]. 1. Якщо B_1 – n-вимірний підпростір простору Банаха B, то для B_1 існує замкнене доповнення, яке може бути заданим з допомогою n лінійно незалежних функціоналів.*

2. Якщо B_2 – замкнений підпростір у просторі Банаха B, заданий скінченним набором з n лінійно незалежних функціоналів

$$B_2 = \{x : f_i(x) = 0, i = 1, ..., n\},$$

то для B_2 існує доповнення розмірності n.

Проблема доповнювальності банахових підпросторів пов'язана з відомою проблемою Банаха (див. наприклад оглядову статтю Попова М.М. в [208]).

Один з найперших прикладів недоповнювального підпростору був побудований Р.Філіпсом. Відомо [260, с.183], що простори c_0 (збіжних до нуля послідовностей) та l_∞ (обмежених послідовностей) є банаховими відносно норми $||\xi||_\infty := sup\{|\xi_k||k \in \mathbb{N}\}$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2, ...))$, причому c_0 – замкнений підпростір простору l_∞ корозмірності 1. Філіпсом було доведено, що підпростір c_0 в l_∞ недоповнювальний. Насправді справедлива така теорема.

Теорема 1.8. *(Лінденштраус, Цафрірі). ([260, с.185], [392]). Наступні властивості банахового простору E еквівалентні:*

(i) будь - який підпростір у E має топологічне пряме доповнення;

(ii) простір E топологічно ізоморфний деякому гільбертовому простору.

Для локально-опуклих просторів справедливі наступні теореми відносно розкладу простору у топологічні прямі суми підпросторів.

Теорема 1.9. *[215, с.141]. Нехай локально опуклий простір E є алгебраїчною прямою сумою власних векторних підпросторів M та N, p та q – проекції E на M та N, а h та k – канонічні відображення E на E/M та E/N. Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) E є топологічною сумою підпросторів M та N;

2) p – неперервне;

3) q – неперервне;

4) h – ізоморфізм N на E/M;

5) k – ізоморфізм M на E/N.

Теорема 1.10. *[215, с.143]. Векторний підпростір M локально-опуклого простору E є доповнювальним тоді й тільки тоді, коли існує неперервний лінійний проектор p простору E у себе такий, що $p(E) = M$ й $p^2 = p$.*

Наприкінці цієї частини не можна не відзначити, що простір Фреше має і у відношенні доповнювальності переваги над іншими локально-опуклими просторами. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1.11. *[215]. Якщо простір Фреше є алгебраїчною прямою сумою двох власних векторних підпросторів, то він є їх топологічною сумою.*

1.2. Узагальнено-обернені та псевдообернені оператори

У цій частині мова буде йти всюди тільки про лінійні перетворення та оператори.

Нехай V та W- векторні простори над довільним полем, $\mathcal{L}(V, W)$ - множина всіх лінійних перетворень, що діють з простору V у простір W. Для лінійного перетворення $A \in \mathcal{L}(V, W)$ через $R(A)$ й $N(A)$ позначатимемо відповідно образ та ядро A.

Означення 1.11. *[345]. Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Лінійне перетворення $B \in \mathcal{L}(W, V)$ називається напівоберненим для A, якщо $ABA = A$.*

Означення 1.12. *Нехай* $A \in \mathcal{L}(V, W)$*. Лінійне перетворення* $B \in \mathcal{L}(W, V)$ *називається рефлексивно напівоберненим для* A*, якщо* $ABA = A$ *й одночасно* $BAB = B$*.*

Означення 1.13. *Нехай* $A \in \mathcal{L}(V, W)$*,* $\mathcal{H}$ *- підпростір* V *такий, що* $V = \mathcal{H} \oplus N(A)$ *й нехай* $\mathcal{J}$ *підпростір* W *такий, що* $W = R(A) \oplus \mathcal{J}$ *. Тоді пара* $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ *називається* A*-допустимою парою.*

Наявність таких пар для будь-якого лінійного перетворення над векторними просторами випливає з того факту, що будь-який підпростір векторного простору має алгебраїчне доповнення [345].

Означення 1.14. *Нехай* $A \in \mathcal{L}(V, W)$ *й* $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ *-* A*-допустима пара. Тоді відображення*

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}} : W \to V,$$

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}} y = A^{-1}_{\mathcal{H}} y_1, \quad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(A), y_2 \in \mathcal{J}$$

називається $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ *- псевдооберненим до* A*.*

У цьому означенні відображення $A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to R(A)$ діє за наступним правилом $A_{\mathcal{H}} x = Ax, \;\; x \in \mathcal{H}$. Згідно теореми 12 [345] це відображення має лінійне обернене $A^{-1}_{\mathcal{H}}$.

Будь-яке псевдообернене відображення є також й рефлексивно напівоберненим. Для будь-якого лінійного відображення над векторними просторами існує псевдообернене.

Узагальнення цих результатів на випадок просторів з додатковою геометричною структурою не завжди можливо й потребує додаткових вимог.

Наприклад, у гільбертовому просторі для того, щоб множина значень лінійного оператора була підпростором, вона повинна бути замкненою. У такому випадку існує ортогональне доповнення до цього підпростору [213]. У банаховому просторі навіть умова замкненості підпростору виявляється не достатньою для існування топологічного доповнення до всього простору (про це йшла мова у попередній частині).

Оскільки замкненість множини значень є суттєвою умовою, то серед класу операторів, що діють з одного банахового простору в інший виділяють нормально-розв'язні. Існує декілька еквівалентних означень цього класу операторів [140], [251], [314, с.33].

Означення 1.15. *Щільно визначений оператор L, що діє з одного банахового простору B_1 в інший B_2 називається нормально розв'язним, якщо його множина значень замкнена $R(L) = \overline{R(L)}$.*

Надалі $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ позначатимемо простір лінійних неперервних операторів, що діють з одного простору Банаха в інший.

Для множини M у банаховому просторі $\mathbf{B}$ та множини N у його спряженому просторі $\mathbf{B}^*$ виділяють наступні поняття ортогональності [140]:

$$M^{\perp} = \{f \in \mathbf{B}^* :< x, f >= 0, \forall x \in M\};$$

$$^{\perp}N = \{x \in \mathbf{B} :< x, f >= 0, \forall f \in N\}.$$

Для рівнянь вигляду $Lx = y$ з нормально-розв'язним оператором існують необхідні й достатні умови розв'язності.

Справедлива наступна теорема [97], [132], [314, с.34]:

Теорема 1.12. *Для того, щоб замкнений щільно визначений оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, у якого $R(L) \neq B_2$, був нормально розв'язним, необхідно й достатнъо, щоб виконувалась одна з наступних умов:*

а) $^{\perp}N(L^*) = R(L)$;

б) рівняння $Lx = y$ розв'язне лише для тих $y \in B_2$, що задовольняють умову

$$\phi(y) = 0,$$

де ϕ - будь-який розв'язок однорідного спряженого рівняння

$$L^*\phi = 0.$$

Але ця теорема дає тільки умови розв'язності. Загальний розв'язок таких рівнянь можна визначити не завжди .

У випадку банахового простору оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ називається *узагальнено оборотним*, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ такий, що $LXL = L$ [97]. Зауважимо, що у випадку лінійних векторних просторів такий оператор мав назву напівоберненого. Оператор X називається узагальнено-оберненим до оператора L й позначається L^-. Зауважимо, що з множини узагальнено-оборотних до L операторів можна виділити такий Y, що буде виконуватися додаткова умова $YLY = Y$. Якщо оператор має узагальнено-обернений, тоді можна побудувати загальний розв'язок операторного рівняння $Lx = y$. При певних додаткових умовах нормально розв'язний оператор є узагальнено-оборотним. А саме, справедливий наступний критерій:

Теорема 1.13. *[97], [132], [314, с.39]. Для того щоб оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ був узагальнено оборотним, необхідно й достатньо, щоб:*

1. *L був нормально розв'язним оператором;*
2. *Підпростір $N(L)$ мав пряме доповнення в B_1;*
3. *Підпростір $R(L)$ мав пряме доповнення в B_2.*

Звичайно, що у гільбертовому просторі нормальна розв'язність еквівалентна узагальненій оборотності. Будь-який скінченновимірний оператор є узагальнено-оборотним (1 - 3 виконуються).

Якщо оператор $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта H_2, то з множини узагальнено-обернених операторів $L^- \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ можна обрати єдиний, що задовольняє властивостям:

$$1. LL^-L = L; \qquad 2. L^-LL^- = L^-;$$

$$3. (LL^-)^* = LL^-; \quad 4. (L^-L)^* = L^-L.$$

Такий оператор називають узагальнено-оберненим оператором за Муром-Пенроузом [426] й позначають L^+. Цей оператор має додаткові екстремальні властивості на відміну від звичайного узагальнено-оберненого [77], [97], [314], [445], [76]. Насправді, для існування L^+ достатньо виконання лише властивостей 1 та 3. Надалі будемо писати, що $L \in PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, якщо оператор L має псевдооберненний за Муром-Пенроузом оператор, $PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ - множина всіх таких операторів.

Серед нормально-розв'язних операторів виділяють декілька класів операторів, які представяють окремий інтерес [140].

Нехай $n = n(L) = dimN(L)$, $d = d(L) = dimN(L^*)$. Індекс оператора визначається, як $indL = n(L) - d(L)$ ([314], [140] тощо).

Згідно з класифікацією Крейна С.Г. [140] нормально розв'язний замкнений оператор, у якого $n(L)$ або $d(L)$ скінчене називається $n-$*нормальним* або $d-$*нормальним* оператором відповідно.

У випадку, коли обидва числа $n(L)$ та $d(L)$ є скінченими, оператор L називається *нетеровим*. Якщо ж додатково оператор L є оператором нульового індексу, то він називається *фредгольмовим*.

Слід зауважити, що в іноземній літературі останні два типи операторів часто не розрізняють і називають їх або фредгольмовими, або $F-$ операторами.

Для фредгольмових операторів справедлива відома лема Шмідта [63], та її розвинення - теорема Нікольського [184], про загальне представлення обмеженого фредгольмового оператора у вигляді суми неперервно - оборотного й скінченновимірного [314]. Узагальнення цього критерію на необмежені оператори та просте доведення теореми Нікольського можна знайти у роботах Рамма [446] (див. також бібліографію до статті).

Така характеризація Нікольського справедлива лише для фредгольмових операторів і не має місця для нетерових операторів.

Для нетерових операторів виконується характеризація Аткінсона [17] про те, що будь-який нетерів оператор може бути представлений у вигляді суми односторонньо оберненого й скінченновимірного.

Вказані вище теореми про представлення дають можливість отримати конструкцію узагальнено - оберненого до нетерового оператора з допомогою спеціальних скінченновимірних операторів, що додаються до вихідного нетерового [314].

Це оператори проектування на ядро та образ нетерового оператора. Теорія узагальнено-обернених операторів ефективно використовується при дослідженні рівнянь з оператором, що має вказані вище властивості.

1.3. ВИСНОВКИ

У даному розділі дисертації наведено короткий огляд літератури з теорії топологічних просторів, узагальнено-обернених та псевдообернених операторів. Сформульовано основні твердження та означення, які будуть використовуватися в наступних розділах.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ ОБМЕЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ, БАНАХА ТА ГІЛЬБЕРТА

Добре відомо [404], [426], що для будь-якої прямокутної матриці розміру $m \times n$ існує псевдообернена за Муром-Пенроузом. На жаль такого результату для лінійних відображень у нескінченновимірних, навіть, у просторах Гільберта отримати не вдається, за рахунок наявності більш складної геометрії. Як відомо, у просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор L має псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор L^+ тоді й тільки тоді, коли він є нормально-розв'язним. Таким чином умова замкненості множини значень L виділяє підклас нормально-розв'язних операторів, що мають псевдообернений. Для просторів Банаха та більш загальних топологічних просторів і цієї умови виявляється недостатньо, навіть для того, щоб існував узагальнено-обернений оператор L^-. Існування такого оператора забезпечує умова доповнювальності підпросторів $\overline{R(L)} = R(L)$ та $N(L)$ нормально-розв'язного оператора. Для операторів, що не мають замкненої множини значень такої завершеної теорії не розроблено. Саме цим питанням й присвячений перший підрозділ в якому розглядається питання стосовно визначення та побудови узагальнено-обернених операторів до лінійних обмежених, що діють в просторах Фреше, Банаха та Гільберта з не обов'язково замкненою множиною значень. Для того, щоб розв'язати перше питання, пропонується розширити вихідний простір й оператор L на нього таким чином, щоб розширений оператор $\overline{L}$ був нормально-розв'язним. Згідно запропонованих означень, для рівняння $Lx = y$, виділяються три типи розв'язків, які гарантують їх існування за додаткових умов на праві частини.

2.1. Сильний узагальнено-обернений та псевдообернений оператори

Нехай $L : H_1 \to H_2$ - довільний лінійний обмежений оператор, що діє з простору Гільберта H_1 в простір Гільберта H_2. При цьому не припускається замкненість множини його значень

Покажемо, яким чином можна розширити поняття псевдоберненого за Муром-Пенроузом оператора на довільні лінійні обмежені оператори.

Сильний псевдобернений у просторах Гільберта

Розкладемо простори Гільберта H_1 та H_2 в ортогональні суми

$$H_1 = N(L) \oplus X, H_2 = \overline{R(L)} \oplus Y. \tag{2.1}$$

Тут $X = N(L)^{\perp}$, $Y = \overline{R(L)}^{\perp}$ відповідно ортогональні доповнення до нуль-простору та замикання оператора L. У силу представлення (2.1), існують оператори ортогонального проектування $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_X$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}$, $\mathcal{P}_Y$ на відповідні підпростори. Позначимо через H фактор простір простору H_1 за ядром $N(L)$ ($H = H_1/N(L)$). Тоді, як відомо [211, 215], існує неперервна бієкція, тобто взаємно-однозначне неперервне відображення $p : X \to H$ та проекція $j : H_1 \to H$. Трійка (H_1, H, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)}H$. Визначимо тепер оператор

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_{\overline{R(L)}} L j^{-1} p : X \to R(L) \subset \overline{R(L)}.$$

Цей оператор визначається з допомогою наступного ланцюга просторів та операторів

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & H & \xrightarrow{j^{-1}} & H_1 \\ H_1 & \xrightarrow{L} & H_2 & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}} & R(L) \subset \overline{R(L)} \end{array}$$

Запропоновану конструкцію зручно подати у вигляді наступної комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc}
H_1 & \xrightarrow{L} & H_2 \\
{\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I} \\
H & & H_2 \\
{\scriptstyle p^{-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}_{\overline{R(L)}}} \\
X & \xrightarrow{\mathcal{L}} & R(L) \subset \overline{R(L)} \\
\bigcap & & \bigcap \\
\overline{H}_1 & \xrightarrow{\overline{L}} & H_2
\end{array}$$

Легко переконатися в тому, що так визначений оператор є лінійним, неперервним та ін'єктивним (тобто, якщо $x_1 \neq x_2$, то $\mathcal{L}x_1 \neq \mathcal{L}x_2$). Тепер скориставшись процесом поповнення [160] за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||\mathcal{L}x||_F$, де $F = \overline{R(L)}$, отримаємо новий простір $\overline{X}$ й розширений оператор $\overline{\mathcal{L}}$, який буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$:

$$\overline{\mathcal{L}} : \overline{X} \to \overline{R(L)}, \quad X \subset \overline{X}.$$

Розглянемо розширений оператор $\overline{L} = \overline{\mathcal{L}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H}_1 \to H_2$,

$$\overline{H}_1 = N(L) \oplus \overline{X}, \quad H_2 = R(\overline{L}) \oplus Y.$$

Зрозуміло, що якщо $x \in H_1$, оператор $\overline{L}$ нормально-розв'язний та $\overline{L}x = Lx$. Таким чином побудувавши розширений оператор $\overline{L}$ до оператора L, який вже є нормально-розв'язним можемо запровадити наступне означення.

Означення 2.1. *Оператор* $\overline{L}^+ : H_2 \to \overline{H}_1$ *будемо називати сильним псевдооберненим до оператора* L.

Зауваження 2.1. *З даного означення одразу випливає, що узагальнений псевдообернений до оператора* L *є псевдооберненим до оператора* $\overline{L}$.

Сильний узагальнено - обернений у просторах Фреше та Банаха

Нагадаємо, що у тому випадку, коли вихідні простори H_1 та H_2 є векторними просторами, поняття узагальнено - оберненого оператора було введено ще у роботі Е.Дойтча [345] (про що йшла мова в попередній главі). За рахунок процесу поповнення, про який говорилося вище, можна поширити це поняття й на випадок просторів Фреше та Банаха з необов'язково замкненою множиною значень.

Перейдемо до відповідних конструкцій. Нехай задано лінійний обмежений оператор L, що діє з простору Банаха (Фреше) B_1 у простір Банаха (Фреше) B_2. Надалі будемо вважати, що простори $N(L)$ та $\overline{R(L)}$ доповнювальні, тобто мають місце наступні розклади у прямі суми підпросторів

$$B_1 = N(L) \oplus X, B_2 = \overline{R(L)} \oplus Y, \tag{2.2}$$

й відповідні розклади одиниці

$$I_{B_1} = P_{N(L)} + P_X, I_{B_2} = P_{\overline{R(L)}} + P_Y,$$

де $P_{\cdot}$ - проектори на відповідні підпростори.

За аналогією з означенням допустимої пари попередньої глави [345], введемо означення узагальненої L допустимої пари.

Означення 2.2. *Нехай $L : B_1 \to B_2$ лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха B_1 у простір Банаха B_2, а підпростори $X \subset B_1$ та $Y \subset B_2$ такі, що виконується умова (2.2). Тоді пару (X, Y) будемо називати узагальненою L-допустимою парою.*

Розглянемо звужений оператор $L_X : X \to \overline{R(L)}$, $L_X x = Lx, x \in X$ (він буде лінійним, неперервним та ін'єктивним). Поповнимо простір X за нормою $||x|| = ||L_X x||_{B_2}$ і розширимо оператор L_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор будемо позначати $\overline{L}_X$. Тоді, як відомо, оператор $\overline{L}_X : \overline{X} \to \overline{R(L)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$. Будемо позначати через $\overline{B}_1 = \overline{X} \oplus N(L)$ - розширений вихідний простір.

Означення 2.3. *Нехай $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ та (X, Y) - узагальнена L-допустима пара. Тоді відображення*

$$L^-_{X,Y} : B_2 \to \overline{B}_1,$$

$$L^-_{X,Y} y = \overline{L}_X^{-1} y_1, \ y = y_1 + y_2, \ y_1 \in \overline{R(L)}, \ y_2 \in Y,$$

називатимемо сильним (X, Y) - узагальнено-оберненим до L.

Безпосередньо з означення сильного (X, Y) - узагальнено- оберненого оператора випливають наступні властивості:

$$LL^{-}_{X,Y}L = L, \quad L^{-}_{X,Y}LL^{-}_{X,Y} = L^{-}_{X,Y} \quad \text{на} \ \ X,$$

(або з заміною L на L_X),

$$\overline{L}_X L^{-}_{X,Y}\overline{L}_X = \overline{L}_X, \quad L^{-}_{X,Y}\overline{L}_X L^{-}_{X,Y} = L^{-}_{X,Y} \quad \text{на} \ \ \overline{X}.$$

Аналогів властивостей 3 та 4 (попереднього розділу) з означення псевдооберненого оператора у загальному випадку немає.

Зауваження 2.2. *Якщо вихідні простори є просторами Фреше, то поповнювати слід за зліченною системою напівнорм [121], [160]. Насправді, запропонований підхід залишається справедливим у випадку деяких більш загальних ніж Фреше локально-опуклих просторах, а відповідне поповнення будується за системою напівнорм, що визначають топологію простору.*

Зауваження 2.3. *Якщо вихідні простори є просторами Гільберта, то сильний псевдообернений оператор* $\overline{L}^{+}$ *до оператора* L*, з введеного вище означення, буде також й сильним* (X, Y) *- узагальнено оберненим до* L *у сенсі попереднього означення. Таким чином у просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор має сильний* $(N(L)^{\perp}, \overline{R(L)}^{\perp})$ *- узагальнено-обернений, де* $X = N(L)^{\perp}, Y = \overline{R(L)}^{\perp}$.

Зауваження 2.4. *На загальні локально-опуклі простори означення, запропоновані вище, у загальному випадку перенести неможливо. Як зазначалося у попередньому розділі факторпростір повного локально-опуклого простору за його замкненим підпростором може бути не повним [215].*

Продемонструємо запропоновані означення на прикладі конкретного оператора.

Нехай оператор $L : l_2 \to l_2$ діє за правилом

$$Lx = L(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_2, \frac{x_3}{2}, ..., \frac{x_n}{n-1}, ...).$$

Тоді його ядро співпадає з множиною послідовностей вигляду $\{\alpha(1,0,0,...), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Після факторизації можна вважати, що маємо оператор $\mathcal{L}: l_2 \to l_2$, який діє за правилом

$$\mathcal{L}(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (y_1, \frac{y_2}{2}, ..., \frac{y_n}{n}, ...).$$

Щоб довести, що його множина значень не замкнена, достатньо помітити, що

$$l_2 \ni (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...) = \lim_{k\to\infty}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...),$$
$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...) = \mathcal{L}(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{k}, 0, 0, ...),$$

а вектор

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...) = \mathcal{L}(1, 1, ...).$$

Але вектор, який складається з одиниць, не належить простору послідовностей l_2. Тому вектор $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ не належить множині значень оператора $\mathcal{L}$. Повповнивши простір l_2 за нормою $||x||_{\overline{H}} = ||\mathcal{L}x||_{l_2}$ отримаємо простір $\overline{H} \supset l_2$ у якому цей оператор буде нормально - розв'язним. Зазначимо, що простір $\overline{H}$ досить широкий, бо містить у собі простір обмежених послідовностей m. Узагальнений псевдообернений оператор $\overline{L}^+ : l_2 \to \overline{H}$ буде у цьому випадку мати наступний вигляд

$$\overline{L}^+ x = \overline{L}^+(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_2, 2x_3, ..., (n-1)x_n, ...).$$

Таким чином розглянутий приклад ілюструє як з оператора L за допомогою запропонованої процедури отримати $\overline{L}$ та побудувати сильний псевдообернений $\overline{L}^+$ у відповідних просторах. Наступний підрозділ присвячений застосуванню побудованої вище теорії до ров'язання операторних рівнянь.

2.2. Лінійні рівняння з обмеженим оператором. Поняття узагальнених розв'язків та їх представлення

Розглянемо у просторах Банаха B_1 та B_2 лінійне рівняння

$$Lx = y, \tag{2.3}$$

де y – фіксований елемент простору B_2, L – такий лінійний обмежений оператор, що пара (X, Y) є узагальненою L – допустимою. Відомо [314], що у загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин й може бути не єдиним. Коли розв'язку не існує в звичайному сенсі, то часто відшукують такий елемент $x = \overline{x} \in B_1$ який мінімізує норму нев'язки $||L\overline{x} - y||_{B_2} = inf_{x \in B_1}||Lx - y||_{B_2}$. Його називають псевдо- або квазірозв'язком у залежності від просторів у яких розглядається рівняння [249], [314]. Для існування такого розв'язку умова замкненості множини значень оператора L є суттєвою й в загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

У цій частині запропоновано такі означення розв'язків для рівняння (2.3), щоб можна було гарантувати їх існування у тому чи іншому сенсі при довільних правих частинах.

Використавши побудовану вище конструкцію розширимо вихідний простір B_1 й оператор L заданий на ньому таким чином, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки у певному сенсі. Відображення яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами у загальному випадку виявляється багатозначним.

Означення узагальнених розв'язків та основний результат

Основні результати сформулюємо у просторах Банаха та Гільберта. У цьому разі для рівняння (2.3) ми будемо виділяти такі три типи розв'язків.

1) Класичні розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор L нормально-розв'язний. Тоді, як відомо [314], $y \in R(L)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(L^*)}y = 0$. У цьому випадку існує узагальнено - обернений оператор L^- або у випадку просторів Гільберта псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор L^+. Множина розв'язків рівняння (2.3) у просторі Банаха має вигляд

$$x = L^- y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in B_1,$$

а у просторі Гільберта

$$x = L^+ y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in H_1.$$

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли множина значень оператора L не є замкненою. Оскільки оператор L має (X, Y) узагальнену L - допустиму пару, то для просторів B_1 та B_2 справедливий розклад (2.2).

Тоді ми можемо вести мову про сильний узагальнений розв'язок рівняння (2.3). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$, то існує $\overline{L}_X^{-1}$ та коректним буде наступне означення.

Означення 2.4. *Елемент $\overline{L}_X^{-1}y$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (2.3), якщо $y \in \overline{R(L)}$.*

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (2.3) буде мати вигляд

$$x = L_{X,Y}^- y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in B_1,$$

а оператор $L_{X,Y}^- y = \overline{L}_X^{-1} y_1$, де $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \overline{R(L)}, y_2 \in Y$.

3) Узагальнені квазірозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(L)}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $\mathcal{P}_{N(L^*)}y \neq 0$. У цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $inf||\overline{L}x - y||_{B_2}$, де $\overline{L} = \overline{L}_{\overline{X}}\mathcal{P}_{\overline{X}}$ та інфінум береться по всім елементам $x \in \overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Означення 2.5. *Довільний елемент з множини* $\{L^{-}_{X,Y}y+\mathcal{P}_{N(L)}c\}_{c\in B_1}$ *будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (2.3).*

Означення 2.6. *Зазначимо, що якщо* $R(L) = \overline{R(L)}$, *то узагальнені квазірозв'язки співпадають зі звичайними квазірозв'язками.*

Зауваження 2.5. *З наведеного вище означення елемент* $L^{-}_{X,Y}y$ *може мати не найменшу довжину на відміну від* $\overline{L}^{+}y$.

Теорема 2.1. *Нехай для оператора* L *існує* (X, Y) *узагальнена* L *- допустима пара.*

a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}y = 0; \tag{2.4}$$

якщо $y \in R(L)$, *то отримані розв'язки будуть класичними;*

2. Якщо умова (2.4) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (2.3) буде мати вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y}y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in B_1;$$

b) 1. Узагальнені квазірозв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}y \neq 0; \tag{2.5}$$

2. Якщо умова (2.5) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y}y + \mathcal{P}_{N(L)}c, c \in B_1.$$

У випадку просторів Гільберта цю теорему можна уточнити.

Наслідок. *Рівняння (2.3) з лінійним обмеженим оператором* L *є завжди розв'язним.*

a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)}y = 0, \tag{2.6}$$

яка еквівалентна наступній

$$(\varphi, y) = 0, \tag{2.7}$$

для всіх φ *таких, що* $\overline{L}^* \varphi = 0$*; якщо* $y \in R(L)$*, то отримані розв'язки будуть класичними;*

2. Якщо умова (2.7) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (2.3) буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in H_1;$$

b) 1. Узагальнені псевдорозв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y \neq 0, \tag{2.8}$$

яка еквівалентна наступній

$$(\varphi, y) \neq 0; \tag{2.9}$$

2. Якщо умова (2.9) виконується, то множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c, c \in B_1.$$

Зауваження 2.6. *В просторах Гільберта зазначені вище проектори будуть ортопроекторами.*

2.3. Лінійні нормально-розв'язні рівняння та проектори у просторах Банаха

У попередньому розділі, для фредгольмових та нетерових операторів було наведено відомі теореми про представлення, що дозволяють будувати узагальнено-обернений оператор, додаванням до вихідного скінченновимірних операторів. Це - проектори на ядро та образ нетерового оператора. У цьому підрозділі досліджуються аналогічні представлення з нескінченновимірними проекторами. Знайдено вигляд проекторів та умови, за яких такі представлення можливі. Досліджено лінійні рівняння з нормально-розв'язним оператором. Наведено аналогії між класом усіх узагальнено-обернених операторів.

Постановка задачі

Нехай L — лінійний, обмежений оператор, що діє у просторах Банаха E_1 та F_1. Будемо припускати, що оператор L індукує наступний розклад цих просторів:

$$E_1 = N(L) \oplus X_1, \; F_1 = Y_1 \oplus R(L), \tag{2.10}$$

де через $N(L)$ й $R(L)$ традиційно позначено ядро й образ оператора L, тобто оператор L нормально-розв'язний. Поряд з (2.10) маємо розклади одиниць на суми проекторів

$$I_{E_1} = P_{N(L)} + P_{X_1}, \tag{2.11}$$

$$I_{F_1} = P_{Y_1} + P_{R(L)}. \tag{2.12}$$

Задача полягає у відшуканні розв'язків лінійного рівняння

$$Lx = y, \tag{2.13}$$

а також представленні проекторів, що фігурують в (2.11), (2.12). Далі буде розроблено підхід до вивчення лінійного рівняння (2.13) з використанням функціональних просторів. Будемо позначати через $dimN(L) = \mathcal{U}$ й $dimN(L^*) = \mathcal{V}$ потужності нуль - просторів операторів L та його спряженого L^*, відповідно (при цьому їх зліченність припускатися не буде). Проектори $P_{N(L)}$, P_{Y_1} у певних випадках можуть бути представленими, як розклади в ряд, за системою базисних елементів, якщо остання існує. Нагадаємо деякі факти відносно базисів, що будуть використовуватись у подальшому.

Означення 2.7. *[123]. Послідовність $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ векторів простору Банаха утворює базис Шаудера або топологічний базис, якщо кожен його вектор x однозначно може бути розкладений в ряд $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ збіжний за нормою.*

Нехай тепер $\mathcal{U}$ — множина довільної потужності.

Означення 2.8. *Система елементів* $\{e_\alpha, \alpha \in \mathfrak{U}\}$ *є мінімальною, якщо жоден елемент цієї системи не належить замкненій оболонці інших елементів.*

Умова мінімальності виконується далеко не завжди, навіть у гільбертовому просторі [123]. У подальшому ми будемо припускати існування базисних систем елементів $N(L)$ й Y_1.

Як відомо [260], для довільного простору Банаха B, існує ізометрія на деякий підпростір простору $l_\infty(X)$, де X — одинична куля у спряженому до B просторі $X = S_1(B^*)$. В силу цих міркувань, існують наступні набори ізометрій :

1) ізометрія $J_1 : E_1 \to E_2 \subset l_\infty(S_1(E_1^*))$;

2) ізометрія $J_2 : F_1 \to F_2 \subset l_\infty(S_1(F_1^*))$, тут $E_2 = J_1(E_1)$, $F_2 = J_2(F_1)$ замкнені підпростори банахових просторів $l_\infty(S_1(E_1^*))$ й $l_\infty(S_1(F_1^*))$ відповідно; $S_1(E^*)$ — одинична сфера у просторі, спряженому до E.

Ізометрія J_1 переводить кожен елемент x простору E_1 в функціонал

$$h_x : S_1(E_1^*) \to \mathbb{R},$$

що діє за правилом $h_x(f) = f(x), f \in S_1(E_1^*)$. При цьому

$$||x||_{E_1} = ||J_1(x)||_{l_\infty(S_1(E_1^*))} = ||h_x||_{E_2} = \sup_{f \in S_1(E_1^*)} |h_x(f)| = \sup_{f \in S_1(E_1^*)} |f(x)|.$$

Ізометрія J_2 діє аналогічним чином з простору F_1 у підпростір $l_\infty(S_1(F_1^*))$.

Введемо до розгляду наступний оператор $\mathcal{L} := J_2 L J_1^{-1} : E_2 \to F_2$. Оператор $\mathcal{L}$ робить комутативною наступну діаграму

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{L} & F_1 \\ {\scriptstyle J_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_2} \\ l_\infty(S_1(E_1^*)) \supset E_2 & \longrightarrow & F_2 \subset l_\infty(S_1(F_1^*)), \end{array}$$

а оператори L й $\mathcal{L}$ є слабко подібними (пара (J_1, J_2) здійснює слабку подібність) у категорії *Ban* (див. Хелемський [260]). Нагадаємо, що об'єктами у цій категорії виступають довільні простори Банаха, а морфізмами — лінійні обмежені оператори.

Відомо [260], що пара ізометрій (J_1, J_2) здійснює слабку подібність між L та $\mathcal{L}$ тоді й тільки тоді, коли вона є ізоморфізмом в категорії $Mor(Ban)$. Класом об'єктів у цій категорії виступає довільний лінійний обмежений оператор, що діє з одного простору Банаха в інший. Морфізми у цій категорії визначаються такими парами лінійних обмежених операторів (ρ_1, ρ_2), що $\rho_1 \mathcal{L} = L\rho_2$.

Неважко побачити, що

$$||\mathcal{L}||_{E_2 \to F_2} = ||J_2 L J_1^{-1}||_{E_2 \to F_2} \leq$$

$$\leq ||J_2||_{F_1 \to F_2} ||L||_{E_1 \to F_1} ||J_1^{-1}||_{E_2 \to E_1} = ||L||_{E_2 \to F_2}.$$

Для доведення нерівності в інший бік достатньо проробити аналогічну процедуру з оператором $L = J_2^{-1} \mathcal{L} J_1$. Звідси робимо висновок, що $||\mathcal{L}||_{E_2 \to F_2} = ||L||_{E_1 \to F_1}$. Таким чином ми можемо перейти від рівняння (2.13) до еквівалентного (у сенсі збереження норми) рівняння

$$\mathcal{L} h_x = p_y, \tag{2.14}$$

але вже визначеному у просторах функцій. Оператор $\mathcal{L}$, у силу слабкої подібності, також буде індукувати наступні розклади просторів E_2 та F_2:

$$E_2 = N(\mathcal{L}) \oplus X_2, \quad F_2 = Y_2 \oplus R(\mathcal{L}), \tag{2.15}$$

де X_2, Y_2 — деякі підпростори просторів E_2 та F_2 відповідно. Позначимо мінімальну систему базисних функцій нуль-простору $N(\mathcal{L}) \subset E_2$ через $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}} \subset N(\mathcal{L})$, а мінімальну систему базисних елементів (функціоналів) нуль–простору $N(\mathcal{L}^*) \subset F_2$ через $\{\varphi_\beta(\cdot)\}_{\beta \in \mathcal{V}} \subset N(\mathcal{L}^*)$ (за припущення, що останні існують). З мінімальності базисних функцій $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ й базисних функціоналів $\{\varphi_\beta(\cdot)\}_{\beta \in \mathcal{V}}$ випливає, що існують біортогонально спряжена система $\{f_\alpha(\cdot)\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ лінійних функціоналів й система функцій $\{\psi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{V}}$, тобто

$$f_\lambda(e_\mu) = \delta_{\lambda\mu}, \lambda, \mu \in \mathfrak{U}, \varphi_\nu(\psi_\gamma) = \delta_{\nu\gamma}, \nu, \gamma \in \mathcal{V},$$

де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Проектор на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$ побудуємо наступним чином:

$$P_{N(\mathcal{L})}h_x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} f_\alpha(h_x)e_\alpha. \tag{2.16}$$

Аналогічно будується проектор на підпростір Y_2:

$$P_{Y_2}p_y = \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varphi_\beta(p_y)\psi_\beta. \tag{2.17}$$

Те, що так визначені оператори є дійсно проекторами, перевіряється безпосередньою перевіркою означення.

Теорема 2.2. *Рівняння (2.14) буде розв'язним для тих й лише тих $p_y \in F_2$, які задовольняють рівність*

$$\sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varphi_\beta(p_y)\psi_\beta = 0. \tag{2.18}$$

За виконання умови (2.18), розв'язки рівняння (2.14) будуть мати наступний вигляд

$$h_x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} f_\alpha(r_z)e_\alpha + \mathcal{L}^- p_y, \tag{2.19}$$

для довільної функції $r_z \in E_2$; $\mathcal{L}^-$ — узагальнено-обернений до оператора $\mathcal{L}$.

[Доведення] (Нарис). З розкладу (2.15) випливає, що оператор $\mathcal{L}$ нормально - розв'язний й більше того узагальнено-оборотний. Тоді, як відомо [314], необхідною й достатньою умовою розв'язності рівняння (2.14) є наступна рівність

$$P_{N(\mathcal{L}^*)}p_y = 0. \tag{2.20}$$

Оскільки $\mathcal{L}$ нормально–розв'язний, то ${}^{\perp}N(\mathcal{L}^*) = R(\mathcal{L})$. Водночас справедливий розклад (2.15). Тоді умову (2.20) можна замінити на

$$P_{Y_2}p_y = 0.$$

Виходячи з представлення (2.17) отримуємо (2.18). За виконання умов розв'язності, розв'язки рівняння (2.14) будуть мати наступний вигляд

$$h_x = P_{N(\mathcal{L})}r_z + \mathcal{L}^- p_y, \tag{2.21}$$

для довільної функції $r_z \in F_2$. Підставивши (2.16) у (2.21) отримаємо представлення (2.19).

Випадок сепарабельних просторів

Розглянемо більш детально випадок, коли простори E_1 та F_1 сепарабельні. В цьому випадку, оператор $\mathcal{L}$ можна розглядати як такий, що діє не в просторах функцій, а у просторах послідовностей. Відомо, що у випадку сепарабельних просторів E_1 та F_1 їх можна ізометрично вкласти у деякі підпростори простору послідовностей l_∞. У цьому випадку можна вести мову про наступну комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{j_1} & E_3 \subset C(B_1(E_1^*)) & \xrightarrow{j_2} & E_4 \subset l_\infty \\ L\big\downarrow & & & & \big\downarrow\mathcal{L} \\ F_1 & \xrightarrow{i_1} & F_3 \subset C(B_1(F_1^*)) & \xrightarrow{i_2} & F_4 \subset l_\infty \end{array}$$

де $j_1 : E_1 \to E_3 \subset C(B_1(E_1^*))$ — ізометрія (перетворення Гельфанда), що співставляє кожному вектору $x \in E_1$ функціонал означування $h_x : B_1(E_1^*) \to \mathbb{R}$ за правилом $h_x(f) = f(x)$, для будь-якого функціоналу f з одиничної кулі $B_1(E_1^*)$ спряженого до E_1 простору. Виходячи з сепарабельності простору E_1 можна стверджувати, що $B_1(E_1^*)$ має зліченну щільну в *слабкій топології підмножину, яку позначатимемо $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ізометрія j_2 співставляє кожному функціоналу $h_x \in E_3$ вектор $(h_x(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \in E_4$, де E_4 підпростір простору l_∞. Ізометрії $\{i_k, k = 1, 2\}$ визначаються у такий же спосіб. У цьому випадку пара ізометрій (J_1, J_2), що визначені через композиції $J_1 = j_2 o j_1, J_2 = i_2 o i_1$, буде ізоморфізмом у категорії $Mor(Ban)$ між L та $\mathcal{L}$. Припустимо, що у такій ситуації підпростори $N(\mathcal{L}), N(\mathcal{L}^*)$ мають базиси Шаудера, що є одночасно й мінімальними системами. Зафіксуємо такі системи векторів $\{e_i = (e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, ..., e_i^{(n)}, ...) \in l_\infty, i \in \mathbb{N}\}$ й функціоналів $\{\varphi_i(\cdot) \in l_\infty^*, i \in \mathbb{N}\}$, а відповідні їм біортогональні системи будемо позначати $\{f_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset l_\infty^*$ та $\{\psi_i = (\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ..., \psi_i^{(n)}, ...)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset l_\infty$. Тоді рівності (2.16) й (2.17), що задають проектори на відповідні підпростори можна переписати у наступному вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}(x_1, x_2, ...) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i((x_1, x_2, ...))(e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, ...). \tag{2.22}$$

Аналогічно

$$\mathcal{P}_{Y_2}(y_1, y_2, ...) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i((y_1, y_2, ...))(\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ...). \tag{2.23}$$

Введемо до розгляду нескінченні матриці

$$\mathcal{E} = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(2)} & ... & e_1^{(n)} & ... \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} & ... & e_2^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ e_k^{(1)} & e_k^{(2)} & ... & e_k^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

$$\Psi = (\psi_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & ... & \psi_1^{(n)} & ... \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & ... & \psi_2^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \psi_k^{(1)} & \psi_k^{(2)} & ... & \psi_k^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

й нескіченні вектори

$$\mathcal{F}(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), ..., f_n(\cdot), ...), \;\; \Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), ..., \varphi_n(\cdot), ...).$$

Згідно позначень, дію проекторів $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ й $\mathcal{P}_{Y_2}$ на вектори, з підпростору обмежених послідовностей, можна представити у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \mathcal{F}(x)\mathcal{E}, \;\; \mathcal{P}_{Y_2}y = \Phi(y)\Psi.$$

З того, що набори $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ утворюють базиси Шаудера у відповідних підпросторах випливають наступні представлення

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{Y_2}^{(n)}y, \tag{2.25}$$

де

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)}x = \mathcal{F}^{(n)}(x)\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{P}_{Y_2}^{(n)}y = \Phi^{(n)}(y)\Psi^{(n)},$$

а матриці й вектори, що фігурують у представленнях (2.24), (2.25) — є $n\times n$ – та $1\times n$ – вимірними зрізками, визначених вище нескінченновимірних матриць й векторів. Відповідні границі будуть існувати внаслідок означення базису Шаудера (див.наприклад [123]).

Якщо простори $E_2 = \mathcal{H}_1$ та $F_2 = \mathcal{H}_2$ — простори Гільберта то, внаслідок ізоморфізму відповідних об'єктів L та $\mathcal{L}$ категорії $Mor(Ban)$, простори E_1 та F_1 також будуть гільбертовими. У цьому випадку можна знаходити не тільки проектори $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}, \mathcal{P}_{Y_2}$, але й ортопроектори, тобто проектори з додатковою умовою $\mathcal{P}^*_{N(\mathcal{L})} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ й $\mathcal{P}^*_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_2}$. У випадку сепарабельних просторів Гільберта кожна тотальна ортонормована система векторів є базисом Шаудера. Нехай $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ та $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ мінімальні системи ортогональних векторів, які утворюють базиси нуль-просторів $N(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H}_1$ й $N(\mathcal{L}^*) \subset \mathcal{H}_2$ відповідно. Відомо [19], що умова мінімальності системи векторів $\{f_i, i\in\mathbb{N}\}$ у просторі Гільберта еквівалентна наступній: для довільного j числа

$$\delta_j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, ..., f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, ..., f_n)} > 0, \quad j = \overline{1,\infty},$$

де $\Gamma(g_1, g_2, ..., g_n)$ — визначник Грама системи векторів $\{g_i\}_{i=1}^n$.

У цьому випадку ортопроектор $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ на нуль–простір $N(\mathcal{L})$ можна знайти наступним чином:

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)}x,$$

а ортопроектор

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{Y_2}^{(n)}y,$$

де

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)}x = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(-1)}(f_j, x)f_i,$$

$$\mathcal{P}_{Y_2}^{(n)} y = \sum_{s,k=1}^{n} \beta_{sk}^{(-1)} (\varphi_k, y) \varphi_s,$$

$\alpha_{ij}^{(-1)}$ и $\beta_{sk}^{(-1)}$ — елементи матриць, обернених до матриць Грама

$$\Gamma(f_1, f_2, ..., f_n).$$

Існування границі й той факт, що так визначені оператори будуть ортопроекторами, випливає з теореми 7 [123, с.230], внаслідок монотонності набору ортопроекторів $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)}$ й $\mathcal{P}_{Y_2}^{(n)}$. Якщо ортонормовані системи базисних векторів $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ та $(\varphi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ зафіксовано, то ортопроектори на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$ й підпростір Y_2 будуються таким чином

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i,$$

$$\mathcal{P}_{Y_2} y = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} (y, \varphi_s) \varphi_s.$$

Основний результат та його наслідки

Використовуючи ізоморфність об'єктів L й $\mathcal{L}$ в банахових просторах автоматично отримуємо основний результат стосовно розв'язності рівняння $Lx = y$.

Теорема 2.3. *Рівняння (2.13) є розв'язним для тих й лише тих $y \in F_1$, які задовольняють умову*

$$\sum_{\beta\in\mathcal{V}} \varphi_\beta(J_2 y) \psi_\beta = 0, \tag{2.26}$$

при виконанні якої розв'язки рівняння (2.13) будуть мати вигляд

$$x = \sum_{\alpha\in\mathcal{U}} f_\alpha(J_2 z) J_1^{-1} z + L^- y, \tag{2.27}$$

для довільного елементу $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2$ — узагальнено-обернений до оператора L.

Доведення. Умова (2.26) безпосередньо випливає з умови (2.18) (нагадаємо, що $p_y = J_2 y$). Для того, щоб переконатися в істинності представлення

(2.27) достатньо показати, що якщо оператор $\mathcal{L}^-$ є узагальнено-оберненим до оператора $\mathcal{L}$, то й оператор $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}J_2$ буде узагальнено-оберненим до оператора L. Те, що оператор L^- обмежений, очевидно. З рівностей

$$L^-LL^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^-J_2LJ_1^{-1}\mathcal{L}^-J_2 = J_1^{-1}\mathcal{L}^-J_2J_2^{-1}\mathcal{L}J_1J_1^{-1}\mathcal{L}^-J_2 =$$

$$= J_1^{-1}\mathcal{L}^-\mathcal{L}\mathcal{L}^-J_2 = J_1^{-1}\mathcal{L}^-J_2 = L^-,$$

та

$$LL^-L = J_2^{-1}\mathcal{L}J_1J_1^{-1}\mathcal{L}^-J_2J_2^{-1}\mathcal{L}J_1 = J_2^{-1}\mathcal{L}\mathcal{L}^-\mathcal{L}J_1 = J_2^{-1}\mathcal{L}J_1 = L$$

й означення оператора, узагальнено-оберненого до вихідного, випливає, що оператор L^- дійсно представляє собою такий оператор.

Відзначимо, що паралельно ми встановили наступний факт.

Наслідок. *Об'єкти L^- та $\mathcal{L}^-$ є ізоморфними в категорії $Mor(Ban)$. Пара ізометрій (J_2, J_1) перетворює наступну діаграму*

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{L^-} & E_1 \\ J_2\downarrow & & \downarrow J_1 \\ F_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}^-} & E_2 \end{array},$$

на комутативну.

При цьому простори E_1 й F_1, а також простори E_2 та F_2 розкладаються у прямі суми підпросторів

$$F_1 = N(L^-) \oplus \overline{X}_1,\ E_1 = \overline{Y}_1 \oplus R(L^-),$$

$$F_2 = N(\mathcal{L}^-) \oplus \overline{X}_2,\ E_2 = \overline{Y}_2 \oplus R(\mathcal{L}^-).$$

Сформулюємо наслідок з попередньої теореми для випадку сепарабельних просторів.

Наслідок. *Рівняння (2.13) є розв'язним для тих й лише тих $y \in F_1$, що задовольняють рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{Y_2}^{(n)} J_2 y = \overrightarrow{0}. \qquad (2.28)$$

За виконання умови (2.28) розв'язки рівняння (2.13) будуть мати вигляд

$$x = \lim_{n\to\infty} J_1^{-1}\mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})} J_2 z + L^- y,$$

для довільного елемента $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2$ — узагальнено-обернений до оператора L.

Зауваження 2.7. *Слід зауважити, що представлення аналогічні до (2.24) та (2.25) можна отримати й у випадку несепарабельних підпросторів. Для цього треба замінити збіжність послідовностей на збіжність відповідних сіток:*

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} h_x = \lim_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathcal{P}^{(\alpha)}_{N(\mathcal{L})} h_x,\ \ \mathcal{P}_{Y_2} p_y = \lim_{\beta\in\mathcal{V}} \mathcal{P}^{(\beta)}_{Y_2} p_y.$$

2.4. Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі у просторах Банаха та Фреше

Побудовану вище теорію можна уточнити на класі операторних рівнянь з оператором L, що має вигляд $I - A$ із не обов'язково стискуючим оператором A.

Постановка задачі

Розглядається рівняння

$$(I - A)x = y, \tag{2.29}$$

де $A : B \to B$ - лінійний обмежений оператор, B - простір Банаха з нормою $||\cdot||$ (або Фреше зі зліченним набором напівнорм $||\cdot||_n, n \in \mathbb{N}$). Для оператора A будемо припускати, що існує стала $c > 0 : ||A^n|| \le c, n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $||\cdot||_m$ існує напівнорма $||\cdot||_k$ така, що $||A^n x||_m \le c||x||_k$), $\overline{0} \in B$. Задача полягає у відшуканні розв'язків рівняння (2.29) у вигляді рядів. Для простоти викладення будемо розглядати випадок, коли B рефлексивний банахів простір. Про можливе узагальнення на випадок більш загальних топологічних векторних просторів та послаблення умови рівномірної обмеженості степеней оператора A, буде викладено після встановлення основних результатів.

Основний результат

Перейдемо до вивчення рівняння (2.29) у рефлексивному просторі Банаха. Найцікавішим випадком для рівняння (2.29) є так званий критичний випадок, коли $\mu = 1$ точка спектра оператора A (оператор $\mu I - A$ немає оберненого). Виявляється, що у цьому випадку вихідне рівняння буде розв'язним не при довільних правих частинах, а його розв'язок може бути не єдиним (можлива нескінченна кількість розв'язків такого рівняння).

З умови рівномірної обмеженості степеней оператора A випливає Іосіда [121, с.297], що виконується наступний розклад простору B у пряму суму

$$B = N(I - A) \oplus \overline{R(I - A)}. \tag{2.30}$$

У праці [307] введено поняття відносного спектра оператора ρ_{NS}. Ця множина визначається наступним чином

$$\rho_{NS} = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, R(I - U(w, \lambda)) = \overline{R(I - U(w, \lambda))}\}.$$

Доведемо низку тверджень стосовно узагальненого обертання оператора $I - A$, які було отримано у роботі [307]. Переформулюємо деякі з результатів у вигляді теореми, яку потім буде зручно використовувати для дослідження розв'язності рівняння (2.29). Для цього введемо позначення для усередненого оператора й нагадаємо його властивості:

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}, \quad A_0 A = A A_0 = A_0^2 = A_0, \quad N(A_0) = \overline{R(I - A)}.$$

Теорема. *Нехай* $R(I - A) = \overline{R(I - A)}$ *й степені оператора* A *є рівномірно обмеженими. Тоді*

a) $\mu = 1 \in \rho_{NS}(A)$ *(відносно регулярна точка);*

b) оператор $I - A + A_0$ *є оборотним, а оператор* $I - A$ *є узагальнено-оборотним й* $(I - A)^- = (I - A + A_0)^{-1} - A_0$*;*

c) рівняння (2.29) розв'язне для тих й тільки тих y*, які задовольняють умову*

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{2.31}$$

d) якщо умова (2.31) виконана, то множина розв'язків рівняння (2.29) буде мати вигляд

$$x = A_0 c + G[y], \forall c \in B, \tag{2.32}$$

де

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (A - A_0)^l\}^{k+1} y - A_0 y, \tag{2.33}$$

- узагальнений оператор Гріна рівняння (2.29), для будь-якого $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu(A)||}$.

Дослідимо тепер операторне рівняння (2.29) у загальному випадку (без умови замкнености) за схемою, розробленою в попередній частині. Покажемо, що його завжди можна зробити розв'язним у певному сенсі.

1) Класичні розв'язки.

Припустимо, що множина значень оператора $I - A$ замкнена, тобто виконується умова $R(I - A) = \overline{R(I - A)}$. Тоді справджується сформульована вище теорема й умова $y \in R(I - A)$ рівносильна (2.31) $A_0 y = \overline{0}$. За виконання цієї умови множина розв'язків рівняння (2.29) буде мати вигляд (2.32).

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(I - A) \neq \overline{R(I - A)}$ та використаємо сформульовану теорему. Нехай $y \in \overline{R(I - A)}$. Тоді знову $A_0 y = \overline{0}$. Оскільки ядро $N(I - A)$ оператора $I - A$ є доповнювальним підпростором у просторі B (це випливає з розкладу в пряму суму (2.30)), то можна розглянути фактор простір по ядру оператора $I - A$. Профакторизуємо простір B за ядром $N(I - A)$ й позначимо відповідний факторпростір через $E = B/N(I - A)$. Нехай $\mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}}$ та $\mathcal{P}_{N(I-A)}$ - проектори на підпростори $\overline{R(I - A)} \subset B$ та $N(I - A)$ відповідно. Тоді профакторизований оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{A} = \mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}} (I - A) j^{-1} : E \to R(I - A) \subset \overline{R(I - A)},$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним. Тут $j : B \to E$ - канонічна проекція [274]. Трійка (B, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $B_1 = \mathcal{P}_{N(I-A)}B$. Це дає можливість ввести поняття сильного узагальненого розв'язку [160] для рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x} = y, \overline{x} \in E, \tag{2.34}$$

таким же чином, як це робилося в першій частині цього розділу. Використаємо процес поповнення за нормою $||\overline{x}||_{\overline{E}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x}||_F$, де простір $F = \overline{R(I-A)}$ [160]. Тоді розширений оператор $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})} : \overline{E} \to \overline{R(I-A)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{E}$ й $\overline{R(I-A)}$. У силу конструкції сильного узагальненого розв'язку [160] рівняння

$$\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}\overline{x} = y,$$

буде мати єдиний узагальнений розв'язок $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}^{-1} y$, який позначатимемо через $\widetilde{c} \in \overline{E}$, й простір E буде щільно вкладеним в $\overline{E}$. У силу щільності вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in E$ класів еквівалентності, яка буде збігатися до $\widetilde{c}$ за нормою $\overline{E}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$ отримаємо, що вона збігається до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Така послідовність називається сильним майже розв'язком [160]. Всі сильні майже розв'язки операторного рівняння (2.29) можна записати у вигляді $\{c_n + \mathcal{P}_{N(I-A)}c\}_{n \in \mathbb{N}}$, для будь-якого $c \in B$ або, що те саме $\{c_n + A_0 c\}_{n \in \mathbb{N}}$. Зауважимо, що означення сильних узагальнених розв'язків та майже розв'язків еквівалентні. Поняття майже розв'язків зручно використовувати, щоб побачити яким чином можна знаходити розширення оператора Гріна в термінах послідовностей. Якщо $y \in \overline{R(I-A)}$, то існує послідовність $y_n \in R(I-A)$, що до неї збігається. Тоді $G[y_n]$ буде збігатися до $G[y]$ і в якості c_n можна обрати $G[y_n]$. Таким чином й узагальнений оператор Гріна $G[y]$ можна розширити до $\overline{G}[y]$. Відмітимо, що якщо $y \in R(I-A)$, то сильні узагальнені розв'язки будуть класичними.

3) Сильні псевдорозв'язки.

Розглянемо елемент $y \notin \overline{R(I-A)}$. Тоді $A_0 y \neq \overline{0}$. У цьому випадку рівняння (2.29) не має ані класичних, ані сильних узагальнених розв'язків, але існують елементи з $\overline{B} = N(I - A) \oplus \overline{X}$, що мінімізують норму відповідної нев'язки $||\overline{(I - A)}c - g||_B$ (простір $\overline{X}$ ізометрично ізоморфний простору $\overline{E}$, а оператор $\overline{I - A}$ є відповідним розширенням оператора $I - A$). А саме [121]:

$$c = (\overline{I - A})^{-}y + A_0\overline{c}, \overline{c} \in B.$$

Ці елементи й будемо називати сильними псевдорозв'язками за аналогією з тим, як це робилося в попередній частині.

Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 2.4. *Нехай у рівнянні (2.29) лійнійний обмежений оператор A, що діє в рефлексивному просторі Банаха або Фреше такий, що його степені рівномірно обмежені. Тоді:*

(а) Рівняння (2.29) має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$A_0y = \overline{0}; \tag{2.35}$$

якщо $y \in R(I - A)$, то розв'язки рівняння (2.29) будуть класичними;

(б) якщо умова (2.35) виконується, то множина розв'язків рівняння (2.29) може бути представлена у вигляді операторного ряду

$$x = A_0\overline{c} + \overline{G}[y], \forall \overline{c} \in B$$

де $\overline{G}[y]$– відповідне розширення (2.33);

(в) якщо умова (2.35) не виконується, то рівняння (2.29) має множину псевдорозв'язків, яку можна подати у вигляді

$$x = A_0\overline{c} + \overline{G}[y], \forall \overline{c} \in B,$$

де $\overline{G}[y] = (\overline{I - A})^{-}y$.

Зауваження 2.8. *Якщо $||A|| < 1$, то оператор $A_0 = \overline{0}$, й у формулі (2.33) можна зробити граничний перехід, коли $\mu \to 1$ й отримаємо ряд Неймана. У цьому випадку буде існувати єдиний класичний розв'язок. Таким чином, отримані результати узгоджуються з існуючими.*

Зауваження щодо посилення результатів

Наведемо відому теорему з монографії Едвардса [274] з якої буде видно яким чином можна узагальнити отримані у попередньому пункті результати.

Теорема. [274, с.964]. *Нехай E - віддільний локально-опуклий простір, u - його неперервний ендоморфізм й*

$$A_n = \frac{1 + u + u^2 + ... + u^n}{n}.$$

Припустимо, що

(a) множина $\{A_n(x) : n = 1, 2, ...\}$ відносно слабко компактна у просторі E для кожного $x \in E$;

(a') множина $\{A_n\}$ рівностепенево неперервна ;

(b) $\lim_n n^{-1}u^n(x) = 0$ у слабкій топології для кожного $x \in E$. Тоді:

(1) E - топологічна пряма сума підпросторів $N(1 - u)$ й $\overline{R(1 - u)}$;

(2) якщо π - проектування E на $N(1 - u)$ паралельно $\overline{R(1 - u)}$, то $\lim_n A_n(x) = \pi(x)$ у слабкій топології для кожного $x \in E$.

Нарешті, якщо умова (b) виконана при заміні слабкої топології вихідною, то те саме залишається справедливим й для твердження (2).

За цих умов, після факторизації за схемою, проведеною у першій частині, та поповнення за топологією, індукованою системою напівнорм [160], можна довести, що оператор $1 - u$ має замкнену множину значень тобто є нормально-розв'язним. Тоді з пункту 1 анонсованої вище теореми буде випливати, що оператор $1 - u$ узагальнено-оборотний з узагальнено-оберненим оператором $(1 - u)^{-}$. У цьому випадку, множина узагальнених розв'язків рівняння $(1 - u)x = y$, буде мати вигляд $x = \pi(c) + (1 - u)^{-}y$, для довільного елемента $c \in E$. У випадку загальних локально-опуклих просторів представлення у вигляді збіжного операторного ряду може не бути. Для отримання такого представлення у роботі [307] та при доведенні твердження використовувалася теорема Банаха про обернений оператор для $(1 - u + \pi)$, яка виконується не завжди. В ультрабочкових, бочкових та просторах Фреше ця теорема виконується [274] і розклад аналогічний (2.32) буде справедливий. Якщо простір B буде бочковим, то з умови (a) теореми випливає умова (a') [274, с.965] й останню можна прибрати. Нагадаємо, що бочкою у топологічному векторному просторі E називають довільну його замкнену, опуклу, врівноважену та поглинаючу множину. Топологічний векторний простір E називається бочковим, якщо він локально-опуклий й кожна бочка в E є околом нуля. Якщо простір E є нормованим або простором Фреше, u - слабко компактний ендоморфізм, степені якого рівностепенево неперервні, то з слабкої компактності випливає умова (a), й умова (b) виконується у вихідній топології. Зауважимо, що такі простори виникають при дослідженні багатьох рівнянь математичної фізики. Якщо E - простір Банаха (або Фреше) й умова (b) замінена умовою $n^{-1}||u^n|| \to 0$, або більш слабкою умовою $||u^n|| \leq c$ (в просторі Фреше відповідна збіжність буде індукована зліченною системою напівнорм, що породжують топологію простору), то умова (a') буде автоматично виконана. Нарешті у рефлексивних просторах умову (a) можна прибрати. Скажемо також, що у роботі [394] метод рядів Неймана розповсюджується на випадок правильних операторів. Якщо оператор у правій частині (2.29) замінити на довільний обмежений оператор B, що діє з гільбертового простору H_1 в H_2, то можна повністю дослідити розв'язність рівняння (2.29). Для цього треба скористатися сильним псевдооберненим оператором (що розглядався на початку глави).

2.5. Формули для знаходження матриць, псевдообернених за Муром - Пенроузом

У даній частині результати попереднього підрозділу буде продемонстровано на прикладі певних класів матриць.

Нагадаємо, [75, 273] що задача найменших квадратів полягає у знаходженні такого вектора, який мінімізує наступний вираз

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Dx - y||, \tag{2.36}$$

де D — $n \times n$-вимірна матриця, а вектор $y \in \mathbb{R}^n$ – фіксований. Зазначимо, що розв'язок задачі (2.36) може бути не єдиним [314, 75]. Відомо також [273, 314], що з множини всіх векторів, для яких цей мінімум досягається, вектор $z = D^+ y$ (D^+ — матриця, псведообернена за Муром - Пенроузом до матриці D) має найменшу норму.

На зразок операторів послідовність матриць $\{U^n, n \in \mathbb{N}\}$ називається *рівномірно обмеженою*, якщо існує стала $c > 0$ така, що $||U^n|| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$.

Тут під $|| \cdot ||$ мається на увазі довільна фіксована норма в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Надалі розглядатимуться лише такі матриці D, що мають вигляд

$$D = I - U, \tag{2.37}$$

за припущення, що степені останньої утворюють рівномірно - обмежену послідовність. Для таких матриць будуть справедливими результати попереднього підрозділу, відносно псевдообернення. Сформулюємо їх як наслідки для матриць. Означимо матрицю

$$U_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k}{n}.$$

Матриця, означена у такий спосіб, є дійсно визначеною [121, 76] (цей факт складає твердження так званої ергодичної теореми [121, 76]). Сформулюємо твердження, доведені у попередньому підрозділі для матриць вигляду (2.37)

Наслідок. *Матриця $I - U + U_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ має обернену, яка може бути представлена у вигляді ряду*

$$(I - U + U_0)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U - U_0)^l\}^{k+1}, \tag{2.38}$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$, де R_μ — резольвента матриці $U - U_0$. Матрицю $I - U + U_0$ будемо називати *усередненою матрицею* до матриці $I - U$.

Наслідок. *Матриця* $D = I - U$ *має псевдообернену за Муром-Пенроузом, для якої справедливе представлення*

$$(I - U)^+ = (I - U + U_0)^{-1} - U_0, \tag{2.39}$$

або у вигляді збіжного за нормою матричного ряду

$$(I - U)^+ = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U - U_0)^l\}^{k+1} - U_0, \tag{2.40}$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$.

Наслідок. *Матриця* $I - U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *має псевдообернену за Муром-Пенроузом, яка може бути представленою у вигляді*

$$(I - U)^+ = \sum_{k=0}^{\infty}(U - U_0)^k - U_0, \tag{2.41}$$

якщо ряд у правій частині є збіжним. Цю формулу можна отримати шляхом граничного переходу, коли $\mu \to 1$ в (2.40). При цьому переході у виразі (2.40) в першій сумі залишиться доданок тільки при $k = 0$ й таким чином отримаємо (2.41).

Матриця U_0 насправді є матричним ортопроектором на ядро матриці $I - U$. Тому її можна знаходити шляхом розв'язання системи рівнянь $(I - U)x = 0$.

Як вже відзначалося, псевдообернені матриці використовуються при розв'язанні багатьох крайових задач. Крім того, можна навести приклади класу матриць, які використовуються в теорії стохастичних диференціальних рівнянь та задовольняють вимогам рівномірної обмеженості степеней. Наведемо відповідні означення.

Означення 2.9. *[273]. Матриця* $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ *називається стохастичною, якщо всі її елементи невід'ємні й сума елементів довільного рядка дорівнює одиниці.*

Покажемо, що якщо матриця D має вигляд $D = I - P$, де P – стохастична матриця, то вона має псевдообернену за Муром-Пенроузом, яка може бути знайденою за однією з формул (2.39 - 2.41), запропонованих вище. Будемо розглядати матричну m-норму

$$||A||_m = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Для стохастичної матриці P її m-норма дорівнює одиниці $||P||_m = 1$. З рівняння Колмогорова-Чепмена [273] випливає, що

$$P^{n+m} = P^n P^m.$$

З цих рівностей отримуємо, що

$$||P^n||_m \leq ||P||_m^n = 1.$$

Таким чином, степені стохастичної матриці утворюють рівномірно обмежену множину.

Відзначимо також, що отримані формули можна застосовувати для знаходження стаціонарних розподілів в ланцюгах Маркова [273].

Проілюструємо розроблену теорію псевдообернення матриць на прикладі системи масового обслуговування з чотирма ймовірнісними станами, як функціями часу $P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t)$, що задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{31}P_3(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23})P_2(t), \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{31}P_3(t), \end{cases}$$

з умовою нормування $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$, та $P_i(t) \geq 0, i = \overline{0,3}$. Позначимо $\vec{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ й перепишемо систему у матричному вигляді, ввівши до розгляду матрицю

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ \lambda_{01} & -\lambda_{10}-\lambda_{12} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{12} & -\lambda_{21}-\lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{31} \end{pmatrix}.$$

Тоді можна переписати систему рівнянь Колмогорова у вигляді наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \Lambda\vec{P}(t), \\ l\vec{P}(\cdot) = \sum_{i=0}^{3} P_i(0) = 1. \end{cases} \tag{2.42}$$

Для розв'язування системи (2.42) можна застосовувати перетворення Лапласа. Нагадаємо, що для функції $f(t)$ її перетворення Лапласа має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

При цьому, похідній $f^{'}(t)$ буде відповідати функція $pF(p) - f(0)$. Обернене перетворення Лапласа здійснюється наступним чином:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t-i\infty}^{t+i\infty} F(p)dp.$$

Нехай вектор-функція $\vec{\pi}(p)$ має наступний вигляд $\vec{\pi}(p) = (\pi_0(p), \pi_1(p), \pi_2(p), \pi_3(p))$, де $\pi_i(p)$, $i = \overline{0,3}$ відповідні образи функцій станів $P_i(t)$ при перетворенні Лапласа. Тоді диференціальна система (2.42) перетвориться на лінійну алгебраїчну систему:

$$\vec{\pi} = Q\vec{\pi} + \vec{g}, \tag{2.43}$$

де матриця Q та вектор $\vec{g}$ відповідно мають вигляд $Q = \frac{1}{p}\Lambda$, $\vec{g} = \frac{1}{p}(P_0(0), P_1(0), P_2(0), P_3(0))$, або у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \pi_0(p) = -\frac{\lambda_{01}}{p}\pi_0(p) + \frac{\lambda_{10}}{p}\pi_1(p) + \frac{P_0(0)}{p}, \\ \pi_1(p) = \frac{\lambda_{01}}{p}\pi_0(p) - \frac{(\lambda_{10}+\lambda_{12})}{p}\pi_1(p) + \frac{\lambda_{21}}{p}\pi_2(p) + \frac{\lambda_{31}}{p} + \frac{P_1(0)}{p}, \\ \pi_2(p) = \frac{\lambda_{12}}{p}\pi_1(p) - \frac{(\lambda_{21}+\lambda_{23})}{p}\pi_2(p) + \frac{P_2(0)}{p}, \\ \pi_3(p) = \frac{\lambda_{23}}{p}\pi_2(p) - \frac{\lambda_{31}}{p}\pi_2(p) + \frac{P_3(0)}{p}, \end{cases}$$

з умовою $\sum_{i=0}^{3}\pi_i(p) = \frac{1}{p}$. Перетворимо систему (2.43) до вигляду

$$(I-Q)\vec{\pi} = \vec{g}. \tag{2.44}$$

Можливі два випадки:

1) $det(I-Q) \neq 0$. Тоді існує єдиний розв'язок матричної системи (2.44) у вигляді $\pi = (I-Q)^{-1}\vec{g}$. Виконання умови нормованості перевіряється безпосередньою підстановкою отриманого розв'язку.

2) $det(I-Q) = 0$. У цьому випадку розв'язок матричної системи (2.44) існує для тих і тільки тих правих частин, що задовольняють умову $P_{N(I-Q)^T}\vec{g} = \vec{0}$. За виконання цієї умови множина розв'язків даної системи матиме вигляд:

$$\vec{\pi} = (I-Q)^{+}\vec{g} + P_{N(I-Q)}\vec{c},$$

для довільного вектора $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$, де матриця $(I-Q)^+$ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці $(I-Q)$. Виконуючи обернене перетворення Лапласа та перевіряючи умову нормованості знаходимо шуканий розподіл станів. Нехай наприклад задано наступні коефіцієнти інтенсивностей:

$$\lambda_{01} = 0.019, \quad \lambda_{10} = 0.65, \quad \lambda_{12} = 0.4, \quad \lambda_{21} = 0.392, \quad \lambda_{23} = 0.008, \lambda_{31} = 0.008.$$

Вирішуючи рівняння Колмогорова-Чепмена й врахувавши умову нормування отримуємо трипараметричну родину ймовірностей станів системи у вигляді

$$\begin{cases} P_0(t) = 0.52 + (0.002 + a_{11})0.264^t + (0.005 + a_{12})0.729^t + \\ +(-0.527 + a_{13})0.991^t \\ P_1(t) = 0.16 + (-0.004 + a_{21})0.264^t + (-0.001 + a_{22})0.729^t + \\ +(-0.155 + a_{23})0.991^t \\ P_2(t) = 0.16 + (0.002 + a_{31})0.264^t + (-0.004 + a_{32})0.729^t + \\ +(-0.158 + a_{33})0.991^t \\ P_3(t) = 0.16 + a_{41}0.264^t + a_{42}0.729^t + (0.84 + a_{43})0.991^t, \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} a_{11} = 0.077c_1 - 0.449c_2 + 0.186c_3;\ a_{12} = 0.29c_1 - 0.177c_2 - 0.8c_3; \\ a_{13} = 0.631c_1 + 0.626c_2 + 0.616c_3;\ a_{21} = -0.134c_1 + 0.784c_2 - 0.324c_3; \\ a_{22} = -0.052c_1 + 0.032c_2 + 0.143c_3;\ a_{23} = 0.186c_1 + 0.184c_2 + 0.181c_3; \\ a_{31} = 0.057c_1 - 0.336c_2 + 0.138c_3;\ a_{32} = -0.246c_1 + 0.149c_2 + 0.677c_3; \\ a_{33} = 0.189c_1 + 0.187c_2 + 0.185c_3;\ a_{41} = 0.001c_2; \\ a_{42} = 0.006c_1 - 0.004c_2 - 0.02c_3;\ a_{43} = -1.006c_1 - 0.977c_2 - 0.982c_3; \end{cases}$$

для довільних сталих c_1, c_2, c_3 таких, що $P_i(t) \geq 0$. Результати дано із заокругленнями до тисячних. Наприклад, якщо покласти $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ та момент часу $t = 3$ отримаємо такі ймовірності станів

$$P_0(3) = 0.001, P_1(3) = 0.001, P_2(3) = 0.001, P_3(3) = 0.97.$$

Також бачимо, що при прямуванні до нескінченості часу t ймовірності, що визначають функції станів, прямують до чисел $0.52, 0.16, 0.16, 0.16$ відповідно. Даний приклад ілюструє яким чином можна звести систему диференціальних рівнянь до алгебраїчної та потім використати псевдообернені матриці.

2.6. Теорема про неявну функцію у просторах Фреше

Даний підрозділ присвячений застосуванню теорії сильних узагальнено-обернених операторів при дослідженні нелінійних операторних рівнянь.

Задачі математичної фізики часто зводяться до розв'язання нелінійних рівнянь, чи систем рівнянь виду $\mathcal{F}(x, \varepsilon) = 0$, де $\mathcal{F}(x, \varepsilon)$ - нелінійний оператор, визначений і неперервний (достатньо гладкий, аналітичний) у околі $w = w(x_0, \varepsilon_0) \subset E_1 + E$ відомого розв'язку $x = x_0$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ зі значеннями в E_2, E_1, E_2, E - простори Фреше, Банаха або Гільберта. Необхідно побудувати розв'язок $x = x(\varepsilon)$ рівняння в околі w точки (x_0, ε_0). Якщо похідна Фреше

$\mathcal{F}_x(x_0, \varepsilon_0)$ існує і є оборотним оператором, то в околі w, як випливає з класичної теореми про неявну функцію [185], існує єдиний неперервний (гладкий, аналітичний) розв'язок $x = x_0 + y(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Теорія розгалуження [63], [154] розглядає питання про існування й кількість малих розв'язків $y(\varepsilon - \varepsilon_0)$, а також побудову їх асимптотики за малим параметром $\varepsilon - \varepsilon_0$ у тому випадку, коли оператор $Q = -\mathcal{F}_x(x_0, \varepsilon_0)$ має нетривіальний підпростір нулів $N(Q)$, тобто не виконуються припущення класичної теореми про неявну функцію. За цих умов у околі $w(x_0, \varepsilon_0)$ може існувати декілька розв'язків чи сімей розв'язків, залежних від одного або декількох вільних параметрів; (x_0, ε_0) називається тоді точкою розгалуження розв'язків рівняння. У подальшому будемо для зручності вважати, що $x_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$. Тоді вихідне рівняння можна записати у вигляді $Qx = \varepsilon R(x, \varepsilon), R(0, 0) = 0$, у припущенні на нелінійність: $R_x(0, 0) = 0$. Якщо $\varepsilon = \lambda$ - числовий параметр, і при всіх можливих значеннях λ: $R(0, \lambda) = 0$, то отримане рівняння називається задачею про точки біфуркації. Точками біфуркації є ті значення параметра λ, в околі яких існують нетривіальні розв'язки рівняння. Основи теорії розгалуження функціональних рівнянь було закладено ще на початку XX сторіччя у роботах видатних математиків О.М.Ляпунова й Е.Шмідта. Дослідження О.М.Ляпунова були пов'язані з відомою задачею про рівноважні фігури, а Е.Шмідта - з загальною теорією лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь. Відзначимо також, що якщо $N(Q)$ скінченновимірне, то у такому випадку ця задача досліджувалась у [314] з допомогою так званої леми Шмідта для фредгольмових та нетерових операторів. Метод, що застосовується при розв'язанні задач теорії розгалуження, дістав назву методу Ляпунова-Шмідта. Інші теореми про неявні функції було отримано у роботах [408], [414], й також [185, 361, 135], [277].

Постановка задачі

Будемо розглядати нелінійне рівняння

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = 0, \tag{2.45}$$

за умови, що його можна переписати у вигляді

$$Qx = \varepsilon R(x, \varepsilon), \tag{2.46}$$

у просторах Фреше E_1 та E_2 з нелінійністю $R(x, \varepsilon)$, що задовольняє умову $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$ (похідна у сенсі Фреше за першою змінною). Задача полягає у відшуканні такого розв'язку $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ обертається в один з розв'язків породжуючої задачі $Qx = 0$, і визначений та неперервний у околі цього розв'язку.

Класичний випадок

Спочатку розглянемо випадок, коли оператор Q такий, що пара (X, Y) є Q-допустимою, згідно означення першого підрозділу. Тоді розв'язок породжуючої задачі може бути представлений у вигляді $x = P_{N(Q)}c$. Знайдемо необхідну умову існування розв'язку нелінійного рівняння.

Теорема 2.5. *(необхідна умова). Нехай рівняння (2.46) має розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ обертається в один з розв'язків $x(0) = P_{N(Q)}c$ з елементом $c = c_0$. Тоді c_0 повинен задовольняти рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c, 0) = 0. \tag{2.47}$$

Доведення. Припустимо, що нелінійне рівняння має розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який обертається в один з розв'язків породжуючого рівняння $x(0) = P_{N(Q)}c_0$, коли $\varepsilon = 0$. Підставимо цей розв'язок у рівняння (2.46) і запишемо умову розв'язності

$$P_{N(Q^*)}R(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Перейдемо до границі, коли $\varepsilon \to 0$. Використовуючи при цьому неперервність R у околі породжуючого розв'язку, отримаємо (2.47).

Знайдемо достатню умову існування розв'язку нелійного рівняння. Для її отримання будемо вимагати додаткової гладкості від нелінійності R в околі породжуючого розв'язку.

Нехай елемент $c = c_0$ задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.47). Зробимо заміну змінних $x(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon)$. Тоді рівняння (2.46) перепишеться у вигляді

$$Qy(\varepsilon) = \varepsilon R(P_{N(Q)}c^0 + y(\varepsilon), \varepsilon). \tag{2.48}$$

Відображення $y(\varepsilon)$ задовольняє умову $y(0) = 0$. Виділимо в (2.48) лінійну частину в околі породжуючого розв'язку

$$R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0, 0) + ly(\varepsilon) + \mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon), ly(\varepsilon) = R_x(P_{N(Q)}c_0, 0), \tag{2.49}$$

та запишемо умову розв'язності для рівняння (2.48)

$$P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

За виконання цієї умови рівняння (2.48) буде мати розв'язки у вигляді

$$y(\varepsilon) = \overline{y}(\varepsilon) + P_{N(Q)}c(\varepsilon),$$

де

$$\overline{y}(\varepsilon) = G[y(\varepsilon)] := Q^- R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon).$$

Підставивши цей вираз в умову розв'язності та врахувавши представлення (2.49) та умову (2.47), отримаємо операторне рівняння відносно $c(\varepsilon)$:

$$B_0 c(\varepsilon) = g(\varepsilon),$$

$$B_0 = P_{N(Q^*)} l P_{N(Q)}, \quad g(\varepsilon) = -P_{N(Q^*)} l \overline{y}(\varepsilon) - P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon).$$

За виконання умови $P_{N(Q_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$, то це рівняння буде розв'язним з одним із розв'язків у вигляді $c(\varepsilon) = B_0^- g(\varepsilon)$. Тоді ми отримаємо наступну операторну систему відносно $y(\varepsilon), c(\varepsilon), \overline{y}(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} y(\varepsilon) = P_{N(Q)}c(\varepsilon) + \overline{y}(\varepsilon), \\ c(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}(\varepsilon) = G[y(\varepsilon)], \end{cases}$$

яку перепишемо у вигляді

$$u(\varepsilon) = Lu(\varepsilon) + g(\varepsilon), \tag{2.50}$$

де $u(\varepsilon) = (y(\varepsilon), c(\varepsilon), \overline{y}(\varepsilon))^T$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & P_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1(\varepsilon) \\ g_2(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$L_1 z = -B_0^- P_{N(Q^*)} l z, \;\; g_1(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon), \;\; g_2(\varepsilon) = G[y(\varepsilon)].$$

Тоді $u(\varepsilon) = (I - L)^{-1} g(\varepsilon) = \mathcal{S}(\varepsilon)u(\varepsilon)$, де

$$\mathcal{S}(\varepsilon)u(\varepsilon) = (I-L)^{-1}g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I & P_{N(Q)} & P_{N(Q)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} g(\varepsilon),$$

$$\mathcal{S}(\varepsilon)\begin{bmatrix} y(\varepsilon) \\ c(\varepsilon) \\ \overline{y}(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{N(Q)}B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon) - P_{N(Q)}B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(\varepsilon)] + G[y(\varepsilon)] \\ -B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon) - B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(\varepsilon)] \\ G[y(\varepsilon)] \end{pmatrix}.$$

За рахунок малості ε завжди можна досягти того, щоб оператор $\mathcal{S}(\varepsilon)$ був стискуючим. Скориставшись принципом стискаючих відображень [185], отримаємо наступну теорему.

Теорема 2.6. *(достатня умова). Нехай виконуються умови:*

1. B_0, Q *- узагальнено-оборотні оператори;*
2. $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.47), існує неперервний розв'язок рівняння (2.46). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = B^- R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$.

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами

Спочатку доведемо таке твердження.

Наслідок. *Нехай $F(c)$ має похідну Фреше для кожного елементу $c = c_0$ простору E_1, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.47). Якщо $F^{(1)}(c_0)$ має обмежений обернений, то рівняння (2.46) має єдиний розв'язок для кожного c_0.*

Доведення. Розглянемо різницю

$$F(c_0 + \varepsilon) = F(c_0 + \varepsilon) - F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}(c_0 + \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = P_{N(Q^*)}lP_{N(Q)}\varepsilon +$$

$$+P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}\varepsilon, \varepsilon) = B_0[\varepsilon] + P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}\varepsilon, \varepsilon).$$

Звідси випливає, що $B_0 = F^{(1)}(c_0)$. Оскільки оператор $F^{(1)}(c_0)$ оборотний, то для оператора B_0 умови теореми 2.6 виконуються. Таким чином, умова оборотності оператора B_0 пов'язує між собою необхідну й достатню умови. В скінченновимірному випадку ця умова еквівалентна умові простоти кореня.

Зауваження щодо посилення результатів

Використовуючи поняття сильного узагальнено-оберненого оператора можна довести більш загальне твердження, ніж в теоремі 2.6. А саме:

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови:*

1. Q та B_0 – сильні (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) - узагальнено-оборотні оператори відповідно;

2. $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.47), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(h)$ рівняння (2.46). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B^-_{0X_2,Y_2} P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)} c_0, 0) - l y_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k \to \infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = Q^-_{X_1,Y_1} R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$; $B^-_{0X_1,Y_1}, B^-_{X_2,Y_2}$ – сильні узагальнено-обернені оператори.

Зауваження 2.9. *Техніка доведення не відрізняється від доведення попередньої теореми, але остання теорема є більш загальною за рахунок того, що умова замкненості множини значень оператора Q не припускається.*

Розглянемо тепер те саме рівняння, але визначене у просторах Гільберта $E_1 = H_1, E = H, E_2 = H_2$. Геометрія цих просторів багатша, і, як випливає з результатів, отриманих вище, довільний лінійний обмежений оператор має сильний псевдообернений. Зважаючи на це, отримаємо наступний наслідок.

Наслідок. *Нехай $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.*

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.47), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(\varepsilon)$ рівняння (2.46). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -\overline{B}_0^+ P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = \overline{Q}^+ R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

збіжного для довільних початкових значень $y_0(\varepsilon), c_0(\varepsilon), \overline{y}_0(\varepsilon)$; $\overline{B}_0^+, \overline{Q}^+$ – сильні псевдообернені за Муром-Пенроузом оператори.

Приклад. Продемонструємо, як можна застосовувати отримані теореми для представлення розв'язків нелінійного операторного рівняння Ляпунова в просторі Гільберта в критичному випадку (коли порушується єдиність розв'язку породжуючого рівняння).

Розглянемо рівняння вигляду

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) = AX + XB + \varepsilon XQ_1X - Q_2 = 0, \tag{2.51}$$

де $A, B, Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}(H)$ - відомі лінійні обмежені оператори, що діють в просторі Гільберта H, оператор $X \in \mathcal{L}(H)$ - шуканий, а ε - малий параметр. Розглянемо породжуюче рівняння

$$\mathcal{F}(X, 0) = AX + XB - Q_2 = 0. \tag{2.52}$$

В даному випадку $R(X, \varepsilon) = \varepsilon XQ_1X$. Ввівши позначення $QX := AX + XB$, запишемо (2.52) у вигляді

$$QX = Q_2.$$

Тоді узагальнені розв'язки (2.52) будуть мати вигляд

$$X = \overline{Q}^{+} Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C, \tag{2.53}$$

де довільний оператор C належить $\mathcal{L}(H)$ за виконання умови $\mathcal{P}_{N(Q^*)} Q_2 = 0$. Використовуючи отримані вище твердження, отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.8. *(необхідна умова). Нехай існує неперервний розв'язок рівняння (2.51), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої задачі (2.52) вигляду (2.53) з оператором $C = C_0$. Тоді C_0 повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих операторів*

$$F(C) = \mathcal{P}_{N(Q^*)} (\overline{Q}^{+} Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C) Q_1 (\overline{Q}^{+} Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C) = 0. \tag{2.54}$$

Таким чином, теорема (2.8) ілюструє теорему про необхідну умову існування розв'язку операторного рівняння (2.51). Для отримання достатньої умови зробимо заміну змінних

$$X(\varepsilon) = Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2.$$

Тоді отримаємо рівняння вигляду

$$QY(\varepsilon) = -\varepsilon (Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2) Q_1 (Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2), \quad Y(0) = 0. \tag{2.55}$$

Умова розв'язності для (2.55) набуде вигляду

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} (Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2) Q_1 (Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2) = 0. \tag{2.56}$$

За виконання умови (2.56) розв'язки будуть мати вигляд

$$Y(\varepsilon) = \overline{Y}(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C(\varepsilon),$$

де

$$\overline{Y}(\varepsilon) = G[Y(\varepsilon)] = -\varepsilon \overline{Q}^{+} (Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2) Q_1 (Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 + \overline{Q}^{+} Q_2).$$

Неважко перевірити, що в даному випадку

$$lY(\varepsilon) = Y(\varepsilon)Q_1(\mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2) + (\mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2)Q_1Y(\varepsilon).$$

Таким чином, отримаємо операторну систему вигляду

$$Y(\varepsilon) = \overline{Y}(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C(\varepsilon),$$

$$\overline{Y}(\varepsilon) = -\varepsilon\overline{Q}^+(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2)Q_1(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2),$$

$$B_0C(\varepsilon) = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}Y(\varepsilon)Q_1Y(\varepsilon) - \mathcal{P}_{N(Q^*)}l\overline{Y}(\varepsilon).$$

Використовуючи наслідок, отримаємо наступний результат.

Теорема 2.9. *(достатня умова). Нехай* $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного оператора $C = C_0$, *який задовольняє рівняння для породжуючих операторів (2.54), існує неперервний узагальнений розв'язок* $x(\varepsilon)$ *рівняння (2.51). Цей розв'язок можна знайти з допомогою збіжного ітераційного процеса*

$$Y_{k+1}(\varepsilon) = \overline{Y}_k(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_k(\varepsilon),$$

$$C_{k+1}(\varepsilon) = -\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}Y_k(\varepsilon)Q_1Y_k(\varepsilon) - \mathcal{P}_{N(Q^*)}l\overline{Y}_k(\varepsilon),$$

$$\overline{Y}_{k+1}(\varepsilon) = G[Y_k(\varepsilon)],$$

$$X_k(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + Y_k(\varepsilon) + \overline{Q}^+Q_2, \quad X(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} X_k(\varepsilon),$$

$$G[Y_k(\varepsilon)] = -\varepsilon\overline{Q}^+(Y_k(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2)Q_1(Y_k(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2),$$

$$F(C_0) = \mathcal{P}_{N(Q^*)}(\overline{Q}^+Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0)Q_1(\overline{Q}^+Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0) = 0,$$

для $Y_0(\varepsilon) = 0, C_0(\varepsilon) = 0, \overline{Y}_0(\varepsilon) = 0$; $\overline{B}_0^+, \overline{Q}^+$ - *сильні псевдообернені за Муром-Пенроузом оператори.*

2.7. ВИСНОВКИ

1) Введено поняття сильного узагальнено-оберненого та псевдооберненого операторів у просторах Фреше, Банаха та Гільберта;

2) Для лінійних операторних рівнянь з обмеженим оператором у просторах Фреше та Банаха введені поняття узагальнених розв'язків та квазірозв'язків. Побудовано теорію розв'язності таких рівнянь та представлено їх множини розв'язків;

3) Для лінійних рівнянь у просторах Банаха з нормально-розв'язним оператором показано, яким чином будуються проектори на ядро та коядро оператора;

4) Для операторних рівнянь у просторах Банаха та Фреше з необов'язково стискуючим оператором узагальнено метод рядів Неймана та побудовано сильні псевдообернені оператори;

5) З використанням побудованих сильних псевдообернених та узагальнено-обернених операторів доведено теореми розв'язності для нелінійних операторних рівнянь.

РОЗДІЛ 3
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ПРОСТОРАХ БАНАХА ТА ГІЛЬБЕРТА

3.1. Періодичні розв'язки рівняння Хіла

В даному розділі результати попередньої частини застосовуються до дослідження розв'язності періодичної крайової задачі для рівняння Хіла в просторі Гільберта. Побудовано узагальнений оператор Гріна, з допомогою якого представлено відповідну множину періодичних розв'язків.

Постановка задачі

Розглянемо в дійснозначному просторі Гільберта H рівняння Хіла [103]

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \tag{3.1}$$

з періодичною умовою

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w). \tag{3.2}$$

В рівнянні (3.1) T - додатний самоспряжений оператор. Нехай $T^{\frac{1}{2}} \geq \lambda I$ - квадратний корінь з оператора T. Задача полягає у відшуканні розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2). Так як оператор T замкнений, то [139, 141] область визначення $D(T^{\frac{1}{2}})$ оператора $T^{\frac{1}{2}}$ є простором Гільберта відносно скалярного добутку $(T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u)$. Зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = T^{\frac{1}{2}}x_2(t) + r\ cos(tT^{\frac{1}{2}})z, \\ \dot{x}_2(t) = -T^{\frac{1}{2}}x_1(t) + r\ sin(tT^{\frac{1}{2}})z, \end{cases} \tag{3.3}$$

(аналогічну до заміни типа Ван дер Поля, коли $r = 0$) й отримаємо неоднорідну операторну систему диференціальних рівнянь з відповідною крайовою умовою

$$x_1(0) = x_1(w), \quad x_2(0) = x_2(w) + rT^{-\frac{1}{2}}cos(wT^{\frac{1}{2}})z - rT^{-\frac{1}{2}}z. \tag{3.4}$$

Тут $\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$, z - довільний елемент простору H.

Еволюційним оператором для рівняння (3.3) при $r = 0$ буде сильно неперервна унітарна група (Рід М., Саймон Б. [141, 214])

$$U(t) := U(t, 0) = \begin{pmatrix} cos\ tT^{\frac{1}{2}} & sin\ tT^{\frac{1}{2}} \\ -sin\ tT^{\frac{1}{2}} & cos\ tT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Відомо [214, 12], що унітарна група $U(t)$ не є стискаючою. Нагадаємо її властивості:

$$U^n(t) = \begin{pmatrix} cos\ ntT^{\frac{1}{2}} & sin\ ntT^{\frac{1}{2}} \\ -sin\ ntT^{\frac{1}{2}} & cos\ ntT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = U(nt), ||U^n(t)|| = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Вводячи до розгляду новий простір Гільберта $H_{T^{\frac{1}{2}}} = D(T^{\frac{1}{2}}) \oplus D(T^{\frac{1}{2}})$ зі скалярним добутком $(< u, v >, < u, v >)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}} = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) + (T^{\frac{1}{2}}v, T^{\frac{1}{2}}v)$ й вектор $\varphi = (x_1, x_2)^T$, задачу (3.3), (3.4) на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ перепишемо у вигляді

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + f(t), \tag{3.5}$$

$$\varphi(0) = \varphi(w) + \alpha, \tag{3.6}$$

де оператор A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

а вектор–функція $f(t)$ та вектор α мають вигляд

$$f(t) = (r\ cos(tT^{\frac{1}{2}})z, r\ sin(tT^{\frac{1}{2}})z)^T), \alpha = (0, rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^T.$$

Основний результат

Дослідимо питання щодо розв'язності крайової задачі (3.5), (3.6). Розв'язок задачі (3.5) можна подати у вигляді

$$\varphi(t) = U(t)c + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

для довільного елемента $c \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Підставляючи $f(t)$, остаточно отримаємо

$$\varphi(t) = U(t)c + \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(tT^{\frac{1}{2}})z \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Підставивши (3.7) в умову (3.6) приходимо до висновку стосовно еквівалентності розв'язності крайової задачі (3.5), (3.6) та операторного рівняння

$$(I - U(w))c = g, \tag{3.8}$$

де

$$g = \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix}.$$

Вивчимо тепер операторне рівняння (3.8). При цьому будемо використовувати результати попереднього розділу.

1) Класичні узагальнені розв'язки.

Припустимо, що множина значень оператора $I - U(w)$ є замкненою, тобто $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$. Тоді операторна система (3.8) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли [307]

$$U_0(w)g = 0,$$

де

$$U_0(w) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(w)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U(kw)}{n} -$$

ортопроектор, який проектує простір $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ на власний підпростір $1 \in \sigma(U(w))$ [121] та коядро оператора $I - U(w)$, тобто $\mathcal{P}_{N((I-U(w))^*)}$. За виконання цієї умови, розв'язки рівняння (3.8) будуть мати вигляд [307]:

$$c = U_0(w)\overline{c} + (\sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w) - U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))g.$$

Підставивиши у (3.7) знаходимо всі розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) в наступному вигляді

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f, \alpha])(t), \tag{3.9}$$

де

$$(G[f,\alpha])(t) =$$
$$= U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1}\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z-z)\end{pmatrix}-$$
$$-U(t)U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z-z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(tT^{\frac{1}{2}})z \\ 0\end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі (3.5),(3.6).

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(I-U(w)) \neq \overline{R(I-U(w))}$. Нехай елемент $g \in \overline{R(I-U(w))}$. Тоді знову $U_0(w)g = 0$ [307, 121].

Завдяки тому, що степені оператора монодромії є рівномірно обмеженими [121, с.299], справедливий розклад

$$H_{T^{\frac{1}{2}}} = N(I-U(w)) \oplus \overline{R(I-U(w))},$$

й, таким чином, ядро $N(I-U(w))$ оператора $I-U(w)$ є доповнювальним підпростором в $H_{T^{\frac{1}{2}}}$, як і в попередньому розділі. Профакторизуємо простір $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ за ядром $N(I-U(w))$, отримаємо оператор

$$(I-U(w))P_{\overline{R(I-U(w))}} : H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w)) \to R(I-U(w)) \subset \overline{R(I-U(w))},$$

де $P_{\overline{R(I-U(w))}}$ - проектор на підпростір $\overline{R(I-U(w))} \subset H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Таким чином, отриманий оператор буде ін'єктивним. Далі використаємо процес поповнення за нормою $||(I-U(w))P_{\overline{R(I-U(w))}}x||_{R(I-U(w))}$ [160], [32, с.504-505]. Тоді отриманий розширений оператор $\widetilde{I-U(w)} : H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))} \to \overline{R(I-U(w))}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$ та $\overline{R(I-U(w))}$. В силу конструкції узагальненого розв'язку [160] рівняння

$$(\widetilde{I-U(w)})x = g$$

буде мати єдиний сильний узагальнений розв'язок, який позначатимемо як $\widetilde{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$, й простір $H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))$ буде щільно вкладеним в $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$.

Пояснімо більш детально еквівалентне до узагальненої розв'язності формулювання поняття майже розв'язності. В силу щільності вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))$ класів еквівалентності, яка буде збігатися до $\widetilde{c}$ за нормою $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$ отримаємо, що вона буде збіжною до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Така послідовність називається сильним майже розв'язком (подробиці в [160, с.26,29]). Тоді множина усіх сильних майже розв'язків операторного рівняння (3.8) буде мати вигляд $\{c_n + P_{N(I-U(w))}\overline{c}, n \in \mathbb{N}\}$ для довільного $\overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ або, що те саме $\{c_n + U_0(w)\overline{c}, n \in \mathbb{N}\}$. Тоді сильні майже розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) можна представити у вигляді послідовності

$$\{\varphi_n(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + U(t)c_n, n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.11}$$

яка збігається до $U(t)\widetilde{c}$ у $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$. Відомо, що існування сильних узагальнених розв'язків еквівалентно існуванню майже розв'язків [160] і, якщо елемент $g \in R(I-U(w))$, то сильні узагальнені розв'язки будут класичними.

Зауваження 3.1. *В даному випадку це означає, що* $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$.

3) Псевдорозв'язки.

Розглянемо тепер випадок, коли елемент $g \notin \overline{R(I-U(w))}$ або, що те саме, $U_0(w)g \neq 0$. В цьому випадку немає звичайних розв'язків, але існують елементи з $H_{T^{\frac{1}{2}}}$, що мінімізують наступну норму нев'язки $||(I-U(w))c-g||_{H_{T^{\frac{1}{2}}}}$. А саме [314]:

$$c = (I-U(w))^+ g + U_0(w)\overline{c},\ \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Ці елементи й будемо називати псевдорозв'язками (у тому випадку, коли множина значень незамкнена треба замінити відповідний оператор на розширений і отримаємо сильні псевдорозв'язки). Елемент $(I-U(w))^+ g$, з цієї множини, має найменшу норму. Тоді множина всіх псевдорозв'язків крайової задачі буде знову мати вигляд (3.9). Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай задана крайова задача (3.5), (3.6).*

1. Сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) існують тоді й тільки тоді, коли неоднорідність в (3.8) належить множині $\overline{R(I - U(w))}$, *тобто*

$$U_0(w) \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} = 0;$$

якщо додатково вектор $(rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z; rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^T \in R(I - U(w))$, *то розв'язки будуть класичними узагальненими.*

За виконання цієї умови сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f, \alpha])}(t),$$

де $\overline{(G[f, \alpha])}(t)$ *– розширення оператора* $(G[f, \alpha])(t)$.

2. Сильні псевдорозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w) \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} \neq 0.$$

За виконання цієї умови сильні псевдорозв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f, \alpha])}(t).$$

Приклади. Проілюструємо отримані вище твердження на прикладах.

1. Розглянемо крайову задачу для рівняння коливань маятника:

$$\ddot{x}(t) = -(\frac{2\pi}{\omega})^2 x(t), \tag{3.12}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{3.13}$$

Зробимо заміну змінних наступного вигляду $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \frac{2\pi}{\omega} x_2(t) + r\ cos\frac{2\pi}{\omega}t$ та перепишемо цю задачу у вигляді наступної крайової задачі для системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{2\pi}{\omega}x_2(t) + r\ cos\frac{2\pi}{\omega}t, \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{2\pi}{\omega}x_1(t) + r\ sin\frac{2\pi}{\omega}t, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$x_1(0) = x_1(\omega). \tag{3.15}$$

Фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи для (3.14), нормована в нулі, матиме вигляд:

$$X(t) = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{\omega}t & sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ -sin\frac{2\pi}{\omega}t & cos\frac{2\pi}{\omega}t \end{pmatrix}.$$

Введемо допоміжні вектори

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t))^T, \quad f(t) = (r\ cos\frac{2\pi}{\omega}t, r\ sin\frac{2\pi}{\omega}t)^T.$$

Крайова задача (3.14), (3.15) є нерегулярною [314] в тому сенсі, що має множину періодичних розв'язків (на відміну від регулярного випадку). Тоді, згідно [314], множина усіх ω - періодичних розв'язків задачі (3.14), (3.15) буде мати вигляд:

$$z(t,c) = X(t)c + (G[f])(t),$$

для довільного вектору $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Тут $(G[\cdot])(t)$ - узагальнений оператор Гріна періодичної задачі (3.14), (3.15), який може бути знайдений [314], наприклад, наступним чином :

$$(G[f])(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

В нашому випадку перетворення $X(t)$ є ортогональним й зберігаючим площі [12] $X^{-1}(t) = X^T(t)$. Простим підрахунком можна переконатися, що $(G[f])(t) = (\frac{r\omega}{2\pi}sin\frac{2\pi}{\omega}t, 0)^T$. Таким чином множина всіх ω - періодичних розв'язків крайової задачі (3.14), (3.15) буде мати вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1(t,c,r) \\ x_2(t,c,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{\omega}t & sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ -sin\frac{2\pi}{\omega}t & cos\frac{2\pi}{\omega}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r\omega}{2\pi}sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

для довільних $c_1, c_2, r \in \mathbb{R}$.

2. Розглянемо крайову задачу (3.14), (3.15) з додатковими крайовими умовами (перевизначену)

$$x_2(0) = x_2(\frac{\omega}{4}) = 0, \tag{3.17}$$

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} x_1(t)dt = \alpha \neq 0. \tag{3.18}$$

Покажемо, що ця задача має розв'язок для довільного числа $\alpha \in \mathbb{R}$. Підставивши другу компоненту розв'язку (3.16) в умову (3.17) отримаємо

$$x_2(0) = c_2 = 0, \quad x_2(\frac{\omega}{4}) = -c_1 = 0.$$

Після підстановки в першу компоненту отримаємо, що $x_1(t, c, r) = \frac{r\omega}{2\pi} sin\frac{2\pi}{\omega}t$. Враховуючи умову (3.18), будемо мати

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} x_1(t, c, r)dt = \frac{r\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega}{2}} sin\frac{2\pi}{\omega}tdt = \frac{r\omega^2}{2\pi^2} = \alpha.$$

Звідси знаходимо, що $r = \frac{2\pi^2\alpha}{\omega^2}$. Таким чином, розв'язок крайової задачі (3.14) - (3.18) буде мати вигляд

$$(x_1(t), x_2(t))^T = (\frac{\pi\alpha}{\omega} sin\frac{2\pi}{\omega}t, 0)^T.$$

Зауваження 3.2. *Відмітимо, що без додаткового параметра r така задача не мала би розв'язків.*

3. Розглянемо тепер крайову задачу (3.14) - (3.17), на розв'язках якої необхідно мінімізувати критерій якості

$$\int_0^1 x_1(t, c, r)dr \to \inf_{t \in \mathbb{R}}. \tag{3.19}$$

Згідно першого прикладу $c_1 = c_2 = 0$. Тоді інтеграл в (3.19) набуде значення

$$\int_0^1 x_1(t, c, r)dr = \frac{\omega}{2\pi} sin\frac{2\pi}{\omega}t \int_0^1 rdr = \frac{\omega}{4\pi} sin\frac{2\pi}{\omega}t.$$

Неважко побачити, що задача (3.19) розв'язна й найменше значення дорівнює $-\frac{\omega}{4\pi}$ (досягається у точках вигляду $t_k = (\frac{3}{4} + k)\omega, k \in \mathbb{Z}$).

Зауваження 3.3. *Аналогічним чином в рівняння коливань маятника можна ввести довільну кількість додаткових параметрів.*

Зауваження 3.4. *Зауважимо, що до операторного рівняння Хіла вигляду (3.1) можна привести лінійні хвильові рівняння (див. наприклад [214, с.321]), що дозволяє досліджувати крайові задачі для них.*

3.2. Умови біфуркації розв'язків рівняння Хіла

Даний підрозділ присвячений отриманню умов біфуркації розв'язків рівняння Хіла й у тому випадку, коли незбурена крайова задача не має розв'язків. Для зручності читання та формулювання результатів наведемо ті факти, що будемо в подальшому використовувати.

Допоміжні твердження

Розглянемо в дійсному просторі Гільберта H рівняння Хіла

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \tag{3.20}$$

з крайовими умовами

$$y(0) - y(w) = \alpha_1, \quad \dot{y}(0) - \dot{y}(w) = \alpha_2, \tag{3.21}$$

за тих же припущень, що і в попередньому підрозділі, $\alpha_1, \alpha_2 \in H$. Після заміни змінних отримаємо операторну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = T^{\frac{1}{2}} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -T^{\frac{1}{2}} x_1(t), \end{cases} \tag{3.22}$$

з крайовими умовами

$$x_1(0) - x_1(w) = \alpha_1, \quad x_2(0) - x_2(w) = \alpha_2, \tag{3.23}$$

$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$, або, як задачу на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \tag{3.24}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{3.25}$$

де оператор A буде мати вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))^T,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$. В подальшому ми будемо використовувати представлення розв'язків неоднорідної операторної системи

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + f(t), \tag{3.26}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{3.27}$$

у вигляді

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f,\alpha])(t), \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}} \tag{3.28}$$

де

$$(G[f,\alpha])(t) = U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1}(\alpha+$$

$$+\int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) - U(t)U_0(w)(\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)+$$

$$+\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

— узагальнений оператор Гріна задачі (3.26), (3.27). В силу сказаного вище, крайова задача (3.24), (3.25) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли елемент $\alpha \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ буде задовольняти умову

$$U_0(w)\{\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\} = 0. \tag{3.29}$$

За виконання цієї умови, розв'язки задачі (3.24), (3.25) будуть мати вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[0,\alpha])(t) = U(t)U_0(w)\overline{c}+$$

$$+U(t)(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))\alpha,$$

з незалежним від часу оператором Гріна.

Біфуркація розв'язків

Припустимо, що елемент α такий, що операторна система (3.24), (3.25) не розв'язна в класичному узагальненому сенсі, тобто $U_0(w)\alpha \neq 0$. Покажемо, яким чином можна збурити цю систему, щоб зробити її розв'язною. Розглянемо операторну систему

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \tag{3.30}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{3.31}$$

де оператор $A_1(t)$ - лінійний обмежений при всіх $t \in [0; w]$. Для отримання достатніх умов існування розв'язків операторної системи (3.30), (3.31) будемо застосовувати аналог методу Вішика - Люстерніка й використовувати оператор

$$B_0 = U_0(w)\int_0^w A_1(t)U(t)dtU_0(w) : H_{T^{\frac{1}{2}}} \to H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 3.2. *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1) B_0 - псевдооберненний за Муром-Пенроузом оператор ($B_0 \in PI(H_{T^{\frac{1}{2}}})$);

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Якщо незбурена двоточкова операторна система (3.5), (3.6) не має розв'язків, то операторна система (3.30), (3.31) має ρ - параметричну множину розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi_0(t, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i [\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}};$$

абсолютно збіжного для достатньо малого параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Тут

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t)U_0(w)\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t, \overline{c}_0) = U(t)U_0(w)\overline{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t),$$

$$\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) = U(t)U_0(w)\overline{c}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(t), i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha,$$

$$\overline{c}_0 = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(\tau) d\tau,$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(\tau) d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\mathcal{F}_0 = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot) U(\cdot), 0])(\tau) d\tau U_0(w),$$

$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau) d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{X}_{-1}(t) = U(t) U_0(w),$$

$$\overline{X}_i(t) = U(t) U_0(w) \mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t), i = 0, 1, 2, ...$$

Зауваження 3.5. *Потужність множини лінійно незалежних розв'язків залежить від розмірності підпростору $\mathcal{P}_{N(B_0)}H$.*

Доведення. Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду за степенями ε :

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \varphi_i(t). \tag{3.32}$$

Підставимо ряд (3.32) в крайову задачу й зберемо коефіцієнти при відповідних степенях ε. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_{-1}(t)$ при ε^{-1} ряду (3.32) зведеться до наступної операторної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_{-1}(t)}{dt} = A\varphi_{-1}(t), \tag{3.33}$$

$$\varphi_{-1}(0) - \varphi_{-1}(w) = 0. \tag{3.34}$$

Множина розв'язків операторної системи (3.33), (3.34) має вигляд $\varphi_{-1}(t, c_{-1}) = U(t) U_0(w) c_{-1}$, для довільного елемента $c_{-1} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$, який буде визначено нижче.

Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_0(t)$ при ε^0 ряду (3.32) зводиться до наступної неоднорідної операторної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = A\varphi_0(t) + A_1(t)\varphi_{-1}(t, c_{-1}), \tag{3.35}$$

$$\varphi_0(0) - \varphi_0(w) = \alpha. \tag{3.36}$$

Крайова задача (3.35), (3.36) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)\{\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)A_1(\tau)U(\tau)d\tau U_0(w)c_{-1}\} = 0,$$

в силу (3.11). Використовуючи властивість $U_0(w)U(w) = U(w)U_0(w) = U_0(w)$, умову розв'язності перепишемо у вигляді наступного операторного рівняння відносно c_{-1}:

$$B_0 c_{-1} = -U_0(w)\alpha. \tag{3.37}$$

Оскільки оператор B_0 псевдооборотний, то операторне рівняння буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли [314]

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w)\alpha = 0,$$

яка виконується для довільного елемента $\alpha \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ в силу 2). Тоді множина розв'язків (3.37) буде мати вигляд

$$c_{-1} = -B_0^+U_0(w)\alpha + \mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

або у вигляді

$$c_{-1} = \overline{c}_{-1} + \mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+U_0(w)\alpha,$$

B_0^+ - псевдообернений до B_0 за Муром - Пенроузом оператор. Тоді множина розв'язків (3.32), (3.33) буде мати вигляд

$$\varphi_{-1}(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) + U(t)U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho;$$

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t)U_0(w)\overline{c}_{-1}.$$

Використовуючи тепер представлення (3.30), лінійність узагальненого оператора Гріна, множину розв'язків крайової задачі (3.36), (3.37) можна представити у вигляді

$$\varphi_0(t, c_0) = U(t)U_0(w)c_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t) +$$

$$+(G[A_1(\cdot)U(\cdot),0])(t)U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де елемент $c_0 \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу.

Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_1(t)$ при ε^1 ряду (3.32) запишеться у вигляді наступної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = A\varphi_1(t) + A_1(t)\varphi_0(t,c_0), \tag{3.38}$$

$$\varphi_1(0) - \varphi_1(w) = 0. \tag{3.39}$$

Умова розв'язності (3.11) для задачі (3.38), (3.39) буде мати вигляд

$$U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)\varphi_0(\tau,c_0)d\tau = 0.$$

Після підстановки розв'язку $\varphi_0(t,c_0)$ в умову розв'язності та перетворень приходимо до наступного операторного рівняння відносно c_0:

$$B_0c_0 = -U_0(w)(\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,\overline{c}_{-1}),\alpha])(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot),0])(\tau)d\tau U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho).$$

В силу припущень теореми це рівняння розв'язне й елемент $c_0 \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ визначається наступним чином:

$$c_0 = \overline{c}_0 + \mathcal{F}_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_0 = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,\overline{c}_{-1}),\alpha])(\tau)d\tau,$$

й

$$\mathcal{F}_0 = I - B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot),0])(\tau)d\tau U_0(w).$$

Остаточно, множина розв'язків операторної крайової задачі (3.35), (3.36) буде мати вигляд:

$$\varphi_0(t,c_\rho) = \overline{\varphi}_0(t,\overline{c}_0) + \overline{X}_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}},$$

де

$$\overline{\varphi}_0(t,\overline{c}_0) = U(t)U_0(w)\overline{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,\overline{c}_{-1}),\alpha])(t),$$

$$\overline{X}_0(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_0 + (G[A_1(\cdot)U(\cdot),0])(t)U_0(w).$$

Таким чином крайова задача (3.38), (3.39) буде мати розв'язки у вигляді

$$\varphi_1(t,c_1) = U(t)U_0(w)c_1 + (G[A_1(\cdot)\varphi_0(\cdot,c_0),0])(t) =$$

$$= U(t)U_0(w)c_1 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,\overline{c}_0) + A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,0])(t),$$

де елемент c_1 буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_2(t)$ при ε^2 ряду (3.32) зводиться до наступної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = A\varphi_2(t) + A_1(t)\varphi_1(t,c_1), \tag{3.40}$$

$$\varphi_2(0) - \varphi_2(w) = 0. \tag{3.41}$$

Знову, записавши умову розв'язності (3.11) й підставляючи розв'язок $\varphi_1(t)$, після перетворень отримаємо операторне рівняння для елемента c_1

$$B_0c_1 = -U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,\overline{c}_0)+$$

$$+A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,0])(\tau)d\tau.$$

В силу припущень теореми, умова розв'язності буде виконаною й множина розв'язків буде мати вигляд

$$c_1 = \overline{c}_1 + \mathcal{F}_1\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho;$$

де

$$\overline{c}_1 = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,\overline{c}_0),0]d\tau$$

та

$$\mathcal{F}_1 = I - B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)G([A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot),0])(\tau)d\tau.$$

Остаточно, множина розв'язків крайової задачі (3.38), (3.39) буде мати вигляд

$$\varphi_1(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_1(t, \overline{c}_1) + \overline{X}_1(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{\varphi}_1(t, \overline{c}_1) = U(t)U_0(w)\overline{c}_1 + G([A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, \overline{c}_0), 0])(t),$$

та

$$\overline{X}_1(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_1 + G([A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot), 0])(t).$$

Аналогічним чином, неважко показати (діючи за індукцією), що задача визначення коефіцієнта $\varphi_i(t)$ при ε^i ряду (3.32) зводиться до розв'язності операторної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = A\varphi_i(t) + A_1(t)\varphi_{i-1}(t, c_{i-1}), \tag{3.42}$$

$$\varphi_i(0) - \varphi_i(w) = 0. \tag{3.43}$$

За виконання умов теореми множина розв'язків крайової задачі (3.42), (3.43) буде мати вигляд

$$\varphi_i(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) = U(t)U_0(w)\overline{c}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(t),$$
$$\overline{c}_i = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(\tau)d\tau;$$
$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau)d\tau;$$

й

$$\overline{X}_i(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t),$$

$$i = 0, 1, 2, ..., \quad \text{та} \quad \overline{X}_{-1}(t) = U(t)U_0(w).$$

Доведення абсолютної збіжності отриманого ряду проводиться як і в [41].

Зауваження 3.6. *Рівняння, що досліджувалося в цій частині, охоплює достатньо широкий спектр різних задач від звичайних диференціальних рівнянь й рівнянь в частинних похідних до абстрактних рівнянь, що представляють й самостійний інтерес. В критичному випадку розглянута крайова задача може бути як фредгольмовою – в найпростішому випадку, так й нормально - розв'язною – в найбільш загальному випадку (згідно класифікації Крейна С.Г. [140]). Слід відзначити, що завдяки процесу поповнення, розробленому в попередньому розділі можна досягти того, щоб необов'язково нормально-розв'язний оператор $I - U(w)$ завжди мав замкнену множину значень, тобто завдяки процесові поповнення його можна зробити нормально-розв'язним. Відмітимо також, що аналогічним чином можна отримати умови біфуркації розв'язків крайової задачі*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t),$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha + \varepsilon l_1 \varphi(\cdot),$$

де l_1 - лінійний обмежений векторний-функціонал. Таким чином, збурювати можна як в правій частині розглядуваного рівняння, так і в крайовій умові (відповідною заміною змінних можна звести запропоновану крайову задачу до такої, де збурюється або права частина рівняння, або тільки крайова умова).

3.3. Параметрична крайова задача з періодичними операторними коефіцієнтами

В даній частині запропоновано означення відносного спектра лінійного обмеженого оператора. Використовуючи це поняття, отримано необхідні й достатні умови розв'язності параметричної множини диференціальних рівнянь з періодичним операторним коефіцієнтом та крайовою умовою.

Вступ

Нехай $(\mathbf{B}, ||\cdot||)$ - комплексний простір Банаха, $\overline{0}$ - нульовий елемент в просторі $\mathbf{B}$, $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ - банахів простір лінійних та обмежених операторів, що діють з $\mathbf{B}$ у себе. Нехай $A(t)$ - періодична оператор-функція на $\mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathcal{L}(\mathbf{B})$, $f(t)$ - неперервна на $[0; w]$ періодична вектор-функція зі значеннями в $\mathbf{B}$ й періодом $w > 0$, тобто $A(t + w) = A(t), \ \ f(t + w) = f(t)$.

В просторі $\mathbf{B}$ розглянемо множину крайових задач:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda A(t)x(t) + f(t), \tag{3.44}$$

$$x(0) - x(w) = \overline{0}. \tag{3.45}$$

Як відомо [103], розв'язок задачі Коші для операторного рівняння (3.44) з довільною початковою умовою $x(0) = x_0$ має вигляд

$$x(t) = U(t, \lambda)x_0 + \int_0^t U(t, \lambda)U^{-1}(\tau, \lambda)f(\tau)d\tau, \tag{3.46}$$

де $U(t, \lambda)$ при фіксованому λ – еволюційний оператор, що задовольняє однорідне рівняння

$$\frac{dU(t, \lambda)}{dt} = \lambda A(t)U(t, \lambda), \ \ U(0, \lambda) = I.$$

Підставивши (3.46) в крайову умову (3.45), будемо мати:

$$x(0) - x(w) = (I - U(w, \lambda))x_0 - \int_0^w U(w, \lambda)U^{-1}(\tau, \lambda)f(\tau)d\tau.$$

Розв'язність крайової задачі (3.44),(3.45) еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$(I - U(w, \lambda))x_0 = \int_0^w U(w, \lambda)U^{-1}(\tau, \lambda)f(\tau)d\tau. \tag{3.47}$$

Оператор $U(w, \lambda)$ є оператором монодромії задачі (3.44), (3.45), I – тотожній оператор.

Означення 3.1. *[137]. Точка λ є точкою стійкості рівняння (3.44), якщо $||U^n(w, \lambda)|| \leq c, n \in \mathbb{Z}$.*

По аналогії з наведеним вище, запропонуємо наступне означення.

Означення 3.2. *Точку* λ *будемо називати точкою стійкості праворуч оператора монодромії* $U(w,\lambda)$ *крайової задачі (3.44), (3.45), якщо послідовність операторів* $\{U^n(w,\lambda), n \in \mathbb{N}\}$ *рівностепенево неперервна (рівномірно обмежена)* $||U^n(w,\lambda)|| \leq c, n \in \mathbb{N}$.

Отримані нижче результати виникли у зв'язку з наступним результатом Крейна М.Г.([137, с.129]).

Лема. *Якщо* λ *— є точкою стійкості рівняння (3.44), то кожен його розв'язок рівномірно обмежений при* $t \in \mathbb{R}$.

Зауваження 3.7. *Наприклад в [138, с.162], рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t),$$

визначене на півосі $[0; +\infty)$ *називається стійким (точніше, стійким праворуч), якщо кожен його розв'язок обмежений на* $[0; +\infty)$. *Необхідною і достатньою умовою стійкості є рівномірна обмеженість його еволюційного оператора:* $\sup_{t \geq 0} ||U(t)|| < \infty$.

Виявляється, що можлива ситуація, коли рівняння (3.44) може мати рівномірно обмежені розв'язки й у тому випадку, коли точка λ не є точкою стійкості рівняння (3.44). Нижче буде показано, що це можливо при більш слабкій умові, коли точка λ є точкою *стійкості праворуч* оператора монодромії $U(w,\lambda)$ крайової задачі (3.44), (3.45), й у цьому випадку задача (3.44), (3.45) буде мати обмежені розв'язки, при додаткових умовах на неоднорідність $f(t) \in \mathbf{B}$.

Позначимо через $N(I - U(w,\lambda))$ та $R(I - U(w,\lambda))$ відповідно ядро та образ оператора $I - U(w,\lambda)$, відповідно.

Через ρ_{NS} будемо позначати множину тих $\lambda \in \mathbb{C}$ для яких оператор $I - U(w,\lambda)$ є нормально - розв'язним, тобто

$$\rho_{NS} = \{\lambda : \quad \lambda \in \mathbb{C}, \;\; R(I - U(w,\lambda)) \, = \, \overline{R(I - U(w,\lambda))} \; \}.$$

Зауваження 3.8. *Як буде показано далі, множина* $\sigma_{NS} = \mathbb{C} \setminus \rho_{NS}$ *тісно пов'язана з поняттям відносного спектра (а у випадку простору Банаха з* *його узагальненням), введеному та дослідженому вперше, мабуть Асплундом (див. [286], [257]).*

Для більш точного зв'язку зі спектром оператора A нагадаємо [257], що оператор A називається *відносно оборотним*, якщо існує оператор X такий, що $AXA = A$. Останнім часом більш загальноприйнято такий оператор називати *узагальнено - оборотним [97], [314].* Відзначимо також, що кожен оборотний оператор є узагальнено - оборотним; оператор, що має лише лівий або правий обернений також є узагальнено - оборотним. В скінченновимірному просторі кожен оператор є узагальнено - оборотним. Це поняття належить загальній теорії кілець й наведене вище твердження про узагальнену оборотність скінченновимірних операторів може бути сформульовано наступним чином: повна скінченновимірна алгебра матриць над полем комплексних чисел є регулярним кільцем (фон Нейман [412]).

Відносним спектром оператора A (в просторі Гільберта) називається множина комплексних чисел λ, для яких оператор $A - \lambda I$ не буде відносно оборотним [286], [257]. Відзначимо також, що на відміну від звичайного поняття спектра оператора, відносний спектр втрачає ряд гарних властивостей (наприклад, відносний спектр не повинен бути замкненою множиною (див. приклад в [257, с.227] до задачі 71)).

Метою даної частини є отримання необхідних та достатніх умов розв'язності крайової задачі (3.44), (3.45) в просторі Банаха, а також побудові відповідних розв'язків у тому випадку, коли оператор монодромії є стійким праворуч. Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 3.3. *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}$ є точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w,\lambda)$ задачі (3.44) в рефлексивному просторі Банаха* $\mathbf{B}$. *Тоді:*

а) крайова задача (3.44), (3.45) має періодичні розв'язки тоді й тільки тоді, коли вектор - функція $f(t)$ задовольняє умові

$$U_0(\lambda)\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0, \quad \text{де} \;\; U_0(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n}; \qquad (3.48)$$

б) при виконанні умови (3.48) періодичні розв'язки крайової задачі (3.44), (3.45) мають наступний вигляд:

$$x(t,c) = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{3.49}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$,

$$G(t,\tau) = U(t,\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}-U_0(\lambda))U^{-1}(\tau,\lambda)+$$

$$+K(t,\tau)$$

- узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3.44), (3.45) та

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq t, \\ U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda), & t > \tau. \end{cases}$$

Допоміжні твердження

Доведемо низку тверджень з яких буде легко отримати основну теорему.

Лема. *Якщо $\lambda \in \rho_{NS}$ є точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w,\lambda)$, то крайова задача (3.44), (3.45) розв'язна тоді й тільки тоді, коли вектор - функція $f(t)$ задовольняє умові*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=2}^{n+1}U^m(w,\lambda)}{n}\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0. \tag{3.50}$$

Доведення. Оскільки оператор монодромії є стійким праворуч, то він має замкнену множину значень (в силу того, що $\lambda \in \rho_{NS}$). Тоді ([121], стор. 296) множину значень оператора $I - U(w,\lambda)$ можна визначити наступним чином:

$$R(I-U(w,\lambda)) = \{x \in H : \lim_{n\to\infty}U_n(w,\lambda)x = \overline{0}, U_n(w,\lambda) = \frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}\}.$$

В цьому випадку операторне рівняння (3.47) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}\int_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0,$$

яка еквівалентна умові (3.50), оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}U(w,\lambda)=U_0(\lambda)U(w,\lambda)=U_0(\lambda).$$

Таким чином, рівність (3.50) гарантує належність функції $f(t)$ множині значень оператора $I-U(w,\lambda)$, що й доводить лему.

Зауваження 3.9. *У випадку, коли $\lambda\in\rho_{NS}$ й одночасно $R(I-U(w,\lambda))=\mathbf{B}$, оператор $I-U(w,\lambda)$ оборотний, λ є його регулярною точкою й крайова задача (3.44), (3.45) має єдиний розв'язок для довільної неоднорідності $f(t)$. В цій ситуації*

$$x_0=(I-U(w,\lambda))^{-1}\int_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$

й, як наслідок, отримуємо відомий результат М.Г.Крейна [137, стор.131]. Більше того, як показано в [137, стор.131-133] в цьому випадку оператор монодромії $U(w,\lambda)$ буде стійким (й навіть сильно стійким [137]).

Зауваження 3.10. *При доведенні леми ніде не використовувалася рефлексивність вихідного простору Банаха, а тому це твердження має силу в довільному просторі Банаха $\mathbf{B}$.*

Наступні результати отримуються, як наслідок відомої статистичної ергодичної теореми при виконанні додаткової умови. Надалі будемо припускати, що обмежені множини простору $\mathbf{B}$ слабко секвенціально компактні [121, стор.297]. Зазначимо, що в просторі Гільберта ця умова завжди виконується. Банахів простір, що володіє цією властивістю виявляється рефлексивним (теорема Еберлейна - Шмульяна [121]). В силу рефлексивності довільного простору Гільберта, зроблене вище припущення для нього завжди виконується. Тоді (Іосіда К. [121, стор.298]) власний підпростір $N(I-U(w,\lambda))$ оператора $I-U(w,\lambda)$ співпадає з множиною значень оператора U_0, що визначається рівністю

$$U_0(\lambda)x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}x,$$

тобто

$$N(I - U(w, \lambda)) = R(U_0(\lambda)).$$

Наведемо властивості оператора U_0, які будуть використовуватися в подальшому [121] :

$$i) U_0(\lambda) = U_0^2(\lambda);$$

$$ii) U_0(\lambda) = U(w, \lambda) U_0(\lambda);$$

$$iii) U_0(\lambda) = U_0(\lambda) U(w, \lambda).$$

Наслідок. *Якщо простір* $\mathbf{B} = H$ *є простором Гільберта, то в цьому випадку ортогональне доповнення до* $N(I - U(w, \lambda))$ *можна представити у вигляді*

$$N(I - U(w, \lambda))^{\perp} = \{y \in H : U_0^*(\lambda) y = \overline{0}\},$$

де $U_0^*(\lambda)$ *- оператор, спряжений до оператора* $U_0(\lambda)$.

Лема. *Оператор* $I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)) : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *має обмежений обернений, який має наступний вигляд*

$$(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l \}^{k+1}, \quad (3.51)$$

для всіх $0 < \mu - 1 < 1/||R_{\mu}(U(w, \lambda) - U_0(\lambda))||$.

Доведення. Покажемо, що $N(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))) = \overline{0}$. Дійсно, якщо $x \in N(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))$, то

$$(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))x = \overline{0}. \quad (3.52)$$

Оскільки $(I - U(w, \lambda))x \in R(I - U(w, \lambda))$, а $U_0(\lambda)x \in N(I - U(w, \lambda))$, підпростори $R(I - U(w, \lambda))$ та $N(I - U(w, \lambda))$ перетинаються лише в нулі, то умова (3.52) виконується тоді й тільки тоді, коли одночасно $(I - U(w, \lambda))x = \overline{0}$ та $U_0(\lambda)x = \overline{0}$ (у випадку простору Гільберта в силу теореми Піфагора $0 = ||(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))x||^2 = ||(I - U(w, \lambda))x||^2 + ||U_0(\lambda)x||^2$). Це можливо тільки тоді, коли $x = \overline{0}$. Покажемо, що $R(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))) = \mathbf{B}$. Для цього достатньо замітити, що $\mathbf{B} = N(I - U(w, \lambda)) \oplus R(I - U(w, \lambda)) =$

$R(U_0) \oplus R(I - U(w,\lambda))$. З цього розкладу випливає, що довільний елемент $x \in \mathbf{B}$ має вигляд $(I - U(w,\lambda))y + U_0(\lambda)z$, що й доводить рівність $R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) = \mathbf{B}$. Таким чином, за теоремою Банаха [121], вихідний оператор, що однозначно відображає $\mathbf{B}$ на себе має обмежений обернений. З доведеного випливає, що для оператора $\mu I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$ точка $\mu = 1$ є регулярною. Так як степені оператора $U(w,\lambda)$ рівномірно обмежені, то спектральний радіус $r_{(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))} \leq 1$. Добре відомо [121], що резольвентна множина обмеженого оператора відкрита та число $\mu = 1 \in \rho(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$. Тоді існує окіл точки μ такий, що кожна точка цього околу належить резольвентній множині. Для довільної точки $\mu > 1$ з цього околу існує резольвента [121], яка може бути зображена у вигляді сильно збіжного за нормою ряду

$$R_\mu := R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda)) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l.$$

Використовуючи аналітичність резольвенти й добре відому тотожність для точок $\mu > 1$ таких, що $|1 - \mu| < 1/||R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))||$, отримаємо

$$R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k R_\mu^{k+1}.$$

Остаточно, підставивши в цю рівність отриманий вище ряд, переконуємося в справедливості (3.51). Що й треба було довести.

Оператор $I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$ будемо як і раніше називати *оператором усереднення* до оператора $I - U(w,\lambda)$.

Зв'язок з узагальнено-оберненим оператором

В цьому пункті буде встановлено зв'язок між узагальнено-оберненим оператором та оператором, що є оберненим до оператора усереднення.

Доведемо наступне твердження.

Лема. *Для довільного $\lambda \in \rho_{NS}$ оператор, узагальнено-обернений до оператора $I - U(w,\lambda)$ існує та його можна представити у вигляді:*

$$(I - U(w,\lambda))^{-} = (I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda), \qquad (3.53)$$

або у вигляді збіжного операторного ряду

$$(I - U(w,\lambda))^{-} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^{k}\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^{l}\}^{k+1} - U_0(\lambda), \quad (3.54)$$

для всіх $0 < \mu - 1 < 1/||R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))||$.

Доведення. Оператор, що визначається правою частиною рівності (3.53) є очевидно обмеженим. В силу цього, для встановлення (3.53) достатньо перевірити виконання умов означення узагальнено-оберненого оператора. При цьому будуть використовуватися обидва представлення та властивості i) - iii) оператора $U_0(\lambda)$.

1. Розглянемо добуток

$$(I - U(w,\lambda))((I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda))(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= (I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)) - U_0(\lambda))((I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} -$$

$$-U_0(\lambda))(I - U(w,\lambda)) = (I - U_0(\lambda)(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} -$$

$$-(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))U_0(\lambda) + U_0(\lambda)^2)(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1})(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1})((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda)) - U_0(\lambda)) =$$

$$= I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda) - U_0(\lambda) - U_0(\lambda) + U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda).$$

Відзначимо, що $U_0(\lambda)(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^{l} = 0$ для довільного $l \in \mathbb{N}$ (це безпосередньо випливає з властивостей i) - iii) та формули біному Ньютона). Покажемо, що

$$U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda) = U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} =$$

$$= (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = U_0(\lambda).$$

Дійсно,

$$U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-1)^k U_0(\lambda)\times$$

$$\times\{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l\}^{k+1} U_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}((\mu^{-1})^{k+1}(\mu-1)^k U_0(\lambda)+$$

$$+(\mu-1)^k U_0(\lambda)\{\sum_{l=1}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l\}^{k+1}) U_0(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1}(\mu-1)^k U_0(\lambda) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{\mu-1}{\mu})^k U_0(\lambda) = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\frac{\mu-1}{\mu}} U_0(\lambda) = U_0(\lambda).$$

Таким чином

$$I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda) - U_0(\lambda) - U_0(\lambda)+$$

$$+U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = I - U(w,\lambda).$$

Звідси випливає, що оператор $(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda)$ задовольняє першій умові означення узагальнено-оберненого оператора.

2. Перевіримо тепер виконання другої умови означення узагальнено-оберненого оператора:

$$((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda))(I - U(w,\lambda))((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)) =$$

$$= ((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda))((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda)) - U_0(\lambda))\times$$

$$\times((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)) = (I - U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))-$$

$$-(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) + U_0(\lambda)^2)((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)) =$$

$$= (I - (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda))((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)) =$$

$$= (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} -$$

$$-U_0(\lambda) + (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)-$$

$$-U_0(\lambda)+U_0(\lambda)=(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda).$$

Таким чином лему доведено.

Доведення теореми. В силу леми 1 крайова задача (3.44), (3.45) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3.50). В силу умови iii) для оператора $U_0(\lambda)$ ця рівність може бути переписана наступним чином

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=2}^{n+1}U^m(w,\lambda)}{n}\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=$$

$$=U_0(\lambda)U(w,\lambda)\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=U_0(\lambda)\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau,$$

що й доводить пункт а) теореми.

Нехай умови пункту а) виконано. В цьому випадку, виходячи з теореми [314] про представлення розв'язків з допомогою узагальнено-оберненого оператора, рівняння (3.47) буде мати родину розв'язків вигляду

$$x_0=(I-U(w,\lambda))^{-}\int_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau+U_0(\lambda)c,$$

для довільного елемента $c\in\mathbf{B}$. Підставляючи в (3.46) представлення (3.54) отримаємо

$$x(t,c)=U(t,\lambda)U_0(\lambda)c+U(t,\lambda)(I-U(w,\lambda))^{-}\int_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=U(t,\lambda)U_0(\lambda)c+\int_0^w K(t,\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^w U(t,\lambda)(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda))-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}-U_0(\lambda)+I)\times$$

$$\times U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=U(t,\lambda)U_0(\lambda)c+\int_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким чином рівність (3.49) виконується, що й завершує доведення теореми.

Коментарі

1. У випадку, коли $\mathbf{B}=H$ – простір Гільберта, множина σ_{NS} буде співпадати з відносним спектром, введеним в роботі Асплунда [286]. Дійсно, в цьому

випадку оператор $I-U(w,\lambda)$ буде нормально - розв'язним, а отже згідно монографії [314] псевдооборотним. З властивостей псевдооберненого оператора безпосередньо випливає його відносна оборотність. З роботи Е.Дойча [345] відомо, що якщо для оператора A існує оператор B такий, що $ABA=A$, то можна підібрати оператор C такий, що $ACA=A,\ \ CAC=C$. З цього факту випливає, що довільний відносно оборотний оператор є також узагальнено-оборотним й відносний спектр співпадає з множиною σ_{NS}.

2. У випадку простору Банаха умова належності $\lambda\in\rho_{NS}$ еквівалентна нормальній розв'язності оператора $I-U(w,\lambda)$. Ця умова [97], [314] не гарантує існування узагальнено-оберненого до оператора $I-U(w,\lambda)$. Для існування узагальнено-оберненого необхідно й достатньо [97], [314], щоб ядро $N(I-U(w,\lambda))$ та образ $R(I-U(w,\lambda))=\overline{R(I-U(w,\lambda))}$ були доповнювальними підпросторами вихідного простору Банаха (відносно доповнювальності підпросторів простору Банаха дивіться роботу Кадеця М. [122], а також статтю Пельчинського А. [191]). Основна теорема отримана без припущення доповнювальності підпростору $R(I-U(w,\lambda))$. Насправді у випадку, коли оператор $U(w,\lambda)$ є стійким праворуч й оператор $I-U(w,\lambda)$ має замкнену область значень, підпростір $R(I-U(w,\lambda))$ завжди буде доповнювальним [121]. Оператор $I-U(w,\lambda)$ буде узагальнено-оборотним. Більше того, оскільки $I-U(w,\lambda)$ діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ в себе, то він буде зведено-оборотним згідно означення з монографії Королюка В.С., Турбіна А.Ф. [132], так як справедливий наступний розклад простору $\mathbf{B}$ в пряму суму

$$\mathbf{B}=N(I-U(w,\lambda))\oplus R(I-U(w,\lambda)).$$

3. Якщо оператор $I-U(w,\lambda)$ має скінченновимірне ядро, то його нуль - простір буде завжди доповнювальним. В цьому випадку його розширення на весь простір таким чином, щоб розширений оператор був оборотним, можна будувати по-іншому (без оператора усереднення). Результати такого сорту детально викладені в статтях [99, 96] й повязані з лемою Аткінсона

Ф.Р. [17]. Розширений оператор будується з допомогою додавання до вихідного оператора проектора на його нуль - простір. В силу скінченновимірності $N(I - U(w, \lambda))$ цей проектор може бути представленим з допомогою біортогональної системи елементів до елементів базису нуль-простору оператора $I - U(w, \lambda)$ [96] (про це йшла мова в попередній главі).

4. У випадку, коли нуль-простір є нескінченновимірним доповнювальним підпростором, для побудови проектора у вигляді, аналогічному до отриманого в [96], необхідно існування біортогональної системи елементів до базисної. Можливість такого представлення досліджувалася в попередньому розділі (дивіться також проблему апроксимації детально викладену в [190, 191]).

5. Відзначимо, що існують й інші методи для знаходження періодичних розв'язків крайової задачі (3.44), (3.45), а також обмежених розв'язків, що буде продемонстровано в наступних главах.

6. У випадку, коли в представленні (3.54) можна зробити граничний перехід при $\mu \to 1$ (наприклад, коли ряд $\sum_{l=0}^{\infty}(U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l$ збіжний), формула (3.54) приймає більш зручний вигляд

$$(I - U(w, \lambda))^{-}x = \sum_{l=0}^{\infty}(U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l x - U_0(\lambda)x. \tag{3.55}$$

Основною метою цієї частини було послаблення умови стійкості за якої дане рівняння розглядалося Крейном М.Г. [137].

3.4. ВИСНОВКИ

1) Досліджено періодичну та двоточкову крайову задачу для операторно-диференціального рівняння Хіла в просторі Гільберта. Знайдено необхідні й достатні умови існування узагальнених розв'язків даної задачі та представлено відповідні узагальнені розв'язки;

2) Знайдено умови біфуркації розв'язків для операторно-диференціального рівняння Хіла в просторі Гільберта;

3) В просторі Банаха досліджено параметричну крайову задачу з періодичними операторними коефіцієнтами. Введено поняття відносного спектра оператора й за допомогою нього знайдено необхідні та достатні умови розв'язності даної задачі;

4) Розв'язки крайових задач для операторно-диференціального рівняння Хіла та параметричної крайової задачі з періодичними операторними коефіцієнтами представлено з допомогою побудованого у роботі узагальненого оператора Гріна.

РОЗДІЛ 4
ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ДИХОТОМІЯ ТА ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ ТА БАНАХА

Одним з центральних питань якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання про поведінку розв'язків на нескінченності. Експоненціально-дихотомічні на всій осі системи утворюють клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так й необмежено зростати. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку розглядалися ще О.Перроном, А.Майзелем [428] й далі у відомих роботах В.Коппеля [339], Р.Саккера, Дж.Селла [452, 453, 454], Ю.Мітропольского, А.Самойленка, В.Кулика [177], а у нескінченновимірних просторах Банаха — у монографіях М.Крейна [137], Ю.Далецкого та М.Крейна [103], Х.Массери та Х.Шеффера [169], Ф.Хартмана [258], І.Чуєшова [336].

У статтях К.Палмера [419], [418] умова експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи була послаблена з заміною на умову експоненціальної дихотомії на півосях й вперше була доведена нетеровість відповідного оператора при розв'язанні задачі про обмежені на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у роботі [309], де з використанням узагальнено-обернених операторів й псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць досліджувалася задача про існування обмежених на всій осі розв'язків при лінійних та нелінійних збуреннях системи. Ці й інші результати знайшли своє відображення у монографії О.Бойчука, А.Самойленко [314].

Поняття експоненціальної дихотомії для еволюційних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, систематично вивчалося у монографії Д.Хенрі [261]. У статті Х.Родрігеса, Дж.Філхо [449] доведений аналог альтернативи Фредгольма (за припущення експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння). Дослідженню фредгольмовості оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами присвячено статті А.Баскакова [22, 23, 24, 25], Ю.Латушкіна, Ю.Томілова [379].

Даний розділ присвячено питанню існування обмежених розв'язків різного класу як лінійних, так й слабко нелінійних диференціальних рівнянь та крайових задач у просторах Фреше та Банаха за умов експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння.

4.1. Обмежені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь в просторі Банаха

В цій частині для лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь в просторі Банаха наведено необхідні й достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків, за припущення, що однорідне рівняння $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях.

Лінійні рівняння з обмеженим оператором

У цій частині наведено основні результати з теорії обмежених розв'язків у просторі Банаха з обмеженим операторним коефіцієнтом у правій частині. Значна частина цих результатів отримана у статтях [41, 44, 197, 199].

Постановка задачі й основні поняття

У банаховому просторі $\mathbf{B}$, розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у простір Банаха $\mathbf{B}$, $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$

$$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) := \{f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbf{B}, f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B}), |||f||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)||_{\mathbf{B}} < \infty\},$$

$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — банахів простір функцій, неперервних та обмежених на $\mathbb{R}$; операторнозначна функція $A(t)$ є сильно-неперервною з відповідною нормою $|||A||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||A(t)|| < \infty$, а розв'язок $x = x(t)$ рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s))ds,$$

неперервно диференційовний у кожній точці $t \in \mathbb{R}$ й задовольняє рівняння (4.1) всюди на $\mathbb{R}$. Необхідно знайти розв'язок $x(t)$ рівняння (4.1) у просторі функцій Банаха $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ й обмежених разом з похідною. Припустимо, що однорідне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \tag{4.2}$$

є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P та Q відповідно, тобто існують проектори $P(P^2 = P)$ та $Q(Q^2 = Q)$, константи $k_{1,2} \geq 1$ та $\alpha_{1,2} > 0$ такі, що

$$||U(t)PU^{-1}(s)|| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, t \geq s,$$

$$||U(t)(I-P)U^{-1}(s)|| \leq k_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, s \geq t, \text{ для всіх } t, s \in \mathbb{R}_+$$

та

$$||U(t)QU^{-1}(s)|| \leq k_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, t \geq s,$$

$$||U(t)(I-Q)U^{-1}(s)|| \leq k_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, s \geq t, \text{ для всіх } t, s \in \mathbb{R}_-,$$

де $U(t) = U(t, 0)$ – еволюційний оператор [103] рівняння (4.1) такий, що

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = I - \text{одиничний оператор.}$$

Для рівняння (4.1) у роботі Бойчука О.А., Покутного О.О. [41] доведено наступний результат.

Теорема 4.1. *Припустимо, що однорідне рівняння (4.2) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P та Q, відповідно. Якщо оператор*

$$D = P - (I - Q) : \mathbf{B} \to \mathbf{B}, \tag{4.3}$$

який діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ *у себе узагальнено-оборотний, то*

(i) для того, щоб існували розв'язки рівняння (4.1), обмежені на всій осі, необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *задовольняла умові*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.4}$$

де

$$H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}QU^{-1}(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}(I - P)U^{-1}(t),$$

(ii) за виконання умови (4.4), розв'язки рівняння (4.1), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$x_0(t, c) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t), \ c \in \mathbf{B}, \tag{4.5}$$

де $(G[f])(t)$ *[41] — узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки,* D^- *— узагальнено обернений до оператора* D*, проектори* $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D$ *та* $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$*,* c *— довільний елемент простору Банаха* $\mathbf{B}$*.*

Зауваження 4.1. *I. Нагадаємо, що якщо оператор* D *узагальнено-оборотний [314], то:*

(i) оператор D *нормально-розв'язний (* $\overline{R(D)} = R(D) = ImD$ *);*

(ii) підпростір $N(D) = kerD$ *має пряме доповнення в* $\mathbf{B}$*;*

(iii) підпростір $R(D)$ *має пряме доповнення в* $\mathbf{B}$*.*

За виконання цих умов для оператора D *завжди існує узагальнено-обернений оператор* D^-*.*

II. У скіченновимірному випадку, коли $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ *та оператор* D *є* $n \times n$ *-вимірною матрицею, властивості (i), (ii), (iii) завжди виконуються (тому, що підпростори* $N(D)$ *та* $N(D^*) = cokerD$ *скінченновимірні). Зазначимо, що умова (4.4) рівносильна ортогональності неоднорідності рівняння*

(4.1) до розв'язків відповідного однорідного спряженого рівняння. У такій ситуації отримаємо відому лему К.Палмера [419].

III. Застосування теорії узагальнено-обернених операторів й псевдообернених матриць до дослідження вихідної задачі, дозволяє отримати як раніше відомі результати, так й нові факти. Якщо ми розглянемо рівняння в $\mathbb{R}^n$ за припущення, що відповідне лінійне однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях, то оператор

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t),$$

може бути лише нетеровим [309]. А у випадку, коли ми розглядаємо рівняння у просторі Банаха $\mathbf{B}$*, вихідна задача має значно більше варіантів розв'язків. Згідно класифікації Крейна С. [140], з теореми 4.1 випливає, що оператор* $(Lx)(t)$ *може бути:*

1) нормально-розв'язним оператором $(\overline{ImL} = ImL)$*;*

2)$d-$*нормальним* $(\overline{R(L)} = R(L),\ dimcokerL < \infty)$*;*

3)$n-$*нормальним* $(\overline{R(L)} = R(L), dimkerL < \infty)$*;*

4) нетеровим $(indL = dimkerL - dimcokerL < \infty)$*;*

5) фредгольмовим $(indL = 0)$*.*

Лінійні та нелінійні рівняння з необмеженим оператором

У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad t \in J \tag{4.6}$$

де, при кожному $t \in J \subset \mathbb{R}$, оператор $A(t)$ є замкненим з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, що не залежить від t. У подальшому традиційно $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ означає простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з простору $\mathbf{B}$ у себе.

Нагадаємо декілька класичних понять теорії напівгруп операторів й пов'язаних із ними фактів.

Означення 4.1. *[449], [141, с.237]. Множина обмежених лінійних операторів* $\{T(t,s)|\ t \geq s;\ t,s \in J\}$ *у просторі Банаха* $\mathbf{B}$ *називається еволюційним* *оператором, якщо виконуються наступні умови:*

$$(i) \quad T(s,s) = I, \quad s \in J;$$

$$(ii) \quad T(t,\sigma)T(\sigma,s) = T(t,s), \quad t \geq \sigma \geq s \text{ в } J.$$

Якщо $T(t,s)$ додатково задовольняє умові

$$(iii) \quad x \in \mathbf{B} \quad \text{відображення } (t,s) \mapsto T(t,s)x \text{ неперервне } t \geq s,$$

то говорять, що $T(t,s)$ сильно неперервний еволюційний оператор (або родина сильно неперервних еволюційних операторів).

Якщо задача Коші, породжена рівнянням (4.6) та початковою умовою $x(s,s,x_0) = x_0 \in D$ рівномірно коректна [141], то можна визначити для $t \geq s$ на J лінійний оператор $T(t,s) : D \to \mathbf{B}$ за правилом

$$T(t,s)x_0 = x(t,s,x_0).$$

Справедливе наступне твердження, доведене Крейном С.Г. [141, с.237-239].

Твердження. *Припустимо, що задача Коші для рівняння (4.26) рівномірно коректна. Тоді родина лінійних операторів $\{T(t,s),\ t \geq s,\ t,s \in J\}$, визначена вище, є сильно неперервним еволюційним оператором. Крім того, $T(t,s)D \subset D$ та, якщо $x \in D$, то $T(t,s)x$ диференційовний за змінною t та*

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t,s)x = A(t)T(t,s)x, \quad t \geq s, \quad t,s \in J.$$

Якщо відображення $t \mapsto A(t)$ сильно неперервне, то $T(t,s)x$ диференційовний для $s < t$ на J для всіх $x \in D$ й

$$\frac{\partial}{\partial s}T(t,s)x = -T(t,s)A(s)x.$$

У цьому випадку кажуть, що $T(t,s)$ еволюційний оператор, *асоційований* з рівнянням (4.26).

При фіксованому $t \geq s$ оператор $T(t,s)$ буде обмеженим лінійним оператором й так, як множина D щільна у $\mathbf{B}$, то його можна розширити на весь простір $\mathbf{B}$ за неперервністю, що у подальшому і припускається. Розширення еволюційного оператора на весь простір буде позначатися таким же чином.

Означення 4.2. *[261, с.245]. Еволюційний оператор* $\{T(t,s)|\ t \geq s;\ t, s \in J\}$ *допускає експоненціальну дихотомію на* J*, якщо існують проекторнозначна оператор - функція* $\{P(t)|t \in J\}$ *в* $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ *й дійсні константи* $\alpha > 0$ *та* $M \geq 1$ *такі, що:*

$$(i)\ \ T(t,s)P(s) = P(t)T(t,s), \quad t \geq s;$$

(ii) *Звуження* $T(t,s) \restriction_{N(P(s))}, t \geq s$ *оператора* $T(t,s)$ *на ядро* $N(P(s))$ *проектора* $P(s)$ *здійснює ізоморфізм з* $N(P(s))$ *на* $N(P(t))$*. Визначимо* $T(s,t)$*, як обернений*

$$T(s,t) = (T(t,s) \restriction_{N(P(s))})^{-1} : N(P(s)) \to N(P(s))$$

$$(iii)\ \ \|T(t,s)P(s)\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}, \ \ t \geq s;$$

$$(iiii)\ \ \|T(t,s)(I - P(s))\| \leq Me^{-\alpha(s-t)}, \ \ s \geq t.$$

Окремий інтерес представляє вивчення експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}_s^- = (-\infty; s]$, $\mathbb{R}_s^+ = [s; \infty)$ (у цьому випадку проекторнозначні функції, визначені на півосях, будемо позначати через $P_-(t)$ для всіх $t \geq s$, й $P_+(t)$ для всіх $t \leq s$, з константами M_1, α_1 та M_2, α_2 відповідно).

Ця частина присвячена отриманню необхідних та достатніх умов існування слабких обмежених розв'язків для неоднорідного рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \qquad t \in J \tag{4.7}$$

з $f \in BC(J, \mathbf{B}) = \{f : J \to \mathbf{B}; f \text{ неперервна та обмежена}\}$. Обмеженість розуміємо у тому сенсі, що $|||f||| = \sup_{t \in J} ||f(t)|| < \infty$.

Означення 4.3. *[449]. Якщо* $f : J \to \mathbf{B}$ *неперервна вектор - функція,* $T(t,s)$ *є асоційованим з (4.6) сильно неперервним еволюційним оператором на* J*, то и називається слабким (узагальненим) розв'язком на* J *неоднорідного рівняння (4.7), якщо и неперервна й задовольняє рівність*

$$u(t) = T(t,\tau)u(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)f(s)ds, \ \ t \geq \tau \tag{4.8}$$

для кожного $\tau \in J$.

Основний результат цієї частини можна сформулювати наступним чином.

Теорема 4.2. *Нехай* $\{T(t,s)|\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ *є сильно неперервний еволюційний оператор, асоційований з рівнянням (4.6). Припустимо, що наступні умови виконано:*

1) $T(t,s)$ *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$ *відповідно;*

2) оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ *є узагальнено-оборотним.*

Тоді:

1) для того, щоб існували слабкі обмежені на всій осі розв'язки рівняння (4.7) необхідно та достатньо, щоб вектор - функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *задовольняла умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.9}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t)$*;*

2) за виконання умови (4.9), слабкі розв'язки рівняння (4.7) мають наступний вигляд:

$$x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0), \quad \forall c \in \mathbf{B} \tag{4.10}$$

де

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad +T(t,s)P_+(s)D^-[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^s T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ t \geq s \\ \int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^s T(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad +T(t,s)(I - P_-(s))D^-[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_{-\infty}^s T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ s \geq t \end{cases}$$

- узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки :

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt;$$

$$\mathcal{L}(G[f])(t,0) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

та

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t),$$

D^- - узагальнено - обернений до оператора D; $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D$, $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$ - проектори [97] на ядро та коядро оператора D.

Зауваження 4.2. *Аналогічна теорема залишається вірною й у тому випадку, коли еволюційний оператор $T(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_s^+$ та $\mathbb{R}_s^-$.*

Далі буде розглядатися випадок $s = 0$ для зручності читача.

Доведення. Розв'язки рівняння (4.7), обмежені на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$, мають наступний вигляд:

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} T(t,0)P_+(0)\xi_1 - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \\ T(t,0)(I - P_-(0))\xi_2 + \int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \\ \qquad - \int_t^0 T(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau, \quad t \leq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Дійсно:

$$||T(t,0)P_+(0)\xi_1|| \leq ||T(t,0)P_+(0)||||\xi_1|| \leq M_1 e^{-\alpha_1 t}||\xi_1||,$$

та

$$\frac{\partial (T(t,0)P_+(0)\xi_1)}{\partial t} = A(t)T(t,0)P_+(0)\xi_1.$$

Таким чином вираз $T(t,0)P_+(0)\xi_1$ представляє всі обмежені на $\mathbb{R}_0^+$ розв'язки однорідного рівняння (4.6).

Доведемо тепер обмеженість одного з інтегралів, визначених у (4.11).

$$|| \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau|| \leq \int_t^{+\infty} ||T(t,\tau)(I - P_+(\tau))||||f(\tau)||d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| \int_t^{+\infty} M_1 e^{\alpha_1(t-\tau)} d\tau = \frac{M_1}{\alpha_1}|||f||| < \infty.$$

Обмеженість інших інтегралів перевіряється аналогічним чином. Виходячи з того, що

$$\frac{\partial (- \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau)}{\partial t} =$$

$$T(t,t)(I-P_+(t))f(t)-A(t)\int_t^{+\infty}T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+$$

$$+T(t,t)P_+(t)f(t)+A(t)\int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau=f(t)+$$

$$+A(t)\{-\int_t^{+\infty}T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+\int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau\}$$

переконуємося у тому, що вираз (4.11) дійсно визначає всі обмежені розв'язки рівняння (4.7) на півосях.

Для того, щоб вираз (4.11) визначав слабкі обмежені розв'язки на всій осі необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$x(0+,\xi_1,\xi_2)=x(0-,\xi_1,\xi_2).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$P_+(0)\xi_1-\int_0^{+\infty}T(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau= \tag{4.12}$$

$$=(I-P_-(0))\xi_2+\int_{-\infty}^0 T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Якщо ξ_1 та ξ_2 розв'язки рівняння (4.12), то підставивши їх у (4.11) отримаємо слабкий на всій осі розв'язок рівняння (4.7). Покажемо, що за виконання умов теореми, множина слабких обмежених на всій осі розв'язків рівняння (4.7) може бути знайдена у вигляді

$$x(t,\xi)=\begin{cases} T(t,0)P_+(0)\xi-\int_t^{+\infty}T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+ \\ \qquad +\int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t\geq 0 \\ T(t,0)(I-P_-(0))\xi+\int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau- \\ \qquad -\int_t^0 T(t,\tau)(I-P_-(\tau))f(\tau)d\tau, \quad t\leq 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

тобто, що потужності множин слабких обмежених розв'язків (4.11) та (4.13) співпадають й елементи ξ_1 та ξ_2 можна обрати однаковими $\xi=\xi_1=\xi_2$. Ясно, що будь - який обмежений розв'язок вигляду (4.13) міститься у множині слабких обмежених розв'язків (4.11) за виконання умов розв'язності.

Перепишемо рівняння (4.12) у наступному вигляді:

$$P_+(0)\xi_1 = (I - P_-(0))\xi_2 + g, \tag{4.14}$$

де $g = \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^{+\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau$.

Використовуючи те, що $P_+^2(0) = P_+(0)$, отримаємо для кожного елемента $\xi_1 : P_+^2(0)\xi_1 = P_+(0)\xi_1$. Підставивши у (4.14) будемо мати, що

$$P_+(0)((I - P_-(0))\xi_2 + g) = (I - P_-(0))\xi_2 + g,$$

або

$$P_+(0)(I - P_-(0))\xi_2 - (I - P_-(0))\xi_2 = g - P_+(0)g.$$

Використовуючи тепер, що $(I - P_-(0))^2 = I - P_-(0)$, отримаємо наступне рівняння

$$P_+(0)(I - P_-(0))\xi_2 - (I - P_-(0))^2\xi_2 = g - P_+(0)g,$$

яке можна переписати у вигляді

$$D(I - P_-(0))\xi_2 = (I - P_+(0))g. \tag{4.15}$$

За умовою теореми, оператор D - нормально - розв'язний (навіть узагальнено оборотний), тому [314], необхідною й достатньою умовою розв'язності (4.15) буде наступна умова: $\mathcal{P}_{N(D^*)}(I - P_-(0))g = 0$ (згідно [97] $\mathcal{P}_{N(D^*)}$ можна знаходити з допомогою рівності $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$). Оскільки $\mathcal{P}_{N(D^*)}D = 0$ (це випливає наприклад з того, що $\mathcal{P}_{N(D^*)}D = (I - DD^-)D = D - DD^-D = D - D = 0$), або, що те саме $\mathcal{P}_{N(D^*)}(P_+(0) - (I - P_-(0))) = 0$, то $\mathcal{P}_{N(D^*)}(I - P_+(0)) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)$. Виходячи з цього знайдемо $\mathcal{P}_{N(D^*)}g$:

$$\mathcal{P}_{N(D^*)}\int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau + \mathcal{P}_{N(D^*)}\int_0^{+\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau =$$

$$= \mathcal{P}_{N(D^*)}(P_-^2(0)\int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)f(\tau)d\tau + (I - P_+(0))^2\int_0^{+\infty} T(0,\tau)f(\tau)d\tau) =$$

$$= \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)(\int_{-\infty}^{0} P_-(0)T(0,\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^{+\infty} (I - P_+(0))T(0,\tau)f(\tau)d\tau) =$$

$$= \mathcal{P}_{N(D^*)} P_-(0) g = \mathcal{P}_{N(D^*)} (I - P_+(0)) g = 0.$$

Умова $\mathcal{P}_{N(D^*)} g = 0$ є необхідною та достатньою для розв'язності рівняння $D\xi = g$, або $P\xi = (I - Q)\xi + g$, яке співпадає з рівнянням (4.14), якщо покласти $\xi = \xi_1 = \xi_2$. Таким чином доведено, що множина обмежених розв'язків (4.11) є підмножиною множини обмежених розв'язків (4.13) й тим самим вони співпадають. В силу вище сказаного отримаємо, що умова існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (4.7) рівносильна розв'язності наступного операторного рівняння:

$$D\xi = \int_0^{\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau. \qquad (4.16)$$

Так як оператор D узагальнено - оборотний, то рівняння (4.16) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(D^*)} \{ \int_0^{\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau \} = 0.$$

За виконання цієї умови рівняння (4.16) має множину розв'язків

$$\xi = D^- (\int_0^{\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau) + \mathcal{P}_{N(D)} c,$$

де c - довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$. Підставляючи отримані розв'язки в (4.11) отримаємо (4.10).

Доведемо властивість узагальненого оператора Гріна відносно стрибка у точці 0 використовуючи позначення:

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = -\int_0^{\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau)) f(\tau) d\tau + P_+(0) D^- g -$$

$$- \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau) P_-(\tau) f(\tau) d\tau - (I - P_-(0)) D^- g = -g + P_+(0) D^- g - D^- g +$$

$$+ P_-(0) D^- g = (P_+(0) - I + P_-(0)) D^- g - g = D D^- g - g = -(I - D D^-) g =$$

$$= -\mathcal{P}_{N(D^*)} g = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt.$$

Друга властивість перевіряється безпосередньою підстановкою оператора Гріна у рівняння (4.7). Теорему доведено.

Для того, щоб показати зв'язок між доведеним твердженням та результатами роботи [449] сформулюємо допоміжну лему.

Лема. *Якщо проектори $P_+(0)$ та $P_-(0)$ комутують ($[P_+(0), P_-(0)] = 0$), то оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ завжди має узагальнено - обернений, який співпадає з оператором D.*

Доведення. Зрозуміло, що оператор D обмежений. Знайдемо спочатку D^2:

$$D^2 = (P_+(0) - I + P_-(0))(P_+(0) - I + P_-(0)) = P_+^2(0) - P_+(0) + P_-(0)P_+(0) -$$

$$-P_+(0) + I - P_-(0) + P_+(0)P_-(0) - P_-(0) + P_+^2(0) =$$

$$= 2P_+(0)P_-(0) - P_+(0) - P_-(0) + I.$$

Тоді

$$D^3 = D^2 D = (2P_+(0)P_-(0) - P_+(0) - P_-(0) + I)(P_+(0) - I + P_-(0)) =$$

$$= 2P_+(0)P_-(0)P_+(0) - P_+(0)^2 - P_-(0)P_+(0) + P_+(0) - 2P_+(0)P_-(0) +$$

$$+P_+(0) + P_-(0) - I + 2P_+(0)P_-(0)^2 - P_+(0)P_-(0) - P_-(0)^2 + P_-(0) =$$

$$= -2P_+(0)P_-(0) + 2P_+(0)P_-(0) + P_+(0) + P_-(0) - I = D.$$

З отриманої рівності випливає, що $DDD = D$, а це і означає, що D узагальнено оборотний й $D = D^-$. Таким чином лему доведено.

Зауваження 4.3. *Основні результати роботи [449] отримано за припущення, що проектори $P_+(0)$ та $P_-(0)$ комутують. З леми та попередньої теореми отримуємо, як наслідок результати з [449].*

Так, як довільний фредгольмів оператор є узагальнено - оборотним, то випадок, розглянутий в [379], також задовольняє умовам доведеної теореми.

4.2. Нелінійні диференціальні рівняння у просторі Банаха з необмеженим оператором у лінійній частині

У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t). \tag{4.17}$$

Будемо шукати обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (4.17), який перетворюється в один із розв'язків $x(t,0) = x_0(t,c)$ породжуючого рівняння при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови будемо припускати, що оператор - функція $Z(x,t,\varepsilon)$ задовольняє вимозі:

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C[||x - x_0|| \leq q] \times BC(\mathbb{R},\mathbf{B}) \times C[0,\varepsilon_0],$$

де q - деяка додатня стала (непреревність у околі породжуючого розв'язку).

Покажемо, що ця проблема може бути розв'язаною з допомогою операторного рівняння для породжуючих констант

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c),t,0)dt = 0. \tag{4.18}$$

Теорема 4.3. *(необхідна умова). Припустимо, що однорідне рівняння (4.6) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно, а нелінійне рівняння (4.17) має обмежений розв'язок $x(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється в один з розв'язків породжуючого рівняння (4.6) зі сталою $c = c^0 : x(t,0) = x_0(t,c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді ця стала повинна задовольняти рівняння для породжуючих елементів(4.18).*

Доведення. Якщо рівняння (4.17) має обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$, то згідно доведеної теореми повинна виконуватись умова розв'язності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{f(t) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt = 0. \tag{4.19}$$

Використовуючи умову (4.9) отримуємо, що умова (4.19) еквівалентна наступній: $\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0$. Після скорочення на $\varepsilon \neq 0$ отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0.$$

При $\varepsilon \to 0$, $x(t,\varepsilon) \to x_0(t,c^0)$. Остаточно (використовуючи неперервність оператор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$), отримаємо

$$F(c^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c^0),t,0)dt = 0,$$

що й доводить теорему.

Для отримання достатньої умови існування обмежених розв'язків рівняння (4.17) будемо додатково припускати, що оператор - функція $Z(x,t,\varepsilon)$ сильно диференційовна в околі породжуючого розв'язку ($Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[||x-x_0|| \leq q]$).

Ця задача може бути розв'язаною з допомогою оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : \mathbf{B} \to \mathbf{B},$$

де $A_1(t) = Z^1(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0;\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше).

Теорема 4.4. *(достатня умова). Припустимо, що однорідне рівняння (4.6) допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$ *відповідно, а рівняння (4.7) має обмежені розв'язки у вигляді (4.11). Нехай для оператора* B_0 *виконано наступні умови:*

1) оператор B_0 *є узагальнено - оборотним;*

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді, для довільного елемента $c = c^0 \in \mathbf{B}$, *що задовольняє рівняння для породжуючих констант (4.18), існує принаймні один слабкий обмежений розв'язок рівняння (4.17). Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою ітераційного процесу*

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0(\tau,c^0) + y_k,\tau,\varepsilon)](t,0),$$

$$c_k = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Доведення. У рівнянні (4.17) виконаємо наступну заміну змінних $x(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon)$, де стала c^0 задовольняє (4.18). У результаті приходимо до рівняння для y :

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + \varepsilon Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{4.20}$$

Необхідно знайти обмежений розв'язок $y(t,\varepsilon) : y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(\mathbb{R},\mathbf{B}), y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], y(t,0) = 0$. Очевидно, що розв'язність рівняння (4.20) еквівалентна розв'язності рівняння (4.17). Випишемо цю умову для y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0. \tag{4.21}$$

За виконання цієї умови множина обмежених розв'язків рівняння (4.20) матиме вигляд:

$$y(t,\varepsilon) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon),$$

де

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0 + y,\tau,\varepsilon)](t,0).$$

Так як оператор $Z(x,t,\varepsilon)$ диференційовний за Фреше в околі породжуючого розв'язку, то для нього справджується представлення

$$Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(x_0(t,c^0),t,0)+$$

$$+A_1(t)y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де $A_1(t) = Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}$, а для членів більш високого порядку $\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)$ будуть виконаними співвідношення

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \mathcal{R}_x^{(1)}(0,t,0) = 0.$$

Умова (4.21) тоді може бути переписана наступним чином:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{Z(x_0(t,c^0),t,0) + A_1(t)\{T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon)\}\}dt +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0. \qquad (4.22)$$

Використовуючи позначення, перепишемо умову (4.22) у вигляді операторного рівняння:

$$B_0 c = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt. \qquad (4.23)$$

Згідно теореми 4.2, необхідною й достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (4.23) буде умова

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt = 0,$$

яка виконується в силу припущення 2)

$$(\mathcal{P}_{N(B_0^*)}H(t) = \mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t) = 0).$$

Тоді елемент c можна обрати у вигляді

$$c = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt.$$

Таким чином ми маємо наступну операторну систему

$$\left\{\begin{array}{r} y(t,\varepsilon) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon), \\ c = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt, \\ \overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0). \end{array}\right. \qquad (4.24)$$

Введемо допоміжний вектор $u = (y, c, \overline{y})^t \in \mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}$, що належить декартовому добутку $\mathbf{B}^3$ (t означає операцію транспонування), й допоміжний оператор $L_1 g = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)g(t)dt$. Тоді операторна система (4.24) може бути переписана наступним чином

$$u = \begin{bmatrix} 0 & T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0) \end{pmatrix}.$$

У свою чергу ця операторна система еквівалентна наступній

$$\begin{bmatrix} I & -T(t,0)P_+(0)P_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0) \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Введемо позначення :

$$L = \begin{bmatrix} I & -T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0) \end{pmatrix}.$$

Оператор L має обмежений обернений L^{-1}. Дійсно, оператор L^{-1} може бути виписаний у явному вигляді

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)} & T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Те, що так визначений оператор задовольняє рівність $LL^{-1} = L^{-1}L = I$ перевіряється безпосередньою підстановкою.

Доведемо, що цією рівністю дійсно визначається обмежений оператор.

Нам необхідно довести, що існує стала $c_1 > 0$, що для всіх $u \in \mathbf{B}^3$ виконується нерівність $\|L^{-1}u\|_{\mathbf{B}^3} \leq c_1\|u\|_{\mathbf{B}^3}$. Ця нерівність еквівалентна [141] наступній (зі сталою $c_2 > 0$) : для довільних $y, c, \overline{y} \in \mathbf{B}$

$$|||L^{-1}(y,c,\overline{y})^t|||_{\mathbf{B}^3} \leq c_2(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}),$$

$$L^{-1}(y,c,\overline{y})^t = \begin{pmatrix} y + T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y} \\ c + L_1\overline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Доведемо обмеженість норми кожної компоненти вектора у просторі Банаха $\mathbf{B}$:

$$|||y + T(\cdot,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + T(\cdot,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} +$$

$$+|||T(\cdot,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}|||_{\mathbf{B}}|||c|||_{\mathbf{B}} + |||T(\cdot,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}}+$$

$$+|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||y|||_{\mathbf{B}} + c_1|||c|||_{\mathbf{B}} + c_2|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}};$$

Аналогічно

$$|||c + L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||c|||_{\mathbf{B}} + |||L_1|||_{\mathbf{B}}|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||c|||_{\mathbf{B}} + c_3|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Таким чином

$$|||L^{-1}(y,c,\overline{y})^t|||_{\mathbf{B}^3} \le |||y|||_{\mathbf{B}} + (c_1+1)|||c|||_{\mathbf{B}} + (1+c_2+c_3)|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le c_4(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}),$$

де $c_4 = \max\{1, 1+c_1, 1+c_2+c_3\}$. Виходячи з цього, отримуємо обмеженість оператора L^{-1}.

Тоді операторну систему (4.24) запишемо у вигляді:

$$u = L^{-1}g = L^{-1}S(\varepsilon)u,$$

де оператор $S(\varepsilon)$ у загальному випадку нелінійний. Варіюючи параметром ε й користуючись обмеженістю оператора L^{-1}, можемо досягти того, щоб оператор $L^{-1}S(\varepsilon)$ був стискуючим. Тоді з принципа стискаючих відображень [141] випливає, що операторна система (4.24) має єдину нерухому точку, яка й визначає обмежений розв'язок рівняння (4.17).

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами

Для встановлення зв'язку між необхідною та достатньою умовами розв'язності рівняння (4.17) встановимо спочатку допоміжне твердження.

Наслідок. *Припустимо, що оператор $F(c)$ має похідну у сенсі Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Банаха $\mathbf{B}$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (4.18). Якщо $F^{(1)}(c)$ має обмежений обернений, то рівняння (4.18) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок для кожного c^0.*

Доведення.

$$F^{(1)}(c)[h] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}[x_0^{(1)}(t,s,c)[h]]dt.$$

Це представлення випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень у просторі Банаха [4]. Знайдемо похідну від розв'язку $x_0^{(1)}(t,c)$ за c. Оскільки $x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + (G[f])(t,0)$, то [4]

$$x_0^{(1)}(t,c)[h] = \frac{\partial x_0(t,c+\alpha h)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c+$$

$$+\alpha T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}h + (G[f])(t,0))|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c)|_{\alpha=0}+$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}h)|_{\alpha=0} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(G[f])(t,0)|_{\alpha=0} =$$

$$= T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}h, \text{ та } Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0} = A_1(t).$$

Остаточно будемо мати

$$F^{(1)}(c)[h] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt[h] = B_0[h].$$

У силу того, що оператор $F^{(1)}(c)$ оборотний, оператор B_0 також оборотний. Тому рівняння (4.18) має єдиний розв'язок, а тоді й рівняння (4.17) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок.

Зауваження 4.4. *Якщо умови наслідка виконуються, то з його доведення випливає рівність операторів $B_0 = F^{(1)}(c^0)$. Оскільки оператор $F^{(1)}(c)$ оборотний, то для оператора B_0 умови 1) та 2) достатньої умови виконуються. У цьому випадку рівняння (4.17) буде мати єдиний обмежений розв'язок для кожного $c^0 \in \mathbf{B}$. Таким чином умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ пов'язує між собою необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ еквівалентна умові простоти кореня c^0 рівняння для породжуючих амплітуд [314].*

4.3. Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь в локально - опуклих просторах

Дослідження диференціальних рівнянь у локально-опуклих просторах й просторах Фреше є актуальною задачею у зв'язку зі застосуваннями у математичній фізиці.

У даній частині розглядається узагальнення означень е-дихотомії для еволюційних рівнянь у локально - опуклих просторах з необмеженою оператор - функцією. Наводяться необхідні й достатні умови існування узагальнених обмежених розв'язків для диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Фреше з необмеженим оператором.

У повному локально-опуклому просторі E розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x + f(t), t \in J \tag{4.26}$$

де, для кожного $t \in J, A(t)$ - лінійна замкнена оператор-функція, з незалежною від часу t, щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset E$; векторфункція $f(t)$ обмежена й неперервна на J.

Припустимо, що існує обмежена оператор-функція $U(t), t \in J$ з областю визначення $D(U(t)) = D$ така, що для кожного $x \in D$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}U(t)x = A(t)U(t)x, \quad U(0) = I.$$

Оскільки множина D щільна в E, то $U(t)$ можна розширити за неперервністю на весь простір E. Оператор - функцію $U(t)$ традиційно будемо називати *еволюційним оператором*, що відповідає однорідному рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad t \in J. \tag{4.27}$$

Для простоти викладення, додатково припускаємо, що при кожному t, еволюційний оператор $U(t)$ має обмежений обернений $U^{-1}(t) : E \to E$ (так званий параболічний випадок).

Означення 4.4. *Якщо $f : J \to E$ неперервна, обмежена й $U(t)$ - еволюційний оператор, то вектор - функцію $u(t)$ будемо називати узагальненим (слабким) розв'язком рівняння (4.26), якщо $u(t)$ неперервна й рівність*

$$u(t) = U(t)U^{-1}(\tau)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} U(t)U^{-1}(s)f(s)ds,\ t \geq \tau \tag{4.28}$$

виконується для довільного $t \in J$.

Означення 4.5. *Будемо казати, що рівняння (4.27) допускає експоненціальну дихотомію на J, якщо існує проектор $P \in \mathcal{L}(E)$ такий, що для довільної напівнорми $q \in SpecE$ існує напівнорма $p \in SpecE$, константи $K \geq 1, \alpha > 0$ такі, що виконуються нерівності:*

$$q(U(t)PU^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(t-s)}p(\xi), t \geq s;$$

$$q(U(t)(I-P)U^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(s-t)}p(\xi), s \geq t,$$

де spec E — множина усіх напівнорм, заданих на E.

Дане означення, введене у роботі [197], дозволяє дослідити питання щодо існування узагальнених розв'язків за аналогією з тим, як це було зроблено у просторі Банаха.

Теорема 4.5. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ й $\mathbb{R}_-$ з проекторами P_+ та P_- відповідно. Тоді:*

1) рівняння (4.26) має узагальнені обмежені розв'язки тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння

$$P_+\xi_1 - (I-P_-)\xi_2 = g, \tag{4.29}$$

має розв'язки; тут

$$g = \int_{-\infty}^{0} P_-U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \int_{0}^{+\infty} (I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau;$$

2) за виконання умов розв'язності (4.29), рівняння (4.26) має обмежені на всій осі розв'язки, які визначаються наступним чином:

$$x(t,\xi_1,\xi_2)=\begin{cases} U(t)P_+\xi_1-\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+ \\ \quad +\int_0^t U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \;\; t\geq 0 \\ U(t)(I-P_-)\xi_2+\int_{-\infty}^t U(t)P_-U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau- \\ \quad -\int_t^0 U(t)(I-P_-)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \;\; t\leq 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Доведення. Розв'язки рівняння (4.26), обмежені на півосях мають вигляд (4.30). Дійсно, доведемо наприклад, що (4.30) визначають обмежені розв'язки для невід'ємної дійсної півосі $t\geq 0$.

З визначення еволюційного оператора для рівняння (4.26) маємо:

$$\frac{d(U(t)P_+\xi_1)}{dt}=A(t)U(t)P_+\xi_1.$$

З того, що рівняння (4.27) є е-дихотомічним випливає, що для довільної напівнорми $q\in Spec\ E$ існує напівнорма $p\in Spec\ E$ така, що

$$q(U(t)P_+\xi_1)\leq K_1e^{-\alpha t}p(\xi_1), t\geq 0.$$

Таким чином $U(t)P_+\xi_1$ визначає множину обмежених розв'язків однорідного рівняння (4.27).

$$\frac{d(-\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+\int_0^t U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)}{dt}=$$

$$=U(t)P_+U^{-1}(t)f(t)+A(t)\int_0^t U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+U(t)(I-P_-)U^{-1}(t)f(t)-A(t)\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau=f(t)+$$

$$A(t)\{-\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+\int_0^t U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\}.$$

Доведемо обмеженість одного з інтегралів:

$$q(\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)\leq\int_t^{+\infty}q(U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau))d\tau\leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} K_1 e^{-\alpha(t-\tau)} p(f(\tau)) d\tau \leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}} p(f(\tau)) \frac{K_1}{\alpha}.$$

Цілком аналогічно доводиться обмеженість інших доданків. Для того, щоб вираз (4.30) визначав обмежені розв'язки на всій осі, необхідно й достатньо, щоб

$$x(0+, \xi_1, \xi_2) = x(0-, \xi_1, \xi_2).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння :

$$P_+\xi_1 - (I - P_-)\xi_2 = \tag{4.31}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} U(t) P_- U^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} U(t)(I - P_+) U^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

За умов розв'язності цього рівняння, узагальнені обмежені розв'язки рівняння (4.26), знаходяться підстановкою у (4.30) його розв'язків. Таким чином теорему доведено.

Скажемо декілька слів відносно теореми. Розглянемо допоміжний оператор $S := (P_+, P_- - I)$ та вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Тоді рівняння (4.29) можна записати у вигляді

$$S\xi = g.$$

Але у загальному випадку, умова $\mathcal{P}_{N(S^*)} g = 0$ не гарантує розв'язність рівняння (4.29), оскільки введений оператор S не обов'язково нормально-розв'язний й, тому, рівняння (4.29) може бути не розв'язним. У цьому випадку представлення (4.30) дає узагальнені(слабкі) обмежені розв'язки лише на півосях. Для отримання повного результата необхідні додаткові умови на оператор $P_+ - I + P_-$, які дозволять отримати розв'язність рівняння (4.29). Тому будемо розглядати це ж рівняння, але у просторі Фреше F. Його геометрія дозволяє ввести поняття сильного узагальнено-оберненого оператора (як це робилося у другому розділі), й тим самим уточнити отриману теорему й сформулювати завершений результат.

Зауваження 4.5. *Нагадаємо, що якщо простір Фреше розкладається в алгебраїчну пряму суму підпросторів, то він розкладається й у топологічну* *пряму суму цих же підпросторів [215]. Наявність цього факту робить дослідження рівняння (4.29) простішим у просторі Фреше, ніж у загальних топологічних просторах й дозволяє доповнити отриману теорему до наступного твердження.*

Теорема 4.6. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P_+ та P_- відповідно, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F,$$

є сильним (X, Y) — узагальнено-оборотним.

Тоді:

1) для того, щоб існували узагальнені, обмежені на всій осі, розв'язки рівняння (4.26), необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{4.32}$$

де $H(t) = (I - \overline{D} D^-_{X,Y}) P_- U^{-1}(t)$;

2) за виконання умови (4.32), узагальнені розв'язки рівняння (4.26) будуть мати вигляд:

$$x_0(t, c) = U(t) P_+ \mathcal{P}_{N(\overline{D})} c + \overline{(G[f])}(t), \quad \forall c \in \overline{F} \tag{4.33}$$

де

$$\overline{(G[f])}(t) = \begin{cases} \begin{array}{r} \int_0^t U(t) U^{-1}(\tau) P_+ f(\tau) d\tau - \\ \int_t^{+\infty} U(t) U^{-1}(\tau)(I - P_+) f(\tau) d\tau + \\ + U(t) P_+ D^-_{X,Y} [\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I - P_+) f(\tau) d\tau + \\ \int_{-\infty}^{0} U^{-1}(\tau) P_- f(\tau) d\tau], \ t \geq 0 \\ \\ \int_{-\infty}^{t} U(t) U^{-1}(\tau) P_- f(\tau) d\tau - \\ \int_t^0 U(t) U^{-1}(\tau)(I - P_-) f(\tau) d\tau + \\ + U(t)(I - P_-) D^-_{X,Y} [\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I - P_+) f(\tau) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{0} U^{-1}(\tau) P_- f(\tau) d\tau], \ t \leq 0 \end{array} \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна, розширений на $\overline{F}$.

З урахуванням введених означень, деталі методики доведення теореми такі ж, як і попередньої.

Наслідок. *Нехай однорідне рівняння (4.27) у повному локально-опуклому просторі E є експоненціально-дихотомічним на всій осі з проектором P. Тоді, для довільної обмеженої на всій осі й неперервної вектор - функції f, існує єдиний обмежений розв'язок рівняння (4.26). Цей розв'язок має вигляд*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{4.34}$$

де

$$G(t,\tau) = \begin{cases} U(t)PU^{-1}(\tau), t \geq \tau, \\ -U(t)(I-P)U^{-1}(\tau), t < \tau. \end{cases}$$

Доведення. З проекторами P та $I-P$ пов'язані підпростори $E_1 = PE$ та $E_2 = (I-P)E$ відповідно. Підпростір E_1 складається з тих початкових значень розв'язків рівняння (4.27), що залишаються обмеженими при $t \to \infty$, а підпростір E_2 - з початкових значень розв'язків, що залишаються обмеженими при $t \to -\infty$. Оскільки ці підпростори перетинаються лише в нулі, то рівняння (4.27) не має нетривіальних обмежених розв'язків. Отже рівняння (4.26) має єдиний розв'язок, що визначається з (4.27).

Зауваження 4.6. *У випадку, коли E - простір Банаха й оператор - функція $A(t) \in \mathcal{L}(E)$ отримаємо відомі результати [103].*

Зауваження 4.7. *У випадку, коли E - квазіповний бочковий простір й оператор $A(t) = A : E \to E$ - регулярний отримаємо результати з [211]. У цьому випадку умова дихотомії еквівалентна тому, що спектр оператора A не перетинається з уявною віссю. Таким чином, у цьому випадку для спектральних проекторів $P_1 = P$ й $P_2 = I - P$ справедливе наступне представлення [211]*

$$P_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda,$$

й відповідно функція Гріна $G(\cdot)$ має вигляд

$$G(t) = \begin{cases} e^{tA}P_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} e^{\lambda t}R_\lambda d\lambda, \ t > 0, \\ -e^{tA}P_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2} e^{\lambda t}R_\lambda d\lambda, \ t < 0. \end{cases}$$

У випадку, коли A - секторіальний оператор, отримаємо результати з [261].

Наслідок. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P_+ та P_- відповідно, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F,$$

має узагальнено-обернений.

Тоді:

1) для того, щоб існували обмежені на всій осі розв'язки рівняння (4.26) необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.35}$$

де $H(t) = (I - DD^-)P_-U^{-1}(t)$;

2) за виконання умови (4.35), обмежені розв'язки рівняння (4.26) будуть мати вигляд:

$$x_0(t,c) = U(t)P_+\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t), \quad c \in F \tag{4.36}$$

де

$$(G[f])(t) = \begin{cases} \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+f(\tau)d\tau - \\ \int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)P_+D^-[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ t \geq 0 \\ \\ \int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau - \\ \int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_-)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)(I-P_-)D^-[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ t \leq 0 \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна.

Приклад. Розглянемо рівняння (4.26) у вигляді зліченної системи з діагональним оператором

$$A(t) = diag\{\underbrace{th\ t, ..., th\ t}_{k}, -th\ t, -th\ t, ...\},$$

у просторах $l^2_{loc}(\mathbf{C})$ (з системою напівнорм $||(x_1, x_2, ..., x_n, ...)||^2_{n,l^2_{loc}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, $n \in \mathbb{N}$) або Кьоте з різними ваговими векторами (означення дивіться наприклад в [211]). Тоді рівняння (4.26) є експоненціально-дихотомічним на півосях з проекторами

$$P_+ = diag\{\underbrace{0, ..., 0}_{k}, 1, 1, ...\}, \quad P_- = diag\{\underbrace{1, ..., 1}_{k}, 0, 0, ...\},$$

відповідно.

Еволюційний оператор має вигляд:

$$U(t) = diag\{\underbrace{\frac{e^t + e^{-t}}{2}, ..., \frac{e^t + e^{-t}}{2}}_{k}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, ...\}.$$

Таким чином, згідно теореми маємо, що

$$D = P_+ - I + P_- = 0, \mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D^*)} = I,$$

й так як $dim\ R[\mathcal{P}_{N(D^*)} P_-] = k$, то оператор $\mathcal{P}_{N(D^*)} P_-$ — скінченновимірний, $H(t) = diag\{H_k(t), 0\}$, де $H_k(t) = diag\{2/(e^t + e^{-t}), ..., 2/(e^t + e^{-t})\}$ — $k \times k$ вимірна матриця. Необхідна й достатня умова існування узагальнених обмежених розв'язків у просторі Фреше набуде вигляду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t) f(t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0, \\ \quad \dots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0. \end{cases}$$

Приклад. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$u_t(x, t) - th\ t u_{xx}(x, t) = f_1(x) f_2(t), \tag{4.37}$$

$$v_t(x,t) + th\ tv_{xx}(x,t) = g_1(x)g_2(t), \tag{4.38}$$

з періодичними крайовими умовами

$$u(t,0) = u(t,2\pi), u_x(t,0) = u_x(t,2\pi),$$

$$v(t,0) = v(t,2\pi), v_x(t,0) = v_x(t,2\pi),$$

в просторі $BC^1(\mathbb{R}, D'([0;2\pi]))$ неперервних та обмежених на всій осі функцій зі значеннями в просторі розподілів. В якості $f_i(x)$ можна обрати наприклад дельта-функції $f_i(x) = \delta_0$. Тоді спряжена система буде мати вигляд

$$-w_t(x,t) - th\ tw_{xx}(x,t) = f_2(t)w(0,t), \tag{4.39}$$

$$-q_t(x,t) + th\ tq_{xx}(x,t) = g_2(t)q(0,t), \tag{4.40}$$

$$u(t,0) = u(t,2\pi), u_x(t,0) = u_x(t,2\pi),$$

$$v(t,0) = v(t,2\pi), v_x(t,0) = v_x(t,2\pi),$$

та визначена в просторі $BC^1(\mathbb{R}, D([0;2\pi]))$. Як відомо простір $D([0;2\pi])$ є простором Фреше і не є банаховим. Система є експоненціально-дихотомічною на півосях та ілюструє приклад задачі до якої можна застосовувати отримані вище твердження стосовно існування обмежених розв'язків в просторах Фреше. Аналогічно можна вивчати питання стосовно існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для систем гіперболічних рівнянь вигляду

$$u_t(x,t) + th\ tu_x(x,t) + v(x,t) = f(t)\delta_0(x), \tag{4.41}$$

$$v_t(x,t) - th\ tv_x(x,t) = g(t)\delta_0(x). \tag{4.42}$$

Наслідки з теорії майже - періодичних функцій

Нагадаємо означення майже періодичної функції (див. наприклад [103]).
Означення 4.6. *Неперервна вектор - функція $f(t)$ зі значеннями у просторі Банаха E, визначена при $t \in \mathbb{R}$ є майже - періодичною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $L > 0$, що кожен інтервал довжиною, не меншою за L, містить точку τ, для якої*

$$||f(t) - f(t+\tau)|| < \varepsilon.$$

Розглянемо рівняння (4.26) у просторі Банаха з постійним (у загальному випадку необмеженим) оператором й майже - періодичним вільним членом $f(t)$. Позначимо через $\Delta(f)$- "множину не майже - періодичності"[150]. Нагадаємо, що точку $\lambda \in J$ називають точкою "майже - періодичності" функції f, якщо існує такий окіл цієї точки, що згортка $f * \varphi$ є майже-періодичною функцією для будь-якої $\hat{\varphi} \in C_0^\infty$ із носієм, що належить цьому околу ($\hat{\varphi}$- перетворення Фур'є для φ). Доповнення до цієї множини називається "множиною не майже періодичності".

Наслідок. *Нехай множина $\Delta(f)$ є розріженою й виконана одна з наступних умов :*

а) простір E не містить c_0;

б) вектор - функція f слабко компактна.

Тоді будь - який обмежений розв'язок вигляду (4.30) є майже - періодичним. Це твердження є наслідком теореми 5 із [150].

Е - дихотомія лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних

Розглянемо наступну систему рівнянь в частинних похідних :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathfrak{U}(D)u(t,x), \quad t \in [0;+\infty), \tag{4.43}$$

де $u(t,x)$ - вектор - функція з компонентами $u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x)$; $\mathfrak{U}(D) = ||a_{ij}(D)||$ - квадратна $m \times m$ матриця, елементи a_{ij} якої є многочленами з постійними коефіцієнтами від $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}; x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - точка простору $\mathbb{R}^n$.

Припустимо, що виконується наступна умова:

1. Характеристичний многочлен $d(\sigma,\lambda)$ матриці $\mathfrak{U}(\sigma)$ зображається у вигляді

$$d(\sigma,\lambda) = |\mathfrak{U}(\sigma) - \lambda I| = p(\sigma,\lambda)q(\sigma,\lambda),$$

де многочлен $p(\sigma,\lambda)(q(\sigma,\lambda))$ відносно σ й λ має при кожному фіксованому $\sigma \in \mathbb{R}^n$ усі корені $\lambda_1(\sigma),\lambda_2(\sigma),...,\lambda_k(\sigma)$ $(\lambda_{k+1}(\sigma),...,\lambda_m(\sigma))$ у лівій (правій) півплощині $Re\lambda \leq -\delta$ $(Re\lambda \geq \sigma)$.

За виконання цієї умови існує квадратна $m\times m$ матриця $B(D)$, елементами якої є многочлени з постійними коефіцієнтами від $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$ й простір Гільберта L_B, отриманий поповненням за диференціальною нормою

$$||u||_B = \{\int (B(D)u(x), u(x))dx\}^{\frac{1}{2}}$$

деякої сукупності функцій з $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для цього простору буде справджуватись наступне твердження :

Теорема 4.7. *За виконання умови 1 для рівняння (4.43) у просторі L_B має місце експоненціальна дихотомія у сенсі означення 2.*

Це твердження очевидним чином випливає з відповідного твердження роботи [142] й того факту, що означення дихотомії у сенсі даному вище, узагальнює означення дихотомії у сенсі відповідного означення роботи [142].

Приклад. Для того, щоб ще раз підкреслити відмінність дослідження питання стосовно існування обмежених розв'язків в просторах Фреше та Банаха наведемо наступний приклад. Розглянемо рівняння

$$\dot{x}_m(t) + th t x_m(t) = e^{-\frac{t}{m}}, m \in \mathbb{N} \tag{4.44}$$

в просторі Фреше, топологія якого породжується наступною системою напівнорм

$$|x|_n = \sup_{t\in[-n;\infty)} |x(t)|, n \geq 0.$$

Зауважимо, що на відміну від простору Банаха неперервних та обмежених на всій осі функцій $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ права частина цього рівняння не належить простору $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$, але належить простору Фреше означеному вище. Дійсно

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |e^{-\frac{t}{m}}| = +\infty,$$

але

$$|e^{-\frac{t}{m}}|_n = e^{\frac{n}{m}} < +\infty$$

для всіх n. Це означає, що дана функція є необмеженою в просторі Банаха, але обмеженою в просторі Фреше. Для подальших міркувань нагадаємо наступне означення.

Означення 4.7. *[342] Неперервна на всій осі функція $x(t)$ називається асимптотично майже періодичною, якщо вона може бути представлена у вигляді*

$$x(t) = f(t) + r(t), t \in \mathbb{R},$$

де f - майже періодична та r - неперервна й

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0.$$

Простір Фреше асимптотично майже періодичних функцій з визначеною вище топологією позначається $AAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Функція $e^{-\frac{t}{m}} \in AAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тоді рівняння має асимптотично майже періодичний обмежений розв'язок у вигляді

$$x_m(t) = \frac{2c_m}{e^t + e^{-t}} + \frac{e^{(1-\frac{1}{m})t}}{(1-\frac{1}{m})(e^t + e^{-t})} - \frac{e^{-(1+\frac{1}{m})t}}{(1+\frac{1}{m})(e^t + e^{-t})}.$$

Якщо розглянути банахів простір $\mathbf{B}$, але наділений топологією, породженою сукупністю напівнорм

$$\mathbf{B} \ni x \to |\varphi(x)|, \varphi \in \mathbf{B}^*,$$

то ми отримаємо локально-опуклий простір, який позначимо $\mathbf{B}_w$. Тоді справедливе наступне означення.

Означення 4.8. *[342]. Відображення $x : \mathbb{R} \to \mathbf{B}$ називається слабко майже періодичним, якщо для довільного $\varphi \in \mathbf{B}^*$, відображення $\varphi(x(t)) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Простір слабко майже періодичних розв'язків позначається $WAP(\mathbb{R},\mathbf{B})$.*

Розглянемо рівняння $\dot{x}(t) = f(t)$ в банаховому просторі $\mathbf{B}$ із правою частиною $f(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$. Як відомо [106], в скінченновимірному просторі обмеженість інтегралу $\int_0^t f(s)ds, t \in \mathbb{R}$ від майже періодичної функції гарантує те, що розв'язок $x(t)$ буде майже періодичним. На жаль в банаховому просторі такого результату не має. Відомий наступний факт.

Теорема 4.8. *[342] Якщо $f(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ та*

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds, t \in \mathbb{R},$$

то обмеженість x на $\mathbb{R}$ гарантує, що $x \in WAP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$. Більше того, для того, щоб $x \in AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, необхідно та достатньо, щоб $\mathcal{R}_x = \{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ була відносно компактною в $\mathbf{B}$.

З даного зауваження та наслідка теореми 4.6 випливає наступний результат.

Наслідок. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P_+ та P_- відповідно, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F,$$

має узагальнено-обереночний ($D \in GI(F)$), де F - банаховий простір, наділений сильною топологією.

Тоді:

1) для того, щоб існували слабкі майже періодичні розв'язки рівняння (4.26), необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in AP(\mathbb{R}, F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.45}$$

де $H(t) = (I - DD^-)P_-U^{-1}(t)$;

2) за виконання умови (4.45), слабкі майже періодичні розв'язки рівняння (4.26) будуть мати вигляд:

$$x_0(t, c) = U(t)P_+\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t), \quad c \in F \tag{4.46}$$

де

$$(G[f])(t) = \begin{cases} \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+f(\tau)d\tau - \\ \int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)P_+D^-[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ t \geq 0 \\ \\ \int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau - \\ \int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_-)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)(I-P_-)D^-[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ t \leq 0 \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна.

Нарис доведення. Належність $f \in AP(\mathbb{R}, F)$ гарантує те, що за виконання умови (4.45) вираз (4.46) визначає множину обмежених на всій осі розв'язків рівняння (4.26). Тоді з анонсованої попередньої теореми [342, с.144] випливає те, що кожен розв'язок $x_0(t, c) \in WAP(\mathbb{R}, F_w)$ є слабко майже періодичним у просторі Фреше F_w (наділеному слабкою топологією).

Зауваження 4.8. *Зауважимо, що з теореми 5.3 [342, с.140] випливає, що розв'язок $x_0(t, c) \in AP(\mathbb{R}, F)$ тоді й тільки тоді, коли він має відносно компактну множину значень у просторі F.*

4.4. Крайові задачі на всій осі

Велика кількість робіть присвячена розвиненню конструктивних методів для аналіза різних класів крайових задач. Вони традиційно займають одне з центральних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь. Крайові задачі виникають з практичною необхідністю для різних застосувань - теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування та чисельних методах, у задачах радіо інженерії, механіці, біології тощо.

Вивчаються коректні та некоректні крайові задачі. Некоректні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, імпульсних систем, нетерових операторних рівнянь стали популярними досить недавно. Вони детально вивчались у [314]. Аналіз цього класу крайових задач виявився пов'язаним із властивостями узагальнено - оберненого оператора. Даний підрозділ присвячено дослідженню лінійних крайових задач на всій осі.

Постановка задачі

У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \ , \tag{4.47}$$

$$lx(\cdot) = \alpha \ , \tag{4.48}$$

де вектор - функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у простір Банаха $\mathbf{B}$,

$$f(t) \in BC(R, \mathbf{B}) := \{f(\cdot) : R \to \mathbf{B}, |||f||| = \sup_{t \in R} \|f(t)\| < \infty\},$$

операторнозначна функція $A(t)$ сильно неперервна з відповідною нормою $|||A||| = \sup_{t\in R} ||A(t)|| < +\infty$;

$$BC^1(R, \mathbf{B}) := \{x(\cdot) \in C^1(R, \mathbf{B}), |||x||| = \sup_{t \in R}\{\|x(t)\|, \|x'(t)\|\} < \infty\},$$

- простір функцій, неперервних на $\mathbb{R}$ разом із похідною; l - лінійний та обмежений оператор, що діє з простору $BC^1(R, \mathbf{B})$ у простір Банаха $\mathbf{Y}$. Визначимо умови існування розв'язків $x(\cdot) \in BC^1(R, \mathbf{B})$ крайової задачі (4.47), (4.48) за припущення, що відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{4.49}$$

допускає експоненціальну дихотомію [103, 417, 455] на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P та Q, й константами $k_{1,2} \geq 1$ та $\alpha_{1,2} > 0$ відповідно. Еволюційний оператор, нормований в нулі, будемо позначати $U(t)$.

Основний результат

Покажемо, що за виконання умов теореми 4.2, крайова задача може бути розв'язана з допомогою оператора $B_0 = lU(\cdot)P\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B} \to \mathbf{Y}$.

Теорема 4.9. *Нехай оператор*

$$B_0 : \mathbf{B} \to \mathbf{Y},$$

що діє з простору $\mathbf{B}$ *у простір Банаха* $\mathbf{Y}$ *узагальнено - оборотний (тобто* $B_0 \in GI(\mathbf{B}, \mathbf{Y})$*). Тоді:*

(i) для того, щоб розв'язки крайової задачі (4.47), (4.48) існували, необхідно й достатньо, щоб

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}(\alpha - l((G[f])(\cdot))) = 0; \tag{4.50}$$

(ii) за виконання умови (4.50) розв'язки крайової задачі (4.47), (4.48) мають вигляд

$$x(t,\overline{c}) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\overline{c} + U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}B_0^-(\alpha - l(G[f])(\cdot)) + (G[f])(t),$$

для довільного елемента $\overline{c} \in \mathbf{B}$*, де* $(G[f])(\cdot)$ *- узагальнений оператор Гріна, визначений у теоремі 4.1;* B_0^- *- узагальнено - обернений до* B_0*,* $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}$ *- проектор, який проектує* $\mathbf{B}$ *на ядро спряженого оператора* B_0^**.*

Доведення. З теореми 4.1 маємо, що множина обмежених розв'язків рівняння (4.47) має вигляд $x(t,c) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t)$. Підставимо ці розв'язки у рівняння (4.48):

$$l(U(\cdot)P\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(\cdot)) = \alpha.$$

Так, як оператор l - лінійний, маємо:

$$l(U(\cdot)P\mathcal{P}_{N(D)})c + l((G[f])(\cdot)) = \alpha,$$

й остаточно отримаємо операторне рівняння:

$$B_0 c = \alpha - l((G[f])(\cdot)).$$

Так, як оператор B_0 узагальнено-оборотний, то для існування розв'язків крайової задачі (4.47), (4.48) необхідно та достатньо [314], щоб

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}(\alpha - l((G[f])(\cdot))) = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то

$$c = \mathcal{P}_{N(B_0)}\overline{c} + B_0^-(\alpha - l((G[f])(\cdot))), \quad \forall\, \overline{c} \in \mathbf{B}.$$

Тоді множина обмежених розв'язків крайової задачі (4.47), (4.48) має вигляд:

$$x(t,\overline{c}) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\overline{c} + U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}B_0^{-}(\alpha - l((G[f])(\cdot))) + (G[f])(t).$$

Зауваження 4.9. *Якщо* $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\times\mathbf{B}$, $lx = (x(+\infty), x(-\infty)) = (\alpha,\alpha) \in \mathbf{B}\times\mathbf{B}$, *де* α *- положення рівноваги (4.47), то всі обмежені розв'язки крайової задачі (4.47), (4.48) є "гомоклінічними" траєкторіями [360].*

Приклади. 1. Проілюструємо твердження доведені вище. Розглянемо наступну крайову задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.51}$$

$$lx(\cdot) = x(b) - x(a) = \alpha, \tag{4.52}$$

де $A(t)$ - оператор у вигляді зліченновимірної матриці, що для кожного дійсного значення t, діє у просторі Банаха $\mathbf{B} = l_p,\ p \in [1;+\infty)$ та

$$x(t) = col\{x_1(t), x_2(t), \ldots\, x_k(t), \ldots\} \;\in\; BC^1(R, l_p),$$

$$f(t) = col\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t), \ldots\} \;\in\; BC(R, l_p)$$

- зліченні вектор стовці; $a, b \in \mathbb{R}, b > 0, a < 0$;

$$\alpha = col\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\} \in l_p$$

- сталий вектор ($\alpha_i \in R, i \in N$).

Розглянемо крайову задачу (4.51), (4.52) з оператором

$$A(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{th\ t \quad 0 \quad 0}^{k} & \ldots & \ldots \\ 0 \quad th\ t \quad 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad th\ t & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & -\,th\ t & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} : l_p \to l_p. \tag{4.53}$$

Еволюційний оператор системи (4.51), (4.53) має вигляд:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{(e^t+e^{-t})/2 \qquad 0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ 0 & (e^t+e^{-t})/2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (e^t+e^{-t})/2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

Оператор, обернений до $U(t)$ має вигляд

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{2/(e^t+e^{-t}) \qquad 0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (e^t+e^{-t})/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

та відповідна однорідна система експоненціально-дихотомічна на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами

$$P = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad Q = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{1 \qquad 0 \qquad \dots}^{k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

відповідно. Таким чином маємо, що

$$D = P - (E - Q) = 0, \quad \mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D^*)} = E.$$

Так як $dimR[\mathcal{P}_{N(D^*)}Q] = k,$ то оператор $\mathcal{P}_{N(D^*)}Q$ скінченновимірний:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad\quad 0 \quad\quad \dots}^{k} & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} U^{-1}(t) = diag\{H_k(t), 0\},$$

де

$$H_k(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2/(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix} \text{ є } k \times k - \text{ вимірна матриця .}$$

Згідно теореми 4.2, для існування ров'язків системи (4.51), (4.53) обмежених на всій осі, необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t) f(t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0 \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0. \end{cases} \tag{4.54}$$

Таким чином, для того, щоб система (4.49), (4.53) мала розв'язки, обмежені на всій осі, необхідно й достатньо, щоб виконувались рівно k умов; інші функції $f_i(t)$ для всіх $i \geq k+1$ можуть бути обраними довільними з класу $BC(R, l_p)$. Більше того, система (4.49), (4.53) має нескінченну множину обмежених розв'язків. Наприклад, у якості вектор - функції f з класу $BC(R, l_p)$, можна обрати довільну f з першими k компонентами, що є непарними функціями.

Для розв'язання крайової задачі знайдемо матрицю B_0 :

$$B_0 = lU(\cdot)P\mathcal{P}_{N(D)} = U(b)P\mathcal{P}_{N(D)} - U(a)P\mathcal{P}_{N(D)},$$

остаточно

$$B_0 = \begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{0 \qquad 0 \qquad \dots}}^{k} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{cha-chb}{cha\cdot chb} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{cha-chb}{cha\cdot chb} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} : l_p \to l_p.$$

Так як $a \neq b$, то оператор $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}$ має вигляд :

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} = \begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{1 \qquad 0 \qquad \dots}}^{k} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} : l_q \to l_q \ (1/p + 1/q = 1),$$

й

$$G[f](b) - G[f](a) = \begin{pmatrix} -\int_{-\infty}^{a} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}}ds - \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}}ds \\ \dots \\ -\int_{-\infty}^{a} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}}ds - \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}}ds \\ \\ \frac{1}{2}\int_a^b (e^s + e^{-s}) f_{k+1}(s) ds \\ \dots \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}(\alpha - l(G[f])(\cdot)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{a} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}}ds + \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}}ds = -\alpha_1 \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{a} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}}ds + \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}}ds = -\alpha_k. \end{cases} \tag{4.55}$$

Таким чином, згідно теореми 4.1, крайова задача (4.51) - (4.53) допускає принаймні один обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок тоді й тільки тоді, коли вектор - функція f задовольняє умовам, сформульованим вище.

2. Розглянемо одновимірну крайову задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} = -tht\ x(t) + f(t),$$

$$lx = (x(+\infty), x(-\infty)) = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2. \tag{4.56}$$

a) нехай $f(t) = \frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ та $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, -2)$. Множина обмежених розв'язків, які задовольняють крайову умову (4.56), має вигляд:

$$x(t, c) = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\ c - \frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} + \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \quad c\ \in R.$$

b) нехай $f(t) = 2\ tht$ та $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 2)$. В цьому випадку рівняння (4.47) має точку рівноваги – розв'язок $x_0(t) = 2$ та множина "гомоклінічних" траекторій має наступний вигляд:

$$x(t, c) = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\ c + 2 - \frac{4}{e^t + e^{-t}}, \quad c \in R.$$

3. Розглянемо двовимірну крайову задачу

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -tht\ x_1(t) + f_1(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -tht\ x_2(t) + f_2(t),$$

$l(x_1, x_2) = (x_1(+\infty), x_1(-\infty), x_2(+\infty), x_2(-\infty)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, -2, 2, 2)$, де $f_1(t) = \frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, f_2(t) = 2\ tht$ (прямий добуток рівнянь з прикладів 2a, 2b). Ця задача має двопараметричну родину обмежених розв'язків

$$x_1(t, c_1) = \tfrac{2}{e^t+e^{-t}}\ c_1 - \tfrac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}} + \tfrac{2}{e^t+e^{-t}},$$
$$c_1, c_2 \in R.$$
$$x_2(t, c_2) = \tfrac{2}{e^t+e^{-t}}\ c_2 + 2 - \tfrac{4}{e^t+e^{-t}},$$

4. Розглянемо двовимірну крайову задачу

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -tht\ x_1(t) + x_2(t) + f_1(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -tht\ x_2(t) + f_2(t),$$

$l(x_1, x_2) = (x_1(+\infty), x_1(-\infty), x_2(+\infty), x_2(-\infty)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (2, -4, 2, 2) \in R^4$, де $f_1(t) = \frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, f_2(t) = 2\ tht$. В цьому випадку задача має двопараметричну множину обмежених розв'язків вигляду

$$x_1(t, c_1, c_2) = \frac{c_1+2c_2t-4t+2e^t-4e^{-t}}{e^t+e^{-t}},$$

$$c_1, c_2 \in R.$$

$$x_2(t, c_2) = \frac{2}{e^t+e^{-t}}\ c_2 + 2 - \frac{4}{e^t+e^{-t}},$$

4.5. Апроксимація узагальнених обмежених розв'язків еволюційних рівнянь з необмеженим оператором

У цьому підрозділі буде обгрунтовано метод парметризації для диференціального рівняння у банаховому просторі з необмеженим операторним коефіцієнтом. Запропоновано алгоритм знаходження узагальнених обмежених розв'язків довільного порядку точності.

Постановка задачі

На осі $\mathbb{R}$ розглядається лінійне еволюційне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.57}$$

де $A(t)$ родина лінійних замкнених операторів, з незалежною від t областю визначення $D(A(t)) = D \subset B$ щільною у вихідному банаховому просторі B, вектор - функція $f \in BC(\mathbb{R}, B)$.

У даній частині представлено узагальнення методу параметризації [109], [110] на випадок необмежених операторів з не обов'язково заданими коректно [139] коефіцієнтами. Даний алгоритм дозволяє знаходити узагальнені обмежені розв'язки диференціального рівняння (4.57), за умов існування, й у тому випадку, коли не відомо породжуючий оператор еволюції. Для простоти викладення надалі будемо припускати виконання умов, за яких еволюційний оператор вихідного рівняння (4.57) є сильно - неперервним [139].

У подальшому, через $l_\infty(Z, B)$ традиційно [242] будемо позначати простір нескінченних послідовностей $x = \{x_s, s \in \mathbb{Z}\}$ зі значеннями у банаховому просторі B, які мають обмежену норму $||x||_\infty = \sup_{s\in\mathbb{Z}} ||x_s||_B$.

Позначимо також через $l_\infty(Z; C([(s-1)h; sh); B)), h > 0$ - простір послідовностей неперервних й обмежених функцій $x(t) = (x_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$, $x_s(t) \in B$, визначених для $t \in [(s-1)h; sh)$ з нормою $||x||_{l_\infty(Z;C([(s-1)h;sh);B))} = \sup_{s\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(s-1)h;sh)} ||x_s(t)||_B$, яку надалі для зручності позначатимемо $||x||_1$. Викладемо суть методу параметризації.

Метод параметризації

Для зручності будемо вважати, що оператор-функція $A(t)$ є обмеженою. Оберемо шаг $h > 0$ та розбиття $\mathbb{R} = \cup_{s=-\infty}^{+\infty}[(s-1)h; sh)$. Звуження будь - якої функції $x(t) \in BC(\mathbb{R}, B)$ на напівінтервал $[(s-1)h; sh)$ позначатимемо $x_s(t)$. Тоді рівняння (4.57) перетвориться на багатоточкову крайову задачу

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = A(t)x_s(t) + f(t),\ t \in [(s-1)h; sh) \tag{4.58}$$

з умовами зшивання в точках розбиття

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), s \in \mathbb{Z}. \tag{4.59}$$

Позначимо через $\lambda_s = x_s((s-1)h)$ та на кожному напівінтервалі $[(s-1)h; sh)$ зробимо заміну змінних $u_s(t) = x_s(t) - \lambda_s$.

Отримаємо крайову задачу із параметром

$$\frac{du_s(t)}{dt} = A(t)(u_s(t) + \lambda_s) + f(t), \quad u_s((s-1)h) = 0, \quad t \in [(s-1)h; sh) \tag{4.60}$$

$$\lim_{t\to sh-0} u_s(t) + \lambda_s = \lambda_{s+1}, s \in \mathbb{Z}. \tag{4.61}$$

Задачі (4.58), (4.59) та (4.60), (4.61) еквівалентні у тому сенсі, що якщо система функцій $(x_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ є розв'язком задачі (4.58), (4.59), то система пар $(\lambda, u(t)) = (\lambda_s, u_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ - розв'язок крайової задачі (4.60), (4.61). Якщо пара $(\lambda^*, u^*(t)) \in l_\infty(\mathbb{Z}, B) \times l_\infty(Z; C([(s-1)h; sh); B))$ - розв'язок задачі (4.60), (4.61), то функція $x^*(t) = (\lambda_s^* + u_s^*(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ належить класу $BC(\mathbb{R}, B)$ та задовольняє диференціальне рівняння (4.57) на D.

Задача (4.60) вигідна тим, що при фіксованих значеннях параметра $\lambda = (\lambda_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ є задачею Коші й має єдиний розв'язок, який можна знайти [139] з інтегрального рівняння

$$u_s(t) = \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau)[u_s(\tau) + \lambda_s]d\tau + \int_{(s-1)h}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{4.62}$$

Підставляючи $u_s(t)$ у праву частину (4.62) й повторюючи цей процес m разів отримаємо

$$\begin{gathered} u_s(t) = [\int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)\int_{(s-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + ...+ \\ + \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m...d\tau_1]\lambda_s + \int_{(s-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + ...+ \\ + \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1})\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}...d\tau_1 + \\ \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1})\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}...d\tau_1. \end{gathered} \tag{4.63}$$

Звідси знайдемо $\lim_{t\to sh-0} u_s(t)$ і, підставивши в (4.61) отримаємо нескінченну в обидва боки операторну систему рівнянь відносно параметрів λ_s :

$$[I + P_{m,s}(h)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{m,s}(h) - R_{m,s}(u, h), \tag{4.64}$$

де I - тотожний оператор,

$$P_{m,s}(h) = \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)\int_{(s-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + ...+$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m...d\tau_1,$$

$$F_{m,s}(h) = \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1)d\tau_1 + ...+$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1})\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}...d\tau_1,$$

$$R_{m,s}(u, h) = \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1})\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)u_s(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}...d\tau_1.$$

Позначимо через $Q_{m,h}$ нескінченну операторну матрицю, яка відповідає лівій частині рівняння (4.64). У кожній блочній стрічці матриці $Q_{m,h}$ ненульовими блоками будуть лише оператори $I + P_{m,s}(h)$ та $-I$. Ввівши до розгляду зліченні вектори $F_m(h) = (..., F_{m,s}(h), F_{m,s+1}(h), ...)$ й $R_m(u, h) = (..., R_{m,s}(u, h), R_{m,s+1}(u, h), ...)$ отримаємо операторне рівняння наступного вигляду

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h) - R_m(u, h). \tag{4.65}$$

Легко бачити, що операторна матриця

$$Q_{m,h} : l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B)$$

є обмеженим оператором для якого справедлива наступна оцінка

$$||Q_{m,h}||_{\mathcal{L}(l_\infty(\mathbb{Z},B))} \leq 2 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!}(\alpha h)^j \quad (\alpha = \sup_{t\in[(s-1)h;sh]} ||A(t)||).$$

Розв'язок задачі (4.60), (4.61) з параметром – систему пар $(\lambda_s, u_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ знаходимо виходячи із наступного алгоритму:

Крок 1. Початкове наближення $\lambda^{(0)}$ параметра визначаємо з операторного рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h).$$

На відрізках $[(s-1)h; sh)$, розв'язуючи задачу Коші (4.60) при $\lambda_s = \lambda_s^{(0)}$ знаходимо $u_s^{(0)}(t)$, виходячи з (4.62) за умови розв'язності $P_{N(Q^*_{m,h})}F_m(h) = 0$.

Крок 2. Підставляючи знайдені $u_s^{(0)}(t)$ у праву частину (4.65), з рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h) - R_m(u^0, h)$$

визначаємо $\lambda^{(1)}$. На відрізках $[(s-1)h; sh)$, розв'язуючи задачу Коші (4.60) при $\lambda_s = \lambda_s^{(1)}$ знаходимо $u_s^{(1)}(t)$ й далі цей процес повторюється ітеративно (за умови розв'язності $P_{N(Q^*_{m,h})}\{R_m(u^0, h)\} = 0.$)

Зазначимо, що якщо $P_{N(Q^*_{m,h})} = 0$, то умови розв'язності виконуються автоматично. (достатньо, щоб $P_{N(Q^*_{m,h})}R_m = 0$).

Якщо умови розв'язності не виконуються, то алгоритм дозволяє знаходити квазірозв'язки.

Теорема 4.10. *Нехай при деяких* $h > 0$ *й* $m \in \mathbb{N}$ *операторна матриця* $Q_{m,h}$: $l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B)$ *є узагальнено - оборотним оператором та виконується нерівність :*

$$||Q^-_{m,h}|| \le \gamma_m(h), \gamma_m(h) = const,$$

$$q_m(h) = \gamma_m(h)[exp(\alpha h) - 1 - ... - (m!)^{-1}(\alpha h)^m] < 1.$$

Тоді рівняння (4.57) має обмежений розв'язок $x(t) \in BC(\mathbb{R}, B)$ *для якого справедлива оцінка*

$$|||x - x^{(k)}||| \le \gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}e^{\alpha h}\frac{[q_m(h)]^k}{1 - q_m(h)}M(h, c), \tag{4.66}$$

$$M(h, c) = [e^{\alpha h} - 1](h|||f|||\gamma_m(h)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty) + e^{\alpha h}|||f|||h,$$

тут $x^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + \lambda^{(k)}$.

Доведення. Зважаючи на узагальнену оборотність $Q_{m,h}$, оберемо початковий вектор $\lambda^{(0)}$ з наступної рівності

$$\lambda^{(0)} = Q^-_{m,h}(-F_m(h)) + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c,$$

тут c - будь-який фіксований елемент з банахового простору B. Тоді

$$||\lambda^{(0)}||_\infty = \sup_{s \in \mathbb{Z}}||\lambda^{(0)}_s||_B \le ||Q^-_{m,h}|| \cdot ||F_m(h)||_\infty + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty.$$

Оскільки

$$||F_m(h)||_\infty \le h|||f|||\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!},$$

то

$$||\lambda^{(0)}||_\infty \le \gamma_m(h)h|||f|||\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty.$$

Згідно наших припущень, за параметром $\lambda^{(0)}$ задача (4.60) має єдиний розв'язок $(u^{(0)}_s(t))_{s \in \mathbb{Z}}$ для якого справедлива наступна оцінка :

$$||u^{(0)}_s(t)||_B \le [e^{\alpha[t-(s-1)h]} - 1]||\lambda^{(0)}_s||_B + e^{\alpha[t-(s-1)h]}|||f|||h.$$

Використовуючи це, для $u^{(0)}(t)$ отримаємо оцінку

$$||u^{(0)}||_1 \leq \sup_{s\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(s-1)h;sh)} ||u_s^{(0)}(t)||_B \leq [e^{\alpha h}-1](h|||f|||\gamma_m(h)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!}+$$

$$+||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty) + e^{\alpha h}|||f|||h.$$

Далі за алгоритмом знаходимо вектор $\lambda^{(1)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(0)}, h)] + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c$, де елемент банахового простору $c \in B$ обирається таким же чином, як і на попередньому кроці. Враховуючи це, оцінимо різницю $\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}$ за нормою:

$$||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty = ||Q^{-}_{m,h}[-R_m(u^{(0)}, h)]|| \leq \gamma_m(h)||R_m(u^{(0)}, h)||_\infty \leq$$

$$\leq \gamma_m(h)||u^{(0)}||\frac{(\alpha h)^m}{m!},$$

тоді

$$||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty \leq \gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}([e^{\alpha h}-1](h|||f|||\gamma_m(h)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!}+$$

$$+||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||) + e^{\alpha h}|||f|||h).$$

Продовжуючи цей ітераційний процес за індукцією, отримаємо наступні нерівності:

$$||u_s^{(n+1)}(t) - u_s^{(n)}(t)||_B \leq [e^{\alpha[t-(s-1)h]} - 1]||\lambda_s^{(n+1)} - \lambda_s^{(n)}||_B. \tag{4.67}$$

Визначаючи знову з алгоритму пару векторів $\lambda^{(n+1)}$ й $\lambda^{(n)}$

$$\lambda^{(n+1)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(n)}, h)] + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c,$$

$$\lambda^{(n)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(n-1)}, h)] + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c,$$

з одним й тим самим елементом c отримаємо, що для різниці $\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}$ справедливий наступний ланцюг нерівностей :

$$||\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}||_\infty = ||Q^{-}_{m,h}[R_m(u^{(n-1)}, h) - R_m(u^{(n-1)}, h)]||_\infty \leq$$

$$\le \gamma_m(h)||R_m(u^{(n-1)},h) - R_m(u^{(n)},h)||_\infty.$$

Підставляючи (4.67) та обчислюючі повторні інтеграли, отримаємо :

$$||R_m(u^{(n-1)},h) - R_m(u^{(n)},h)||_\infty \le [e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha h)^j}{j!}]||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty,$$

звідси

$$||\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}||_\infty \le \gamma_m(h)[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha h)^j}{j!}]||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty =$$

$$= q_m(h)||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty, n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки за умов теореми $q_m(h) < 1$, то послідовність $\lambda^{(n)} = (\lambda_s^{(n)})_{s\in\mathbf{Z}}$ є збіжною до деякого вектора $\lambda^* = (\lambda_s^*)_{s\in\mathbf{Z}}$, коли $n \to \infty$ та для неї виконується [123] оцінка

$$||\lambda^* - \lambda^{(n)}||_\infty \le \frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty \le \frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}\gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}M(h,c).$$

Для послідовності $u^{(n)}(t)$ маємо наступну оцінку :

$$||u^{(n+1)} - u^{(n)}||_1 \le ||R_m(u^{(n-1)},h) - R_m(u^{(n)},h)||_\infty,$$

з якої аналогічно, як і для параметрів λ робиться висновок щодо збіжності послідовності функцій $u^{(n)}(t)$ до деякої функції $u^*(t)$ й має місце оцінка :

$$||u^* - u^{(n)}||_1 \le [e^{\alpha h} - 1]\frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}\gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}M(h,c).$$

Враховуючи це, отримуємо, що функція $u^*(t) + \lambda^*$ є обмеженим розв'язком вихідної задачі, а $(u^{(n)}(t) + \lambda^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність, що до нього прямує, коли $n \to \infty$ та виконується оцінка (4.66) й теорему доведено.

4.6. ВИСНОВКИ

1) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха з необмеженими операторними коефіцієнтами за умов експоненціальної дихотомії на півосях;

2) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха з необмеженим оператором у лінійній частині та знайдено зв'язок між ними;

3) Запропоновано означення експоненціальної дихотомії у локально-опуклих просторах та просторах Фреше;

4) За умов експоненціальної дихотомії на півосях отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків операторно-диференціальних рівнянь у локально-опуклих просторах та просторах Фреше;

5) Досліджено умови існування обмежених розв'язків крайових задач на всій осі з умовами на нескінченності;

6) Для операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха обгрунтовано метод параметризації та побудовано чисельно-аналітичний метод для апроксимації відповідних розв'язків.

РОЗДІЛ 5
РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА В ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

В даному розділі вивчається рівняння Шредінгера в просторі Гільберта в критичних випадках. Досліджуються умови існування обмежених розв'язків та біфуркації розв'язків крайових задач лінійного стаціонарного та нестаціонарного рівняння, нелінійного рівняння. Знайдено алгоритми побудови таких розв'язків. Результати продемонстровано та уточнено на двоточковій крайовій задачі для рівняння Шредінгера та рівняння Ван дер Поля в гільбертовому просторі.

5.1. Експоненціальна дихотомія та обмежені розв'язки рівняння Шредінгера

Дана частина присвячена отриманню необхідних та достатніх умов існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для лінійного й нелінійного рівняння Шредінгера в просторі Гільберта за умов, коли відповідне однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях.

Постановка задачі (лінійний випадок)

Будемо розглядати наступне диференціальне рівняння Шредінгера [214]:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), t \in J, \tag{5.1}$$

в просторі Гільберта $\mathcal{H}$, де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; тут $H_0 = H_0^*$ необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$; відображення $t \to V(t)$ — сильно неперервне. Визначимо, як і в [214] операторнозначну функцію

$$\tilde{V}(t) = e^{itH_0}V(t)e^{-itH_0}.$$

В цьому випадку для $\tilde{V}(t)$ справедливе представлення Дайсона [214, с.311] і можна визначити еволюційний оператор $\tilde{U}(t,s)$. Якщо $U(t,s) =$

$e^{-itH_0}\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}$, то $\psi_s(t) = U(t,s)\psi$ слабкий розв'язок однорідного рівняння, з умовою $\psi_s(s) = \psi$ в тому сенсі, що для довільного $\eta \in D(H_0)$ функція $(\eta, \psi_s(t))$ є диференційовною й

$$\frac{d}{dt}(\eta, \psi_s(t)) = -i(H_0\eta, \psi_s(t)) - i(V(t)\eta, \psi_s(t)), t \in J.$$

Необхідно з'ясувати, за яких умов на вектор-функцію f рівняння (5.1) буде мати слабкі обмежені на всій осі розв'язки. При цьому припускається її належність до простору Банаха $BC(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, неперервних та обмежених на $\mathbb{R}$ вектор-функцій зі значеннями в просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Для простоти викладення будемо припускати, що D щільна в $\mathcal{H}$ й еволюційний оператор $U(t,s)$ є обмеженим та визначеним на всьому просторі $\mathcal{H}$ (розширений за неперервністю).

Обмежені розв'язки

В подальшому ми будемо використовувати поняття експоненціальної дихотомії в тому ж сенсі, що і в попередньому розділі. Проведемо аналіз рівняння (5.1) за умов експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$ та $\mathbb{R}_0^+ = [0; \infty)$. [В цьому випадку проекторнозначні функції визначені на півосях будемо позначати $P_+(t)$, для всіх $t \geq 0$, та $P_-(t)$, для всіх $t \leq 0$, з константами M_1, α_1 та M_2, α_2, відповідно]. Основний результат цієї частини можна подати у наступному вигляді.

Лема. *Нехай* $\{U(t,s),\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ *сильно неперервний еволюційний оператор, асоційований з рівнянням (5.1). Припустимо, що виконано умови :*

1. Оператор $U(t,s)$ *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$*, відповідно.*

2. Оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ *має псевдообернений за Муром-Пенроузом.*

Тоді справедливі такі твердження.

1. Існують слабкі розв'язки рівняння (5.1), обмежені на всій осі тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{5.2}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)} P_-(0) U(0, t)$.

2. За виконання умови (5.2), слабкі розв'язки рівняння (5.1), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$\varphi_0(t, c) = U(t, 0) P_+(0) \mathcal{P}_{N(D)} c + (G[f])(t, 0) \quad \forall c \in \mathcal{H}, \tag{5.3}$$

де

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t U(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} U(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + U(t,s)P_+(s)D^+[\int_s^{\infty} U(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + \int_{-\infty}^{s} U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ t \geq s \\ \int_{-\infty}^{t} U(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{s} U(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + U(t,s)(I - P_-(s))D^+[\int_s^{\infty} U(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + \int_{-\infty}^{s} U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ s \geq t \end{cases}$$

узагальнений оператор Гріна задачі відшукання обмежених на всій осі розв'язків

$$(G[f])(0+, 0) - (G[f])(0-, 0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt.$$

Доведення цієї теореми проводиться таким же чином, як і в попередньому розділі. Далі ми покажемо, що умову 2 в лемі можна прибрати й рівняння (5.1) буде завжди розв'язним в певному сенсі. Нагадаємо, що обмежені на всій дійсній осі розв'язки рівняння (5.1) існують тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння

$$D\xi = g, \tag{5.4}$$

$$g = \int_{-\infty}^{0} U(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^{+\infty} U(0,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau$$

є розв'язним та їх кількість залежить від розмірності $N(D)$.

Згідно теорії операторних рівнянь, побудованій в другому розділі, будемо виділяти три типи розв'язків рівняння (5.4).

1)Класичні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор D нормально-розв'язний, тобто $(R(D) = \overline{R(D)})$. Тоді [314], як відомо $g \in R(D)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(D^*)}g = 0$. В цьому випадку існує псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор D^+ та множина розв'язків рівняння (5.4) може бути представлена у вигляді [314]

$$\xi = D^+ g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \quad c \in \mathcal{H}.$$

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(D) \neq \overline{R(D)}$. Тоді існує розширений оператор $\overline{D} : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ ($\overline{\mathcal{H}}$ - відповідне поповнення простору $\mathcal{H}$), який буде нормально-розв'язним (згідно конструкції другого розділу). Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (5.4) матиме вигляд

$$\xi = \overline{D}^+ g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \quad c \in \mathcal{H}.$$

3) Узагальнені псевдорозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $g \notin \overline{R(D)}$, що для елемента g є рівносильним умові $\mathcal{P}_{N(D^*)}g \neq 0$. У цьому випадку існують елементи з $\overline{\mathcal{H}}$, що мінімізують норму $||\overline{D}\xi - g||_{\mathcal{H}}$ для $\xi \in \overline{\mathcal{H}}$,

$$\xi = \overline{D}^+ g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \quad c \in \mathcal{H}.$$

Ці елементи будемо називати узагальненими псевдорозв'язками рівняння (5.4).

Зауваження 5.1. *Слід підкреслити, що в кожному з розглянутих випадків вигляд обмежених розв'язків (5.4) не змінюється. Якщо позначити через $\overline{(G[f])(t,0)}$ відповідне розширення узагальненого оператора Гріна $(G[f])(t,0)$, то в отриманій вище лемі розв'язки рівняння (5.1) будуть існувати завжди в одному з сенсів 1) - 3) й при цьому матимуть вигляд*

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{(G[f])(t,0)}, \quad \forall c \in \mathcal{H},$$

для кожного з випадків.

Зауваження 5.2. *Поєднання результатів леми та конструкцій 1) - 3) відповідних розв'язків говорить про те, що з умов експоненціальної дихотомії на півосях випливає існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (5.1).*

Нелінійний випадок

В просторі Гільберта $\mathcal{H}$, розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t). \tag{5.5}$$

Будемо шукати обмежений розв'язок $\varphi(t,\varepsilon)$ рівняння (5.5), що перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (5.1) при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови на оператор-функцію $Z(\varphi,t,\varepsilon)$ будемо накладати обмеження за сукупністю змінних в околі породжуючого розв'язку $\varphi_0(t)$

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times BC(\mathbb{R},\mathcal{H}) \times C[0,\varepsilon_0],$$

де q – деяка додатня стала.

Покажемо, що ця проблема може бути розв'язана з використанням операторного рівняння для породжуючих констант (елементів)

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(\varphi_0(t,c),t,0)dt = 0. \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. *(необхідна умова). Припустимо, що рівняння (5.1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_0^+$ *та* $\mathbb{R}_0^-$ *з проекторнозначними оператор-функціями* $P_+(t)$ *та* $P_-(t)$ *відповідно, а нелінійне рівняння (5.5) має обмежений розв'язок* $\varphi(\cdot,\varepsilon)$, *який перетворюється в один з розв'язків породжуючого рівняння (5.1) з константою* $c = c^0$, $\varphi(t,0) = \varphi_0(t,c^0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Тоді ця константа повинна задовольняти рівняння для породжуючих констант (5.6).*

Доведення цієї теореми проводиться за тією ж методикою, що була розвинена в попередній частині.

Для знаходження достатньої умови існування обмежених розв'язків (5.1) будемо додатково припускати, що оператор-функція $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ строго диференційовна в околі породжуючого розв'язку ($Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \leq q]$).

Ця проблема може бути розв'язана з використанням оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

де $A_1(t) = Z^1(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}$ (похідна в сенсі Фреше). Використавши теорему про неявну функцію з другого розділу, можемо довести наступне твердження.

Теорема 5.2. *(достатня умова). Нехай рівняння (5.1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$, відповідно. Припустимо, що оператор B_0 задовольняє умови:*

1.B_0 *– має псевдообернений за Муром-Пенроузом*;

2.$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді, для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (5.6), існує обмежений на всій осі розв'язок. Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою ітераційного процесу

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau, c^0 + y_k, \tau, \varepsilon))](t,0),$$

$$c_k = -B_0^+ \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(\varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(\varphi_0(t,c^0),t,0) - A_1(t)y_k(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \qquad \mathcal{R}_x^{(1)}(0,t,0) = 0,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,0,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t,\varepsilon).$$

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами існування обмежених на всій осі розв'язків встановлює наступне твердження.

Наслідок. *Нехай функціонал $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Гільберта H, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (5.6). Якщо $F^1(c)$ має обмежений обернений, то рівняння (5.5) має єдиний обмежений розв'язок на всій осі для кожного c^0.*

Таким чином знову отримали модифікацію метода Ляпунова-Шмідта, досліджуючи нелінійне рівняння Шрьодінгера. Слід також підкреслити, що теореми 5.1 та 5.2 дають нам умови наявності можливої складної поведінки (5.5) [336].

Зауваження 5.3. *Застосовуючи розвинену вище теорію для еволюційних рівнянь, що мають властивість експоненціальної дихотомії на півосях, можна вивчати крайові задачі з умовами на нескінченності.*

Сформулюємо одну з таких задач. В просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядається наступна крайова задача

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \tag{5.7}$$

$$l\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{5.8}$$

Для рівняння (5.7) умови, які накладаються на вектор-функцію $f(t)$ та оператор-функцію $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ такі ж самі, як і для рівняння (5.5). Оператор l є лінійним та обмеженим, що діє з простору Гільберта $\mathcal{H}$ в простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, α — довільний елемент простору $\mathcal{H}_1$; оператор-функція $J(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняє аналогічним умовам, що й $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$. Для такої задачі можна отримати необхідні й достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків, що є аналогічними до встановлених вище. На скінченному відрізку така крайова задача досліджується в цьому розділі нижче.

5.2. Біфуркація розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера

Досліджуються умови біфуркації розв'язків крайових задачі для рівняння Шредінгера на скінченному відрізку.

Постановка задачі

В просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядається наступна крайова задача

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon H_1(t)\varphi(t) + f(t), t \in J \tag{5.9}$$

$$\ell\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1\varphi(\cdot). \tag{5.10}$$

Тут, для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$ необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$, $H_1(t)$ – лінійний та обмежений для всіх $t \in J$ оператор, ℓ, l_1 – лінійні та обмежені оператори, що діють з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_1$. Інші вимоги такі ж, як і в попередньому підрозділі. Шукається сильний розв'язок крайової задачі (5.9), (5.10) для тих правих частин $f(t)$ рівняння (5.9), для яких незбурена крайова задача ($\varepsilon = 0$) їх не має. Зауважимо, що асимпотитчні методи рівнянь розглядалися у монографіях [458], [314].

Лінійний випадок (допоміжний результат)

Для отримання основного результату нам треба з'ясувати умови розв'язності та вміння будувати розв'язки незбуреної крайової задачі

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), \tag{5.11}$$

$$\ell\varphi(\cdot) = \alpha. \tag{5.12}$$

Використовуючи теорему С.Г.Крейна [139] будь-який слабкий розв'язок рівняння (5.11) можна представити у вигляді

$$\varphi(t,s) = U(t,s)\varphi(s,s) + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{5.13}$$

(рівність в сенсі скалярного добутку).

Підставивши вираз (5.13) в крайову умову (5.12), отримаємо наступне операторне рівняння відносно елемента $\varphi(s,s) \in \mathcal{H}$:

$$Q\varphi(s,s) = \alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{5.14}$$

де $Q = \ell U(\cdot, s)$ – оператор, отриманий після підстановки в (5.12) відповідного еволюційного оператора $U(t, s)$. Для зручності позначимо $\varphi = \varphi(s, s)$, $g = \alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau$. Тоді операторне рівняння (5.14) перепишемо у вигляді

$$Q\varphi = g. \tag{5.15}$$

Так, як це було зроблено вище, можна виділяти три типи розв'язків рівняння (5.15). Будемо позначати $\overline{Q} : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}_1$ - розширений до Q оператор, що має псевдообернений. Тоді рівняння (5.15) буде мати розв'язки

$$\varphi = \overline{Q}^{+} g + \mathcal{P}_{N(Q)} c, \ c \in \mathcal{H},$$

як у випадку, коли $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} g = 0$, так і у випадку, коли $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} g \neq 0$.

Об'єднуючи вище сказане, приходимо до твердження.

Теорема 5.3. *Нехай задана крайова задача (5.11), (5.12), визначена в просторах Гільберта.*

1. Сильні узагальнені розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau = 0; \tag{5.16}$$

якщо $\alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \in R(Q)$, то розв'язки будуть класичними узагальненими;

2. Узагальнені квазірозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \neq 0; \tag{5.17}$$

3. За виконання умови (5.16) або (5.17) узагальнені розв'язки (сильні або квазірозв'язки) крайової задачі (5.11), (5.12) мають вигляд

$$\varphi(t, s, c) = U(t, s) \mathcal{P}_{N(Q)} c + U(t, s) \overline{Q}^{+} \alpha + (\overline{G[f]})(t, s), \tag{5.18}$$

де

$$(\overline{G[f]})(t, s) = \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) d\tau - U(t, s) \overline{Q}^{+} \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau$$

- узагальнений оператор Гріна крайової задачі (5.11), (5.12), c – довільний елемент простору $\mathcal{H}$.

Біфуркація розв'язків

Припустимо, що крайова задача (5.11), (5.12) не має сильних узагальнених розв'язків, тобто виконується умова (5.17). Знайдемо умови на збурюючі доданки $H_1(t), l$ при яких збурена крайова задача (5.9), (5.10) буде мати сильні узагальнені розв'язки. Використаємо при цьому оператор

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1 U(\cdot, s) - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) H_1(\tau) U(\tau, s) d\tau) \mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Будемо шукати розв'язки крайової задачі (5.9), (5.10) у вигляді ряду за степенями малого параметра ε:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \varphi_i(t). \tag{5.19}$$

Підставимо ряд (5.19) в крайову задачу (5.9), (5.10) й прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях ε. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_{-1}(t)$ при ε^{-1} ряду (5.19) зводиться до наступної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_{-1}(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_{-1}(t), \tag{5.20}$$

$$\ell \varphi_{-1}(\cdot) = 0. \tag{5.21}$$

Множина розв'язків операторної крайової задачі (5.20), (5.21) буде мати вигляд

$$\varphi_{-1}(t, s, c_{-1}) = U(t, s) \mathcal{P}_{N(Q)} c_{-1}, \quad t \in J,$$

для довільного елемента $c_{-1} \in \mathcal{H}$, який буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_0(t)$ при ε^0 ряду (5.19) зводиться до наступної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_0(t) + H_1(t)\varphi_{-1}(t, s, c_{-1}) + f(t), \tag{5.22}$$

$$\ell \varphi_0(\cdot) = \alpha + l_1 \varphi_{-1}(\cdot, s, c_{-1}). \tag{5.23}$$

Використовуючи умову (5.16), критерій розв'язності для задачі (5.22), (5.23) набуде вигляду

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha + l_1 \varphi_{-1}(\cdot, s, c_{-1}) - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau)(H_1(\tau)\varphi_{-1}(\tau, s, c_{-1}) + f(\tau)) d\tau\} = 0,$$

з якого остаточно отримаємо операторне рівняння

$$B_0 c_{-1} = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(-\alpha + \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau). \tag{5.24}$$

У подальшому будемо припускати, що $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)} \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$. Тоді операторне рівняння (5.24) буде розв'язним. Множина сильних узагальнених розв'язків (5.24) буде мати вигляд

$$c_{-1} = \overline{B}_0^+ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(-\alpha + \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau) + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

для довільного елемента $c_\rho \in \mathcal{H}$. Для зручності перепишемо цю рівність у вигляді

$$c_{-1} = \overline{c}_{-1} + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_{-1} = \overline{B}_0^+ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(-\alpha + \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau).$$

Тоді множина розв'язків крайової задачі (5.22), (5.23) буде мати вигляд

$$\varphi_{-1}(t,s,c_\rho) = \overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) + \overline{X}_{-1}(t,s) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho;$$

$$\overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) = U(t,s) \mathcal{P}_{N(Q)} \overline{c}_{-1},$$

$$\overline{X}_{-1}(t,s) = U(t,s) \mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Використовуючи зображення (5.18), лінійність узагальненого оператора Гріна, множину розв'язків крайової задачі (5.22), (5.23) можна представити у вигляді

$$\varphi_0(t,s,c_0) = U(t,s) \mathcal{P}_{N(Q)} c_0 + U(t,s) \overline{Q}^+ \{\alpha + l_1 \overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\} +$$

$$+ \overline{G[H_1(\cdot) \overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(t,s) + (U(t,s) \overline{Q}^+ \ell \overline{X}_{-1}(\cdot,s) +$$

$$+ \overline{G[H_1(\cdot) \overline{X}_{-1}(\cdot,s)]}(t,s)) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

де елемент $c_0 \in \mathcal{H}$ буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу.

Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_1(t)$ при ε^1 ряду (5.19) запишеться у вигляді наступної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_1(t) + H_1(t)\varphi_0(t,s,c_0), \tag{5.25}$$

$$\ell\varphi_1(\cdot) = l_1\varphi_0(\cdot,s,c_0). \tag{5.26}$$

Умова розв'язності (5.16) для задачі (5.25), (5.26) запишеться у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\varphi_0(\cdot,s,c_0) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)H_1(\tau)\varphi_0(\tau,s,c_0)\}d\tau = 0,$$

із якої у силу розв'язності знаходимо елемент c_0 у вигляді

$$c_0 = \overline{c}_0 + \mathcal{F}_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_0 = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)H_1(\tau)(U(\tau,s)\overline{Q}^+\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}+$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(\tau,s))d\tau - U(\cdot,s)\overline{Q}^+\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}-$$

$$-\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(\cdot,s)),$$

$$\mathcal{F}_0 = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)H_1(\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+\ell U(\cdot,s) + G[H_1(\cdot)U(\cdot,s)]\}(\tau,s)d\tau-$$

$$-U(\cdot,s)\overline{Q}^+\ell U(\cdot,s) - \overline{G[H_1(\cdot)U(\cdot,s)]}(\cdot,s)) + I.$$

Остаточно, множина розв'язків крайової задачі (5.22), (5.23) буде мати вигляд:

$$\varphi_0(t,s,c_\rho) = \overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0) + \overline{X}_0(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, \quad \text{для довільного} \quad c_\rho \in \mathcal{H},$$

де

$$\overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0 + U(t,s)\overline{Q}^+\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}+$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(t,s),$$

$$\overline{X}_0(t,s) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{F}_0 + U(t,s)\overline{Q}^+\ell U(\cdot,s)\mathcal{P}_{N(Q)}+$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)U(\cdot,s)]}(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Таким чином, крайова задача (5.25), (5.26) буде мати розв'язки у вигляді

$$\varphi_1(t,s,c_1) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_1 + U(t,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)]}(t,s)+$$

$$+(U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_0(\cdot,s) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot,s)]}(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)})c_\rho,$$

де елемент c_1 буде знайдений на наступному кроці ітераційного процесу.

Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_2(t)$ при ε^2, пов'язана з розв'язками наступної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_2(t) + H_1(t)\varphi_1(t,s,c_1), \tag{5.27}$$

$$\ell\varphi_2(\cdot) = l_1\varphi_1(\cdot,s,c_1). \tag{5.28}$$

Умова розв'язності крайової задачі (5.27), (5.28) у цьому випадку зводиться до розв'язності операторного рівняння

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\varphi_1(\cdot,s,c_1) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\varphi_1(\tau,s,c_1)d\tau\} = 0,$$

з якого, у силу припущення, знаходимо елемент c_1 у вигляді

$$c_1 = \overline{c}_1 + \mathcal{F}_1\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_1 = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)]}(\tau,s)\}d\tau$$

$$-U(\cdot,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0) - \overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)]}(\cdot,s)),$$

$$\mathcal{F}_1 = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+ l\overline{X}_0(\cdot,s) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot,s)]}(\tau,s)\}d\tau-$$

$$-U(\cdot,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_0(\cdot,s) - \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot,s)]}(t,s)) + I.$$

Остаточно, множина розв'язків крайової задачі (5.25), (5.26) буде мати вигляд

$$\varphi_1(t,s,c_\rho) = \overline{\varphi}_1(t,s,\overline{c}_1) + \overline{X}_1(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, \quad \text{для довільного} \quad c_\rho \in \mathcal{H},$$

де

$$\overline{\varphi}_1(t,s,\overline{c}_1)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_1+U(t,s)\overline{Q}^+l_1\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)]}(t,s);$$

$$\overline{X}_1(t,s)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{F}_1+U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_0(\cdot,s)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot,s)]}(t,s),$$

а множина розв'язків задачі (5.27), (5.28) буде мати вигляд

$$\varphi_2(t,s,c_1)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2+U(t,s)\overline{Q}^+l_1\overline{\varphi}_1(\cdot,s,\overline{c}_1)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_1(\cdot,s,\overline{c}_1)]}(t,s)+$$

$$+(U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_1(\cdot,s)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_1(\cdot,s)]}(t,s))\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де елемент $c_2\in\mathcal{H}$ буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу. Діючи далі за індукцією, неважко показати, що за виконання умов на добуток проекторів, проблема визначення коефіцієнта $\varphi_i(t)$ при ε^i ряду (5.17) зводиться до розв'язності операторної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt}=-iH(t)\varphi_i(t)+H_1(t)\varphi_{i-1}(t,s,c_{i-1}), \tag{5.29}$$

$$\ell\varphi_i(\cdot)=l_1\varphi_{i-1}(\cdot,s,c_{i-1}). \tag{5.30}$$

Елемент c_i визначається наступним чином

$$c_i=\overline{c}_i+\mathcal{F}_i\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_i=\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^\cdot U(\cdot,\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})+$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(\tau,s)\}d\tau-U(\cdot,s)\overline{Q}^+l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})-$$

$$-\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(\cdot,s)),$$

$$\mathcal{F}_i=\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^\cdot U(\cdot,\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+l\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)]}(\tau,s)\}d\tau-$$

$$-U(\cdot,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)-\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)]}(t,s))+I.$$

а множина розв'язків крайової задачі (5.29), (5.30) може бути представленою у вигляді

$$\varphi_i(t,s,c_\rho)=\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i)+\overline{X}_i(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,\quad \text{для довільного}\quad c_\rho\in\mathcal{H},$$

де

$$\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t,s)\overline{Q}^{+} l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1}) +$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(t,s)$$

$$\overline{X}_i(t,s) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{F}_i + U(t,s)\overline{Q}^{+}\ell\overline{X}_{i-1}(\cdot,s) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)]}(t,s).$$

Збіжність ряду (5.17) доводиться таким же чином, як і в роботі [42]. Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 5.4. *Припустимо, що виконується наступна умова:*

$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$

Якщо незбурена операторна крайова задача (5.11), (5.12) не має сильних узагальнених розв'язків, то операторна крайова задача (5.9), (5.10) має ρ - параметричну множину сильних узагальнених розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi(t,s,\varepsilon,c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i[\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) + \overline{X}_i(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad \textit{для довільного} \;\; c_\rho \in \mathcal{H},$$

абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого параметра $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$; тут

$$\overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0 + U(t,s)\overline{Q}^{+}\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\} +$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(t,s),$$

$$\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t,s)\overline{Q}^{+} l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1}) +$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(t,s); \quad i \in \mathbb{N}.$$

5.3. Крайові задачі для нелінійного рівняння Шредінгера

Знайдено необхідну та достатню умови існування узагальнених розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера. Встановлено умови нормальної та узагальненої розв'язності. Розв'язки представлено з допомогою узагальненого оператора Гріна.

Постановка задачі

В просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядається нелінійне диференціальне рівняння Шредінгера

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + f(t), t \in J, \qquad (5.31)$$

з операторною крайовою умовою вигляду

$$\ell\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (5.32)$$

де $J \subset \mathbb{R}$ - скінченний відрізок. Для кожного t, необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$ з самоспряженим оператором $H_0 = H_0^*$ на $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$ та сильно неперервним відображенням $t \to V(t)$. Оператор ℓ припускається лінійним та обмеженим, що діє з простору Гільберта $\mathcal{H}$ в простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, α - довільний елемент простору $\mathcal{H}_1$. Необхідно знайти такий розв'язок $\varphi(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5.31), (5.32), який перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_0(t) + f(t), t \in J \qquad (5.33)$$

$$\ell\varphi_0(\cdot) = \alpha, \qquad (5.34)$$

при $\varepsilon = 0$. Оператор-функції $Z(\varphi(t,\varepsilon), t, \varepsilon), J(\varphi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють наступним обмеженням в околі породжуючого розв'язку $\varphi_0(t)$ за сукупністю змінних

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times C(J,\mathcal{H}) \times C[0,\varepsilon_0],$$

$$J(\cdot,\cdot) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times C[0,\varepsilon_0],$$

де q - деяка додатня стала.

Необхідна та достатня умови існування розв'язків

Спочатку знайдемо необхідну умову існування сильного узагальненого розв'язку $\varphi(t,s,\varepsilon)$ крайової задачі (5.31), (5.32), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $\varphi_0(t,s,c)$ вигляду (5.18). При цьому будемо припускати, що крайова задача (5.33), (5.34) має сильні узагальнені розв'язки, тобто виконується умова (5.16).

Теорема 5.5. *(необхідна умова). Нехай крайова задача (5.31), (5.32) має сильний узагальнений розв'язок $\varphi(t,s,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $\varphi_0(t,s,c^0)$ (5.18) з елементом $c = c^0$. Тоді елемент $c^0 \in \mathcal{H}$ повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{J(\varphi_0(\cdot,s,c),0) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi_0(\tau,s,c),\tau,0)d\tau\} = 0. \quad (5.35)$$

Доведення. Якщо крайова задача (5.31), (5.32) має сильні узагальнені розв'язки, то згідно з теоремою 5.3 повинна виконуватись умова

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha + \varepsilon J(\varphi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)(f(\tau) + \varepsilon Z(\varphi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau\} = 0. \quad (5.36)$$

Оскільки виконується умова (5.16), то після спрощення, (5.36) можна переписати у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{J(\varphi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\} = 0.$$

Переходячи до границі у цій рівності, коли $\varepsilon = 0$ отримаємо операторне рівняння (5.35).

Зауваження 5.4. *Для отримання результатів теореми 5.5 від нелінійностей $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), J(\varphi(t,s,\varepsilon),\varepsilon)$ достатньо вимагати лише неперервності в околі породжуючого розв'язку (або іншій умові, за якої можна зробити граничний перехід за ε).*

Для отримання достатньої умови існування розв'язку виконаємо заміну змінних у крайовій задачі (5.31), (5.32) вигляду

$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,s,\varepsilon),$$

в якій $\varphi_0(t,s,c^0)$ - породжуючий розв'язок (5.18) з елементом c^0, який задовольняє операторне рівняння для породжуючих елементів (5.35). У нових змінних будемо шукати сильний узагальнений розв'язок крайової задачі

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\psi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \quad (5.37)$$

$$\ell\psi(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon J(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{5.38}$$

який при $\varepsilon=0$ перетворюється у нульовий розв'язок. Розв'язність крайової задачі (5.37), (5.38) еквівалентна розв'язності крайової задачі (5.31), (5.32). Використовуючи неперервну диференційовність нелінійностей у околі породжуючого розв'язку виділимо лінійну частину за ψ й члени нульового порядку за ε. Мають місце наступні розклади

$$Z(\varphi_0(t,s,c^0)+\psi(t,s,\varepsilon),t,\varepsilon)=Z(\varphi_0(t,s,c^0),t,0)+$$

$$+A_1(t)\psi(t,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(t,s,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$J(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)=J(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0)+l_1\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon),$$

де

$$A_1(t)=A_1(t,c^0)=Z^{(1)}_{\varphi}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0(t,s,c^0),\varepsilon=0}, l_1=J^{(1)}(\varphi_0,0),$$

– похідні Фреше у точці $(\varphi=\varphi_0(t,s,c^0),\varepsilon=0)$, а для членів більш високого порядку $\mathcal{R}(\psi,t,\varepsilon),\mathcal{R}_1(\psi,\varepsilon)$ виконано співвідношення

$$\mathcal{R}(0,t,0)=0,\mathcal{R}^{(1)}_{\psi}(0,t,0)=0,\quad \mathcal{R}_1(0,0)=0,\mathcal{R}^{(1)}_{1\psi}(0,0)=0.$$

Таким чином, враховуючи заміну, будемо розглядати крайову задачу

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt}=-iH(t)\psi(t,\varepsilon)+\varepsilon\{Z(\varphi_0(t,s,c^0),t,0)+A_1(t)\psi(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}, \tag{5.39}$$

$$\ell\psi(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\{J(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0)+l_1\psi(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{5.40}$$

яка має сильний узагальнений розв'язок

$$\psi(t,s,c)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}(t,s,\varepsilon), c\in\mathcal{H}$$

$$\overline{\psi}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon U(t,s)\overline{Q}^{+}\{J(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0)+l_1\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0),\cdot,0)+A_1(\cdot)\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s),$$

за виконання умови

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^{*})}(\{J(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0)+l_1\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}-$$

$$-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{Z(\varphi_0(\tau,s,c^0),\tau,0)+A_1(\tau)\psi(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau)=0.$$

Підставляючи в лінійну частину замість останнього виразу $\psi(t,s,\varepsilon)$ представлення вигляду $U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}(t,s,\varepsilon)$ та, враховуючи виконання умови (5.35), отримаємо операторне рівняння відносно $c\in\mathcal{H}$:

$$B_0c=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau-$$
$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}, \qquad (5.41)$$

де оператор B_0 визначається наступним чином

$$B_0=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot,s)-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau,s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Для сильної узагальненої розв'язності (5.41), згідно викладеного вище, необхідно та достатньо виконання умови

$$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau-$$
$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\}=0,$$

яка буде гарантовано виконуватися, якщо $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}=0$. Розв'язавши (5.41), відносно c, приходимо до наступної операторної системи

$$\psi(t,s,c)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}(t,s,\varepsilon),$$
$$c=\overline{B}_0^+\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau-$$
$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\}, \qquad (5.42)$$
$$\overline{\psi}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+J(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

Введемо допоміжний вектор $u=(\psi,c,\overline{\psi})^T\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ (T - означає операцію транспонування). Тоді операторну систему (5.42) запишемо у вигляді

$$u=\begin{bmatrix}0 & U(t,s)P_{N(Q)} & I\\ 0 & 0 & L_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}u+\begin{pmatrix}0\\ g_1\\ g_2\end{pmatrix},$$

де

$$L_1\overline{\psi} = B_0^+ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(\ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)d\tau - l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)),$$

$$g_1 = B_0^+ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\ell \int_s^{\cdot} \mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau - \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\},$$

$$g_2 = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+ J(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon \overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

У свою чергу ця операторна система еквівалентна наступній

$$Lu = g, \tag{5.43}$$

де

$$L = \begin{bmatrix} I & -U(t,s)P_{N(Q)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор L має омежений обернений L^{-1}. Дійсно, оператор L^{-1} може бути виписаний явно

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & -U(t,s)P_{N(Q)} & -U(t,s)P_{N(Q)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що так визначений оператор, задовольняє рівності $LL^{-1} = L^{-1}L = I$. Обмеженість доводиться за означенням. Система (5.43) може бути записана у вигляді

$$u = L^{-1}g = L^{-1}S(\varepsilon)u.$$

Для достатньо малого ε оператор $S(\varepsilon)$ буде стискаючим. Тоді з принципа стискаючих відображень буде випливати, що операторна система (5.43) має єдину нерухому точку, яка й буде давати обмежений розв'язок крайової задачі (5.31), (5.32). Таким чином встановили наступне твердження.

Теорема 5.6. *Нехай для оператора* B_0 *виконується наступна умова:*

$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$*, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (5.35), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (5.31), (5.32). Цей розв'язок може бути знайдений з використанням ітераційного процесу*

$$\overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+ J(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

$$c_k = \overline{B}_0^+\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}_k(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi_k(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau -$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}_k(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\},$$

$$\psi_{k+1}(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + \overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi_k(t,s,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \psi_0(t,s,\varepsilon) = 0,$$

$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t,s,\varepsilon).$$

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами

Сформулюємо й доведемо результат, який пов'язує між собою необхідну й достатню умови.

Наслідок. *Нехай оператор* $F(c)$ *має похідну Фреше* $F^{(1)}(c)$ *для кожного елемента* c^0 *простору Гільберта* $\mathcal{H}$*, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (5.35). Якщо* $F^{(1)}(c)$ *має обмежений обернений, то крайова задача (5.31), (5.32) має єдиний розв'язок для кожного такого* c^0*.*

Доведення. Доведення випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень та рівності

$$F^{(1)}(c) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{J^{(1)}(v,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}[\varphi_0^{(1)}(\cdot,s,c)[h]] -$$

$$-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z^{(1)}(v,\tau,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}[\varphi_0^{(1)}(\tau,s,c)[h]]d\tau\} = B_0[h].$$

В силу оборотності оператора $F^{(1)}(c)$, оператор B_0 також оборотний. Завдяки цьому рівняння (5.35) й, відповідно, крайова задача (5.31), (5.32), має єдиний розв'язок для кожного елемента $c = c^0$.

5.4. Двоточкова крайова задача для рівняння Шредінгера з постійним оператором

В цій частині, розроблені вище теореми, застосовуються та уточнюються при дослідженні двоточкової крайової задачі для рівняння Шредінгера з постійним оператором.

Постановка задачі в лінійному випадку

Розглянемо наступну крайову задачу для рівняння Шредінгера в просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH_0\varphi(t) + f(t),\ \ t \in [0; w] \tag{5.44}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha \in D, \tag{5.45}$$

де $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ - простір Гільберта й вектор-функція $f(t)$ інтегровна; для простоти викладення будемо вважати, що необмежений оператор H_0 для кожного $t \in [0; w]$ має вигляд [214]

$$H_0 = i\begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

В більш загальному випадку, оператор H_0 може мати вигляд

$$H_0 = iJ\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}J, \quad J = J^* = J^{-1},$$

де T додатний самоспряжений оператор в просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Так, як оператор T замкнений, то область визначення $D(T)$ оператора T є простором Гільберта відносно скалярного добутку (Tu, Tu). Оператор H_0 самоспряжений на області визначення $D = D(T) \oplus D(T)$ зі скалярним добутком

$$(< u, v >, < u, v >)_{\mathcal{H}^T} = (Tu, Tu)_{\mathcal{H}} + (Tv, Tv)_{\mathcal{H}},$$

та інфінітіземальним генератором сильно неперервної еволюційної групи

$$U(t) := U(t, 0) = \begin{pmatrix} cos\ tT & sin\ tT \\ -sin\ tT & cos\ tT \end{pmatrix},\ \ U^n(t) = \begin{pmatrix} cos\ ntT & sin\ ntT \\ -sin\ ntT & cos\ ntT \end{pmatrix},$$

$||U^n(t)|| = 1, n \in \mathbb{N}$ (нерозтягуюча група); $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$. Слабкі розв'язки рівняння (5.44) можуть бути представленими в наступному вигляді

$$\varphi(t) = U(t)c + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

для довільного елемента $c \in \mathcal{H}_T$. Підставивши в умову (5.45), ми отримаємо, що розв'язність крайової задачі (5.44), (5.45) еквівалентна розв'язності наступного операторного рівняння

$$(I - U(w))c = g, \tag{5.46}$$

де $g = \alpha + U(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$. Розглянемо випадок, коли множина значень $I - U(w)$ є замкненою $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$. Як і для рівняння Хілла, розв'язність (5.46) можна встановлювати, використовуючи оператор

$$U_0(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n U^k(w)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n U(kw)}{n},$$

що є ортопроектором простору $\mathcal{H}_T$ на підпростір одиниці $1 \in \sigma(U(w))$. Рівняння (5.46) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)g = 0.$$

При виконанні цієї умови, розв'язки (5.46) будуть мати вигляд

$$c = U_0(w)\overline{c} + (\sum_{k=0}^{\infty}(\mu - 1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w) - U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))g,$$

для $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu(U(w))||}$ та довільного $\overline{c} \in \mathcal{H}_T$. Таким чином, отримали наступний результат.

Лема. *Нехай оператор $I - U(w)$ має замкнену множину значень $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$.*

1. Узагальнені розв'язки крайової задачі (5.44), (5.45) існують тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \tag{5.47}$$

2. При виконанні умови (5.47), розв'язки (5.44), (5.45) мають вигляд

$$\varphi(t,\overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f,\alpha])(t), \tag{5.48}$$

де

$$(G[f,\alpha])(t) = U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1}(\alpha+$$

$$+\int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) - U(t)U_0(w)(\alpha+\int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)+$$

$$+\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

узагальнений оператор Гріна крайової задачі (5.44), (5.45) для $0 < \mu - 1 < 1/||R_\mu(U(w))||$.

Покажемо, яким чином можна прибрати умову $R(I - U(w)) = \overline{R(I-U(w))}$ леми та зробити крайову задачу (5.44), (5.45) завжди розв'язною. Розпишемо всі можливі випадки в деталях та уточнимо деякі аспекти розширень певних операторів та просторів.

1) Класичні узагальнені розв'язки.

Якщо $R(I-U(w)) = \overline{R(I-U(w))}$, то [314] $g \in R(I-U(w))$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(I-U(w))^*)}g = 0$ та множина розв'язків (5.46) має вигляд [314] $c = G[g] + U_0(w)\overline{c}, \overline{c} \in \mathcal{H}_T$, де [307]

$$G[g] = (I-U(w))^+g = ((I-(U(w)-U_0(w))^{-1} - U_0(w))g$$

узагальнений оператор Гріна (або у вигляді збіжного ряду).

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Якщо $R(I-U(w)) \neq \overline{R(I-U(w))}$ та елемент $g \in \overline{R(I-U(w))}$, то оператор $I-U(w)$ може бути розширений до оператора $\overline{I-U(w)}$ з замкненою множиною значень.

Опишемо розвинену в попередніх розділах конструкцію в термінах наших просторів. Так як оператор $I-U(w)$ обмежений, то справедливий наступний розклад простору $\mathcal{H}_T$ в пряму суму

$$\mathcal{H}_T = N(I - U(w)) \oplus X, \mathcal{H}_T = \overline{R(I - U(w))} \oplus Y,$$

з $X = N(I - U(w))^{\perp} = \overline{R(I - U(w))}$ та $Y = \overline{R(I - U(w))}^{\perp} = N(I - U(w))$. Покладемо в якості $E = \mathcal{H}_T / N(I - U(w))$ фактор - простір простору $\mathcal{H}_T$, $\mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}}$ та $\mathcal{P}_{N(I-U(w))}$ ортопроектори, які проектують на $\overline{R(I - U(w))}$ й $N(I - U(w))$ відповідно. Тоді оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{U}(w) = \mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}}(I - U(w))j^{-1}p : X \to R(I - U(w)) \subset \overline{R(I - U(w))},$$

лінійний, неперервний та ін'єктивний. Тут

$$p : X \to E = \mathcal{H}_T / N(I - U(w)), \quad j : \mathcal{H}_T \to E$$

неперервні бієкція та проекція відповідно. Трійка $(\mathcal{H}_T, E, j)$ є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_{N(I-U(w))}\mathcal{H}$ [287]. В цьому випадку [160, с.26,29] ми можемо визначити сильний узагальнений розв'язок рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))x = g, x \in X. \tag{5.49}$$

Поповнюючи простір X за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))x||_F$, де $F = \overline{R(I - U(w))}$ [160], отримаємо новий простір $\overline{X}$. Розширений оператор

$$\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)} : \overline{X} \to \overline{R(I - U(w))}, X \subset \overline{X}$$

здійснює гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(I - U(w))}$. Тоді рівняння

$$(\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)})\bar{\xi} = g,$$

має єдиний розв'язок $(\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)})^{-1}g$ який будемо традиційно називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (5.49).

Зауваження 5.5. *Слід підкреслити, що існують наступні розширення просторів та відповідних операторів*

$$\overline{p} : \overline{X} \to \overline{E}, \quad \overline{j} : \overline{\mathcal{H}}_T \to \overline{E}, \quad \overline{\mathcal{P}}_X = \mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{\mathcal{H}}_T \to \overline{X}, \quad \overline{G} : \overline{R(I - U(w))} \to \overline{X},$$

де

$$\overline{\mathcal{H}}_T = N(I-U(w)) \oplus \overline{X};\ \ \overline{p}(x) = p(x), x \in X;\ \ \overline{j}(x) = j(x), x \in \mathcal{H}_T,$$

$$\overline{\mathcal{P}}_X(x) = \mathcal{P}_X(x), x \in \mathcal{H}_T\ (\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_X^2 = \mathcal{P}_X^*);\ \ \overline{G}[g] = G[g], g \in R(I-U(w)).$$

Оператор $\overline{I-U(w)} = (\overline{\mathcal{I}-\mathcal{U}(w)})\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{\mathcal{H}}_T \to \mathcal{H}_T$ *є розширенням* $I-U(w)$, $\overline{(I-U(w))}c = (I-U(w))c$ *для довільного* $c \in \mathcal{H}_T$ *.*

3) Сильні псевдорозв'язки.

Розглянемо елемент $g \notin \overline{R(I-U(w))}$. Це рівносильно виконанню умови $\mathcal{P}_{N(I-U(w))^*)}g \neq 0$. В цьому випадку існують елементи з $\overline{\mathcal{H}}_T$, що мінімізують норму $||\overline{(I-U(w))}\xi - g||_{\mathcal{H}_T}$:

$$\xi = \overline{(\mathcal{I}-\mathcal{U}(w))}^{-1} g + \mathcal{P}_{N(I-U(w))}\overline{c}, \forall \overline{c} \in \mathcal{H}_T.$$

Ці елементи будемо називати *сильними псевдорозв'язками* по аналогії з [314].

Сформулюємо тепер повну теорему розв'язності двоточкової крайової задачі для рівняння Шредінгера.

Теорема 5.7. *Розглянемо крайову задачу (5.44), (5.45).*

1. a) Класичні або сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (5.44), (5.45) існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \qquad (5.50)$$

Якщо $(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \in R(I-U(w))$, *то розв'язки (5.44), (5.45) будуть класичними узагальненими.*

b) За виконання (5.50) розв'язки (5.44), (5.45) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f,\alpha]})(t),$$

де $(\overline{G[f,\alpha]})(t)$ *- розширення оператора* $(G[f,\alpha])(t)$*;*

2. a) Сильні псевдорозв'язки крайової задачі (5.44), (5.45) існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \neq 0. \qquad (5.51)$$

b) За виконання (5.51) сильні псевдорозв'язки (5.44), (5.45) мають вигляд

$$\varphi(t,\overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f,\alpha]})(t),$$

де

$$(\overline{G[f,\alpha]})(t) = U(t)\overline{G}[g] + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= U(t)\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))}^{-1}g + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Нелінійний випадок

В просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$, означеному вище, розглянемо крайову задачу

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH_0\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \tag{5.52}$$

$$\varphi(0,\varepsilon) - \varphi(w,\varepsilon) = \alpha. \tag{5.53}$$

Задача полягає в знаходженні розв'язку $\varphi(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5.52), (5.53), який перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (5.44), (5.45) $\varphi_0(t,\overline{c})$ вигляду (5.48) при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови від оператор функції $Z(\varphi,t,\varepsilon)$ будемо вимагати неперервності в околі порождуючого розв'язку

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times C([0;w],\mathcal{H}_T) \times C[0,\varepsilon_0],$$

де q - деяка позитивна стала.

Ця проблема може бути розв'язаною з допомогою операторного рівняння для порождуючих амплітуд

$$F(\overline{c}) = U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)Z(\varphi_0(\tau,\overline{c}),\tau,0)d\tau = 0. \tag{5.54}$$

Теорема 5.8. *(необхідна умова). Нехай нелінійна крайова задача (5.52), (5.53) має розв'язок $\varphi(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється в один з розв'язків $\varphi_0(t,\overline{c})$ породжуючої задачі (5.44), (5.45) з елементом $\overline{c} = c^0$, $\varphi(t,0) = \varphi_0(t,c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді ця константа повинна задовольняти операторне рівняння для породжуючих амплітуд (5.54).*

Доведення проводиться за схемою теореми 5.3.

Для знаходження достатньої умови існування розв'язків крайової задачі (5.52), (5.53) будемо додатково припускати, щоб оператор - функція $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ була сильно - диференційовною в околі породжуючого розв'язку

$$(Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \leq q]).$$

Ця проблема може бути розв'язаною з допомогою оператора

$$B_0 = \frac{dF(\overline{c})}{d\overline{c}}|_{\overline{c}=c_0} = U_0(w) \int_0^w U^{-1}(t)A_1(t)dt : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

де $A_1(t) = Z^1(v, t, \varepsilon)|_{v=\varphi_0, \varepsilon=0}$ (похідна в сенсі Фреше).

Теорема 5.9. *(достатня умова). Нехай оператор B_0 задовольняє наступним умовам:*

1) B_0 має псевдообернений за Муром - Пенроузом;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)} U_0(w) = 0$.

Тоді для довільного елементу $c = c^0 \in \mathcal{H}_T$, що задовольняє операторне рівняння для порождуючих амплітуд (5.54), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок (5.52), (5.53).

Цей розв'язок може бути знайдений з допомогою ітеративного процесу:

$$\overline{v}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau, c^0) + v_k, \tau, \varepsilon), \alpha](t),$$

$$c_k = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)\{A_1(\tau)\overline{v}_k(\tau, \varepsilon) + \mathcal{R}(v_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(v_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z(\varphi_0(t, c^0) + v_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - Z(\varphi_0(t, c^0), t, 0) - A_1(t)v_k(t, \varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0, t, 0) = 0, \quad \mathcal{R}_x^1(0, t, 0) = 0,$$

$$v_{k+1}(t, \varepsilon) = U(t)U_0(w)c_k + \overline{v}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$\varphi_k(t, \varepsilon) = \varphi_0(t, c^0) + v_k(t, \varepsilon), k = 0, 1, 2, ..., \quad v_0(t, \varepsilon) = 0, \varphi(t, \varepsilon) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(t, \varepsilon).$$

Доведення проводиться за тією ж схемою, що й теорема про неявну функцію.

Цілком аналогічно встановлюється наступне твердження, що поєднує необхідну й достатню умови розв'язності.

Наслідок. *Нехай функціонал $F(\overline{c})$ має похідну в сенсі Фреше $F^{(1)}(\overline{c})$ для кожного елементу c^0 простору Гільберта $\mathcal{H}$, який задовольняє операторне рівняння для породжуючих амплітуд (5.54). Якщо $F^{(1)}(\overline{c})$ має обмежений обернений, то крайова задача (5.52), (5.53) має єдиний розв'язок для кожного c^0.*

5.5. Рівняння Ван дер Поля в просторі Гільберта

Приклад 1. Проілюструємо твердження цього розділу. Розглянемо наступне диференціальне рівняння в сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = \varepsilon(1 - ||y(t)||^2)\dot{y}(t), \tag{5.55}$$

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w), \tag{5.56}$$

де T – необмежений оператор з компактним оберненим T^{-1}. Тоді існує ортонормований базис $e_i \in \mathcal{H}$ такий, що $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)e_i$ та $Ty(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i(t)e_i$, $\lambda_i \to \infty$. Операторна система (5.52), (5.53) для крайової задачі (5.55), (5.56) в цьому випадку еквівалентна наступній зліченній системі звичайних диференціальних рівнянь ($c_k(t) = x_k(t)$)

$$\dot{x}_k(t) = \sqrt{\lambda_k} y_k(t), \quad k = 1, 2, ...,$$

$$\dot{y}_k(t) = -\sqrt{\lambda_k} x_k(t) + \varepsilon\sqrt{\lambda_k}(1 - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2(t))y_k(t), \tag{5.57}$$

$$x_k(0) = x_k(w), \quad y_k(0) = y_k(w). \tag{5.58}$$

Будемо шукати розв'язки цієї системи рівнянь в просторі $C^1([0; w])$, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в один із розв'язків породжуючого рівняння. Розглянемо критичний випадок $\lambda_i = 4\pi^2 i^2/w^2, i \in \mathbb{N}$. Нехай для простоти $w = 2\pi$. В цьому випадку множина усіх періодичних розв'язків (5.57), (5.58) має вигляд

$$x_k(t) = cos(kt)c_1^k + sin(kt)c_2^k,$$

$$y_k(t) = -sin(kt)c_1^k + cos(kt)c_2^k,$$

для всіх пар констант $c_1^k, c_2^k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Рівняння для породжуючих амплітуд (5.54) в цьому випадку буде еквівалентним наступній зліченій системі алгебраїчних нелінійних рівнянь

$$(c_1^k)^3 + 2\sum_{j=1, j\neq k}(c_1^k(c_1^j)^2 + c_1^k(c_2^j)^2) + c_1^k(c_2^k)^2 - 4c_1^k = 0,$$

$$(c_2^k)^3 + 2\sum_{j=1, j\neq k}(c_2^k(c_1^j)^2 + c_2^k(c_2^j)^2) + (c_1^k)^2c_2^k - 4c_2^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розв'язавши її отримаємо наступний результат.

Теорема 5.10. *(необхідна умова розв'язності рівняння ван дер Поля). Нехай крайова задача (5.57), (5.58) має розв'язок $\varphi(\cdot, \varepsilon)$, який перетворюється в один з розв'язків породжуючого рівняння з набором пар констант $(c_1^k, c_2^k), k \in \mathbb{N}$. Тоді серед них може бути не більше скінченної кількості ненульових. Більше того, якщо $(c_1^{k_i}, c_2^{k_i}) \neq (0,0), i = \overline{1,N}$, то ці константи знаходяться на N-вимірному торі скінченновимірного підпростору констант*

$$(c_1^{k_i})^2 + (c_2^{k_i})^2 = (\frac{2}{\sqrt{2N-1}})^2, i = \overline{1,N}.$$

Приклад 2. Розглянемо дійснозначну зліченну систему диференціальних рівнянь у просторі нескінченних послідовностей l_2 з необмеженим оператором $H(t)$ і вектор-функцією $f(t)$ у вигляді

$$H(t) = \mathrm{diag}\{2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\},$$

$$f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots),$$

і крайовою умовою вигляду $\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(1) = \alpha$, де

$$M = \mathrm{diag}\{3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1, \ldots\},$$

$$N = \mathrm{diag}\left\{e^{-2}, e^{-4}, e^{-8}, e^{-16}, \ldots, e^{-2^n}, \ldots\right\},$$

$$\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \in \ell_2; \quad \alpha_i = \mathrm{const}, \ i = \overline{1, \infty}.$$

Легко переконатися, що так визначений оператор дійсно є необмеженим. У якості області визначення оператора A розглянемо наступну множину неперервних вектор-функцій

$$D(A) = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), ...) \in l_2, t \in [0,1] :$$
$$\sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{+\infty} e^{4^i} x_i^2(t) < \infty\}.$$

Ця множина є щільною в $C([0,1]; l_2)$ (оскільки містить довільні вектор-функції, що мають скінченну кількість ненульових координат). Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді зліченновимірного вектор-стовпчика $x(t) = \operatorname{col}\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\} \in C([0;1], \ell_2)$.

Еволюційний оператор задачі має вигляд:

$$U(t,0) = \operatorname{diag}\left\{e^{2t}, e^{4t}, e^{8t}, e^{16t}, \ldots, e^{2^n t}, \ldots\right\}.$$

Обернений до $U(t,0)$ оператор

$$U^{-1}(t,0) = \operatorname{diag}\left\{e^{-2t}, e^{-4t}, e^{-8t}, e^{-16t}, \ldots, e^{-2^n t}, \ldots\right\}.$$

$$Q = M - NU(1,0) = \operatorname{diag}\{2, 0, 2, 0, \ldots, 2, 0, \ldots\},$$
$$Q^- = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{diag}\{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots\}.$$

Проектори відповідно дорівнюють:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^- Q = \operatorname{diag}\{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^- = \operatorname{diag}\{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots\}.$$

Умови розв'язності для даної задачі мають вигляд:

$$\begin{cases} \alpha_2 &= \int_0^1 \frac{e^4 f_2(\tau)}{e^{4\tau}} d\tau, \\ \alpha_4 &= \int_0^1 \frac{e^{16} f_4(\tau)}{e^{16\tau}} d\tau, \\ \ldots \\ \alpha_{2k} &= \int_0^1 \frac{e^{2k} f_{2k}(\tau)}{e^{2k\tau}} d\tau, \\ \ldots \end{cases}$$

При знайдених $\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2k}, \ldots (k \in \mathbb{N})$ і довільних $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2k+1}, \ldots (k \in \mathbb{N})$ та $f(t) \in C([0;1], \ell_2)$ задача має зліченну кількість розв'язків у вигляді

$$x(t,0,c) = diag\{0, e^{4t}, 0, e^{16t}, ..., 0, e^{2^{2k}t, \cdots}\}c+$$

$$+\frac{1}{2}diag\{e^{2t}, 0, e^{8t}, 0, ..., e^{2^{2k-1}t}, 0, ...\}\alpha + (G[f])(t,0), \forall c \in l_2,$$

або

$$x(t,0,c) = diag\{0, e^{4t}, 0, e^{16t}, ..., 0, e^{2^{2k}t, \cdots}\}c+$$
$$+\frac{1}{2}diag\{e^{2t}, 0, e^{8t}, 0, ..., e^{2^{2k-1}t}, 0, ...\}\alpha+$$
$$col(\int_0^t \frac{e^{2t}f_1(\tau)d\tau}{e^{2\tau}}, \int_0^t \frac{e^{4t}f_2(\tau)d\tau}{e^{4\tau}}, \int_0^t \frac{e^{8t}f_3(\tau)d\tau}{e^{8\tau}}, \int_0^t \frac{e^{16t}f_4(\tau)d\tau}{e^{16\tau}}, ...,$$
$$\int_0^t \frac{e^{2^k t}f_k(\tau)d\tau}{e^{2^k\tau}}, ...)+$$
$$col(\int_0^1 \frac{e^{2t}f_1(\tau)d\tau}{2e^{2\tau}}, 0, \int_0^1 \frac{e^{4t}f_1(\tau)d\tau}{2e^{2\tau}}, 0, ..., \int_0^1 \frac{e^{2^{2k-1}t}f_k(\tau)d\tau}{2e^{2^{2k-1}\tau}}, 0, ...),$$

де $k \in \mathbb{N}$.

5.6. ВИСНОВКИ

1) Для лінійного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта за умов експоненціальної дихотомії на півосях знадено необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків;

2) Отримано умови біфуркації розв'язків для лінійного операторно-диференціального рівняння Шредінгера на скінченному відрізку;

3) Досліджено крайові задачі для нелінійного операторно-диференціального рівняння Шредінгера у просторі Гільберта;

4) Отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків двоточкової крайової задачі для рівняння Шредінгера з постійним оператором;

5) Отримано необхідну умову існування розв'язків рівняння Ван дер Поля в просторі Гільберта.

РОЗДІЛ 6
РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ У ПРОСТОРІ БАНАХА

У даному розділі досліджуються умови існування обмежених та періодичних розв'язків операторних різницевих рівнянь та алгоритми їх побудови. Розвинена техніка псевдообернених операторів у теорії крайових задач дає можливість досліджувати такі проблеми.

6.1. Періодичні розв'язки різницевих рівнянь

У цьому підрозділі отримаємо необхідну й достатню умови існування періодичних розв'язків з використанням поняття відносного спектра лінійного обмеженого оператора у просторі Банаха та ергодичної теореми.

Постановка задачі та основний результат

Нехай $\mathbf{B}$ - комплексний простір Банаха з нормою $||\cdot||$ та нульовим елементом $\overline{0}$; $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ - простір Банаха лінійних обмежених операторів з $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Будемо розглядати задачу про існування періодичних розв'язків рівняння

$$x_{n+1} = \lambda A_{n+1} x_n + h_{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{6.1}$$

з умовою періодичності

$$x_0 = x_m, \tag{6.2}$$

де $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$, $A_{n+m} = A_n$ для кожного $n \geq 0$, λ - комплексний параметр, $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ послідовність у $\mathbf{B}$. Розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд [336]:

$$x_m(\lambda) = \Phi(m, n, \lambda) x_n(\lambda), \quad m \geq n,$$

де

$$\Phi(m, n, \lambda) = \lambda^{m-n} A_{m+1} A_m \dots A_{n+1}, \quad m > n$$

- еволюційний оператор задачі (6.1); $\Phi(m, m, \lambda) = I$, де I - тотожний оператор. Нагадаємо, що

$$U(m, \lambda) = \Phi(m, 0, \lambda), U(0, \lambda) = I \text{ та } U(k+n, \lambda) = U(k, \lambda)U(n, \lambda).$$

Оператор $U(m, \lambda)$ традиційно будемо називати *оператором монодромії.*

Розв'язок рівняння (6.1) з довільною початковою умовою $x(0, \lambda) = x_0, x_0 \in \mathbf{B}$ може бути зображений у вигляді:

$$x_k(\lambda) = \Phi(k, 0, \lambda)x_0 + g(k, \lambda),$$

де

$$g(k, \lambda) = \sum_{i=0}^{k} \Phi(k, i, \lambda)h_i.$$

Підставляючи це представлення у крайову умову (6.2) отримаємо операторне рівняння

$$x_0(\lambda) - x_m(\lambda) = x_0 - \Phi(m, 0, \lambda)x_0 - g(m, \lambda) = \overline{0}.$$

Згідно позначень отримаємо операторне рівняння

$$(I - U(m, \lambda))x_0 = g(m, \lambda). \tag{6.3}$$

Крайова задача (6.1), (6.2) має періодичний розв'язок тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння (6.3) розв'язне.

Як і в [41], будемо називати точку λ *точкою стійкойсті праворуч*, якщо степені оператора монодромії задовольняють нерівність $\{||U^n(m, \lambda)|| \leq c, n \geq 0\}$ з деякою додатною сталою c (аналогічне означення використовувалося у третій главі при дослідженні диференціального операторного рівняння).

Позначимо $\rho_{NS}(I - U(m, \lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(I - U(m, \lambda)) = \overline{R(I - U(m, \lambda))}\}$. Резольвентна множина $\rho(I - U(m, \lambda))$ оператора $I - U(m, \lambda)$ є підмножиною $\rho_{NS}(I - U(m, \lambda))$.

У подальшому для простоти викладення будемо припускати, що простір $\mathbf{B}$ є рефлексивним [121] та знову позначимо через

$$U_0(m, \lambda) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(m, \lambda)}{n}$$

- проектор на ядро $I - U(m, \lambda)$, що є усередненим до степеней оператора монодромії.

Метою даного підрозділу є встановлення наступного твердження.

Теорема 6.1. *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}(I - U(m, \lambda))$ точка стійкості праворуч для рівняння (6.1). Тоді:*

а) крайова задача (6.1), (6.2) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, h_n \in \mathbf{B}$ задовольняє умову

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} U^k(m, \lambda) \Phi(m, i, \lambda) h_i}{n} = 0; \tag{6.4}$$

б) за виконання умови (6.4), розв'язки крайової задачі (6.1), (6.2) мають вигляд:

$$x_n(\lambda) = U(n, \lambda) U_0(m, \lambda) c + U(n, \lambda) G(n, \lambda)[h_n], \tag{6.5}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$, $G(n, \lambda)$ - узагальнений оператор Гріна крайової задачі (6.1), (6.2), який визначається рівністю

$$G(n, \lambda)[h_n] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \mu)^k \{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(m, \lambda) - U_0(\lambda))^l \}^{k+1} \sum_{i=0}^{m} \Phi(m, i, \lambda) h_i -$$

$$- U_0(\lambda) \sum_{i=0}^{m} \Phi(m, i, \lambda) h_i + \sum_{i=0}^{n} \Phi(n, i, \lambda) h_i.$$

Допоміжний результат

Лема. *Якщо $\lambda \in \rho_{NS}(I - U(m, \lambda))$, тоді крайова задача (6.1), (6.2) розв'язна тоді й тільки тоді, коли послідовність h_n задовольняє умову:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} U^k(m, \lambda) \Phi(m, i, \lambda) h_i}{n} = 0.$$

Доведення. З умов леми випливає, що виконано умови статистичної ергодичної теореми [121]. Тоді

$$R(I - U(m, \lambda)) = \{ x \in \mathbf{B} : \lim_{n \to \infty} U_n(m, \lambda) x = \overline{0}, U_n(m, \lambda) = \frac{\sum_{k=1}^{n} U^k(m, \lambda)}{n} \}.$$

З цих міркувань випливає, що елемент $g(m,\lambda)$ належить множині значень оператора $I-U(m,\lambda)$ тоді й тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}U^k(m,\lambda)}{n}\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i=0,$$

що й доводить лему.

Для того, щоб довести теорему будемо використовувати представлення узагальнено-оберненого оператора до $I-U(m,\lambda)$, отримані у другій главі. Це представлення у вигляді

$$(I-U(m,\lambda))^{-}=(I-U(m,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda), \tag{6.6}$$

або у вигляді збіжного операторного ряду

$$(I-U(m,\lambda))^{-}=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(m,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}-U_0(\lambda), \tag{6.7}$$

для всіх $0<\mu-1<\frac{1}{||R_\mu||}$.

Доведення теореми.

Згідно загальної теорії розв'язності лінійних рівнянь [314] отримаємо, що задача (6.1), (6.2) розв'язна для послідовності $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, що задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}U^k(m,\lambda)}{n}g(m,\lambda)=0.$$

Ця умова разом із лемою еквівалентна виконанню умови а) теореми 6.1.

За її виконання, розв'язки задачі (6.1), (6.2) мають вигляд

$$x_n=U(n,\lambda)U_0(\lambda)c+U(n,\lambda)(I-U(m,\lambda))^{-}g(m,\lambda)+g(n,\lambda)=$$

$$U(n,\lambda)U_0(\lambda)c+U(n,\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(m,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}g(m,\lambda)-$$
$$-U(n,\lambda)U_0(\lambda)g(m,\lambda)+g(n,\lambda),$$

що разом із позначеннями еквівалентно представленню б) теореми.

Коментарі та приклади

Зауваження 6.1. *Припустимо* $A_k^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$ *існує для всіх* $k = \overline{0, m-1}$. *Тоді справедлива наступна рівність* $\Phi(k, i, \lambda) = U(k, \lambda)U^{-1}(i, \lambda), k > i$. *Вона дає можливість представляти розв'язки рівняння (6.1), (6.2) використовуючи лише сім'ю операторів та їх обернених.*

Проілюструємо твердження, доведені вище, на прикладі двовимірної системи.

1) Розглянемо рівняння

$$\overrightarrow{x}_{n+1} = \lambda A_{n+1} \overrightarrow{x}_n + \overrightarrow{h}_{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{6.8}$$

з умовою періодичності

$$\overrightarrow{x}_3 = \overrightarrow{x}_0, \tag{6.9}$$

де $\overrightarrow{x}_n = (x_n^1, x_n^2)^T, x_n^1, x_n^2 \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{h}_n = (\frac{3\sqrt{3}r}{4\pi}, 0)^T$,

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \forall n \geq 0.$$

Легко побачити, що

$$\overrightarrow{x}_3 = \lambda^3 \overrightarrow{x}_0 + g(3, \lambda), \tag{6.10}$$

де

$$g(3, \lambda) = (\frac{-3\sqrt{3}r\lambda - 3\sqrt{3}r\lambda^2 + 6\sqrt{3}r}{8\pi}, \frac{9r\lambda - 9r\lambda^2}{8\pi})^T.$$

Для всіх $k \geq 0$

$$U(3k+1, \lambda) = \lambda^{3k+1} A_2, U(3k+2, \lambda) = \lambda^{3k+2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$U(3k+3, \lambda) = \lambda^{3k+3} I.$$

Підставляючи умову періодичності (6.9) в (6.10) отримаємо рівняння відносно $\overrightarrow{x}_0$

$$(1 - \lambda^3)\overrightarrow{x}_0 = g(3, \lambda). \tag{6.11}$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda = 1$. У такому випадку рівняння (6.11) перетворюється в $0\overrightarrow{x}_0 = (0, 0)^T$, яке справджуєтсья для довільно початкового вектора $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Ясно, що $U^n(1,1) = U(n,1)$ та $U_0(1) = I$. Згідно теореми 6.1 всі періодичні розв'язки рівняння (6.8) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} x_n^1(c_1, c_2) \\ x_n^2(c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{3}n & sin\frac{2\pi}{3}n \\ -sin\frac{2\pi}{3}n & cos\frac{2\pi}{3}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3r}{2\pi}sin\frac{2\pi}{3}n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

для всіх $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

2) Можна знаходити періодичні розв'язки довільного періоду w у попередній задачі. Вони мають загальний вигляд

$$\overrightarrow{x}_n(c_1, c_2, w, r) = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{w}n & sin\frac{2\pi}{w}n \\ -sin\frac{2\pi}{w}n & cos\frac{2\pi}{w}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{rw}{2\pi}sin\frac{2\pi}{w}n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

де c_1, c_2, w, r параметри.

6.2. Обмежені на всій осі розв'язки лінійних різницевих рівнянь у просторі Банаха

У цій частині доводяться теореми про необхідні та достатні умови існування обмежених на всій цілочисельній осі розв'язків різницевих рівнянь у просторі Банаха з нормально - розв'язним оператором, а також будуються відповідні розв'язки.

Постановка задачі

Будемо розглядати рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (6.14)$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ - множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені та діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе. Припускається, що

$$A = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{L}(\mathbf{B})), h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B}),$$

тобто

$$|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||A_n|| < +\infty, |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||h_n|| < +\infty.$$

Треба встановити умови існування обмежених розв'язків рівняння (6.14).

Поряд з (6.14) будемо розглядати однорідне рівняння :

$$x_{n+1} = A_n x_n. \tag{6.15}$$

Зауважимо, що будь-який розв'язок однорідного рівняння володіє тією властивістю, що: $x_m = \Phi(m,n)x_n, m \geq n$, де $\Phi(m,n) = A_{m-1}A_{m-2}...A_{n+1}$ при $m > n$, та $\Phi(m,m) = I$. Ясно, що $\Phi(m,0) = A_{m-1}A_{m-2}...A_0, U(m) := \Phi(m,0), U(0) = I$.

Відображення $\Phi(m,n)$ називають еволюційним оператором задачі (6.15). Припустимо далі, що рівняння (6.15) є е-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ з проекторами P та Q на просторі $\mathbf{B}$ відповідно, тобто

$$\exists k_1 \geq 1; 0 < \lambda_1 < 1; \exists P(P^2 = P):$$

$$||U(n)PU^{-1}(m)|| \leq k_1\lambda_1^{n-m}, n \geq m$$

$$||U(n)(E-P)U^{-1}(m)|| \leq k_1\lambda_1^{m-n}, m \geq n$$

для всіх $m,n \in \mathbb{Z}_+$ (дихотомія на $\mathbb{Z}_+$);

$$\exists k_2 \geq 1; 0 < \lambda_2 < 1; \exists Q(Q^2 = Q):$$

$$||U(n)QU^{-1}(m)|| \leq k_2\lambda_2^{n-m}, n \geq m$$

$$||U(n)(E-Q)U^{-1}(m)|| \leq k_2\lambda_2^{m-n}, m \geq n$$

для всіх $m,n \in \mathbb{Z}_-$ (дихотомія на $\mathbb{Z}_-$).

Теорема 6.2. *Нехай однорідне рівняння є е-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ з проекторами P та Q відповідно й оператор $D = P - (E-Q)$ - узагальнено-оборотний. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисельній вісі розв'язки рівняння (6.14) необхідно і достатньо, щоб виконувалась наступна умова*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0. \tag{6.16}$$

Якщо умова (6.16) виконується, то обмежені розв'язки мають наступний вигляд :

$$x_n(c) = U(n)PP_{N(D)}c + (G[h])(n), \tag{6.17}$$

де

$$G[h](n) = U(n)Z(n),$$

$$Z(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} PU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + PD^{-}[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \; n \geq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{n-1} QU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{-1}(E-Q)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + (E-Q)D^{-}[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ \qquad + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \; n \leq 0, \end{cases}$$

- узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на $\mathbb{Z}$ розв'язки з наступними властивостями :

$$(G[h])(0+0) - (G[h])(0-0) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0,$$

$$(LG[h])(n) = h_n, n \in \mathbb{Z},$$

де

$$(Lx)(n) := x_{n+1} - A_n x_n : l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B),$$

$H(n+1) = P_{N(D^*)}QU^{-1}(n+1) = P_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(n+1)$, D^- *- узагальнено - обернений оператор до оператора D, $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ - проектори, що проектують* $\mathbf{B}$ *на ядра $N(D)$ та $N(D^*)$ операторів D та D^* відповідно.*

Доведення. Загальний розв'язок задачі (6.14), обмежений на півосях має вигляд :

$$x_n(\xi) = \begin{cases} U(n)P\xi + \sum_{k=0}^{n-1} U(n)PU^{-1}(k+1)h_k - \\ \qquad - \sum_{k=n}^{+\infty} U(n)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k, \; n \geq 0 \\ U(n)(E-Q)\xi + \sum_{k=-\infty}^{n-1} U(n)QU^{-1}(k+1)h_k - \\ \qquad - \sum_{k=n}^{-1}(E-Q)U^{-1}(k+1)h_k, \; n \leq 0. \end{cases} \tag{6.18}$$

Розв'язок, побудований таким чином, є обмеженим на півосях $(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-)$. Дійсно, для всіх $n \geq 0$ маємо $A_nU(n)P\xi = A_nA_{n-1}...A_0P\xi = U(n+1)P\xi$. Тому

$x_{n+1} = A_n x_n$, а отже цей вираз задовольняє однорідне рівняння (6.15) на додатній півосі. Далі одержуємо

$$A_n(\sum_{k=0}^{n-1} U(n)PU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{+\infty} U(n)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k) + h_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} U(n+1)PU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n}^{+\infty} U(n+1)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + h_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} U(n+1)PU^{-1}(k+1)h_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} U(n+1)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + h_n -$$

$$-U(n+1)PU^{-1}(n+1)h_n - U(n+1)(E-P)U^{-1}(n+1)h_n =$$

$$= x_{n+1}(\xi).$$

Доведемо, що таким чином визначений розв'язок є обмеженим на півосях. Для цього оцінимо на $\mathbb{Z}_+$ ряди:

$$|| \sum_{k=0}^{n-1} U(n)PU^{-1}(k+1)h_k || \leq |||h||| \sum_{k=0}^{n-1} ||U(n)PU^{-1}(k+1)|| \leq$$

$$\leq |||h||| \sum_{k=0}^{n-1} k_1 \lambda_1^{n-k-1} = |||h||| k_1 \lambda_1^n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^{-(k+1)} =$$

$$= |||h||| k_1 \lambda_1^n \frac{\frac{1}{\lambda_1}((\frac{1}{\lambda_1})^{n-1} - 1)}{\frac{1}{\lambda_1} - 1} < \infty,$$

та

$$|| \sum_{k=n}^{+\infty} U(n)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k || \leq |||h||| \sum_{k=n}^{+\infty} k_1 \lambda_1^{k+1-n} =$$

$$= k_1 \lambda_1^{-n+1} |||h||| \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_1^k = k_1 \lambda_1^{-n+1} \cdot \frac{\lambda_1^n}{1-\lambda_1} < \infty.$$

Аналогічно доводиться обмеженість розв'язку на $\mathbb{Z}_-$.

Знайдемо умову, за виконання якої, розв'язок (6.18) буде обмеженим на всій осі цілих чисел. Це буде тоді й лише тоді, коли

$$x_{0+}(\xi) = x_{0-}(\xi).$$

Підставивши відповідні вирази отримаємо

$$P\xi-\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k=(E-Q)\xi+\sum_{k=-\infty}^{-1}QU^{-1}(k+1)h_k.$$

Розглянемо наступний вектор

$$g=\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k+\sum_{k=-\infty}^{-1}QU^{-1}(k+1)h_k.$$

Отримали операторне рівняння

$$D\xi=g. \tag{6.19}$$

Оскільки D - нормально-розв'язний оператор, то як відомо з [314], необхідною та достатньою умовою розв'язності рівняння (6.19) є наступна :

$$P_{N(D^*)}g=0. \tag{6.20}$$

Оскільки $DP_{N(D)}=0$, то маємо, що $PP_{N(D)}=(E-Q)P_{N(D)}$. Аналогічно, з того, що $P_{N(D^*)}D=0$, маємо, $P_{N(D^*)}Q=P_{N(D^*)}(E-P)$. Враховуючи це, умову (6.20) можна переписати наступним чином

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}P_{N(D^*)}QU^{-1}(k+1)h_k=0,$$

або

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}P_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k=0.$$

Таким чином, згідно позначень теореми, умову (6.16) доведено. Якщо умова (6.16) виконується, то $\xi=D^{-}g+PP_{N(D)}c$, для всіх $c\in\mathbf{B}$.

З безпосередньої підстановки у представлення (6.18) випливає, що множина обмежених на всій осі $\mathbb{Z}$ розв'язків буде мати вигляд (6.17).

Велику роль у крайових задачах відіграють нетерові, d-нормальні та n-нормальні оператори.

Для таких операторів доведена теорема залишається справедливою, але з деякими уточненнями.

Теорема 6.3. *Нехай виконуються умови теореми 6.2 та обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ є d - нормальним. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисельній осі розв'язки рівняння (6.14), необхідно та достатньо, щоб виконувались d лінійно-незалежних умов*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_d(k+1)h_k = 0. \tag{6.21}$$

Якщо умова (6.21) виконується, то обмежені розв'язки мають вигляд (6.17), де

$$H_d(n) = [P_{N(D^*)}Q]_d U^{-1}(n) = [P_{N(D^*)}(E-P)]_d U^{-1}(n),$$

$$d \leq m \ (m = dimcokerD < \infty), d = dim(P_{N(D^*)}Q).$$

Доведення. Достатньо врахувати, що оператор $P_{N(D^*)}$ скінченновимірний (оскільки він є d - нормальним), а тому й оператор $P_{N(D^*)}Q$ скінченновимірний $(R(P_{N(D^*)}Q) \subset R(P_{N(D^*)}))$.

Теорема 6.4. *Нехай виконуються умови теореми 6.2 та обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ є n - нормальним. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисельній осі розв'язки рівняння (6.14), необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова (6.16). Якщо умова (6.16) виконується, то рівняння (6.14) має r - параметричну множину обмежених розв'язків*

$$x_n(c_r) = U(n)[PP_{N(D)}]_r c_r + (G[h])(n), \tag{6.22}$$

де $r \leq n$ $(n = dimker(D))$.

Доведення. Оскільки D – n - нормальний оператор, то його ядро скінченної розмірності. Звідси випливає, що оператор $P_{N(D)}$ скінченновимірний, а тому й оператор $PP_{N(D)}$ скінченновимірний $((R(PP_{N(D)})) \subset R(P_{N(D)}))$. Якщо $dim\ N(D) = n$, то

$$dim(PP_{N(D)}B) = dim((E-Q)PP_{N(D)}B) = r \leq n.$$

Теорема 6.5. *Нехай виконуються умови теореми 6.2 та обмежений оператор $D = P-(E-Q)$ є нетеровим. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисельній вісі розв'язки рівняння (6.14), необхідно та достатньо, щоб виконувались d-умов (6.21). Якщо умови (6.21) виконуються, то рівняння (6.14) має r-параметричну множину обмежених розв'язків*

$$x_n(c_r) = U(n)[PP_{N(D)}]_r c_r + (G[h])(n), \tag{6.23}$$

де $r \leq n$ $(n = dimker(D))$, $d \leq m$ $(m = dimcokerD)$.

Наслідок. *Нехай в умовах теореми 6.2 $[P, Q] = PQ - QP = 0$ та $PQ = Q$. У такому випадку говорять, що рівняння (6.15) є трихотомічним на $\mathbb{Z}$ і неоднорідне рівняння (6.14) має не менше одного розв'язку на $\mathbb{Z}$ для всіх $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.*

Доведення. З того, що $P_{N(D^*)}D = 0$ та $DP = (P-(E-Q))P = QP = Q$ маємо $P_{N(D^*)}Q = P_{N(D^*)}DP = 0$. Звідси випливає розв'язність $\forall h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.

Наслідок. *Якщо в умовах теореми (6.2) $[P, Q] = PQ - QP = 0$ та $PQ = Q = P$, то неоднорідне рівняння (6.14) має єдиний обмежений на $\mathbb{Z}$ розв'язок для будь-якого $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.*

Зауваження 6.2. *У цьому випадку система є е-дихотомічною на всій осі $\mathbb{Z}$. У скінченновимірному випадку аналогічний результат добре відомий [336]. Теорема 6.2, за менших вимог, дає можливість знаходити не один обмежений розв'язок, а цілу множину таких розв'язків.*

6.3. Умови біфуркації розв'язків різницевих рівнянь

У цьому підрозділі доведемо достатню умову існування, обмежених на всій цілочисельній осі, розв'язків збуреного різницевого рівняння у просторі Банаха з нормально - розв'язним оператором.

Постановка задачі

Будемо розглядати збурене різницеве рівняння вигляду

$$x_{n+1} = A_n x_n + \varepsilon B_n x_n + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.24}$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ – множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені, та діють з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе; $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ – послідовність векторів з $\mathbf{B}$. $|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| < +\infty, |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|h_n\| < +\infty$; B_n – множина обмежених операторів, що задовольняє такі ж умови, як і множина A_n; $\varepsilon << 1$ - достатньо малий параметр.

Поряд з (6.24), будемо розглядати породжуюче рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, n \in \mathbb{Z} \tag{6.25}$$

та однорідне рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n, n \in \mathbb{Z}. \tag{6.26}$$

У даній частині буде обгрунтовано модифікований метод Вішика - Люстерніка для знаходження обмежених на всій цілочисельній осі розв'язків за умов, коли рівняння (6.25) не має розв'язків, обмежених на всій цілочисельній осі.

Обмежений розв'язок лінійного рівняння

Для формулювання і доведення основного результату, будемо використовувати позначення та результати теореми 6.2 попереднього підрозділу. Покажемо, що задача про відшукання розв'язку рівняння (6.24), обмеженого на всій цілочисельній осі, може бути розв'язана з допомогою оператора

$$B_0 := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1) B_k U(k) P P_{N(D)}.$$

Теорема 6.6. *Нехай однорідне рівняння (6.26) є е-дихототмічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ з проекторами P та Q відповідно й обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ має узагальнено-обернений оператор. Припустимо, що :*

$$1) B_0 - \textit{нормально - розв'язний оператор};$$

$$2) P_{N(B_0^*)} P_{N(D^*)} Q = 0. \tag{6.27}$$

Тоді, якщо рівняння (6.25) не має, обмежених на всій цілочисельній осі, розв'язків для послідовності $h \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, то рівняння (6.24) має принаймні *один обмежений розв'язок у вигляді частини ряду :*

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_n^{(i)}, \tag{6.28}$$

де $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *- достатньо мале.*

Доведення. Підставимо формально ряд (6.28) у рівняння (6.24) та прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях ε. При ε^{-1} маємо рівняння

$$x_{n+1}^{(-1)} = A_n x_n^{(-1)}.$$

Виходячи з того, що за умов теореми однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях, випишемо множину обмежених розв'язків у вигляді

$$x_n^{(-1)}(c_{-1}) = U(n)PP_{N(D)}c_{-1},$$

для довільного елемента $c_{-1} \in \mathbf{B}$, який буде визначений на наступному кроці. При ε^0 маємо наступне неоднорідне рівняння

$$x_{n+1}^0 = A_n x_n^0 + B_n x_n^{(-1)}(c_{-1}) + h_n. \tag{6.29}$$

Згідно теореми 6.2, необхідною та достатньою умовою існування розв'язків рівняння (6.29), обмежених на всій цілочисельній осі, є виконання співвідношення

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)\{B_k x_k^{(-1)}(c_{-1}) + h_k\} = 0. \tag{6.30}$$

Умову (6.30) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)B_k U(k)PP_{N(D)}c_{-1} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k.$$

Тоді, згідно позначень, будемо мати операторне рівняння :

$$B_0 c_{-1} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k.$$

З другої умови теореми випливає, що це рівняння є розв'язним для довільної правої частини. Відомо також, що воно може мати не єдиний розв'язок, але нам достатньо знайти хоча б один. Константу c_{-1} оберемо наступним чином:

$$c_{-1} = -B_0^- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k,$$

де B_0^- - оператор, узагальнено - обернений до оператора B_0.

Таким чином, якщо умови теореми виконуються, то рівняння (6.29) має множину обмежених на $\mathbb{Z}$ розв'язків :

$$x_n^0(c_0) = U(n)PP_{N(D)}c_0 + (G[B_{(\cdot)}x_{(\cdot)}^{(-1)}(c_{-1}) + h_{(\cdot)}])(n),$$

де c_0 – довільний елемент простору $\mathbf{B}$, що буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу; c_{-1} – елемент, визначений вище; $(G[*])(n)$ - узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені розв'язки рівняння (6.24).

Далі, діючи за індукцією, неважко показати, за виконання умов теореми, що при ε^i будемо мати наступну задачу про обмежені на всій $\mathbb{Z}$ розв'язки:

$$x_n^{(i)} = A_n x_n^{(i)} + B_n x_n^{(i-1)}(c_{i-1}). \tag{6.31}$$

Множина обмежених розв'язків рівняння (6.31) буде мати вигляд :

$$x_n^{(i)}(c_i) = U(n)PP_{N(D)}c_i + (G[B_{(\cdot)}x_{(\cdot)}^{(i-1)}(c_{i-1})])(n),$$

де елемент c_i визначається наступним чином:

$$c_i = -B_0^- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)B_k(G[B_{(\cdot)}x_{(\cdot)}^{(i-1)}(c_{i-1}) + h_{(\cdot)}])(k).$$

Доведемо тепер, що для достатньо малого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, ряд (6.28) збігається. Для цього оцінимо кожен доданок окремо:

$$\|H(n)\| = \|H^*(n)\| \leq \|U^{*-1}(n)Q^*P^*_{N(D^*)}\| \leq k_1 p\lambda_1^n, \quad n \geq 0$$

$$\|H(n)\| = \|H^*(n)\| \leq \|U^{*-1}(n)(E-P^*)^*P^*_{N(D^*)}\| \leq k_2 p\lambda_2^n, \quad n \leq 0$$

тут $p = max\{\|P_{N(D)}\|, \|P^*_{N(D^*)}\| = \|P_{N(D^*)}\|\}$.

Таким чином, маючи відповідні оцінки, можемо довести обмеженість узагальненого оператора Гріна:

$$\|(G[h])(n)\| \leq K|||h|||,$$

де

$$N = \|D^-\|,$$
$$K = max_{i=1,2}\{k_i(\frac{1}{\lambda_i} + Nk)\}, k = \frac{k_2}{\lambda_2} + \frac{k_1}{\lambda_1}.$$

Використаємо ці нерівності для доведення збіжності ряду (6.28).

$$\|c_i\| \leq (aK)^i abpk(abplk + 1)^{i-1}\|x_n^{(0)}(c_0)\|,$$

$$\|x_n^{(i)}(c_i)\| \leq [aK(abplk + 1)]^i\|x_n^{(0)}(c_0)\| \quad (i = 1, 2, ...),$$

де $b = \|B_0^-\|, a = \|B_n\|, l = max\{k_1 p, k_2 p\}$. Таким чином, для кожного $n \in \mathbb{Z}$, ряд (6.28) мажорується рядом

$$\varepsilon^{-1}\|x_n^{(-1)}(c_{-1})\| + \sum_{i=0}^{+\infty}[\varepsilon aK(abplk + 1)]^i\|x_n^{(0)}(c_0)\|.$$

Зауважимо, що $\|x_n^{(-1)}(c_{-1})\|$ та $\|x_n^{(0)}(c_0)\|$ обмежені. Тому, для $n \in \mathbb{Z}$ та всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ таких, що $\varepsilon_* < [aK(abplk + 1)]^{-1}$, ряд (6.28) абсолютно збігається. Таким чином теорему доведено.

6.4. ВИСНОВКИ

1) Досліджено параметричне різницеве рівняння з періодичною умовою у просторі Банаха;

2) З допомогою побудованого оператора Гріна представлено розв'язкі різницевого операторного рівняння;

3) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених на всій цілочисельній осі розв'язків різницевих рівнянь у просторі Банаха за умов дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння;

4) Досліджено умови біфуркації обмежених розв'язків різницевого рівняння у просторі Банаха.

РОЗДІЛ 7
ОПЕРАТОРНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

7.1. Застосування теорії збурень до дослідження розв'язності вироджених систем рівнянь

У цій частині з допомогою узагальненої канонічної форми досліджується структура та умови біфуркації розв'язків диференціально-алгебраїчних рівнянь з виродженою матрицею при похідній.

Вступ

Розглянемо систему

$$\Lambda_1 x(t) := A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t),\ t \in T = [\alpha, \beta], \tag{7.1}$$

де $A(t),\ B(t) - (m \times n)$-матриці, $x(t), f(t)-$ шукана й задана вектор-функції відповідно, $\dot{z}(t) := dz(t)/dt$. Припускається, що вхідні дані достатньо гладкі та виконується умова

$$\operatorname{rank} A(t) < \min\{m, n\}, \quad \forall t \in T. \tag{7.2}$$

Система (7.1) є *замкненою*, якщо кількість рівнянь у ній дорівнює кількості компонент шуканої вектор - функції ($m = n$), *перевизначеною*, якщо $m > n$, й *недовизначеною*, якщо $m < n$. Для замкненої системи умова (7.2) еквівалентна рівності $\det\ A(t) \equiv 0,\ t \in T$.

Системи вигляду (7.1), що задовольняють умові (7.2), називають або диференціально - алгебраїчними рівняннями [319], або алгебро-диференціальними системами [318]. Використовуються також назви "сингулярні системи", "дескрипторні системи", "вироджені системи".

Зауваження 7.1. *Для спрощення запису залежність від часу t інколи будемо опускати, якщо це не викличе непорозуміння. Включення $V(t) \in \mathbf{C}^i(T)$, $i > 1$, де $V(t)-$ матрична або вектор-функція, означає, що всі похідні всіх* *її елементів неперервні до порядку і включно;* $V(t) \in \mathbf{C}(T)$ *у випадку її неперервності. Запис* $V(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *означає, що всі елементи* $V(t)$ *є дійснозначними аналітичними функціями на* T.

Будемо називати розв'язком системи (7.1) на T *вектор-функцію* $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, *якщо вона перетворює рівняння (7.1) у тотожність на* T *при підстановці.*

Не дивлячись на те, що диференціально - алгебраїчні рівняння досліджуються близько сорока років, тематика по ряду напрямків залишається й досі актуальною.

Структура загальних розв'язків диференціально - алгебраїчних рівнянь

Наведемо означення, які у подальшому будемо використовувати.

Означення 7.1. *Простір розв'язків системи (7.1) скінченновимірний на* T, *якщо існує* $(n \times \nu)$*-вимірна матриця* $X_\nu(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, *з мінімально можливим* ν, *така, що вектор-функція* $x(t,c) = X_\nu(t)c$, *де вектор* c *належить* $\mathbf{R}^\nu$, *задовольняє тотожність* $\Lambda_1 x(t,c) \equiv 0$ *й на* T, *у системи* $\Lambda_1 x(t) = 0$, *немає розв'язків, відмінних від* $x(t,c)$.

Ядро оператора Λ_1 скіченновимірне ($\dim\ N(\Lambda_1) < \infty$), якщо простір розв'язків системи (7.1) скінченновимірний. Число ν будемо називати розмірністю ПР або розмірністю ядра.

Якщо ми припустимо, що $\det\ A(t) \neq 0$ для всіх $t \in T$ (у випадку замкненої системи), то простір розв'язків системи $\Lambda_1 x(t) = 0,\ t \in T$ співпадає з множиною функцій $x(t,c) = X(t)c$, де $X(t)-$*матрицант* системи $\dot{x} = -A^{-1}(t)B(t)x$, $c \in \mathbf{R}^n$. Отже, у цьому випадку $\nu = n$.

Для диференціально-алгебраїчних систем з постійними коефіцієнтами для скінченновимірності простору розв'язків необхідно й достатньо виконання умов $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, де $\lambda-$параметр (у загальному випадку комплексний), й $\dim\ N(\Lambda_1) = \nu = \deg\ \det(\lambda A + B)$ [395]. Тут ми бачимо вагомі відмінності властивостей ДАР з постійними й змінними коефіцієнтами.

Використовуючи властивості псевдооберненої матриці, перепишемо систему (7.1) в еквівалентній формі

$$\dot{x}(t) = -A^{+}(t)B(t)x(t) + A^{+}(t)f(t) + [E_n - A^{+}(t)A(t)]u(t),$$

$$[E_m - A(t)A^{+}(t)][-B(t)x(t) + f(t)] = 0,\ t \in T, \tag{7.3}$$

де $u(t)$ – довільна неперервна вектор-функція. Запис, побудований на представленні розв'язків лінійної системи $My = b$ у вигляді співвідношення $y = M^{+}b + [E_n - M^{+}M]v$, де v – довільний вектор, з умовою сумісності $[E_m - MM^{+}]b = 0$.

Нехай у системі (7.1) rank $A(t) = \min\{m, n\} = m \leq n$, для всіх $t \in T$. Тоді у (7.3) будемо мати $E_m - A(t)A^{+}(t) = 0$ й

$$x(t, c) = X(t)c + \varphi(t), \tag{7.4}$$

$$\varphi(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} X(t)X^{-1}(s)(A^{+}(s)f(s) + [E_n - A^{+}(s)A(s)]u(s))ds,$$

де $X(t)-$матрицант системи $\dot{x}(t) = -A^{+}(t)B(t)x(t)$, c – довільний вектор. Якщо $A(t),\ B(t),\ f(t),\ u(t) \in \mathbf{C}^{l}(T)$, то $A^{+}(t) \in \mathbf{C}^{l}(T)$ й $x(t, c) \in \mathbf{C}^{l}(T)$ $\forall c \in \mathbf{R}^{n}$.

Розглянемо тепер випадок $m > n$. Тоді $E_n - A(t)A^{+}(t) = 0$ й для існування розв'язків системи (7.1) необхідно існування постійних розв'язків у системи

$$\mathcal{L}(t)c = \psi(t), \tag{7.5}$$

де

$$\mathcal{L}(t) = -[E_m - A^{+}(t)A(t)]B(t)X(t),$$

$$\psi(t) = [E_m - A(t)A^{+}(t)][-f(t) + B(t)\varphi(t)].$$

Відомо [54], що система (7.5) має постійні розв'язки c_2 тоді й тільки тоді, коли

$$\psi(t) = \mathcal{L}(t)\mathcal{C}^{+}\theta, \tag{7.6}$$

де

$$\mathcal{C} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\mathcal{L}(s)ds,\ \theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\psi(s)ds, \quad c = \mathcal{C}^{+}\theta + [E_n - \mathcal{C}^{+}\mathcal{C}]w, \tag{7.7}$$

w – довільний вектор з $\mathbf{R}^n$. Тоді множина розв'язків системи (7.1) має вигляд

$$x(t,w) = X(t)(\mathcal{C}^{+}\theta + [E_n - \mathcal{C}^{+}\mathcal{C}]w) + \varphi(t). \tag{7.8}$$

Припустимо, що у системі (7.1) $A(t),\ B(t) \in \mathbf{C}^l(T),\ f(t) \in \mathbf{C}^l(T),\ l \geq 1$. Будемо вимагати існування матриць $P(t),\ Q(t) \in \mathbf{C}^l(T)$ необхідної розмірності з $\det\ P(t) \det\ Q(t) \neq 0$, що для всіх $t \in T$,

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{z} + P(t)[B(t)Q(t) + A(t)\dot{Q}(t)]z =$$

$$= \begin{pmatrix} E_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{\star}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} \dot{z} +$$

$$+ \begin{pmatrix} J(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{\star}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} z = Pf, \tag{7.9}$$

де $t \in T,\ x = Q(t)z,\ J(t)$ - деякий $(d \times d)$-блок, $N(t)$ – $(d_1 \times d_1)$ – верхня трикутна матриця з нульовою діагоналлю (матриці $P(t),\ Q(t)$ можна обирати так, що на діагоналі $N(t)$ буде розміщено l нульових квадратних блоків), для в'язок матриць $\lambda L(t)+M(t)$, $\lambda L^{\star}(t)+M^{\star}(t)$, розмірностей $(m_1\times n_1)$ й $(m_2\times n_2)$ відповідно, виконано співвідношення

$$m_1 < n_1,\ \operatorname{rank} L(t) = m_1,\ m_2 > n_2,\ \operatorname{rank} L^{\star}(t) = n_2, \quad \forall t \in T.$$

Тут $d + d_1 + m_1 + m_2 + m_3 = m,\ d + d_1 + n_1 + n_2 + n_3 = n.$

Означення 7.2. *Представлення (7.9) називається узагальненою канонічною формою системи (7.1), а число l - її індексом.*

Узагальнена канонічна форма була запропонована Чистяковим В.Ф. Введемо розбиття

$$z = (z_1^\top; z_2^\top; z_3^\top; z_4^\top; z_5^\top)^\top,$$

$$(f_1^\top; f_2^\top; f_3^\top; f_4^\top; f_5^\top)^\top = (P_1^\top; P_2^\top; P_3^\top; P_4^\top; P_5^\top)^\top f = Pf, \tag{7.10}$$

та для повноти викладення опишемо структуру розв'язків підсистем системи (7.9). Маємо для компонент з (7.10):

$$\dot{z}_1 + J(t)z_1 = f_1,\ N(t)\dot{z}_2 + z_2 = f_2, \tag{7.11}$$

$$L(t)\dot{z}_3 + M(t)z_3 = f_3,\ L^\star(t)\dot{z}_4 + M^\star(t)z_4 = f_4,\ 0_{m_3\times n_3}\dot{z}_5 + 0_{m_3\times n_3}z_5 = f_5. \tag{7.12}$$

Тоді

$$z_1(t) = Z(t)c + \int\limits_\alpha^t Z^{-1}(t)Z(s)f_1(s)ds,\ z_2(t) = f_2 - \mathcal{T}f_2 + \cdots + (-1)^l \mathcal{T}^{l-1} f_2, \tag{7.13}$$

де $Z(t)$ - матрицант системи $\dot{v}(t) = -J(t)v(t)$, $\mathcal{T}$ - оператор, що діє на вектор - функцію $h(t)$ за правилом: $\mathcal{T}h(t) = N(t)\dot{h}(t)$.

Матриці $L(t),\ L^\star(t)$ мають за умовою постійний ранг для довільного $t \in T$ та ми можемо виписати розв'язки для підсистеми (7.13), використовуючи формули (7.4) та (7.8). Якщо $f_5(t) \equiv 0,\ t \in T$ в (7.12), то

$$z_5(t) = w_2(t), \tag{7.14}$$

де $w_2(t)$ - довільна вектор-функція розмірності n_3.

З (7.9) та формул загальних розв'язків (7.4), (7.8), (7.13), (7.14) випливає таке твердження.

Теорема 7.1. *Нехай для системи (7.1) виконано умови:*
1) $A(t),\ B(t) \in \mathbf{C}^l(T),\ f(t) \in \mathbf{C}^l(T),\ l \geq 1$;
2) система зводиться до вигляду (7.9) та l дорівнює кількості квадратних блоків на діагоналі $N(t)$;

3) $f_5(t) \equiv 0, \ t \in T;$

4) виконується умова (7.6) для підсистеми $L^\star(t)\dot{z}_4 + M^\star(t)z_4 = f_4$.

Тоді існують, гладкі на областях визначення, матриці відповідної розмірності $X_\nu(t), \ X_1(t), \ K_1(t,s), \ C_j(t), \ j = 0,1,\cdots,l-1, \ \tilde{C}(t), \ K_2(t,s)$, *такі, що довільна лінійна комбінація*

$$x(t,c) = X_\nu(t)c + X_1(t)\mathcal{C}^-\theta + \int\limits_\alpha^t K_1(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t) +$$

$$+\tilde{C}(t)w(t) + \int\limits_\alpha^t K_2(t,s)w(s)ds, \ t \in T, \tag{7.15}$$

де $c \in \mathbf{R}^\nu, \ \nu = d + n_2 + n_4, \quad n_4 = \mathrm{rank}\,[E_{n_2} - \mathcal{C}^-\mathcal{C}], \ w(t) = (w_1^\top(t), w_2^\top(t))^\top$*- довільна вектор - функція розмірності* $n_2 - m_2 + n_3$, $\mathrm{rank}\, X_\nu(t) = \nu$ *для всіх* $t \in T$, *є розв'язком системи (7.1) й на відрізку* T *інших розв'язків немає.*

Більше того, система (7.1) з початковими даними $x(\alpha) = b$, *де* b *- заданий вектор з* $\mathbf{R}^n$, *має розв'язки тоді й тільки тоді, коли розв'язна відносно* c *система*

$$X_\nu(\alpha)c = a - X_1(\alpha)\mathcal{C}^-\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha} - \tilde{C}(\alpha)W, \tag{7.16}$$

де $W-$*довільний вектор.*

Зауважимо, що для довільної в'язки постійних $(m \times n)$ – матриць $\lambda A + B$, існують сталі матриці $P, \ Q$ необхідної розмірності з властивостями: $\det \ P \det \ Q \neq 0$,

$$P(\lambda A + B)Q =$$

$$= \mathrm{diag}\{\lambda E_d + J, \ \ \lambda N_{k_1} + E_{k_1}, \cdots, \lambda N_{k_p} + E_{k_p},$$

$$\lambda L_{\eta_1} + M_{\eta_1}, \cdots, \lambda L_{\eta_q} + M_{\eta_q}, \ \ \lambda L^\star_{\nu_1} + M^\star_{\nu_1}, \cdots, \lambda L^\star_{\nu_v} + M^\star_{\nu_v}, \ \ 0\}, \tag{7.17}$$

де E_l – одиничні матриці, розміру $l \times l$, J – деякий $(d \times d)$-блок,

$$N_{k_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_{n_j-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ j = 1,\cdots,p,$$

$$L^{\star}_{\nu_j} = \begin{pmatrix} E_{\nu_j-1} \\ 0 \end{pmatrix},\ M^{\star}_{\nu_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{\nu_j-1} \end{pmatrix},\ j = 1, \cdots, v,$$
$$L_{\eta_1} = (E_{\eta_j-1},\ 0),\ M_{\eta_j} = (0,\ E_{\eta_j-1}),\ j = 1, \cdots, q,$$

й у блоках $L,\ M$ ненульові підблоки є або стовпцем, або стрічкою. Для постійних матриць $A,\ B$ у формі (7.9), блоку $\lambda N(t) + E_{d_1}$ відповідає набір блоків $\lambda N_{k_1} + E_{k_1}, \cdots, \lambda N_{k_p} + E_{k_p}$; блоку $\lambda L(t) + M(t)$ відповідає набір блоків $\lambda L_{\eta_1} + M_{\eta_1}, \cdots, \lambda L_{\eta_q} + M_{\eta_q}$, а блоку $\lambda L^{\star}(t) + M^{\star}(t)$ - набір $\lambda L^{\star}_{\nu_1} + M^{\star}_{\nu_1}, \cdots, \lambda L^{\star}_{\nu_v} + M^{\star}_{\nu_v}$.

Представлення (7.17) носить назву канонічної структури в'язки й з'явилося ще у роботах Вейєрштрасса й Кронекера. Спираючись на представлення (7.17), у монографії [77] отримано необхідні й достатні умови розв'язності системи (7.1) з постійними матричними коефіцієнтами.

Зауваження 7.2. *Відмітимо, що у випадку постійних матриць $A,\ B$ у (7.1) розв'язок підсистеми $L^{\star}(t)\dot{z}_4 + M^{\star}(t)z_4 = f_4$ з (7.12) єдиний. Дійсно, розглянемо однорідну систему, що відповідає одному з блоків $\lambda L^{\star}_{\nu_j} + M^{\star}_{\nu_j}$ в (7.17). Підсистема з перших ν_j рівнянь має вигляд: $\dot{x} + M^{\star}_{11}x = 0$, де $M^{\star}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{\nu_{j-1}} & 0 \end{pmatrix}$. Так, як матриця $M^{\star}_{11}$ нільпотентна, то розв'язок $x(t, c) = [E_{\nu_j} + \sum\limits_{i=0}^{\nu_{j-1}} (M^{\star}_{11})^i (t-\alpha)^i/(\nu_j - 1)!]c$. Підставляючи цей загальний розв'язок у останнє рівняння $M^{\star}_{12}x = (0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)x = 0$, отримаємо наступну рівність:*

$$(1,\ (t-\alpha),\ \cdots,\ (t-\alpha)^{\nu_j-1}/(\nu_j - 1)!)c = 0,$$

з якої випливає, що $c = 0$.

До недавнього часу для нестаціонарних диференціально-алгебраїчних систем отримано лише часткові твердження. Вони базуються на дослідженні i - продовжуваних систем до (7.1) (окрім роботи [114]).

Означення 7.3. *Сукупність системи $\Lambda_1 x(t) = f(t)$ та її i-х похідних будемо називати i - продовжуваною системою до (7.1).*

Продовжувану систему можна записати у вигляді виразу $D_i[A,B](t)d_{i+1}[x(t)] = d_i[f(t)]$, де

$$D_k[A,B](t) = \begin{pmatrix} B & A & 0 & \cdots & 0 \\ \dot{B} & \dot{A}+B & A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B^{(k)} & C_k^1 B^{(k-1)} + C_k^2 A^{(k)} & C_k^2 B^{(k-2)} + C_k^3 A^{(k-1)} & \cdots & A \end{pmatrix},$$

$d_k[f(t)]^\top = (f(t)^\top,\ \dot{f}(t)^\top,\ \cdots, f(t)^{(k)\top})^\top$, $d_{k+1}[x(t)]^\top = (x(t)^\top,\ \dot{x}(t)^\top,\ \cdots, x^{(k+1)\top}(t))^\top$ та C_k^ν – біноміальні коефіцієнти. Її можна представити у вигляді:

$$D_k[A,B](t) = (0,\ \mathcal{M}_k[A(t)]) + (\mathcal{M}_k[B(t)],\ 0) = (d_k[B(t)],\ \Gamma_k[A(t),B(t)]), \tag{7.18}$$

де нульові блоки мають розмірність $(m(k+1)\times n)$,

$$\mathcal{M}_k[A(t)] = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 A^{(1)}(t) & C_1^1 A(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k^0 A^{(k)}(t) & C_k^1 A^{(k-1)}(t) & \cdots & C_k^k A(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Нехай система (7.1) замкнена, $A(t),\ B(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ й виконується співвідношення*

$$\Gamma_{r+1}[A(t),B(t)] = \rho = const \geq n(r+1) \quad \forall t \in T, \tag{7.19}$$

де $r = \max \operatorname{rank}\{A(t),\ t \in T\}$, $\Gamma_{r+1}[A(t),B(t)]-$ *блок з формули (7.18).*

Тоді:

1) існують матриці $P(t),\ Q(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *такі, що:* $\det\ P(t)Q(t) \neq 0\ \forall t \in T$ *та*

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{z} + P(t)[B(t)Q(t) + A(t)\dot{Q}(t)]z =$$
$$= \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t)f(t) \end{pmatrix},\ t \in T, \tag{7.20}$$

де позначення відповідають позначенням форми (7.9);

2) існує оператор $\Lambda_{l,*} = \sum\limits_{j=0}^{l} L_j(t)(d/dt)^j,\ t \in T,$ *де* $L_j(t)$ *–* $(n \times n)$*-матриці з* $\mathbf{C}^A(T)$*, що має назву лівого регуляризуючого оператора з властивістю*

$$(\Lambda_{l,*} \circ \Lambda_1)y = \dot{y} + \Lambda_{l,*}[B(t)]y,\ y \in \mathbf{C}^{l+1}(T); \tag{7.21}$$

3) система розв'язна для довільної $f \in \mathbf{C}^l(T)$ *та формула (7.15) має вигляд*

$$x(t,c) = X_d(t)c + \omega(t),$$

$$\omega(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} K_1(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t),\ d = \rho - n(r+1);$$

4) система (7.1), що задовольняє умові $x(\alpha) = b$*, де* b*–заданий вектор з* $\mathbf{R}^n$*, має розв'язок тоді й тільки тоді, коли розв'язна система* $X_d(\alpha)c = a - \omega(\alpha)$.

Більше того, якщо виконано довільний з пунктів 1)-3) твердження, то виконано (7.19).

У цій теоремі поєднано результати з монографій [318], [267].

Зауваження 7.3. *Ліву частину рівності (7.20) називають центральною канонічною формою. Це поняття було запропоновано у [325] та відіграло велику роль у розвитку теорії диференціально-алгебраїчних систем. Якщо точніше, то воно з'явилося в препринті тих же авторів у 1982 р. Для незамкнених систем у [375] введено певну структурну форму.*

Зауваження 7.4. *Якщо система (7.1) замкнена й матриці* $A(t),\ B(t) \in \mathbf{C}^{2r+3}(T)$*, то виконуються лише пункти 2), 3) сформульованої теореми. Вироджена диференціальна система у цьому випадку зводиться до центральної канонічної форми тільки локально: довільний відрізок* $T_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subseteq T$*, містить відрізок* $\tilde{T} = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subset T_1$*, на якому існують матриці* $P(t),\ Q(t) \in \mathbf{C}^{r+2}(T_2)$*, що зводять систему до центральної канонічної форми.*

Більше того, для локальної звідності до центральної канонічної форми, достатньо виконання умови $\dim N(\Lambda_1) < \infty$.

Чи можлива локальна звідність довільної системи (7.1) до вигляду (7.9)? На це питання поки що немає відповіді. Але справедливе наступне твердження, доведене Чистяковим В.Ф. у [45].

Лема. *Нехай у системі (7.1)* $A(t),\ B(t),\ f(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$ *й система сумісна. Тоді довільний відрізок* $T_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subseteq T$*, містить у собі інший відрізок* $\tilde{T} = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subseteq T_1$*, на якому визначений загальний розв'язок вигляду (7.15).*

Умови біфуркації розв'язків вироджених диференціальних систем

Вище було показано, що розв'язок задачі (7.1) у тому випадку, коли вона зводиться до вигляду (7.9), може бути представлений у вигляді (7.15). Розв'язність задачі (7.1), з крайовою умовою $x(\alpha) = b$, еквівалентна розв'язності матричного рівняння

$$X_\nu(\alpha)c = b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^{-}\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha} - \widetilde{C}(\alpha)W, \qquad (7.22)$$

де W - довільний вектор. Припустимо, що дана задача розв'язна не при всіх f та W (точка α - особлива). Знайдемо умови біфуркації розв'язків відповідної задачі.

Будемо розглядати наступну задачу

$$A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t) + \varepsilon V_1(t)x(t), \qquad (7.23)$$

$$x(\alpha) = b + \varepsilon l_1 x(.), \qquad (7.24)$$

яка, при $\varepsilon = 0$, має розв'язки не при всіх однорідностях; l_1 - лінійне відображення, яке переводить вектор-функцію $x(t)$ у вектор із $\mathbf{R}^n$.

Це означає, що рівняння (7.22) не розв'язне, й відповідно [45]

$$\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^{-}\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha} - \widetilde{C}(\alpha)W) \neq 0, \qquad (7.25)$$

$p = n - \nu$. Для розв'язання поставленої задачі (7.23), (7.24) будемо обгрунтовувати модифікацію методу Вішика - Люстерніка [70]. Розв'язок крайової задачі (7.23), (7.24) шукаємо у вигляді частини ряду за степенями малого параметру ε [41]:

$$x(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_i(t) = \frac{x_{-1}(t)}{\varepsilon} + x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ... \qquad (7.26)$$

Підставимо ряд (7.26) у крайову задачу (7.23), (7.24) та прирівняємо коефіцієнти при однакових ε. При ε^{-1} для знаходження коефіцієнта $x_{-1}(t)$ ряду (7.26) отримаємо вироджену лінійну однорідну крайову задачу:

$$A(t)\dot{x}_{-1}(t) + B(t)x_{-1}(t) = 0, \qquad (7.27)$$

$$x_{-1}(\alpha) = 0.$$

Однорідна крайова задача (7.27) має r - параметричну множину лінійно незалежних розв'язків:

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)} c_{-1}, \ c_{-1} \in \mathbf{R}^r,$$

де $r = m - \nu$. Довільний r-вимірний вектор - стовпчик c_{-1} буде визначений з умови розв'язності сингулярної лінійної неоднорідної крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_0(t)$ ряду (7.26):

$$\begin{cases} A(t)\dot{x}_0(t) + B(t)x_0(t) = V_1(t)x_{-1}(t, c_{-1}) + f(t), \\ x_0(\alpha) = b + l_1 x_{-1}(., c_{-1}). \end{cases} \qquad (7.28)$$

Критерій розв'язності задачі (7.28) має вигляд :

$$\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(b + l_1 x_{-1}(., c_{-1}) -$$

$$-X_1(\alpha)\mathcal{C}^-\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j (V_1(t)X_\nu(t)c_{-1} + f(t))|_{t=\alpha} - \widetilde{C}(\alpha)W) = 0,$$

з якого, врахувавши вигляд $x_{-1}(t, c_{-1})$, отримаємо наступну алгебраїчну відносно $c_{-1} \in \mathbf{R}^n$ систему:

$$B_0 c_{-1} = -\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^-\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha} - \widetilde{C}(\alpha)W),$$

де

$$B_0 = -\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)} l_1 X_\nu(.)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)} - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j (V_1(t)X_\nu(t))|_{t=\alpha}.$$

Для розв'язності останньої системи необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова:

$$-\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^+\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha} - \widetilde{C}(\alpha)W) = 0.$$

Врахувавши умову (7.25), з останнього виразу приходимо до достатньої умови розв'язності $\mathcal{P}_{B_0^*} = 0$, яка еквівалентна [77] наступній:

$$\text{rank } B_0 = p, \tag{7.29}$$

де $\mathcal{P}_{B_0^*}$ – $(p \times p)$-мірна матриця (ортопроектор), що проектує простір $\mathbf{R}^n$ на ядро $\ker B_0^*$ матриці $B_0^* = B_0^T$. Множина розв'язків алгебраїчної відносно $c_{-1} \in \mathbf{R}^n$ системи має вигляд

$$c_{-1} = \overline{c}_{-1} + \mathcal{P}_\rho c_\rho, \quad \text{для всіх} \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho,$$

де

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}(\alpha)}(b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^-\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha} - \widetilde{C}(\alpha)W);$$

тут B_0^+ – псевдообернена до B_0 матриця; $\mathcal{P}_{B_0}$ – $(\nu \times \nu)$– вимірна матриця (ортопроектор), що проектує простір $\mathbf{R}^\nu$ на ядро $\ker B_0$. Так як $\text{rank}\mathcal{P}_{B_0} = \nu - \text{rank}B_0 = \nu - p = \rho$, то матрицю $\mathcal{P}_{B_0}$ замінимо $\nu \times \rho$ - вимірною матрицею $\mathcal{P}_\rho$, яка складається з ρ лінійно незалежних стовпців матриці $\mathcal{P}_{B_0}$.

Врахуваваши вираз для c_{-1}, однорідна крайова задача (7.27) має ρ – параметричну множину розв'язків

$$x_{-1}(t, c_\rho) = \overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) + X_\nu(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}_\rho, \tag{7.30}$$

де

$$\overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = X_\nu(t)\overline{c}_{-1}.$$

Загальний розв'язок крайової задачі (7.28), (7.29) має вигляд:

$$x_0(t, c_0) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)}c_0 + F_{-1}(t) + K_{-1}(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho,$$

$$F_{-1}(t) = X_1(t)\mathcal{C}^-\theta + \int\limits_\alpha^t K_1(t,s)(V_1(s)\overline{x}_{-1}(s, \overline{c}_{-1}) + f(s))ds +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(\overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) + f(t)) +$$

$$+ \int\limits_\alpha^t K_2(t,s)w(s)ds + \tilde{C}(t)w(t);$$

$$K_{-1}(t) = \int\limits_\alpha^t K_1(t,s)V_1(s)X_\nu ds + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j X_\nu(t);$$

r -вимірний вектор сталих c_0 буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (7.26). Для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (7.26) при ε^1 отримаємо сингулярну лінійну неоднорідну крайову задачу:

$$\begin{cases} A(t)\dot{x}_1(t) + B(t)x_1(t) = V_1(t)x_0(t, c_0), \\ x_1(\alpha) = l_1 x_0(\cdot, c_0). \end{cases} \tag{7.31}$$

За умови (7.29), з критерію розв'язності крайової задачі (7.31) та з урахуванням виразу для $x_0(t, c_0)$, отримаємо:

$$x_1(t, c_1) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)}c_1 + X_1(t)\mathcal{C}^+\theta +$$

$$+ \int\limits_\alpha^t K_1(t,s)(X_\nu(s)c_0 + F_{-1}(s) + K_{-1}(s)\mathcal{P}_\rho c_\rho)ds +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(X_\nu(t)c_0 + F_{-1}(t) + K_{-1}(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho) +$$

$$+ \widetilde{C}(t)w(t) + \int\limits_\alpha^t K_2(t,s)w(s)ds, \quad t \in T.$$

Запишемо умову розв'язності відносно вектора c_0:

$$B_0c_0 = -\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}}(l_1F_{-1}(.) + l_1K_{-1}(.)\mathcal{P}_\rho c_\rho - X_1\mathcal{C}^+\theta - \tilde{C}(\alpha)w(\alpha)-$$

$$-\sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(F_{-1}(t) + K_{-1}(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho|_{t=\alpha}).$$

Знаходимо $c_0 \in \mathbf{R}^r$:

$$c_0 = -B_0^+\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}}(l_1F_{-1}(.) + l_1K_{-1}(.)\mathcal{P}_\rho c_\rho - X_1\mathcal{C}^+\theta - \tilde{C}(\alpha)w(\alpha)-$$

$$-\sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(F_{-1}(t) + K_{-1}(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho|_{t=\alpha})) + \mathcal{P}_\rho c_\rho,$$

$$c_0 = \overline{c}_0 + D_0\mathcal{P}_\rho c_\rho,\ c_\rho \in \mathbf{R}^\rho,$$

$$\overline{c}_0 = -B_0^+(\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}}(l_1F_{-1}(.) - X_1\mathcal{C}^+\theta - \tilde{C}(\alpha)w(\alpha) - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(F_{-1}(t)|_{t=\alpha}))$$

$$D_0 = I_\nu - B_0^+\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}}(l_1K_{-1}(.) - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(K_{-1}(t)|_{t=\alpha})).$$

Таким чином, крайова задача (7.28), (7.29) має ρ - параметричну множину розв'язків:

$$x_0(t, c_\rho) = \overline{x}_0(t, \overline{c}_0) + \overline{X}_0(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho,\ c_\rho \in \mathbf{R}_\rho,$$

де

$$\overline{x}_0(t, \overline{c}_0) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)}\overline{c}_0 + F_{-1}(t);$$

$$\overline{X}_0(t) = X_\nu(t)D_0 + K_{-1}(t).$$

За умови (7.29), крайова задача (7.31) має ρ - параметричну множину розв'язків:

$$x_1(t, c_1) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{X_{\nu r}(\alpha)}c_1 + F_0(t) + K_0(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho,$$

де c_1 – r-вимірний вектор констант, який буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_2(t)$ ряду (7.26).

Методом математичної індукції доводиться, що за умови (7.29) коефіцієнти $x_i(t)$ ряду (7.26) визначаються з наступної крайової задачі:

$$\begin{cases} A(t)\dot{x}_i(t) + B(t)x_i(t) = V_1(t)x_{i-1}(t, c_{i-1}), \\ x_i(\alpha) = l_1 x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}), \end{cases}$$

яка, за умови (7.29), має $\rho-$параметричну множину лінійно незалежних розв'язків

$$x_i(t, c_i) = \overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho, \quad i = 1, 2, ...,$$

де всі доданки визначаються з наступної ітераційної процедури

$$\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{X_{\nu r(\alpha)}}\overline{c}_i + F_{i-1}(t), \tag{7.32}$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}}(l_1 F_{-1}(.) - X_1\mathcal{C}^-\theta - \tilde{C}(\alpha)w(\alpha) - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(F_{-1}(t)|_{t=\alpha})), \tag{7.33}$$

$$\overline{X}_i(t) = X_\nu(t)D_i + K_{i-1}(t), \ \overline{X}_{-1}(t) = X_\nu(t), \tag{7.34}$$

$$D_i = I_\nu - B_0^+\mathcal{P}_{X^*_{\nu p}}(l_1 K_{i-1}(.) - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j(K_{i-1}(t)|_{t=\alpha})), \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned} F_{i-1}(t) = X_1(t)\mathcal{C}^-\theta + \int_\alpha^t K_1(t,s)V_1(s)\overline{x}_{i-1}(s, \overline{c}_{i-1})ds + \\ + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j \overline{x}_{i-1}(t, \overline{c}_{i-1}) \\ + \int_\alpha^t K_2(t,s)w(s)ds + \tilde{C}(t)w(t); \end{aligned} \tag{7.36}$$

$$K_{i-1}(t) = \int_\alpha^t K_1(t,s)V_1(s)\overline{X}_{i-1}(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j X_{i-1}(t); \tag{7.37}$$

Збіжність ряду (7.26) доводиться таким же чином, як й в [41]. Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 7.2. *Крайова задача (7.23), (7.24) за умови (7.29):*

$$\text{rank } B_0 = p,$$

має ρ -параметричну множину лінійно незалежних розв'язків у вигляді ряду:

$$x(t, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i [\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_\rho c_\rho] \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho,$$

коефіцієнти $\overline{x}_i(t, \overline{c}_i), \overline{c}_i, \overline{X}_i(t)$ якого, визначаються за формулами (7.32)-(7.37).

Зауваження 7.5. *Доведене твердження показує, що малими збуреннями можна досягти того, щоб зробити точку α неособливою. Для того, щоб розв'язок крайової задачі (7.23), (7.24) був єдиним достатньо, щоб $\mathcal{P}_\rho = 0$. Рівняння (7.23) можна було досліджувати по іншому. А саме, перепишемо його в наступному вигляді*

$$X_\nu(\alpha) - \widetilde{C}(\alpha)W = b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^-\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha}.$$

Якщо розглянути матрицю $Z = (X_\nu(\alpha), -\widetilde{C}(\alpha))$ та вектор $h = (c, W)^\top$, то рівняння (7.23) перепишеться наступним чином

$$Zh = b - X_1(\alpha)\mathcal{C}^-\theta - \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j f(t)|_{t=\alpha}. \tag{7.38}$$

Подальше вивчення крайової задачі (7.23), (7.24) проводиться аналогічним чином. У такій постановці, ми вже не фіксуємо вектор W, а одразу знаходимо пари c, W, за яких рівняння (7.38) розв'язне. Збуренням лише у рівнянні або крайовій умові також можна зробити задачу розв'язною. У якості l_1 можна обирати відображення, яке наприклад діє за правилом $l_1 x(\cdot) = x(\alpha)$.

7.2. Дослідження розв'язності нелінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь

Цей підрозділ присвячений отриманню необхідних та достатніх умов існування розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних систем.

Постановка задачі

Розглянемо нелінійну систему вигляду

$$L_1x = A(t)\dot{x}(t,\varepsilon) + B(t)x(t,\varepsilon) = f(t) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), t \in T = [\alpha,\beta], \quad (7.39)$$

з крайовою умовою

$$Kx(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad (7.40)$$

де $A(t), B(t)$ – $(m \times n)$ – матриці, $x(t,\varepsilon), f(t)$ – шукана та задана вектор-функції відповідно; K - лінійний $(p \times n)$ вектор-функціонал, α – p -вимірний вектор, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), J(x(t,\varepsilon),\varepsilon)$ - нелінійні вектор-функції, неперервні за сукупністю змінних, відповідного розміру. Подальші умови на нелінійності будуть уточнюватися. Припускається, що вхідні дані достатньо гладкі й виконується умова

$$rank\ A(t) < min\{m,n\}, t \in T. \quad (7.41)$$

У подальшому будемо припускати, що існують квадратні матриці $P(t), Q(t) \in C^l(T), l \geq 1$, необхідного розміру, з тією властивістю, що $detP(t)detQ(t) \neq 0$, які заміною $x(t) = Q(t)z(t)$ та множення на матрицю $P(t)$ зліва зводять систему (7.39) до узагальненої канонічної форми

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{z}(t,\varepsilon) + [P(t)A(t)\dot{Q}(t) + P(t)B(t)Q(t)]z(t,\varepsilon) = \quad (7.42)$$

$$= \begin{pmatrix} E_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3 \times n_3} \end{pmatrix} \dot{z}(t,\varepsilon) +$$

$$+\begin{pmatrix} J(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} z(t,\varepsilon) =$$

$$= P(t)f(t) + \varepsilon P(t)Z(Q(t)z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

з крайовою умовою

$$KQ(\cdot)z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Q(\cdot)z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{7.43}$$

Необхідно знайти такий розв'язок задачі (7.42), (7.43), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} \dot{z}_0(t) +$$

$$+\begin{pmatrix} J(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} z_0(t) = P(t)f(t), \tag{7.44}$$

$$KQ(\cdot)z_0(\cdot) = \alpha. \tag{7.45}$$

Основні результати

Надалі будемо припускати, що справедлива теорема 7.1 попереднього підрозділу (зі збереженням позначень). Тоді система (7.44) буде мати ν - параметричну множину розв'язків вигляду

$$z_0(t,c) = X_\nu(t)c + \overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(t),\ t \in T,$$

де

$$\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(t) = X_1(t)\mathcal{C}^{-}\theta + \int\limits_a^t K_1(t,s)P(s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j P(t)f(t) +$$

$$+\tilde{C}(t)w(t) + \int\limits_a^t K_2(t,s)w(s)ds.$$

Підставивши у крайову умову (7.45), прийдемо до матричної системи

$$Bc = g, \tag{7.46}$$

де

$B = KQ(\cdot)X_\nu(\cdot) - (p \times \nu) -$ вимірна матриця, $g = \alpha - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(\cdot)$.

Система (7.46) розв'язна [314] тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{B_d^*} g = 0, \tag{7.47}$$

й множина розв'язків має вигляд

$$c = B^+ g + \mathcal{P}_{B_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $\mathcal{P}_{B_r}, \mathcal{P}_{B_d^*}$ – проектори на ядро й коядро матриці B, складеної з лінійно-незалежних векторів [316], відповідно. Тоді множина розв'язків породжуючої крайової задачі (7.44), (7.45) може бути зображена у вигляді

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + X_\nu(t)B^+\alpha + (G[P(\cdot)f(\cdot)])(t), \tag{7.48}$$

де $X_r(t) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{B_r}$,

$$(G[P(\cdot)f(\cdot)])(t) = \overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(t) - X_\nu(t)B^+KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(\cdot)$$

– узагальнений оператор Гріна.

Знайдемо спочатку необхідну умову існування розв'язків нелінійної крайової задачі (7.42), (7.43). Припустимо, що існує розв'язок $z(t, \varepsilon)$, який при

$\varepsilon = 0$ перетворюється в один з розв'язків $z_0(t, c_r)$ породжуючої крайової задачі (7.44), (7.45). Будемо вимагати, щоб нелінійності у (7.39), (7.40) були неперервними в околі породжуючого розв'язку $x_0(t, c_r) = Q(t)z_0(t, c_r)$. Тоді повинна виконуватись умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{B_d^*}(\alpha + \varepsilon J(Q(\cdot)z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot) + \varepsilon Z(Q(\cdot)z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)])(\cdot)) = 0, \tag{7.49}$$

з якої, використавши (7.47) й перейшовши до границі, коли $\varepsilon \to 0$, отримаємо матричну систему рівнянь для породжуючих векторних сталих

$$F(c_r) = \mathcal{P}_{B_d^*}(J(Q(\cdot)z_0(\cdot, c_r), 0) - KQ(\cdot)\overline{z}([Z(Q(\cdot)z_0(\cdot, c_r), \cdot, 0)])(\cdot)) = 0. \tag{7.50}$$

Таким чином довели твердження.

Теорема 7.3. *Нехай крайова задача (7.42), (7.43) має розв'язок $z(t, \varepsilon)$, що перетворюється у породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r)$ (7.48) з фіксованим вектором сталих $c_r = c_r^0$, коли $\varepsilon = 0$. Тоді вектор сталих c_r^0 повинен задовольняти матричне рівняння (7.50) для породжуючих векторних сталих.*

Для отримання достатньої умови існування розв'язку, зробимо заміну змінних у крайовій задачі (7.42), (7.43) вигляду

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon),$$

в якій $z_0(t, c_r^0)$ – породжуючий розв'язок задачі (7.44), (7.45) з вектором c_r^0, який задовольняє рівняння для породжуючих векторних сталих (7.50). Додатково будемо припускати, щоб нелінійності Z та J були диференційовними в околі породжуючого розв'язку $x_0(t, c_r) = Q(t)z_0(t, c_r)$. У нових змінних будемо шукати розв'язок крайової задачі

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{y}(t, \varepsilon) + [P(t)A(t)\dot{Q}(t) + P(t)B(t)Q(t)]y(t, \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon P(t)Z(Q(t)(z_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon)), t, \varepsilon), \tag{7.51}$$

$$KQ(\cdot)y(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(Q(\cdot)(z_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon)), \varepsilon), \tag{7.52}$$

який перетворюється у нульовий розв'язок, коли $\varepsilon = 0$. Розв'язність крайової задачі (7.42), (7.43) еквівалентна розв'язності крайової задачі (7.51), (7.52). Використовуючи неперервну диференційовність нелінійностей (у околі породжуючого розв'язку), виділимо лінійну частину за y й члени нульового порядку за ε:

$$Z(Q(t)(z_0(t,c_r^0)+y(t,\varepsilon)),t,\varepsilon) = Z(Q(t)z_0(t,c_r^0),t,0)+$$

$$+A_1(t)Q(t)y(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(Q(t)y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$J(Q(\cdot)(z_0(\cdot,c_r^0,\varepsilon)+y(\cdot,\varepsilon)) = J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0)+lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

де

$$A_1(t) = A_1(t,c_r^0) = Z_y^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=Q(t)z_0(t,c_r^0),\varepsilon=0}, l = J^1(v,\varepsilon)|_{v=Q(t)z_0(t,c_r),\varepsilon=0}$$

– похідні Фреше у точці $(v = Q(t)z_0(t,c_r^0), \varepsilon = 0)$, а для членів більш високого порядку $\mathcal{R}(y,t,\varepsilon), \mathcal{R}_1(y,\varepsilon)$ виконуються співвідношення

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \mathcal{R}_y^{(1)}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_1(0,0) = 0, \mathcal{R}_{1\ y}^{(1)}(0,0) = 0.$$

Таким чином, враховуючи заміну, будемо розглядати крайову задачу

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{y}(t,\varepsilon)+[P(t)A(t)\dot{Q}(t)+P(t)B(t)Q(t)]y(t,\varepsilon) = \tag{7.53}$$

$$= \varepsilon\{P(t)Z(Q(t)z_0(t,c_r^0),t,0)+P(t)A_1(t)Q(t)y(t,\varepsilon)+P(t)\mathcal{R}(Q(t)y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\},$$

$$KQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0)+lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{7.54}$$

яка має розв'язок у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r+\overline{y}(t,\varepsilon), c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{7.55}$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0)+lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+ \tag{7.56}$$

$$+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t),$$

якщо виконана умова

$$\mathcal{P}_{B_d^*}\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0)+lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(\cdot)\}=0.$$

Використовуючи (7.50) та підставивши у лінійну частину останнього виразу представлення (7.55), отримаємо матричне рівняння відносно $c_r \in \mathbb{R}^r$:

$$B_0c_r=\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)- \quad (7.57)$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\},$$

де

$$B_0=\mathcal{P}_{B_d^*}\{lQ(\cdot)X_r(\cdot)-KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)X_r(\cdot)])(\cdot)\}.$$

Для розв'язності (7.57), необхідно та достатньо виконання умови

$$\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\}=0,$$

яка буде гарантовано виконуватись, якщо $\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*}=0$. Розв'язавши (7.57), відносно c_r отримаємо наступну матрично-операторну систему

$$y(t,\varepsilon)=X_r(t)c_r+\overline{y}(t,\varepsilon),$$

$$c_r=B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\}, \quad (7.58)$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon)=\varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0)+lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t).$$

Розглянемо допоміжний вектор $u = (y, c_r, \overline{y})^t \in C^1(T) \times \mathbb{R}^r \times C^1(T)$ (тут t - операція транспонування). Тоді систему (7.58) запишемо у вигляді

$$u = \begin{bmatrix} 0 & X_r(t) & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

де

$$L_1 c_r = B_0^+ \mathcal{P}_{B_d^*} \{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot, \varepsilon)])(\cdot) - lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot), \varepsilon)\},$$

$$g_1 = B_0^+ \mathcal{P}_{B_d^*} \{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)])(\cdot) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\},$$

$$g_2 = \varepsilon X_\nu(t) B^+ \{J(Q(\cdot)(z_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon)), \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)(z_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon)), \cdot, \varepsilon)])(t)\}.$$

У свою чергу, матрично-операторна система (7.58) еквівалентна наступній

$$Lu = g, \tag{7.59}$$

де

$$L = \begin{bmatrix} I & -X_r(t) & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор L має обмежений обернений L^{-1}. Дійсно, оператор L^{-1} можна знайти в явному вигляді

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X_r(t) & -X_r(t)L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Те, що таким чином визначений оператор задовольняє рівність $LL^{-1} = L^{-1}L = I$, перевіряється безпосередньою підстановкою. Обмеженість доводиться, як і в [436]. Система (7.59) може бути представлена у вигляді

$$u = L^{-1} S(\varepsilon) u.$$

Для достатньо малого ε оператор $S(\varepsilon)$ є стискаючим. Тоді, з принципа стискаючих відображень випливає, що операторно-матрична система (7.59) має єдину нерухому точку, яка й буде розв'язком крайової задачі (7.53), (7.54). Таким чином, приходимо до твердження.

Теорема 7.4. *Нехай матриця B_0 задовольняє умову:*

(i) $\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*} = 0$.

Тоді, для довільного вектора $c = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє матричне рівняння для породжуючих сталих (7.50), існує принаймні один розв'язок крайової задачі (7.39), (7.40). Цей розв'язок можна знайти з допомогою ітераційного процесу

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_\nu(t) B^+ \{J(Q(\cdot)z_0(\cdot, c_r^0), 0) + lQ(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} +$$

$$\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot, c_r^0), \cdot, 0) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)])(t),$$

$$c_r^k = B_0^+ \mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon)])(\cdot) -$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\},$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r^k + \overline{y}_k(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = Q(t)z_0(t, c_r^0) + Q(t)y_k(t,\varepsilon), k = 0, 1, 2, ...; y_0(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t,\varepsilon) = 0, c_r^0 = 0;$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Зауваження 7.6. *Зазначимо, що умова (i) виконується, наприклад, у тому випадку, коли* $rank B_0 = d$.

Наведемо найпростіші приклади того, яким може бути вектор-функціонал K, що задає крайову умову (7.40). Коли $Kx(\cdot,\varepsilon) = x(b) - x(a) = 0$, то маємо періодичну крайову задачу, а якщо $Kx(\cdot,\varepsilon) = Mx(a) + Nx(b) = \alpha$, з $p \times n$ вимірними матрицями M та N, отримаємо двоточкову крайову задачу.

7.3. Керованість еволюційних рівнянь Соболєва-Гальпєрна з чистим запізненням

У цій частині досліджується рівняння типу Соболєва-Гальперна з чистим запізненням. Вводиться поняття операторного експоненціалу з запізненням для представлення його розв'язків. Вивчається керованість рівняння Соболєва-Гальперна.

Постановка задачі та основний результат

Розглянемо наступне диференціальне рівняння з запізненням:

$$A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t-\tau) = 0, t \in (0; +\infty); \tag{7.60}$$

$$y(t) = \varphi(t), t \in [-\tau; 0], \tag{7.61}$$

де $A_j : H \to H$ - лінійні необмежені оператори, які діють у оснащеному [78] просторі Гільберта H, $V_j \subset H \subset V_j^{'}$, з областями визначення $D(A_j) = V_j$, щільно та неперервно вкладеними у простір Гільберта H. Простір $V = V_1 \cap V_2$ також припускається щільним у V_j, а тому й у H. Оператори A_j такі, що $A_j = A_j^* \in \mathcal{L}(V; V')$, а оператор A_1 додатково припускається додатньо-визначеним ($(A_1 v, v) \geq \alpha_1 ||v||_1^2, \alpha_1 > 0$). Для встановлення теорем, що стосуються розв'язності рівняння (7.60), (7.61) нагадємо основні поняття прямого інтегралу гільбертових просторів [78], [152].

Означення 7.4. *Нехай задана множина Λ, з визначеною на ній мірою μ та нехай також кожній точці $\lambda \in \Lambda$ співставлено гільбертів простір $H(\lambda)$, таким чином, що простори $H(\lambda), \lambda \in \Lambda$ утворюють μ - вимірне поле.*

Простір вимірних відносно міри μ функцій $\lambda \to f(\lambda)$, для яких $||f||^2_{\widehat{H}} = \int_\Lambda ||f(\lambda)||^2_{H(\lambda)} d\mu(\lambda) < \infty$ традиційно нзивається *прямим інтегралом гільбертових просторів* $H(\lambda)$ й позначається $\widehat{H} = \int_\Lambda \bigoplus H(\lambda) d\mu(\lambda)$.

Для $f, g \in \widehat{H}$ скалярний добуток визначається рівністю

$$(f, g)_{\widehat{H}} = \int_\Lambda (f(\lambda), g(\lambda))_{H(\lambda)} d\mu(\lambda).$$

Так побудований простір є гільбертовим.

Для отримання представлення розв'язку рівняння (7.60), (7.61) будемо додатково припускати, щоб резольвенти операторів A_j комутували на області визначення.

У силу комутативності [78], [152], існує прямий інтеграл гільбертових просторів

$$\widehat{H} = \int\int \bigoplus H(\lambda_1, \lambda_2) d\mu(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1 \geq \alpha_1,$$

й така ізометрія $\mathcal{U}$ простору H на $\widehat{H}$, що $\mathcal{U}(A_j x) = \lambda_j \mathcal{U}(x)$, для всіх $x \in V$. При цьому, як відомо [78], області визначення операторів A_j перейдуть відповідно у множини вектор-функцій

$$\widehat{V}_j = \{h(\lambda_1, \lambda_2) : \int_{\alpha_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_j^2 ||h(\lambda_1, \lambda_2)||^2_{H(\lambda_1,\lambda_2)} d\mu(\lambda_1, \lambda_2) < \infty\}, j = 1, 2.$$

Позначимо $\widehat{y}(t, \lambda) = \widehat{y}(t, \lambda_1, \lambda_2) = (\mathcal{U}y(t))(\lambda)$. Діючи ізометрією на (7.60), (7.61) отримаємо наступну задачу для $\widehat{y}$ у гільбертовому просторі $H(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\lambda_1 \frac{d\widehat{y}(t, \lambda)}{dt} + \lambda_2 \widehat{y}(t - \tau, \lambda) = 0, \tag{7.62}$$

$$\widehat{y}(t, \lambda) = \widehat{\varphi}(t, \lambda), t \in [-\tau; 0]. \tag{7.63}$$

Оскільки $\lambda_1 \geq \alpha_1 > 0$, то задача (7.62), (7.63) рівносильна наступній:

$$\frac{d\widehat{y}(t, \lambda)}{dt} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \widehat{y}(t - \tau, \lambda),$$

$$\widehat{y}(t, \lambda) = \widehat{\varphi}(t, \lambda), t \in [-\tau; 0].$$

Для формального представлення розв'язків рівняння (7.62), (7.63) введемо поняття *операторного запізнюючого експоненціала:*

$$e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} t} = \begin{cases} \Theta, -\infty < t < -\tau, \\ I, \quad -\tau \leq t < 0, \\ I - \frac{1}{1!} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t I, \quad 0 \leq t < \tau, \\ \ldots \\ I - \frac{1}{1!} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t I + \frac{1}{2!} (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2 (t - \tau)^2 I + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k (t - (k-1)\tau)^k I, \\ (k-1)\tau \leq t < k\tau. \end{cases}$$

Неважко побачити, що запізнюючий експоненціал задовольняє наступне операторне рівняння з запізненням:

$$\frac{d}{dt}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau)}, (k-1)\tau < t < k\tau, k = 0, 1, 2, ... \tag{7.64}$$

$$e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = I, -\tau \leq t \leq 0, \tag{7.65}$$

та його похідна розривна у точках $-\tau, 0$. Розглянемо два випадки:

1) $\varphi(t) = \varphi$.

У цьому випадку, виходячи з (7.64), (7.65), розв'язок задачі (7.62), (7.63) може бути представленим у вигляді:

$$\widehat{y}(t,\lambda) = e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\widehat{\varphi}(\lambda).$$

Тоді розв'язок задачі (7.60), (7.61) буде мати вигляд:

$$y(t) = \mathfrak{U}^{-1}\widehat{y}(t,\lambda).$$

Будемо його інколи також позначати через $y(t) = e_\tau^{A_1,A_2,t}\varphi$. Таким чином встановлено теорему.

Теорема 7.5. *Нехай* $\varphi(t) = \varphi \in V_2$,

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda_2|^2||e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathfrak{U}\varphi||^2_{H(\lambda_1,\lambda_2)}d\mu(\lambda_1,\lambda_2) < \infty.$$

Тоді розв'язок задачі (7.60), (7.61) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \mathfrak{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathfrak{U}\varphi = e_\tau^{A_1,A_2,t}\varphi.$$

2) $\varphi(t) \in C^1([-\tau;0];V)$. У цьому випадку неважко встановити наступний результат (наприклад безпосередньою підстановкою у вихідне рівняння).

Теорема 7.6. *Нехай* $\varphi(t) \in C^1([-\tau;0];V)$,

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda_2|^2||e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathfrak{U}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)}\mathfrak{U}\frac{d}{ds}\varphi(s)ds||^2_{H(\lambda)}d\mu(\lambda) < \infty.$$

Тоді розв'язок задачі (7.60), (7.61) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} t} \mathcal{U} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)} \mathcal{U} \frac{d}{ds} \varphi(s) ds,$$

або

$$y(t) = e_\tau^{A_1, A_2, t} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e_\tau^{A_1, A_2, t-\tau-s} \frac{d}{ds} \varphi(s) ds.$$

Керованість рівнянням Соболєва-Гальпєрна

Нехай тепер H - сепарабельний гільбертів простір.

Розглянемо наступну задачу керованості:

$$A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t-\tau) = Bu(t), \tag{7.66}$$

$$y(t) = \varphi, t \in [-\tau; 0), \tag{7.67}$$

де оператор $B \in \mathcal{L}(H)$. Необхідно підібрати керування $u(t)$ таким чином, щоб розв'язок $y(t)$ у заданий момент часу t_1 приймав задане значення y^*. Керування $u(t)$ будемо шукати з простору $L_2([-\tau; 0], H)$ (поза цим відрізком керування покладається рівним нулю). Зафіксуємо у просторі H ортонормований базис $\{e_k\}_{k \geq 0}$. Тоді умова $y(t_1) = y^*$ еквівалентна тому, що $(y(t_1), e_k) = (y^*, e_k), k \geq 0$. Тоді розв'язок рівняння (7.66), (7.67) буде мати вигляд:

$$y(t) = \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} t} \mathcal{U} \varphi + \int_{-\tau}^{0} \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)} \mathcal{U} B u(s) ds. \tag{7.68}$$

Умову $y(t_1) = y^*$ тоді можна записати у вигляді

$$y^* - \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_1} \mathcal{U} \varphi = \mathcal{L} u(s),$$

де оператор

$$\mathcal{L} : L_2([-\tau; 0], H) \to H, \ \mathcal{L} u(s) = \int_{-\tau}^{0} \mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t_1-\tau-s)} \mathcal{U} B u(s) ds.$$

Для зручності подальшого викладення зазначимо, що оператор $e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t_1-\tau-s)}$ може бути представлений у вигляді $c(s)I$, де $c(s)$ - многочлен. У силу того, що $\{e_k\}_{k \geq 0}$ - ортонормований базис, вектор-функцію $u(s)$ можна розкласти у ряд Фур'є $u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(s)e_k$, $u_k(s) = (u(s), e_k)$. У подальшому умову керованості зведемо до відомої проблеми моментів [71]. Умова того, що $u(t) \in L_2([-\tau; 0], H)$ буде еквівалентна тому, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\tau}^{0} u_k^2(s)ds < \infty. \tag{7.69}$$

Розглянемо два випадки.

1) Нехай $B = I$ - тотожній оператор. Використовуючи представлення (7.68), умова $(y(t_1), e_k) = (y^*, e_k), k \geq 0$, буде еквівалентна розв'язності зліченної системи інтегральних рівнянь:

$$\int_{-\tau}^{0} \widehat{c}(s)u_k(s)ds = (y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1}\mathcal{U}\varphi, e_k),\ k \geq 0;\ \widehat{c}(s) = \mathcal{U}^{-1}c(s)\mathcal{U}.$$

Позначимо через $\alpha_k = (y^*, e_k) - (U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1}U\varphi, e^k)$. Оскільки ядро $\widehat{c}(s)$ неперервне, то умова керованості буде рівносильна тому, що елемент $y^* - \mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1}\mathcal{U}\varphi \in H$, або іншими словами

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty}((y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\mathcal{U}\varphi, e_k))^2 < \infty, \tag{7.70}$$

у тому випадку, коли $\widehat{c}(s) \neq 0$ на $[-\tau; 0]$. Ця умова дає обмеження на вибір такого моменту часу t_1, для якого існує потрібне нам керування. Зупинимося на цьому детальніше. Якщо виконується умова $\widehat{c}(s) \neq 0$ на $[-\tau; 0]$, коефіцієнти Фур'є керування $u(t)$ можна обрати наступним чином $u_k(s) = \frac{\alpha_k}{\tau\widehat{c}(s)}$. Для того, щоб виконувалась (7.69) (умова належності керування $u(t) \in L_2([-\tau; 0], H)$) необхідно та достатньо тоді, щоб виконувалась наведена вище умова (7.70)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\tau}^{0} u_k^2(s)ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\tau}^{0} \frac{\alpha_k^2}{\tau^2\widehat{c}^2(s)}ds = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \int_{-\tau}^{0} \frac{1}{\tau^2\widehat{c}^2(s)}ds.$$

Оскільки інтеграл $\int_{-\tau}^{0} \frac{1}{\tau^2\widehat{c}^2(s)}ds$ скінченний у силу того, що $\widehat{c}(s) \neq 0$, то умова (7.69) буде еквівалентна умові (7.70). Таким чином отримуємо наступне твердження.

Теорема 7.7. *Для керованості рівняння (7.66) з* $B = I$, $u(t) \in L_2([-\tau; 0], H)$ *та* $\widehat{c}(s) \neq 0$ *на* $[-\tau; 0]$, *необхідно та достатньо виконання умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty}((y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi, e_k))^2 < \infty.$$

За виконання умови розв'язності, керування може бути знайденим у вигляді наступного ряду Фур'є:

$$u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{\tau \widehat{c}(s)} e_k.$$

2) Нехай B – компактний оператор. У цьому випадку, обравши ортонормований базис з власних векторів оператора B (за яким збережемо позначення e_k), згідно спектральної теорії будемо мати, що $Be_k = \mu_k e_k$, де $\mu_k > 0$ – власні значення оператора B. Тоді умова керованості буде еквівалентна розв'язності наступної системи інтегральних рівнянь

$$\int_{-\tau}^{0} \widehat{c}(s) u_k(s) ds = \frac{1}{\mu_k}((y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi, e_k)), k \geq 0.$$

Як і вище отримаємо.

Теорема 7.8. *Для керованості рівняння (7.66) з компактним оператором* B *та* $\widehat{c}(s) \neq 0$ *на* $[-\tau; 0]$, *необхідно та достатньо виконання умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2}((y^*, e_k) - (\mathcal{U}^{-1} e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} \mathcal{U}\varphi, e_k))^2 < \infty.$$

Скажемо декілька слів відносно умови $\widehat{c}(s) \neq 0$ на $[-\tau; 0]$. Ця умова говорить про те, що момент часу t_1 повинен обиратися не довільним чином. Позначимо через $\beta_1^k, \beta_2^k, ..., \beta_k^k$ корені многочлена $\widehat{c}(s)$ на напівінтервалах $s \in (t_1 - (k+1)\tau; t_1 - k\tau]$, $k \geq 0$. Тоді для того, щоб $\widehat{c}(s) \neq 0$ час t_1 повинен задовольняти такі умови: $t_1 \geq 0$, якщо $t \in [k\tau; (k+1)\tau)$, то $\beta_1^k, \beta_2^k, ..., \beta_k^k \notin (t_1 - (k+1)\tau; 0]$.

Отримана конструкція розв'язків задачі (7.60), (7.61) дозволяє встановлювати важливі властивості для різного класу рівнянь у частинних похідних та дає можливість будувати теорію розв'язності. Завдяки точному представленню можна знаходити умови біфуркації розв'язків задачі (7.60), (7.61) як у лінійному, так у нелінійному випадках.

7.4. ВИСНОВКИ

1) З допомогою узагальненої центральної канонічної форми досліджено розв'язність диференціально-алгебраїчної системи та отримано умови біфуркації розв'язків;

2) Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійно збурених вироджених систем;

3) Досліджено операторне рівняння з запізненням типу Соболєва-Гальпєрна;

4) Отримано умови керованості рівняння Соболєва-Гальпєрна.

РОЗДІЛ 8
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ

8.1. Крайові задачі для рівняння Ляпунова

Крайовим задачам для диференціальних рівнянь як в скіченновимірних, так і нескінченновимірних просторах присвячена величезна кількість робіт. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова. Його розглядають як в матричному, так й операторному випадках [311], [137], [271]. В даній частині розглядається крайова задача для операторно-диференціального рівняння типу Ляпунова в просторі Гільберта й у тому випадку, коли відповідна задача може мати не єдиний розв'язок.

8.2. Постановка задачі та попередній результат

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{8.1}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{8.2}$$

де $Z = Z(t)$ є невідомою оператор-функцією; $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$ – лінійні обмежені оператори, що діють з простору Гільберта H_1 в себе; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом в просторі лінійних та обмежених операторів, тобто неперервне відображення відрізка $[a; b]$ в простір $\mathcal{L}(H_1)$, $\Phi(t) \in C([a; b]; \mathcal{L}(H_1))$; лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ в простір Гільберта H_2, тобто $\ell : C([a; b]; \mathcal{L}(H_1)) \to H_2$, α – елемент простору H_2.

Матричне рівняння такого вигляду відіграє важливу роль в теорії лінійних Гамільтонових систем, варіаційному численні та оптимальному керуванні і широко використовується в теорії ігор [58].

В роботі [310] отримано критерій розв'язності періодичної крайової задачі для матричного рівняння Ріккаті в термінах жорданової структури матриць A та B й у нерегулярному випадку.

8.3. Основний результат

Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C([a;b],\mathcal{L}(H_1))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi] \in C([a;b] \times [a;b];\mathcal{L}(H_1))$ вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)}, \ (t,\tau \in [a;b]) . \tag{8.3}$$

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (8.1) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[M] + \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau, \tag{8.4}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(H_1)$; $\tilde{Z}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.1), який має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau. \tag{8.5}$$

Підставимо (8.4) в крайову умову (8.2) та отримаємо наступне операторне рівняння відносно оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int_a^\cdot \mathbf{K}_\tau^\cdot[\Phi]d\tau, \tag{8.6}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_a^\cdot[M] : \mathcal{L}(H_1) \to H_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор $\mathbf{L}$ дане рівняння має розв'язки. Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним [314].

В цьому випадку розв'язки рівняння (8.6) існують тоді й тільки тоді [314], коли

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[\alpha - \ell \int_a^\cdot \mathbf{K}_\tau^\cdot[\Phi]d\tau\right] = 0. \tag{8.7}$$

Тут $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}$ – проектор на ядро оператора $\mathbf{L}^*$, спряженого до оператора $\mathbf{L}$. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (8.6) $\left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau\right] \in R(\mathbf{L})$ множині значень оператора $\mathbf{L}$.

За виконання умови розв'язності (8.7), операторне рівняння (8.6) має множину розв'язків вигляду:

$$M = \mathbf{L}^+ \left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau\right] + \mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C, \tag{8.8}$$

де C – довільний лінійний обмежений оператор ($C \in \mathcal{L}(H_1)$), $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ - проектор на ядро оператора $\mathbf{L}$. Підставивши оператор M в умову (8.4), отримаємо загальний розв'язок (8.1),(8.2) у вигляді:

$$Z(t, C) = K_a^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8.9}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається наступним чином

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t K_\tau^t[\Phi(\tau)] d\tau - K_a^t[\ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} \Phi(\tau) d\tau] + K_a^t[L^+ \alpha].$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 8.1. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача* (8.1),(8.2) *має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова (8.7). За виконання умови* (8.7) *розв'язки крайової задачі* (8.1),(8.2) *мають вигляд*

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_a^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8.10}$$

для довільного оператора $C \in \mathcal{L}(H_1)$.

Зауваження 8.1. *Якщо оператор* $\mathbf{L}$ *оборотний, то умова (8.7) виконується автоматично й крайова задача для рівняння Ляпунова має єдиний розв'язок.*

8.4. Приклад

Розглянемо крайову задачу (8.1),(8.2) для рівняння Ріккаті у просторі Банаха $m = l_\infty$ обмежених числових послідовностей із зліченновимірними матрицями A, B і $\Phi(t)$:

$$A = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}, \tag{8.11}$$

$$B = \operatorname{diag}\{0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots\}, \tag{8.12}$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \dots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \dots\right\}, \tag{8.13}$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell Z(\cdot) = (Z_{ii}(0) - Z_{ii}(p))_{i\in\mathbb{N}} = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in m, p > 0.$$

Знайдемо матрицю $\mathbf{K}_\tau^t[\Phi(t)]\,(t, \tau \in [0; p])$. Зліченновимірні матриці $e^{A(t-\tau)}$ та $e^{B(t-\tau)}$ відповідно дорівнюють:

$$e^{A(t-\tau)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$e^{B(t-\tau)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{t-\tau} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{t-\tau} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

звідки

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{3}{2}\tau} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}\tau} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{3}{2}\tau} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Частинний розв'язок $\tilde{Z}(t)$ неоднорідного рівняння (8.1) має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t}t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{3}{2}t}t & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t}t & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{3}{2}t}t & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Загальний розв'язок рівняння (8.1) можна представити у вигляді $Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \tilde{Z}(t)$, де $M-$ зліченновимірна матриця з невідомими компонентами, які треба знайти. Оскільки, за умовою задачі A і B – діагональні матриці, то для зручності будемо шукати матрицю M у вигляді діагональної зліченновимірної матриці з ненульовими елементами на діагоналі:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_{k-1k-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{kk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Знайдемо матрицю $\mathbf{K}_0^t[M]$. Для цього підставимо в формулу (8.3) матрицю M вигляду (8.16):

$$\mathbf{K}_0^t[M] = \begin{pmatrix} m_{11}e^{\frac{1}{2}t} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_{22}e^{\frac{3}{2}t} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_{k-1k-1}e^{\frac{1}{2}t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{kk}e^{\frac{3}{2}t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Підставивши (8.17) в крайову умову (8.2), отримаємо, що оператор $\mathbf{L}$ діє на M наступним чином:

$$\mathbf{L}M = (m_{11}(1 - e^{\frac{1}{2}p}), m_{22}(1 - e^{\frac{3}{2}p}), m_{33}(1 - e^{\frac{1}{2}p}), ...).$$

Легко бачити, що даний оператор діє неперервним чином і має обернений $\mathbf{L}^{-1}$, який можна визначити наступним чином:

$$\mathbf{L}^{-1}(y_1, y_2, ...) = diag(y_1(1 - e^{\frac{1}{2}}p), y_2(1 - e^{\frac{3}{2}}p), ...). \tag{8.18}$$

Проектори $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ та $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}$ в цьому випадку будуть нульовими.

Умова (8.7) виконується. Тоді операторне рівняння $\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi] d\tau$ має множину розв'язків вигляду:

$$M = \mathbf{L}^{-1}\left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi] d\tau\right] = \tag{8.19}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p)(1 - e^{\frac{1}{2}}p) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p)(1 - e^{\frac{3}{2}p}) & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha_{2i+1} + e^{\frac{1}{2}p}p)(1 - e^{\frac{1}{2}}p) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

Таким чином, за допомогою матриці (8.20) можна виписати загальний розв'язок рівняння (8.1) у вигляді:

$$Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \tilde{Z}(t) = \tag{8.21}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p)(1 - e^{\frac{1}{2}p})e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}t & 0 & \dots \\ 0 & (\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p)(1 - e^{\frac{3}{2}p})e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{3}{2}t}t & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

Безпосередньою підстановкою матриці (8.22) в крайову задачу (8.1),(8.2) можна переконатися в достовірності отриманого результату.

Таким чином, отримані результати можна використовувати при дослідженні зліченновимірних крайових задач для рівняння Ляпунова, що робиться вперше.

8.5. Крайові задачі для рівняння Ріккаті в просторі Гільберта

Рівняння Ріккаті відіграє важливу роль в теорії оптимального керування, фізиці та використовується в теорії ігор та варіаційному численні. Більшість робіт присвячено дослідженню рівняння Ріккаті як правило в регулярному випадку, де дана проблема має єдиний розв'язок. В нерегулярному випадку таке рівняння досліджувалося (в періодичному випадку) в роботі Бойчука О.А., Кривошеї С.А. [310]. В статті [385] досліджується дискретне рівняння Ріккаті. В статті Пронкіна [441] досліджується питання стосовно квазіперіодичних розв'язків матричного рівняння Ріккаті з коефіцієнтами, що є функціями Арнольда. Дисертація [471] також присвячена теорії збурень Гамільтоніанів для операторних матриць та рівнянню Ріккаті в просторі Гільберта.

В даній частині, з використанням техніки узагальнено-обернених операторів, встановлено критерій розв'язності даної задачі, породжуючої задачі та проаналізовано структуру множини розв'язків.

Спочатку наводиться відповідна постановка задачі. Потім встановлюються необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків породжуючої крайової задачі та відповідної нелінійної задачі.

8.6. Постановка задачі

Розглядається наступна крайова задача

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = A(t)Z(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B(t) + \Phi(t) + \varepsilon Z(t,\varepsilon)\Psi(t)Z(t,\varepsilon), \tag{8.23}$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha, \tag{8.24}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ невідома оператор-функція з простору $C^1([a;b],\mathcal{L}(H_1))$, $A(t), B(t)$ та $\Phi(t), \Psi(t)$ обмежені операторнозначні функції $A(t), B(t), \Phi(t), \Psi(t) \in C([a;b],\mathcal{L}(\mathbf{H}_1))$; або іншими словами ці оператори є шляхами в просторі лінійних та обмежених операторів $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1)$, $\varepsilon \geq 0$ малий параметр. Шукаємо такий розв'язок $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (8.23), (8.24), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $Z_0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dZ_0(t)}{dt} = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{8.25}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \tag{8.26}$$

8.7. Критерій розв'язності та структура множини розв'язків незбуреної задачі

8.8. Розв'язки на скінченному відрізку

Розглянемо випадок, коли диференціальне рівняння розглядається на скінченному відрізку $[0;T]$ та нескінченному інтервалі. Нехай визначено оператор K_τ^t, дія якого на операторнозначну функцію $\Phi = \Phi(t)$ задається наступним чином

$$K_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V(\tau)V^{-1}(t), \tag{8.27}$$

де $U(t)$, $V(t)$ еволюційні оператори [137] наступних операторно-диференціальних рівнянь

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), X(0) = I, \tag{8.28}$$

$$\dot{Y}(t) = B(t)Y(t), Y(0) = I, \tag{8.29}$$

відповідно. Очевидно, що $V^{-1}(t)$ задовольняє наступне операторно-диференціальне рівняння

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)B(t), Y(0) = I.$$

Використовуючи оператор K^t_τ, можемо записати загальний розв'язок незбуреної задачі ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{Z}_0(t) = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{8.30}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha, \tag{8.31}$$

у вигляді

$$Z_0(t) = K^t_0[M] + \widetilde{Z}_0(t),$$

де M довільний лінійний обмежений оператор та

$$\widetilde{Z}_0(t) = \int_0^t K^t_\tau[\Phi]d\tau.$$

Основним твердженням цієї частини є наступна теорема.

Теорема 8.2. *Нехай задана крайова задача (8.30), (8.31).*

1) Розв'язки крайової задачі (8.30), (8.31) існують тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0; \tag{8.32}$$

де $Q = \ell K^{\cdot}_0$ та $R(Q) = \overline{R(Q)}$; за виконання умови (8.32) розв'язки мають наступний вигляд

$$Z_0(t, C) = K^t_0[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8.33}$$

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K^t_0[Q^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}] -$$

узагальнений оператор Гріна та Q^+ псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор;

2) Узагальнені розв'язки крайової задачі (8.30), (8.31) існують тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0,$$

де $\overline{Q}^+$ сильний узагальнено-обернений оператор. Тоді множина розв'язків рівняння (8.30) має вигляд

$$Z_0(t, C) = K^t_0[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8.34}$$

де

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[\overline{Q}^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}] -$$

узагальнений оператор Гріна.

3) Квазірозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли $\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot) \notin \overline{R(Q)}$ *та в цьому випадку мають вигляд*

$$Z_0(t,C) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi,\alpha])(t). \tag{8.35}$$

Нарис доведення. Підставивши в крайову умову будемо мати

$$lZ_0(\cdot) = \alpha, \tag{8.36}$$

та отримаємо наступне операторне рівняння

$$QM := \ell K_0^{\cdot}[M] = \alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot). \tag{8.37}$$

З цього рівняння з використанням узагальнено-оберненого оператора [314], [195] будемо мати наступні варіанти :

1) Якщо $R(Q) = \overline{R(Q)}$, то рівняння (8.37) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0. \tag{8.38}$$

Якщо умова (8.38) виконана, то множина розв'язків рівняння (8.37) має вигляд:

$$M = Q^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} + \mathcal{P}_{N(Q)}C,$$

для довільного лінійного обмеженого оператора C. Тоді множина розв'язків крайової задачі (8.30), (8.31) має вигляд

$$Z_0(t,C) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi,\alpha])(t), \tag{8.39}$$

де

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[\overline{Q}^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}] -$$

узагальнений оператор Гріна.

2) Розглянемо випадок, коли $R(Q) \neq \overline{R(Q)}$. В цьому випадку, якщо $\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot) \in \overline{R(Q)}$ маємо узагальнені розв'язки в наступному вигляді

$$M = \overline{Q}^{+}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} + \mathcal{P}_{N(Q)}C,$$

тоді й тільки тоді, коли виконується наступне співвідношення

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0,$$

де $\overline{Q}^{+}$ сильний узагальнено-обернений оператор [195]. Тоді множина розв'язків крайової задачі (8.30), (8.31) має вигляд

$$Z_0(t, C) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8.40}$$

де

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[\overline{Q}^{+}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}] -$$

узагальнений оператор Гріна (якщо $\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot) \in R(Q)$, то розв'язки будуть класичними).

3) Якщо $\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot) \notin \overline{R(Q)}$ маємо множину квазірозв'язків у вигляді

$$Z_0(t, C) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{8.41}$$

де узагальнений оператор Гріна не змінюється.

8.9. Нелінійний випадок

Необхідна умова

Розглянемо крайову задачу (8.23), (8.24). Шукається такий розв'язок $Z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (8.23), (8.24), який для $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $Z_0(t)$ крайової задачі (8.30), (8.31).

Теорема 8.3. *(необхідна умова). Нехай крайова задача (8.23), (8.24) має розв'язок $Z(t, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків з* *оператором $C = C_0$, $Z_0(t, C_0)$. Тоді оператор C_0 задовольняє наступне операторне рівняння для породжуючих операторів*

$$F(C) = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[(\mathcal{P}_{N(Q)}C]+ \tag{8.42}$$

$$+(G[\Phi, \alpha])(\tau))\Psi(\tau)(K_0^\tau[(\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(\tau))]d\tau = 0. \tag{8.43}$$

Доведення. Припустимо, що крайова задача (8.23), (8.24) має розв'язок $Z(t, \varepsilon)$, який для $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $Z_0(t, C_0)$. З попередньої теореми випливає, що виконується наступна умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}(\cdot, \varepsilon)\} = 0; \tag{8.44}$$

де

$$\widetilde{Z}(t, \varepsilon) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi + \varepsilon Z\Psi Z]d\tau.$$

Використовуючи те, що (8.32) виконується, умову розв'язності (8.44) можемо переписати в наступному вигляді

$$\varepsilon\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[Z\Psi Z]d\tau\} = 0.$$

Розділивши на ε та перейшовши до границі, коли ε прямує до нуля, отримаємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[Z_0\Psi Z_0]d\tau\} = 0,$$

або у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C_0]+$$

$$+(G[\Phi, \alpha])(\tau))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C_0] + (G[\Phi, \alpha])(\tau))]d\tau = 0. \tag{8.45}$$

З цієї умови отримаємо твердження теореми.

Достатня умова розв'язності.

Отримаємо достатню умову розв'язності крайової задачі (8.23), (8.24). Зробимо заміну змінних $Z(t, \varepsilon)$ за правилом $Y(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon) + Z_0(t, C_0)$, де оператор C_0 задовольняє рівняння для породжуючих операторів (8.42). Тоді отримаємо наступну крайову задачу

$$\dot{Y}(t, \varepsilon) = A(t)Y(t, \varepsilon) - Y(t, \varepsilon)B(t)+$$

$$+\varepsilon(Z_0(t,C_0)+Y(t,\varepsilon))\Psi(t)(Z_0(t,C_0)+Y(t,\varepsilon)), \tag{8.46}$$

$$lY(\cdot,\varepsilon)=0. \tag{8.47}$$

Множина розв'язків рівняння (8.46) має вигляд

$$Y(t,\varepsilon)=K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C]+\overline{Y}(t,\varepsilon), \tag{8.48}$$

$$\overline{Y}(t,\varepsilon)=\varepsilon(G[(Z_0+Y)\Psi(Z_0+Y)])(t,\varepsilon), \tag{8.49}$$

за виконання умови (8.44)

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot}K_\tau^{\cdot}[(Z_0+Y)\Psi(Z_0+Y)]d\tau=0. \tag{8.50}$$

Підставивши у вираз (8.50) представлення (8.48) та використовуючи рівняння (8.45) отримаємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot}K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]+\overline{Y}(\tau,\varepsilon))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]+\overline{Y}(\tau,\varepsilon))]d\tau=0. \tag{8.51}$$

Тоді можемо переписати цей вираз у вигляді наступного операторного рівняння

$$LC=G, \tag{8.52}$$

де

$$LC=\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot}K_\tau^{\cdot}[K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]\Psi(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon)]d\tau+ \tag{8.53}$$

$$+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot}K_\tau^{\cdot}[\overline{Y}(\tau,\varepsilon)\Psi(\tau)K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]]d\tau, \tag{8.54}$$

та

$$G=-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot}K_\tau^{\cdot}[K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]\Psi(\tau)K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]]d\tau- \tag{8.55}$$

$$-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot}K_\tau^{\cdot}[\overline{Y}(\tau,\varepsilon)\Psi(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon)]d\tau. \tag{8.56}$$

Якщо виконана умова

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)}=0, \tag{8.57}$$

то рівняння (8.53) має розв'язок

$$C=L^+G. \tag{8.58}$$

Можна довести, що з умови (8.57) випливає, що крайова задача (8.46), (8.47) має розв'язки (доведення проводиться за аналогічною схемою попередніх частин). Таким чином довели наступну теорему.

Теорема 8.4. *(достатня умова). За умови (8.57) крайова задача (8.23), (8.24) розв'язна та її розв'язок можна знайти використовуючи наступний ітераційний процес*

$$Y_{k+1}(t,\varepsilon) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C_k] + \overline{Y}_k(t,\varepsilon), \tag{8.59}$$

$$\overline{Y}_k(t,\varepsilon) = \varepsilon(G[(Z_0 + Y_k)\Psi(Z_0 + Y_k)])(t,\varepsilon), \tag{8.60}$$

$$C_k = L^+G_k, \tag{8.61}$$

$$Z_{k+1}(t,\varepsilon) = Y_{k+1}(t,\varepsilon) - Z_0(t,C_0),$$

$$Z(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} Z_k(t,\varepsilon),$$

з нульовими початковими даними.

Доведення цього твердження використовує модифікований варіант принципа стискаючих відображень і проводиться таким чином, як доведення теореми 3 з роботи [436].

Приклад 1.

Розглянемо наступну крайову задачу з матрицями вигляду

$$A(t) = \begin{pmatrix} th\ t & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & -th\ t & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & th\ t & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.62}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.63}$$

неоднорідна частина має вигляд

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \cdots \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\ t & -sin\ t & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{e^t+e^{-t}} & \frac{1}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & cos\ t & -sin\ t & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{e^t+e^{-t}} & \frac{1}{e^t+e^{-t}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{8.64}$$

та умови на нескінченності

$$\ell Z(\cdot) = \lim_{t\to+\infty}(Z(t) - Z(-t)) = 0. \tag{8.65}$$

В цьому випадку

$$U(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{e^t+e^{-t}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.66}$$

$$V^{-1}(t) = \begin{pmatrix} cos\ t & -sin\ t & 0 & 0 \\ sin\ t & cos\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\ t & -sin\ t \\ 0 & 0 & sin\ t & cos\ t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.67}$$

$$U(t)V^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2}cos\ t & -\frac{e^t+e^{-t}}{2}sin\ t & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{2}{e^t+e^{-t}}sin\ t & \frac{2}{e^t+e^{-t}}cos\ t & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2}cos\ t & -\frac{e^t+e^{-t}}{2}sin\ t & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{2}{e^t+e^{-t}}sin\ t & \frac{2}{e^t+e^{-t}}cos\ t & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{8.68}$$

Оператор $K_\tau^t[\Phi]$ має наступний вигляд

$$K_\tau^t[\Phi] = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & \cdots \\ * & * & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.69}$$

з 2×2 * матрицею, яка має вигляд

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \tag{8.70}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{e^\tau+e^{-\tau}}(\Phi_{11}(\tau)cos\ (t-\tau)+\Phi_{12}(\tau)sin\ (t-\tau)) & -\frac{e^t+e^{-t}}{e^\tau+e^{-\tau}}(\Phi_{11}(\tau)sin\ (t-\tau)+\Phi_{12}(\tau)cos\ (t-\tau)) \\ \frac{e^\tau+e^{-\tau}}{e^t+e^{-t}}(\Phi_{21}(\tau)cos\ (t-\tau)+\Phi_{22}(\tau)sin\ (t-\tau)) & -\frac{e^\tau+e^{-\tau}}{e^t+e^{-t}}(\Phi_{21}(\tau)sin\ (t-\tau)+\Phi_{22}(\tau)cos\ (t-\tau)) \end{pmatrix} \tag{8.71}$$

В цьому випадку оператор $\widetilde{Z}_0(t)$ має наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{cos\ t(arctg\ e^t-\frac{\pi}{4})}{e^t+e^{-t}} & -\frac{sin\ t(arctg\ e^t-\frac{\pi}{4})}{e^t+e^{-t}} & 0 & \cdots \\ \frac{sin\ t-cos\ t}{e^t+e^{-t}} & -\frac{sin\ t+cos\ t}{e^t+e^{-t}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{8.72}$$

З умови розв'язності отримуємо, що $M_{12} = M_{11} = 0$, $M_{32} = M_{31} = 0$ і так далі, а M_{21}, M_{22}, M_{43}, M_{44} і так далі можна обирати довільним чином.

Таким чином маємо

$$K_0^t[M] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{2M_{21}cos\ t+2M_{22}sin\ t}{e^t+e^{-t}} & \frac{-2M_{21}sin\ t+2M_{22}cos\ t}{e^t+e^{-t}} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{8.73}$$

Незбурена задача має розв'язки наступного вигляду

$$Z(t, M_{21}, M_{22}, M_{43}, M_{44}, ...) = \begin{pmatrix} \frac{2cos\ t}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{2sin\ t}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} M_{21} + \tag{8.74}$$

$$+ ... + \begin{pmatrix} \frac{cos\ t(arctg\ e^t - \frac{\pi}{4})}{e^t+e^{-t}} & -\frac{sin\ t(arctg\ e^t - \frac{\pi}{4})}{e^t+e^{-t}} & \cdots & \cdots \\ \frac{sin\ t - cos\ t}{e^t+e^{-t}} & -\frac{sin\ t + cos\ t}{e^t+e^{-t}} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{8.75}$$

Розглянемо наступну крайову задачу з матрицею

$$A(t) = \begin{pmatrix} cos\ t & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & th\ t & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & th\ t & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -th\ t & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.76}$$

неоднорідна частина має наступний вигляд

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) & \Phi_{14}(t) & \cdots \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) & \Phi_{24}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \tag{8.77}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\ t & -sin\ t & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{e^t+e^{-t}} & \frac{1}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & cos\ t & -sin\ t & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{e^t+e^{-t}} & \frac{1}{e^t+e^{-t}} & \cdots \end{pmatrix}. \tag{8.78}$$

В цьому випадку

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{sin\ t} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e^{sin\ t} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad (8.79)$$

$$V(t) = block(v(t)),$$

де

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} & -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix}, \qquad (8.80)$$

$$U(t)V^{-1}(t) = block(s(t)),$$

де

$$s(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\lambda_1 t + sin\ t} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\lambda_2 t + sin\ t} & -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{\lambda_1 t + sin\ t} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\lambda_2 t + sin\ t} \\ (-\frac{1}{\sqrt{5}} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\lambda_2 t})(\frac{e^t+e^{-t}}{2}) & (\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\lambda_1 t} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\lambda_2 t})(\frac{e^t+e^{-t}}{2}) \end{pmatrix}. \qquad (8.81)$$

Тут $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ та $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ характеристичні числа блоків матриці Фібоначчі B.

8.10. ВИСНОВКИ

1) Знайдено умову розв'язності крайової задачі для операторно- диференціального рівняння Ляпунова;

2) Отримано необхідні та достатні умови розв'язності нелінійно- збуреної крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ріккаті в просторі Гільберта на відрізку та на всій осі.

ВИСНОВКИ

1) Введено поняття сильного узагальнено-оберненого та псевдооберненого операторів у просторах Фреше, Банаха та Гільберта;

2) Для лінійних операторних рівнянь з обмеженим оператором у просторах Фреше та Банаха введені поняття узагальнених розв'язків та квазірозв'язків. Побудовано теорію розв'язності таких рівнянь та представлено їх множини розв'язків;

3) Для лінійних рівнянь у просторах Банаха з нормально-розв'язним оператором показано, яким чином будуються проектори на ядро та коядро оператора;

4) Для операторних рівнянь у просторах Банаха та Фреше з необов'язково стискуючим оператором узагальнено метод рядів Неймана та побудовано сильні псевдообернені оператори;

5) З використанням побудованих сильних псевдообернених та узагальнено-обернених операторів доведено теореми розв'язності для нелінійних операторних рівнянь.

6) Досліджено періодичну та двоточкову крайову задачу для операторно-диференціального рівняння Хіла в просторі Гільберта. Знайдено необхідні й достатні умови існування узагальнених розв'язків даної задачі та представлено відповідні узагальнені розв'язки;

7) Розроблено теорію біфуркацій для операторно-диференціального рівняння Хіла в просторі Гільберта;

8) В просторі Банаха досліджено параметричну крайову задачу з періодичними операторними коефіцієнтами. Введено поняття відносного спектра оператора й за допомогою нього знайдено необхідні та достатні умови розв'язності даної задачі;

9) Представлено в явному вигляді розв'язки крайових задач для операторно-диференціального рівняння Хіла та параметричної крайової задачі з періодичними операторними коефіцієнтами;

10) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха з необмеженими операторними коефіцієнтами за умов експоненціальної дихотомії на півосях;

11) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків слабконелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха з необмеженим оператором у лінійній частині та знайдено зв'язок між ними;

12) Запропоновано означення експоненціальної дихотомії у локально-опуклих просторах та просторах Фреше;

13) За умов експоненціальної дихотомії на півосях отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків операторно-диференціальних рівнянь у локально-опуклих просторах та просторах Фреше;

14) Досліджено умови існування обмежених розв'язків крайових задач на всій осі з умовами на нескінченності;

15) Для операторно-диференціальних рівнянь у просторах Банаха обгрунтовано метод параметризації та побудовано чисельно-аналітичний метод для апроксимації відповідних розв'язків;

16) Для лінійного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта за умов експоненціальної дихотомії на півосях знадено необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків;

17) Розвинено теорію біфуркацій для лінійного операторно-диференціального рівняння Шредінгера на скінченному відрізку;

18) Розвинено теорію крайових задач для слабконелінійних операторно-диференціального рівняння Шредінгера у просторі Гільберта;

19) Отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків двоточкової крайової задачі для рівняння Шредінгера з постійним оператором;

20) Результати продемонстровано на абстрактоному рівнянні Ван дер Поля;

21) Відповідні розв'язки будуються з використанням побудованого узагальненого оператора Гріна;

22) Досліджено параметричне рівняння з періодичною умовою у просторі Банаха;

23) З використанням ергодичної теореми отримано представлення розв'язків рівняння з допомогою побудованого оператора Гріна;

24) Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених на всій цілочисельній вісі розв'язків різницевих рівнянь у просторі Банаха за умов дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння;

25) Досліджено розв'язність слабко збуреного лінійного різницевого рівняння у просторі Банаха;

26) З допомогою узагальненої центральної канонічної форми досліджено розв'язність диференціально-алгебраїчної системи та розвинено теорію біфуркацій;

27) Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків слабконелінійно збурених вироджених систем;

28) Досліджено операторне рівняння з запізненням типу Соболєва-Гальпєрна;

29) Отримано умови керованості рівняння Соболєва-Гальпєрна;

30) Знайдено умову розв'язності крайової задачі для операторно- диференціального рівняння Ляпунова;

31) Отримано необхідні та достатні умови розв'язності нелінійно- збуреної крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ріккаті в просторі Гільберта на відрізку та на всій осі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Агаев Р. П.* Метод Фадеева и обобщенно-обратные матрицы. / Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. // — С. 1-25.
2. *Абловиц М. Дж.* Связанные нелинейные уравнения Шрёдингера для соприкасающихся жидкостей со свободной поверхностью. / Абловиц М. Дж., Хот Т. С. // Теор. и мат. физика. — 2009. — 159, 3. — С. 326-335.
3. *Азбелев Н. В.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. / Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. // — М.: Наука, 1991. — 277 с.
4. *Алексеев В. М.* Оптимальное управление. / Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.// — М.:Наука, 1979. — 430 с.
5. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. / Алберт А. // — М.:Наука, 1977. — 224 с.
6. *Алимов А. Л.* О гамильтоновой форме Фейнмановского континуального интеграла. / Алимов А. Л. // — Теор. и мат. физика. — 1974. — 20, 3. — С. 302-307.
7. *Алимов А. Л.* О конитнуальном интеграле Фейнмана на нелинейном фазовом пространстве. / Алимов А. Л. // — Теор. и мат. физика. — 1977. — 30, 2. — С. 159-167.
8. *Андронов А. А.* Теория колебаний. / Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Е. // — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
9. *Антоневич А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. / Антоневич А. Б., Радыно Я. В. // — М: Университетское, 1988. — 231 с.
10. *Антоневич А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения / Антоневич А. Б., Радыно Я. В. // — М: Изд-во Минск. ун-та, 1984. — 351 с.

11. *Антоневич А. Б.* Расслоенные пространства и K-теория: первые шаги. / А.Б.Антоневич. // — Труды КРОМШ-2009. — С. 14-51.
12. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Арнольд В. И. // — М.:Наука, 1984. — 336 с.
13. *Арнольд В. И.* Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. // — УМН. — 1983. — 38, 4(232). — С. 189-203.
14. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя. / Арнольд В. И. // — Изв. Акад. Наук СССР. — 1961. — 25. — С. 21-86.
15. *Арнольд В. И.* Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. / Арнольд В. И. // — УМН. — 1983. — 38, 4(232). — С. 189-203.
16. *Асанова А. Т.* Ограниченные решения систем гиперболических уравнений и их аппроксимация. / Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // — ЖВМиМФ. — 2003. — 43, 8. — С. 1183-1200.
17. *Аткинсон Ф. Р.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. / Аткинсон Ф. Р. // — Мат. сборник. Нов. сер. — 1951. — 28, 1. — С. 3-14.
18. *Аткинсон Ф. В.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. / Аткинсон Ф. В. // — М.: Мир, 1968. — 749 с.
19. *Ахиезер Н. И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. / Ахиезер Н. И., Глазман И. М. // — Х.:Вища школа, 1977. — Т1. — 315 с.
20. *Ахромеева Т. С.* Периодические режимы в нелинейных диссипативных системах вблизи точки бифуркации. / Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. // — ЖВМиМФ. — 1985. — 25, 9. — С. 1314-1326.
21. *Бабин А. В.* Конечномерность ядра и коядра квазилинейных эллиптических отображений. / Бабин А. В. // — Мат. сборник. — 1974. — 93, 3. — С. 422-450.

22. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов. / Баскаков А. Г. // — Доклады РАН. — 2002. — 383, 5. — С. 583-585.

23. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов. / Баскаков А. Г. // — Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — 30. — С. 1-11.

24. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов. / Баскаков А. Г. // — Математические заметки. — 2000. — 67, 6. — С. 816-827.

25. *Баскаков А. Г.* О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах. / Баскаков А. Г. // — Доклады РАН. — 2007. — 416, 2. — С. 156-160.

26. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. / Баскаков А. Г. // — Изв. РАН, серия матем. — 2009. — 73, 2. — С. 3-68.

27. *Баскаков А. Г.* Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений. / Баскаков А. Г. // — Дифференц. уравнения. — 2003. — 39. — С. 413-415.

28. *Баскаков А. Г.* О существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной. / Баскаков А. Г., Чернышов М. К. // — Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2002. — 2. — С. 44-49.

29. *Баскаков А. Г.* Спектральные свойства дифференциального оператора $d/dt - A_0$ с неограниченным оператором A_0. / Баскаков А. Г. // — Дифференц. уравнения. — 1991. — 27, 12. — С. 2162-2164.

30. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. / Беклемишев Д. В. // — М.:Наука, 1983. — 337 с.

31. *Белокуров В. В.* Теория возмущений со сходящимися рядами для вычисления величин, заданных конечным числом членов расходящегося ряда традиционной теории возмущений. / Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шевгулидзе Е. Т. // — Теор. и мат. физика. — 2000. — 123, 3. — С. 452-461.

32. *Березанский Ю. М.* Функциональный анализ./ Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. // — Киев: "Выща школа 1990. — 600 с.

33. *Богаевский И. А.* Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью. / Богаевский И. А. // — Алгебра и анализ. — 1989. — 1, вып.4. — С. 1-16.

34. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.// — М.: Наука, 1974. — 503 с.

35. *Боголюбов Н. Н.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. / Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.// — К: Наук. думка, 1969. — 247 с.

36. *Боголюбов Н. Н. (мл.)* Нелинейная модель типа Шрёдингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость. / Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Курбатов А. М., Самойленко В. Г.// — Теор. и мат. физика. — 65, 2. — 1985. — С. 271-284.

37. *Боголюбов Н. М.* О сходимости Фейнмановских диаграммных разложений в модели Изинга. / Боголюбов Н. М. // — Теор. и мат. физика. — 1977. — 30, 1. — С. 138-141.

38. *Бойчук А. А.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. / Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.// — К.: IМ НАНУ, 1995. — 320 с.

39. *Бойчук О. А.* Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова. / Бойчук О. А., Кривошея С. А. // — УМЖ. — 1998. — 50, 8. — С. 1021-1026.

40. *Бойчук А. А.* Нормально-разрешимые операторные уравнения. / Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А. // — 2013. — 65, 2. — С. 163-175.

41. *Бойчук А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Бойчук А. А., Покутний А. А. // Нелінійні коливання. — 2006. — 9, 1. — С. 3-14.

42. *Бойчук А. А.* Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом. / Бойчук А. А., Покутный А. А. // — УМЖ. — 2013. — 65, 3. — С. 329-339.

43. *Бойчук А. А.* Применение эргодической теории при решении одного семейства разностных уравнений в банаховом пространстве. / Бойчук А. А., Покутный А. А. // — Proceeding Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications Sunny Beach, Bulgaria. — 2011. — P. 241-246.

44. *Бойчук О. А.* Обмежені розв'язки слабконелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. / Бойчук О. А., Покутний О. О. // — Нелінійні коливання. — 2008. — 11, 2. — С. 151-160.

45. *Бойчук А. А.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений. / Бойчук А. А. // — ЖВМиМФ. — 2013. — 53, 6. — С. 958-969.

46. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. / Бойчук А. А. // — К.:Наук. думка, 1990. — 96 с.

47. *Бойчук А. А.* Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием. / Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. // — Дифференц. уравнения. — 1994. — 30, 10. — С. 1677-1682.

48. *Бойчук А. А.* Построение решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях. / Бойчук А. А. // — Укр. мат. журн. — 1989. — 41, 10. — С. 1416-1420.

49. *Бойчук А. А.* Краевые задачи для слабовозмущенных систем в критических случаях. / Бойчук А. А. // — Киев, 1988. — 44 с. — (Препр. АН УССР . Ин-т математики; 88.39).

50. *Бойчук А. А.* Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах. / Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1990. — 8. — С. 3-6.

51. *Бойчук А. А.* Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях./ Бойчук А. А., В. Ф Журавлев, С. М. Чуйко // Укр. мат журн. 1990. – 42, 9. — С. 1180-1187.

52. *Бойчук А. А.* Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта. / Бойчук А. А, Покутний А. А. // Укр. мат. журн. — 2015. — 67, 9. — С. 1181–1188.

53. *Борисович Ю. Г.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера. / Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. // — УМН. — 1977. — 32, вып.4(196). — С. 3-54.

54. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. / Бояринцев Ю. Е. // — Нов.: Наука, СО, 1980. — 222 с.

55. *Бояринцев Ю. Е.* Численные методы решения сингулярных систем. / Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф. // — Новосибирск. — 1989. — 223 с.

56. *Бояринцев Ю. Е.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. / Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф. // — Нов.: Наука. — 1998. — 224 с.

57. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Бояринцев Ю. Е. // — Нов.: Наука, СО, 1988. – 154 с.

58. *Брайсон А.* Прикладная теория оптимального управления М.: Мир, 1972. / Брайсно А. // - 544 с.

59. *Бутко Я. А.* Формула Фейнмана-Каца-Ито для бесконечномерного уравнения Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалом. / Бутко Я. А. // — Нелинейная динамика. — 2006. — 2, 1. — С. 75-87.

60. *Вайнберг М. М.* Методы исследования в теории разветвления решений. / Вайнберг М. М., Айзендлер П. Г. // — Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. — 1965, 1966. — С. 7–69.

61. *Вайнберг М. М.* О ветвлении периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием I. / Вайнберг М. М., Айзенгендлер П. Г. // — Изв. ВУЗов. Математика. — 1969. — 10. — С. 3-10.

62. *Вайнберг М. М.* О ветвлении периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием II. / Вайнберг М. М., Айзенгендлер П. Г. // — Изв. ВУЗов. Математика. — 1969. — 11. — С. 3-12.

63. *Вайнберг М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. / Вайнберг М. М., Треногин В. А. // — М.: Наука, 1969. — 527 с.

64. *Валеев К. Г.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. / Валеев К. Г., Жаутыков О. А. // — Алма-Ата: Наука, 1974. — 412 с.

65. *Варфоломеев Е. М.* Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения к исследованию нейронных сетей и передаче информации нелинейными лазерными системами с обратной связью. / Варфоломеев Е. М., Россовский Л. Е. // — Москва, 2008. — 244 с.

66. *Васильев В. В.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения. / В.В.Васильев, С.Г.Крейн, С.И.Пискарев. // Итоги науки и техники. Сер. матем.анализ. — ВИНИТИ. — 1990. — 28. — С. 87-202.

67. *Верлань А. Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. / Верлань А. Ф., Сизиков Р. С. // — К.: Наук. думка, 1986. — 542 с.

68. *Визинеску А.* Гидродинамический подход Маделунга к обобщенному нелинейному уравнению Шрёдингера с производной потенциала. Специальные решения и их устойчивость. / Визинеску А., Греку Д., Феделе Р., Никола С. Де. // — Теор. и мат. физика. — 2009. — 160, 1. — С. 229-239.

69. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. / Вишик М. И. // — Мат. сборник. — 1951. — 29 (71), 3. — С. 615-676.

70. *Вишик М. И.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. / Вишик М. И., Люстерник Л. А. // — Успехи мат. наук. — 1960. — 15, вып. 3. — С. 3-80.

71. *Габасов Р.* Качественная теория оптимальных процессов. / Габасов Р., Кириллова Ф.// — М.:Наука, 1971. — 507 с.

72. *Гадыльшин Р. Р.* Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом. / Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х. // — Уфимский математический журнал. — 2011. — 3, 3. — С. 55-66.

73. *Галба Е. Ф.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами. // — ЖВМиМФ. — 2012. — 52, 12. — С. 2115-2132.

74. *Галба Е. Ф.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами. / Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В. // — ЖВМиМФ. — 2012. — 52, 12. — С. 2115-2132.

75. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. / Гантмахер Ф. // — 1967. — 576 с.

76. *Глазман И. М.* Конечномерный линейный анализ. / Глазман И. М., Любич Ю. И. // — М.:Наука. — 1969. — 475 с.

77. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. / Гантмахер Ф. Р. // — М.: Наука, 1988. — 552 с.
78. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции. / Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. //— М.:ГИФМЛ. — 1961. — вып. 4. — 472 с.
79. *Герджиков В. С.* Многокомпонентные нелинейные уравнения Шрёдингера с постоянными граничными условиями. / Герджиков В. С., Костов Н. А., Вылчев Т. И. // — Теор. и мат. физика. — 2009. — 159, 3. — С. 438-447.
80. *Головачев Г. М.* / Головачев Г. М., Смирнов А. О. // — Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — 374. — С. 107-120.
81. *Голубева В. А.* Некоторые вопросы аналитической теории Фейнмановских интегралов. / Голубева В.А. // — УМН. — 1976. — 31, вып. 2(188). — С. 135-202.
82. *Голубева В. А.* Об исследовании Фейнмановского интеграла гомологическим методом. / Голубева В. А. // — Теор. и мат. физика. — 1970. — 3, 3. — С. 405-419.
83. *Голубева В. А.* О дифференциальных уравнениях для Фейнмановской амплитуды однопетлевого графа с четырьмя вершинами. / Голубева В. А., Энольский В. З. // Матем. заметки. — 1978. — 23, 1. — С. 113-119.
84. *Гольтяпин В. В.* Использование псевдообратной матрицы факторного отображения в измерении факторов. / Гольтяпин В. В. // — Сибирский журнал индустриальной математики. — 2011. — 14, 3(47). — С. 20-30.
85. *Гомилко А. М.* Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0-полугруппы операторов / Гомилко А. М.// Функц. анализ и его прилож. — 1999. — 33, 4. — С. 66-69.
86. *Гомилко А. М.* Об обратном операторе генератора C_0- полугруппы / Гомилко А. М., Зварт Х., Томилов Ю. // Матем. сборник. — 2007. — 198, 8. — С. 35-50.

87. *Горбачук М. Л.* Об аппроксимации решений операторных уравнений методом наименьших квадратов. / Горбачук М. Л. // — Функ. анализ и его приложения. — 2005. — С. 85-90.

88. *Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / Горбачук В. И., Горбачук М. Л. // — К.:Наук.думка. — 1984. — 283 с.

89. *Горбачук В. И.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений / Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н. // Укр. матем. журн. — 1989. — 41, 10. — С. 1299-1313.

90. *Горбачук В. И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / Горбачук В. И., Князюк А. В. // Успехи матем. наук. — 1989. — 44, 3. — .55-91.

91. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений / Горбачук В. М.// Доклады АН СССР. — 1989. — 308, 1. — С. 23-27.

92. *Горбачук М. Л.* Поведение на бесконечности решений дифференциального уравнения первого порядка параболического типа / Горбачук М. Л., Мацишин И. Т. // Доклады АН СССР. — 1990. — 312, 3. — С. 521-524.

93. *Горбачук М. Л.* О гладкости слабых решений дифференциально-операторных уравнений / Горбачук М. Л., Шкляр А. Я.// Функц. анализ и его приложения. — 1999. — 33, 1. — С. 59-61.

94. *Горбачук М. Л.* О стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве / Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Шкляр А. Я.// ДАН (Россия). — 1995. — 341, 6. — С. 734-736.

95. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в бана-

ховом пространстве. / Городний М. Ф. //— Математические заметки. — 1992. — 54, вып. 4. — С. 17-22.

96. *Гохберг И. Ц.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. / Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.// — УМН. — 1957. — 12, 2. — С. 43-115.

97. *Гохберг И. Ц.* Введение в одномерную теорию сингулярных интегральных операторов. / Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.// — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.

98. *Гоф Дж.* Рандомизированные гамильтоновы интегралы Фейнмана и стохастические уравнения Шрёдингера - Ито. / Гоф Дж., Обрезков О. О., Смолянов О. Г. // — Известия РАН, серия матем. — 2005. — 69, 6. — С. 3-20.

99. *Гохберг И. Ц.* Об устойчивости некоторых свойств нормально разрешимых операторов./ Гохберг И. Ц., Маркус А. С. // — Мат.сборник. — 1956. — 40 (82), 4. — С. 453-466.

100. *Гребеников Е. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. // — М.: Наука, 1979. — 432 с.

101. *Гудков В. В.* Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / Гудков В. В., Клоков Ю. А., Лепин А. Я. и др. // — Рига: Зинатне, 1973. — 135 с.

102. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. / Далецкий Ю. Л. // — УМН. — 1962. — 17, вып. 5 (107). — С. 3-115.

103. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / Ю.Л.Далецкий , М.Г.Крейн // — М.: Наука, 1970. — 534 с.

104. *Далецкий А. Ю.* Некоммутативная проблема моментов. / Далецкий А. Ю., Самойленко Ю. С. // — Функ. анализ и его приложения. — 1987. — 21, вып.2. — С. 72-73.

105. *Дезин А. А.* Операторы с первой производной по "времени"и нелокальные граничные условия / Дезин А. А. // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1967. — 31. — С. 61-86.

106. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. / Демидович Б. П. // — М.: Наука, 1967. – 472 с.

107. *Демков Ю. Н.* Теорема Вигнера фон Неймана : отталкивание уровней и выродженные состояния. / Демков Ю. Н., Курасов П. Б. // — Теор. и мат. физика. — 1987. — 72, 3. — С. 403-415.

108. *Джеффрис Б.* Операторное исчисление Фейнмана для семейств некоммутирующих операторов : тензорные произведения, упорядоченные носители и выпутывание экспоненциального множителя. / Джеффрис Б., Джонсон Г. В.// — Матем. заметки. — 2001. — 70, вып. 6. — С. 815-838.

109. *Джумабаев Д. С.* Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач. / Джумабаев Д. С. // — ЖВМиМФ. — 1990. — 30, 3. — С. 388-404.

110. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения / Джумабаев Д. С. // — ЖВМиМФ. — 1989. — 29, 1. — С. 50-66.

111. *Джумабаев Д. С.* Ограниченные решения семейств систем дифференциальных уравнений и их аппроксимация. / Джумабаев Д. С. // — Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — 12, 5. — С. 29-47.

112. *Джумабаев Д. С.* Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. / Джумабаев Д. С. // — ЖВМиМФ. — 1992. — 32, 1. — С. 10-24.

113. *Дядькин И. Г.* Уравнение Фейнмана-Шрёдингера и метод статистических возмущений. / Дядькин И. Г. // — ЖВМиМФ. — 1968. — 8, 6. — С. 1269-1279.

114. *Жук С. М.* Замкнутость и нормальная разрешимость оператора, порожденного линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. / Жук С. М. // — Нелинейные колебания. — 2007. — 10, 4. — С. 464-479.

115. *Забрейко П. П.* Об одном принципе неподвижной точки для операторов в гильбертовом пространстве. / Забрейко П. П., Качуровский Р. И., Красносельский М. А. // — Функ. анализ и его приложения. — 1967. — 1, вып.2. — С. 93-94.

116. *Замалин В. М.* О методе Монте-Карло в Фейнмановской формулировке квантовой статистики. / Замалин В.М., Норман Г.Э. // — ЖВМиМФ. — 1973. — 13, 2. — С. 408-420.

117. *Зарнадзе Д. Н.* Замечания о теореме метризации линейного топологического пространства. / Зарнадзе Д. Н. // — Математические заметки. — 1985. — 37, 5. — С. 763-773.

118. *Земляная Е. В.* Осциллирующие солитоны в нелинейном уравнении Шрёдингера с диссипацией и накачкой. / Земляная Е. В., Алексеева Н. В. // — Теор. и мат. физика. — 2009. — 159, 3. — С. 536-545.

119. *Иванов А. П.* Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы. / Иванов А. П. // — Нелинейная динамика. — 2009. — 5, 4. — С. 479-498.

120. *Иллс Дж.* Фредгольмовы структуры. / Иллс Дж. // — УМН. — 1971. — 26, вып. 6 (162). — С. 213-240.

121. *Иосида К.* Функциональный анализ. / К. Иосида // — М.:Мир, 1967. — 624 с.

122. *Кадец М. И.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах. / Кадец М. И., Митягин Б. С. // УМН. — 1973. — 28, 6. — С. 77-95.

123. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ. / Канторович Л. В., Акилов Г. П. // — М.:Наука, 1984. — 752 с.

124. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Като Т. // — М.:Мир. — 1972. — 740 с.

125. *Качковский И.* Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре. / Качковский И., Филонов Н. // — Алгебра и анализ. — 2009. — 21, 1. — С. 133-152.

126. *Качковский И.* Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в слое и гладком цилиндре. / Качковский И., Филонов Н. // — Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — 385. — С. 69-82.

127. *Качуровский Р. И.* Приближенные методы решения нелинейных операторных уравнений. / Качуровский Р. И. // — Изв. ВУЗов. Математика. — 1967. – 67, 12. — С. 27-37.

128. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сунгулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / Кигурадзе И. Т. // — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.

129. *Кигурадзе И. Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. // — М.: Наука, 1990. — 432 с.

130. *Климов В. С.* Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью. / Климов В. С. // — Изв. РАН, серия матем. — 2000. — 64, 4. — С. 109-130.

131. *Козицкий С. Б.* Амплитудные уравнения для трехмерной биодиффузионной валиковой конвекции с ячейками произвольной ширины в окрестности точек бифуркации Хопфа. / Козицкий С.Б. // — Вестник Удмуртского университета. — 2010. — вып. 4. — с. 13 – 24.

132. *Королюк В. С.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. / Королюк В. С., Турбин А. Ф.// — Киев: Наук. думка, 1978. — 218 с.

133. *Красносельский М. А.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа. / Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. // — Автоматика и телемеханика. — 1996. — 12. — С. 15-24.

134. *Красносельский М. А.* Условия устойчивости циклов при бифуркации Хопфа в бесконечности. / Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. // — Автоматика и телемеханика. — 1997. — 1. — С. 56-62.

135. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных операторов. / Красносельский М. А. // — М.:Гостехиздат, 1956. — 393 с.

136. *Краснюк И. Б.* Нелинейные граничные задачи для уравнения Больцмана : периодические решения и их бифуркации. / Краснюк И. Б. // — Теор. и мат. физика. — 1998. — 110, 2. — С. 323-333.

137. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / Крейн М. Г. // — Киев: Ин-т матем. АН УССР , 1964. — 186 с.

138. *Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / Крейн М. Г., Далецкий Ю.Л. // — М.: Наука, 1979. — 536 с.

139. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. / С.Г.Крейн // — М.: Наука, 1967. — 464 с.

140. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. / Крейн С. Г. // — М.:Наука, 1967. — 93 с.

141. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. СМБ / под ред. Крейна С. Г. // — М.:Наука, 1972. — 544 с.

142. *Крейн С. Г.* Об экспоненциальной дихотомии для уравнений с частными производными. / Крейн С. Г., Савченко Ю. Б. // *Дифференциальные уравнения.* — 1972. — 8, 5. — С. 835-844.

143. *Крейн С. Г.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Крейн С. Г., Хазан М. И. // Итоги науки и техники. Матем. анализ. — 1983. — 21. — С. 130-264.

144. *Крейн С .Г.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике / Крейн С. Г. // Успехи мат.наук. — 1957. — 12, 1(73). — С. 208-211.

145. *Курасов Б. П.* Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой, II. / Курасов Б. П., Павлов Б. С. // — Теор. и мат. физика. — 1988. — 74, 1. — С. 82-93.

146. *Куфнер А.* Нелинейные дифференциальные уравнения / Куфнер А., Фучик С. // — М.: Наука, 1988. — 304 с.

147. *Ландо Ю. К.* О разрешимости интегро-дифференциального уравнения / Ландо Ю. К. // — Дифференц. уравнения. — 1967. — 3, 4. — С. 695-697.

148. *Ландо Ю. К.* Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов / Ландо Ю. К. // — Дифференц. уравнения. — 1968. — 4, 6. — С. 1112-1126.

149. *Левенштам В. Б.* Равномерная экспоненциальная дихотомия параболических операторов с быстро осциллирующими коэффициентами. / Левенштам В. Б. // — Мат. заметки. — 2006. — 79, 5. — С. 729-735.

150. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. / Левитан Б. М., Жиков В. В.// — М.:Изд-во МГУ, 1978. — 205 с.

151. *Леонов Г. А.* Проблема обоснования первого приближения в теории устойчивости движения. / Леонов Г. А. // — Успехи механики. — 2003. — 3. — С. 1-28.

152. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. / Лионс Ж. Л., Мадженес Э. // — М.:Мир, 1971. — 371 с.

153. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. // — М.: Мир, 1972. — 588 с.

154. *Логинов Б. В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности . / Логинов Б. В. // — Ташкент: ФАН, 1985. — 184 с.

155. *Логинов Б.В.* Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации. / Логинов Б.В., Сидоров Н.А. // — Мат. сборник. — 1991. — 182, 5. — С. 681-691.

156. *Ломоносов В. И.* Об одной конструкции сплетающего оператора. / Ломоносов В. И. // — Функ. анализ и его приложения. — 1980. — 14, 1. — С. 67-68.

157. *Ломоносов В. И.* Об инвариантных подпространствах семейства операторов, уоммутирующих с вполне непрерывным. / Ломоносов В. И. // — Функ. анализ и его приложения. — 1973. — 7, 3. — С. 55-56.

158. *Лосев А. Г.* Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях. / Лосев А. Г., Мазепа Е. А. // — Алгебра и анализ. — 2001. — 13, вып.1. — С. 84-110.

159. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы / Лучка А. Ю. // – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.

160. *Ляшко С. И.* Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. / Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.// — М.Диалектика, 2009. — 185 с.

161. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. / А.Д.Майзель // — Тр. Урал. политехн. ин-та. Сер.мат. — 1954. — 51. — С. 20-50.

162. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / Малкин И. Г. // — М.: Гостехиздат, 1949. — 244 с.

163. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / Малкин И. Г. // — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

164. *Малышев А. Н.* Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша. / Малышев А. Н., Sadkane M. //— ЖВМиМФ. — 2005. — 45, 3. — С. 391-399.

165. *Манджавидзе И. Д.* Теория возмущений в окрестности протяженных объектов. / Манджавидзе И. Д., Сисакян А. Н. // — Теор. и мат. физика. — 123, 3. — 2000. — С. 433-451.

166. *Марченко В. А.* Характеристика спектра оператора Хилла. / Марченко В. А., Островский И. В.// — Мат. сборник. — 1975. — 97(139). — С. 493-554.

167. *Маслов В. П.* Обобщенная мера в континуальном интеграле Фейнмана. /Маслов В. П., Чеботарев А. М. // — Теор. и мат. физика. — 1976. — 28, 3. — С. 291-307.

168. *Маслов В. П.* К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнамана. / Маслов В. П. // — Теор. и мат. физика. — 1970. — 2, 1. — С. 30-35.

169. *Массера Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. / Массера Х., Шеффер Х.// — М.: Мир, 1970. — 456 с.

170. *Махмудов Н. М.* Разрешимость краевых задач для уравнения Шредингера с чисто мнимыми коэффициентами. / Махмудов Н. М. // — Изв. Сарат. ун-та. нов. сер. — 2011. — 11, вып.1. — С. 31-38.

171. *Махмудов Н. М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения Шрёдингера с вещественнозначным коэффициентом. / Махмудов Н. М. // — Изв. вузов. Математика. — 2010. — 11. — С. 31-40.

172. *Мелешко В. И.* Устойчивое к возмущениям псевдообращение замкнутых операторов. / Мелешко В.И. // — ЖВМиМФ. — 1977. — 17, 5. — С. 32-43.

173. *Мельников В. К.* Устойчивость центра при периодических возмущениях. / Мельников В. К.// *Труды ММО.* — 1964. — 12. — С. 1-56.

174. *Мельникова И. В.* Свойства d-полугрупп Лионса и обобщенная корректность задачи Коши / Мельникова И. В. // — Функц. анализ и его прилож. — 1997. — 31, вып.3. — С. 23-34.

175. *Менский М. Б.* Фейнмановское квантование и S-матрица для спиновых частиц в римановом пространстве-времени. / Менский М. Б. // — Теор. и мат. физика. — 1974. — 18, 2. — с. 202.

176. *Митропольский Ю. А.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.// — К.: Вища шк., 1979. — 248 с.

177. *Митропольский Ю. А.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. / Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.// — К.: Наук. думка, АН УССР. Ин-т матем. — 1990. — 272 с.

178. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. / Мозер Ю. // — УМН. — 1981. — 36, вып.5 (221). — С. 109-151.

179. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды. / Мозер Ю. // — УМН. — 1969. — 24, вып. 2 (146). — с. 165-211.

180. *Муминов М.Э.* О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра оператора Шрёдингера трёх частиц на решетке. / Муминов М.Э. // — Теор. и мат. физика. — 2009. — 159, 2. — С. 299-317.

181. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / Мышкис А. Д.// — М.: Гостехиздат, 1951. — 256 с.

182. *Мышкис А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени / Мышкис А. Д., Самойленко А. М.// Мат. сб. — 1967. — 74, Вып. 2. — С. 202-208.

183. *Насибов Ш. М.* О точной константе в одном неравенстве Соболева-Ниренберга и ее приложении к уравнению Шредингера. / Насибов Ш. М. // — Известия РАН, серия математическая.— 2009. — 73, 3. — С. 127-150.

184. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. / Никольский С. М. // Изв. АН СССР. — 1943. — 7, 3. — С. 147-163.

185. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. / Ниренберг Л. // — М.:Мир, 1977. — 232 с.

186. *Осипов Э. П.* Интеграл Фейнмана для экспоненциального взаимодействия в четырехмерном пространстве-времени I. / Осипов Э. П. // — Теор. и мат. физика. — 1981. — 47, 3. — С. 307-314.

187. *Павлов Б. С.* Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. I. / Павлов Б. С. // — Теор. и мат. физика. — 1987. — 72, 3. — С. 403-415.

188. *Панков А. А.* Ограниченные и почти-периодические по времени решения одного класса нелинейных эволюционных уравнений. / Панков А. А. // — Математический сборник. — 1983. — 121(163), 1(5). — С. 72-86.

189. *Пашаев О. К.* Релятивистские нелинейные уравнения Шрёдингера и Бюргрса. / Пашаев О. К. // — Теор. и мат. физика. — 2009. — 160, 1. — С. 178-188.

190. *Пелчинский А.* О некоторых проблемах Банаха. / Пелчинский А. // УМН. — 1973. — 28, 6. — С. 67-77.

191. *Пелчинский А.* О методе Энфло построения банаховых пространств. / Пелчинский А., Фигель Т. // УМН. — 1973. — 28, 6. — С. 95-109.

192. *Перестюк М. О.* Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь. / Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю. // — УМЖ. — 2009. — 61, 7. — С. 948-957.

193. *Петрина Д. Я.* О суммировании вкладов от диаграмм Фейнмана, теорема существования. / Петрина Д. Я. // — Изв. АН СССР. — 1968. — 32. — С. 1052-1074.

194. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. / Плисс В. А. // — К.: Наук. думка. — 1977.

195. *Покутний О. О.* Розв'язки лінійних різницевих рівнянь в банаховому просторі обмежені на всій цілочисельній вісі. / Покутний О. О. // — Вісник Київськ. ун–ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2006. — вип.1. — С. 182-188.

196. *Покутний О. О.* Розв'язки лінійних слабко збурених різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій вісі цілих чисел. / Покутний О. О. // — Вісник Київськ. ун–ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2006. — вип. 3. — С. 240-245.

197. *Покутний О. О.* Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь в локально-опуклих просторах. / Покутний О. О. // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2009. — 2 (98). — С. 35-40.

198. *Покутный А. А.* Новые формулы для нахождения матриц псевдообратных по Муру-Пенроузу. / Покутный А. А. // — Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — 3 (102). — С. 120-125.

199. *Покутний О. О.* Апроксимація узагальнених обмежених розв'язків еволюційних рівнянь з необмеженим оператором. / Покутний О. О. // — Нелінійні коливання. — 2011. — 14, 1. — С. 93-99.

200. *Покутный А. А.* Линейные нормально - разрешимые уравнения в банаховых пространствах. / Покутный А. А. // — Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — 1(107). — С. 146-153.

201. *Покутный А. А.* Бифуркация двухточечной краевой задачи для уравнения Хилла. / Покутный А. А. // — Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — 4(110). — С. 77-85.

202. *Покутний А. А.* Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі оператора в просторах Банаха та Фреше. / Покутний О. О. // Доповіді НАН України. — 2013. — 1. — С. 19-23.

203. *Покутный А. А.* Периодические решения уравнения Хилла. / Покутный А. А. // Нелінійні коливання. — 2013. — 16, 1. — С. 111-117.

204. *Покутний О. О.* Розв'язки еволюційних рівнянь Соболєва-Гальперна з чистим запізненням. - III міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика"присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. / Покутний О. О., Семенов В. В. // — Київ, 2009. — С. 57.

205. *Покутний О. О.* Керованість еволюційних рівнянь типу Соболєва-Гальперна з чистим запізненням. / Покутний О. О., Семенов В. В. // — International workshop "Problems of decision making under uncertainties"(PDMU-2009). — Kamyanets-Podilsky, Ukraine, 2009. — P. 95-96.

206. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. / Покутний О. О. // Вісник Київськ. ун–ту. — 2013. — 4. — С. 158-161.

207. *Понтрягин Л. С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. / Понтрягин Л.С. // — М.:Наука, 1976. — 176 с.

208. *Попов М. М.* Доповнювальні підпростори і деякі задачі сучасної геометрії Банаха. / Попов М. М. // Матем. сегодня. — 2007. — С. 78-116.

209. *Попов В. С.* Фейнамновский метод распутывания операторов и теория представлений групп. / Попов В. С. //— УФН. — 2007. — 177, 12. — С. 1319-1340.

210. *Рабинович М. И.* Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная дуятельность. / Рабинович М. И., Мюезинолу М. К. // — УФН. — 2010. — 180, 4. — С. 371-387.

211. *Радыно А. Я.* Линейные уравнения и борнология. / Радыно А. Я. // — Минск: БГУ, 1982. — 199 с.

212. *Радыно Я. В.* Линейные дифференциальные уравнения в локально-выпуклых пространствах . III. Примеры регулярных операторов. / Радыно Я. В. // — Дифференциальные уравнения. — 1977. — 13, 10. — С. 1796-1803.

213. *Рид М.* Методы современной математической физики : в 4 т. — Т.1: Функциональный анализ. / Рид М., Саймон Б. // — М.:Мир, 1977. — 360 с.

214. *Рид М.* Методы современной математической физики : в 4 т. — Т.2: Гармонический анализ. Самосопряженность. / Рид М., Саймон Б. // — М.:Мир, 1978. — 395 с.

215. *Робертсон А. П.* Топологические векторные пространства. / Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. // — М.:Мир, 1967. — 257 с.

216. *Роговченко Ю. В.* Ограниченные и периодические решения слабо нелинейных импульсных эволюционных систем / Роговченко Ю. В., Трофимчук С. Р.// Укр. матем. журнал. — 1987. — 39, 2. — С. 260-264.

217. *Рубан В. П.* О нелинейном уравнении Шредингера для волн на неоднородном течении. / Рубан В. П. // — Письма в ЖЭТФ. — 2012. — 95, вып.9 — С. 550-556.

218. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / Рубаник В. П. // — М.: Наука, 1969. — 287 с.

219. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$ / Руткас А. Г. // — Дифф. ур–ния. — 1975. — 11, 11. — С. 1996-2010.

220. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. / Самойленко А. М. // — М.:Наука, 1987. — 303 с.

221. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$. / Самойленко А. М. // — УМЖ. — 2001. — 53, 3. — С. 356-371.

222. *Самойленко А. М.* О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду. / Самойленко А. М. // — Известия АН СССР, серия матем. — 1972. — 36. — С. 209-233.

223. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении. / Самойленко А. М. // — Известия АН СССР, серия матем. — 1970. — 34. — С. 1219-1240.

224. *Самойленко А. М.* Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа. / Самойленко А. М. // — Функ. анализ и его приложения. — 1968. — 2, вып.4. — С. 63-69.

225. *Самойленко А. М.* О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия. / Самойленко А. М. // — Известия АН СССР, серия матем. — 1966. — 30. — С. 1047-1072.

226. *Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / Самойленко А. М., Бойчук А. А., Кривошея С. А. // — Укр. мат. журн. – 1996. – 48, 11. — С. 1576-1579.

227. *Самойленко А. М.* Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем. / Самойленко А. М., Петришин Р. И. // — Известия АН СССР, серия матем. — 1972. — 36. — С. 209-233.

228. *Самойленко А. М.* Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущённых систем. / Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А. // — Укр. матем. журнал. — 2002. — 54, 11. — С. 1517-1530.

229. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. / Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. // — К:Вища школа, 2000. — 294 с.

230. *Самойленко А. М.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь в банахових просторах / Самойленко А. М., Теплинський Ю.В.// — Праці Ін–ту матем. НАН України. Матем. та її застос. Вип. 72. — К: Ін–тут матем. НАН України. — 2008. — 496 с.

231. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. / Самойленко А. М., Перестюк Н. А. // — К.: Вища шк., 1987. — 287 с.

232. *Сидоров Н. А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией. / Сидоров Н. А. // — Мат. заметки. — 1984. — 35, 4. — С. 569-577.

233. *Сидоров Н. А.* Функция "сумма цифр"для некоторых нестационарных систем счисления. / Сидоров Н. А. // — Записки научных семинаров ПОМИ. — 1997. — 240. — С. 257-267.

234. *Сидоров Н. А.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях. / Сидоров Н. А., Леонтьев Р. Ю. // — Труды ин–та матем. и мех–ки УрО РАН. — 2010. — 16, 2. — С. 226-237.

235. *Сидоров Н.А.* О ветвлении решений системы Власова-Максвелла. / Сидоров Н.А., Синицын А.В. // — Сибирский математический журнал. — 1996. — 37, 6. — С. 1367-1379.

236. *Сидоров Н. А.* Теория индекса в задаче ветвления решений системы Власова-Максвелла. / Сидоров Н. А., Синицын А. В. // — Мат. моделирование. — 1999. — 11, 9. — С. 83-100.

237. *Сильченко Ю. Т.* Обыкновенный дифференциальный оператор с нерегулярными граничными условиями / Сильченко Ю. Т. // Сиб.мат. ж. — 1986. — 27, 4. — С. 93-104.

238. *Сильченко Ю. Т.* Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью / Сильченко Ю. Т., Соболевский П. Е.// Сиб. мат. журнал. — 1986. — 4, 27. — С.93-104.

239. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-диффернциальных операторов / Слюсарчук В. Е. // — Матем. заметки. — 1987. — 42, 2. — С. 262-267.

240. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных фукционально-дифференциальных операторов / Слюсарчук В. Е.// — УМЖ. — 1989. — 41, 2. — С. 201-205.

241. *Слюсарчук В. Ю.* Задачі Коші з неєдиними розв'язками / В. Ю. Слюсарчук // — Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. математика. – 2011. – Т. 1, № 4. – С. 117 – 118.

242. *Слюсарчук В. Ю.* Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі./ Слюсарчук В. Ю. // — Рівне: УДУВГП. — 2003. — 365 с.

243. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем / Слюсарчук В. Е.// — Укр. мат. журн. – 1983. – 35, 1. — С. 109-114.

244. *Смирнов В. А.* Сингулярности фейнмановских диаграмм в координатном пространстве и α- представление. / Смирнов В. А. // — Теор. и мат. физика. — 1981. — 46, 1. — С. 27-32.

245. *Смирнов В. А.* Инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости коэффициентных функций Фейнмановских диаграмм как функционалов из S' II. / Смирнов В. А. // — Теор. и матем. физика. — 1981. — 46, 2. — С. 199-212.

246. *Смирнов А. О.* Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шредингера. / Смирнов А. О. // — Записки научных семинаров ПОМИ. — 2012. — 398. — С. 209-222.

247. *Станжицький О. М.* Дослідження експоненціальної дихотомії стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм / Станжицький О. М.// — УМЖ. - 2001. - 53, 11. — С. 1545-1555.

248. *Тинюкова Т. С.* Квазиуровни дискретного оператора Шрёдингера для квантового волновода. / Тинюкова Т. С. // — Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2011. — вып. 2. — С. 88-97.

249. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач. / Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.// — М.:Наука, 1979. — 285 с.

250. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / Тихонов И. В. // Изв. АН. Серия матем. — 2003. — 67, 2. — С. 133-166.

251. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. / Треногин В. А. // — М.: Наука, 1980. — 495 с.

252. *Фадеев Л. Д.* Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. / Фадеев Л. Д. // — Теор. и мат. физика. — 1969. — 1, 1. — С. 3-18.

253. *Фадеев М. М.* О спектральных свойствах дискретного оператора Шрёдингера с чисто мнимым финитным потенциалом. / Фадеев М. М. // — Матем. заметки. — 2009. — т.85, вып. 3. — с. 451 – 455.

254. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е.Федоров // — Алгебра и анализ. — 2000. — 12, вып.3. — С. 173-200.

255. *Федотов А. А.* Комплексный метод ВКБ адиабатических возмущений периодического оператора Шрёдингера. / Федотов А. А. // — Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — 379. — С. 142-178.

256. *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / Халанай А., Векслер Д. // — М.: Мир, 1971. — 309 с.

257. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. / Халмош П. // — М.:Мир, 1970. —– 352 с.

258. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Хартман Ф. // — М.:Мир, 1970. — 720 с.

259. *Хейл Дж. К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Хейл Дж. К. // — М.: Мир, 1984. — 421 с.

260. *Хелемский А. Я.* Функциональный анализ. / Хелемский А. Я. // — М.:МЦНМО, 2004. — 552 с.

261. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. / Хенри Д. // — М.:Мир, 1985. — 376 с.

262. *Хилле Е.* Функциональный анализ и полугруппы / Хилле Е., Филлипс Р. С. // — М.: Изд-во иностр. лит-ры. — 1962. — 832 с.

263. *Хуснуллин И. Х.* Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке. / Хуснуллин И. Х. // — ЖВМиМФ. — 2010. — 50, 4. — С. 679-698.

264. *Ху Сы Цзян.* Теория гомотопий. / Ху Сы Цзян. // — М.:Мир, 1964. — 468 с.

265. *Чайковський А. В.* Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі / Чайковський А. В. // УМЖ. — 2001. — 53, 5. — С. 688-693.

266. *Чебан Д. Н.* Ограниченные решения линейных почти периодических систем дифференциальных уравнений. / Чебан Д. Н. // — Изв. РАН, сер. матем. — 1998. — 62, 3. — С. 156-174.

267. *Чистяков В. Ф.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. / Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. // — Новосибирск: Наука. — 2003. — 317 с.

268. *Чубурин Ю. П.* Квазиуровни двухчастичного оператора Шрёдингера с возмущенным периодическим потенциалом. / Чубурин Ю. П. // — Теор. и мат. физика. — 2009. — 158, 1. — С. 115-125.

269. *Чудинович И. Ю.* Ренормированные Фейнмановские амплитуды для полей с фиксированными массами. / Чудинович И. Ю., Щербина В. А. // — Теор. и мат. физика. — 1976. — 27, 1. — С. 24-37.

270. *Чуешов И. Д.* О слабых предельных точках Фейнмановских интегральных произведений. / Чуешов И. Д. // — Функ. анализ и его приложения. — 1978. — 12, 1 . — С. 90-91.

271. *Чуйко С.М.* О решении матричных уравнений Ляпунова. / Чуйко С.М. // Вісник ХНУ імені В.Н.Каразіна, серія "Математика, прикладна математика і механіка". - 2014. - №1120. - с.85-94.

272. *Шиманов С. Н.* К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием / С. Н. Шиманов // — Прикладн. матем. и мех. – 1959. — 23, 5. – С. 836-844.

273. *Ширяев А. Н.* Вероятность. / Ширяев А. Н.// — М.:Наука, 1989. — 640 с.

274. *Эдвадс Р.Э.* Функциональный анализ. / Р.Э.Эдвадс // — М.: Мир, 1969. — 1072 с.

275. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.// — М.: Наука, 1971. — 296 с.

276. *Юдашкин А. А.* Бифуркации стационарных решений в синергетической нейронной сети и управление распознаванием образов. / Юдашкин А. А. // — Автоматика и телемеханика. — 1996. — 11. — С. 139-147.

277. *де ла Яве Р.* Введение в КАМ-теорию. / де ла Яве Р. // М.:Ин-т комп. исслед., 2003. — 176 с.

278. *Якубов С. Я.* Разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Якубов С. Я. // — В кн. "Функциональный анализ". — Баку: Илм. — 1967. — С. 187-206.

279. *Якубов С. Я.* Корректная разрешимость дифференциально-операторных уравнений на всей оси / Якубов С. Я., Балаев М. К. // Доклады АН СССР . — 1976. — 229, 3. — С. 562-565.

280. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами / Якубович В. А., Старжинский В. М.. – М.: Наука, 1972. – 718 с.

281. *Acosta-Humanez P. B.* Darboux integrals for SchrÖdinger planar vector fields via Darboux transformations. / Acosta-Humanez P. B., Pantazi Chara. // — SIGMA. — 2012. — .8 (043). — 26 pages.

282. *Afraimovich V.* Nonlinear dynamics of emotion-cognition interaction: when emotion does not destroy cognition ? / Afraimovich V., Young T., Muezzinoglu M. K., Rabinovich M. I. // — Bull. Math. Biol. — 2011. — 73. — P. 266-284.

283. *Akhmerov R. R.* Exponential dichotomy and stability of neutral type equations. / Akhmerov R. R., Kurbatov V. G. // — Journ. of Diff. Eq. — 1988. — 76. — P. 1-25.

284. *Alexander J. C.* The homotopy continuation method: numerically implementable topological procedures. / Alexander J. C., Yorke James A. // — Transaction of the AMS. — 1978. — 242, August. — P. 271-284.

285. *Arlotti L.* A new characterization of B-bounded semigroups with applications to implicit evolution equations / Arlotti L. // — Abstr. and Appl. Analysis. — 2000. — 5:4. — P. 227-244.

286. *Asplund E.* A non-closed relative spectrum. / Asplund E. // — Arkiv. für Mat., 3 (1958). — P. 425-427.

287. *Atiyah M. F.* K-theory. / Atiyah M. F. // — New-York, Amsterdam. — 1967. — 220 p.

288. *Banasiak J.* B-bounded semigroups and implicit evolution equations. / Banasiak J. // — Abstr. and Appl. Analysis. — 2000. — 5:1. — P. 13-32.

289. *Banasiak J.* Remarks on the solvability of the inhomogeneous abstract Cauchy problem for linear and semilinear evolution equations. / Banasiak J. // — Quaest. Math. — 1999. — 22, 1. — P. 83-92.

290. *Barreira L.* Stable manifolds for nonautonomous equations without exponential dichotomy. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2006. — 221. — P. 58-90.

291. *Barreira L.* Center manifolds for infinite delay. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 247. — P. 1297-1310.

292. *Barreira L.* Robustness via Lyapunov functions. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 2891-2907.

293. *Barreira L.* Quadratic Lyapunov functions and nonuniform exponential dichotomies. / Barreira L.// — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 1235-1263.

294. *Barreira L.* Lyapunov sequences for exponential dichotomies. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 183-215.

295. *Barreira L.* Robustness of nonuniform exponential dichotomies in Banach spaces. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2008. — 244. — P. 2407-2447.

296. *Barreira L.* Smooth center manifolds for nonuniformly partially hyperbolic trajectories. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2007. — 237. — P. 307-342.

297. *Barreira L.* Stability in delay difference equations with nonuniform exponential behavior. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2007. — 238. — P. 449-470.

298. *Barreira L.* Nonuniform behavior and robustness. / Barreira L., Silva C., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 3579-3608.

299. *Barreira L.* Smooth robustness of parametrized perturbations of exponential dichotomies. / Barreira L., Valls C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2010. — 249. — P. 2021-2043.

300. *Battelli F.* Exponential dichotomies, heteroclinic orbits, and Melnikov functions. / Battelli F., Lazzari C. // — Journ. of Diff. Eq. — 1990. — 86. — P. 342-366.

301. *Battelli F.* Bounded solutions to singularly perturbed systems of O.D.E./ Battelli F. // — 1992. — 100. — P. 49-81.

302. *Battelli F.* Transverse intersection of invariant manifolds in singular systems. / Battelli F., Palmer K. // — Journ. of Diff. Eq. — 2001. — 177. — P. 77-120.

303. *Batty Charles J.K.* The non-analytic growth bound of a C_0 - semigroup and inhomogeneous Cauchy problems. / Batty Charles J.K., Srivastava Sachi. // — Journ. of Diff. Eq. — 2003. — 194. — P. 300-327.

304. *Berezansky L.* On exponential dichotomy for linear difference equations with bounded and unbounded delay. / Berezansky L., Braverman E. // — Proceedings of the conference on differential and difference equations and applications. — 2006. — P. 169-178.

305. *Berger A.* A definition of spectrum for differential equations on finite time. / Berger A., Doan T. S., Siegmund S. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 1098-1118.

306. *Berger M. S.* On nonlinear fredholm operator equations. / Berger M. S., Podolak E. // — Bulletin of the AMS. — 1974. — 80, 5. — P. 861-864.

307. *Biletskyi B. A.* Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory. / Biletskyi B. A., Boichuk A. A., Pokutnyi A. A. // — Abstract and Applied Analysis, 2011, Article ID 928587, 12 pages, http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587/

308. *Boichuk A.* Boundary-Value Problems for Delay Differential Systems. / Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. // — Advances in Difference equations. Vol. 2010 (2010), Article ID 593834. – 20 p.

309. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line. / Boichuk A. A. // — Nonlinear Oscillations. — 1999. — 2, 1. — P. 3-10.

310. *Boichuk A.A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. / Boichuk A.A. // Differential Equations. - 2001. - Vol.37, №4. - P. 464–471.

311. *Boichuk O.A.* Criterion of the solvability of matrix Lyapunov type equations. / Boichuk O. A. // Ukrainian math. journ. - 1998. - v.50, №8. - p. 1021–1026.

312. *Boichuk A. A.* Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space. / Boichuk A. A., Pokunij A. A. // — Tatra Mountains Mathematical Publications — 2007. — 38 — P. 29-41.

313. *Boichuk A. A.* Dichotomy and boundary value problems on the whole line. / Boichuk A. A., Pokutnyi O. A. // — Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12-15 June 2012, Athens Greece. — P. 81-89.

314. *Boichuk A. A.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. / Boichuk A. A., Samoilenko A. M. // — VSP, Utrecht–Boston. — 2004. — 317 p.

315. *Boichuk A. A.* Singular Fredholm boundary value problems. / Boichuk A. A., Shegda L. M. // — Nelin. Koliv. — 2007. — 10, 3. — P. 303-312.

316. *Boichuk A. A.* Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems. / Boichuk A. A., Shegda L. M. // — Differential equations. — 2011. — 47, 4. — P. 459-467.

317. *Boyadzhiev K. N.* Integral represantation of functions on sectors, functional calculus and norm estimates / Boyadzhiev K. N.// — Collect. Math. — 2002. — 53, 3. — P.287-302.

318. *Boyarintsev Yu. E.* Differential Algebraic Equations: Methods for Numerical Solution and Study. / Boyarintsev Yu. E., Chistyakov V. F. // — M.:Nauka, Novosibirsk, 1998. (in Russian). — 224 p.

319. *Brenan K. E.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. / Brenan K. E., Campbell S. L., and Petzold L. R.// SIAM, Philadelphia, 1996. — 263 p.

320. *Brezis H.* A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis. / Brezis H., Browder F. E. // Advances in mathematics, 1976. — 21. — P. 355-364.

321. *Broer H.* Resonance tongues in Hill's equations: a geometric approach. / Broer H. // — Journ. of Diff. Eq. — 2000. — 166. — P. 290-327.

322. *Broer H.* Resonance tongues and instability pockets in the quasiperiodic Hill-Schrodinger equation. / Broer H. // — 2003. — 241. — P. 467-503.

323. *Broer H.* Geometrical aspects of stability theory for Hill's equations. / Broer H., Levi M. // — Arch. Rat. Mech. Anal. — 1995. — 131. — P. 225-240.

324. *Caliceti E.* $\mathcal{PT}$ symmetric Schrӧdinger operators: reality of the perturbed eigenvalues. / Caliceti E., Cannata F., Graffi S. // — SIGMA. — 2010. — 6 (009). — 8 pages.

325. *Campbell S. L.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. / Campbell S. L., Petzold L. R. // — SIAM J. Alg. Discrete Methods. — 1983, 4. — P. 517-521.

326. *Campbell S. L.* Continuity properties of the Drazin Pseudoinverse. / Campbell S. L., Meyer C. D. // — Linear algebra and its applications. — 1975. — 10. — P. 77-83.

327. *Campbell S. L.* Generalized inverses of linear transformations. / Campbell S. L., Meyer C. D. // — SIAM, Philadelphia. — 2009. — 272 p.

328. *Chang K. W.* Almost periodic solutions of singularly perturbed systems of differential equations. / Chang K. W. // — Journal of Diff. Eq. — 1968. — 4. — P. 300-307.

329. *Chow Shui-Nee.* A shadowing lemma with applications to semilinear parabolic equations. / Chow Shui-Nee., Lin Xiao-Biao., Palmer K. // — SIAM J. Math. Anal. — 1989. — 20, 3. — P. 547-557.

330. *Chow Shui-Nee.* On a conjecture of K. Cooke. / Chow Shui-Nee. // — Journal of Diff. Eq. — 1973. — 14. — P. 307-325.

331. *Chicone C.* Evolution semigroup in dynamical systems and differential equations. / C.Chicone, L.Latushkin // — *Mathematical surveys monography, Providence, RI.* — 1999. — 70. — 372 p.

332. *Chicone C.* Spectral theory for linearizations of dynamical systems. / Chicone C., Swanson R. C. // — Journ. of Diff. Eq. — 1981. — 40. — P. 155-167.

333. *Chow Shui-Nee.* Smooth invariant foliations in infinite dimensional spaces. / Chow Shui-Nee, Lin Xiao-Biao. // — Journ. of Diff. Eq. — 1991. — 94. — P. 266-291.

334. *Chow S.-N.* Unbounded perturbation of the exponential dichotomy for evolution equations. / Chow S.-N., Leiva H. // — Journ. of Diff. Eq. — 1996. — 129. — P. 509-531.

335. *Chow S.-N.* Existence and roughness of the exponential dichotomy for skew-product semiflow in Banach spaces. / Chow S.-N., Leiva H. // — Journ. of Diff. Eq. — 1995. — 120. — P. 429-477.

336. *Chueshov I. D.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. / Chueshov I. D.//— K.: Acta, 2002. — 416 p.

337. *Colonius F.* On nonautonomous H^∞ control with infinite horizon. /Colonius F., Fabbri R., Johnson R. // — Journ. of Diff. Eq. — 2006. — 220. — P. 46-67.

338. *Consolini L.* A sufficient condition for dichotomy based on a suitable invariance property. / Consolini L., Tosques M. // — Journ. of Diff. Eq. — 2011. — 251. — P. 1475-1488.

339. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility. / Coppel W. A. // — Journal of differential equations. — 1967. — 3. — P. 500-521.

340. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility (II). / Coppel W. A. // — Journal of differential equations. — 1968. — 4. — P. 386-398.

341. *Coppel W. A.* Dichotomies and Lyapunov functions. / Coppel W. A. // — Journ. of Diff. Eq. — 1984. — 52. — P. 58-65.

342. *Corduneanu C.* Almost periodic oscillations and waves. / Corduneanu C. // Springer Science+Business Media. — 2009. — 313 p.

343. *Crandall M. G.* Remarks on generators of analytic semigroups. / Crandall M. G., Pazy A., Tartar L.// Isr.J.Math. — 1979. — 32, 4. — P. 363-374.

344. *Dai Xiongping.* Hyperbolicity and integral expression of the Lyapunov exponents for linear cocycles. / Dai Xiongping. // — Journ. of Diff. Eq. — 2007. — 242. — P. 121-170.

345. *Deutch E.* Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation. / E.Deutch. // Linear algebra and its applications, 1971. — 4. — P. 313-322.

346. *Diagana Toka.* Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces. / Diagana Toka. // — Springer Switzerland. — 2013. — 312 p.

347. *Diblik J.* Controllability of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay. / Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. // — SIAM J.Control Optim. — 2008. — 47, 3. — P. 1140-1149.

348. *Dieci L.* Exponential dichotomy on the real line : SVD and QR methods. / Dieci L., Elia C., Vleck E. // — Journ. of Diff. Eq. — 2010. — 248. — P. 287-308.

349. *Dieci L.* The singular value decomposition to approximate spectra of dynamical systems. Theoretical aspects. / Dieci L., Elia. C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2006. — 230. — P. 502-531.

350. *Durhuus B.* The scattering problem for a noncommutative nonlinear Schrödinger equation. / Durhuus B., Gayral V. // — SIGMA. — 2010. — 6 (046). — 17 pages.

351. *Eidelman Y. S.* On periodic solutions of abstract differential equations / Eidelman Y. S., Tikhonov I. V.// Abs. Appl. Anal. — 2001. — 6,8. — P. 489-499.

352. *Engel K.-J.* One-parameter semigroups for linear evoluition equations. / Engel K.-J., Nagel R. // — New York: Springer-Verlag. — 2000. — 586 p.

353. *Favini A.* Space and time regularity for degenerate evolution equations. / Favini A., Yagi A. // — J.Math.Soc.Japan. — 1992. — 44, 2. — P. 331-350.

354. *Furi M.* Periodic solutions of some nonlinear differential equations of higher order. / Furi M. , Mawhin J. // — Cas. pest. mat. — 1975. — 100. — P. 276-283.

355. *Glasser M. L.* Melnikov's function for two-dimensional mappings. / Glasser M. L., Papageorgiou V. G., Bountis T. C. // — SIAM J. Appl. Math. — 1989. — 49, 3. — P. 692-703.

356. *Gohberg I.* Finite section method for linear ordinary differential equations. / Gohberg I., Kaashoek M. A., Schagen F. // — Journ. of Diff. Eq. — 2000. — 163. — P. 312-334.

357. *Goldstein J. A.* Semigroups of Linear Operators and Applications / Goldstein J. A. // — Oxford University Press. — 1985. — 245 p.

358. *Gruendler J.* The existence of transverse homoclinic solutions for higher order equations. / Gruendler J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1996. — v. 130. — p. 307 – 320.

359. *Gühring G.* A characteristic equation for Non-autonomous partial functional differential equations. /Gühring G., Räbiger F., Schnaubelt R. // — Journ. of Diff. Eq. — 2002. — 181. — P. 439-462.

360. *Guckenheimer J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. / Guckenheimer J., Holmes P. // — Springer-Verlag, New York. — 1983. — 559 p.

361. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser. / Hamilton R. S. // — Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — 7(1) — P. 65-222.

362. *Hochstadt H.* Instability intervals of Hill's equation. / Hochstadt H. // — Comm. Pure Appl. Math. — 1964. — 17. — P. 251-255.

363. *Huy Nguyen Thieu.* Invariant manifolds of admissible classes for semi-linear evolution equations. / Huy Nguyen Thieu. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 1820-1844.

364. *Johnson R.* Cantor spectrum for the quasi-periodic Schrödinger equation. /Johnson R. // — Journ. of Diff. Eq. — 1991. — 91. — P. 88-110.

365. *Johnson R.* The recurrent Hill's equation. / Johnson R. // — Journ. of Diff. Eq. — 1982. — 46. — P. 165-193.

366. *Johnson R.* Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. / Johnson R. // — Journ. of Diff. Eq. — 1986. — 61. — P. 54-78.

367. *Johnson R.* Exponential dichotomy and rotation number for linear Hamiltonian systems. / Johnson R., Mahesh Neruvkar. // — Journ. of Diff. Eq. — 1994. — 108. — P. 201-216.

368. *Johnson R.* Hopf bifurcation from non-periodic solutions of differential equations, II. / Johnson R., Yingfei Yi. // — Journ. of Diff. Eq. — 1994. — 107. — P. 310-340.

369. *Nguyen Thieu Huy.* Exponential dichotomy of difference equations in l_p - phase spaces on the half-line. / Nguyen Thieu Huy, Vu Thi Ngog. // — Advances in diff. equations. — 2006. — article ID58453. — P. 1-14.

370. *Weinstein M. I.* Asymptotic behavior of stability regions for Hill's equation. / Weinstein M. I., Keller J. B. // — SIAM, J.Appl.Math. — 1987. — 47, 5. — P. 941-958.

371. *Weinstein M. I.* Hill's equation with a large potentials. / Weinstein M. I., Keller J. B. // — SIAM, J.Appl. Math. — 1985. — 45. — P. 954-958.

372. *Khusainov D. Ya.* Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. / Khusainov D. Ya.,Shuklin G. V. // — Stud.Univ. Zilina Math.Ser. — 2003. — 17. — P. 101-108.

373. *Kovalchuk V.* Hamiltonian systems inspired by the Schrödinger equation./ Kovalchuk V., Slawianowski J. J. // — SIGMA. — 2008. — 4 (046). — 9 pages.

374. *Kundu Anjan.* Integrable hierarchy of higher nonlinear Schrödinger type equations./ Kundu Anjan. // — SIGMA. — 2006. — 2 (078). — 12 pages.

375. *Kunkel P.* Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution. / Kunkel P., Mehrmann V. // — European Mathematical Society. — 2006. — 192 p.

376. *Kuzhel A.* Characteristic functions and models of nonself-adjoint operators. / Kuzhel A. // — Kluwer. — 1996. — 286 p.

377. *Laederich S.* Boundary value problems for partial differential equations with exponential dichotomies. / Laederich S. // — Journ. of Diff. Eq. — 1992. — 100. — P. 1-21.

378. *Lan N. T.* On the mild solutions of higher-order differential equations in Banach spaces / Lan N. T. // Abstr. and Appl.Anal. — 2003. — 15. — P. 865-880.

379. *Latushkin Yu.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients. / Latushkin Yu., Tomilov Yu. // J.Differential equations. — 2005. — 208. — P. 388-429.

380. *Latushkin Yu.* Evolutionary semigroups and dichotomy of linear skew-product flows on locally compact spaces with Banach spaces. / Latushkin Yu., Montgomerri Smith., Randolph T. // — Journ. of Diff. Eq. — 1996. — 125. — P. 73-116.

381. *Latushkin Yu.* The dichotomy theorem for evolution bi-families. / Latushkin Yu., Pogan A. // — Journ. of Diff. Eq. — 2008. — 245. — P. 2267-2306.

382. *Latushkin Yu.* Evolution semigroups, translation algebras, and exponential dichotomy of cocycles. / Latushkin Yu., Schnaubelt R. // — Journ. of Diff. Eq. — 1999. — 159. — P. 321-369.

383. *deLaubenfels R.* Spectral conditions guaranteeing a nontrivial solution of the abstract Cauchy problem / deLaubenfels R., Wang S. // Proc. of Amer. Math. Soc. — 1998. — 126, 11. — P. 3271-3278.

384. *deLaubenfels R.* Powers of generators of holomorphic semigroups / deLaubenfels R. // Proc. of Amer.Math.Soc. — 1987. — 99, 1. — P. 105-108.

385. *Lazareva A.B.* Solution of matrix Lurier, Riccati and Lyapunov equations for digital systems./ Lazareva A.B., Pakshin P.V. // Automat. and Telemekh., 1986, No.12, 17–22.

386. *Levy D. M.* Instability intervals of Hill's equation. / Levy D. M., Keller J. B. // — Comm. Pure Appl. Math. — 1963. — 16. — P. 469-479.

387. *Lin Xiao-Biao.* Heteroclinic bifurcation and singularly perturbed boundary value problems. / Lin Xiao-Biao. // — Journ. of Diff. Eq. — 1990. — 84. — P. 319-382.

388. *Lin Xiao-Biao.* Exponential dichotomy and homoclinic orbits in functional differential equations. / Lin Xiao-Biao. // — Journ. of Diff. Eq. — 1986. — 61. — P. 54-78.

389. *Lin Xiao-Biao.* Exponential dichotomies in intermediate spaces with applications to a diffusively perturbed predator-Prey model. / Lin Xiao-Biao. // — Journ. of Diff. Eq. — 1994. — 100. — P. 36-63.

390. *Liao A. P.* Best approximate solution of matrix equation $AXB + CYD = E^*$. / Liao A. P., Bai Z. Z., Lei Yu. // — SIAM J.Matrix Anal.Appl. — 2005. — 27, 3. — P. 675-688.

391. *Lin Xiao-Biao.* Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations. / Lin Xiao-Biao. // — Journ. of Diff. Eq. — 1986. — 63. — P. 227-254.

392. *Lindenstrauss J.* Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. / Lindenstrauss J., Pelczynski A. //— *Studia Mathematica.* — 1968. — vol.29. — P. 275-325.

393. *Lojasiewich S.* An inverse function theorem in Frech*ét* spaces. / Lojasiewich S., jr. and Zehnder E. // Journal of functional analysis. — 1979. — 33. — P. 165-174.

394. *Lyashko S. I.* On a theorem of M.A.Krasnoselski / Lyashko S. I., Semenov V. V. //Cybern. and System Anal. — 2010. — **46**, 6. — P. 1021-1025.

395. *Luzin N. N.* Study of a matrix system in the theory of differential equations. / Luzin N. N. // — Avtom. Telemekh. — 1940. — 5. — P. 4-66.

396. *Maniar L.* The Fredholm alternative for parabolic evolution equations with inhomogeneous boundary conditions. / Maniar L., Schnaubelt R. // — Journ. of Diff. Eq. — 2007. — 235. — P. 308-339.

397. *Markin M. V.* A characterization of the generators of analytic C_0-semigroups in the class of scalar type spectral operators / Markin M. V. // — Abstr. and Appl.Anal. — 2004. — 12. — P. 1007-1018.

398. *Markin M. V.* On a characterization of generators of analytic semigroups in the class of normal operators / M.V.Markin // — Methods Funct.Anal. Topology. — 1996. — 2, 2. — P. 86-93.

399. *Martin R. H.* Separation of solutions to differential equations. / Martin R. H. // — Journal of diff. Eq. — 1973. — 14. — P. 213-234.

400. *Mawhin J.* Topological degree methods in nonlinear boundary value problems / Mawhin J. // Regional conference series in mathematics, 40. — Providence, 1979. – 122 p.

401. *McKean H. P.* The spectrum of Hill's equation. / McKean H. P., P. van Moerbeke. // — Invent. Math. — 1975. — 30. — P. 217-244.

402. *McKean H. P.* Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. / McKean H. P., Trubowitz E. // — Comm. Pure Appl. Math. — 1976. — 29. — P. 14-226.

403. *Melnikova I. V.* Regularised solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense / Melnikova I. V. // Integral Transfroms Spec. Funct. — 2006. — 17, 2-3.— P. 185-191.

404. *Moore E. H.* On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) / Moore E. H. // Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — 26. — P. 394-395.

405. *Naito Toshiki.* Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations. / Naito Toshiki, Nguen van Minh. // — Journ. of Diff. Eq. — 1999. — 152. — P. 358-376.

406. *Nakayama Yu.* Scrödinger-like dilaton gravity. / Nakayama Yu. // — SIGMA. — 2011. — 7 (014). — 12 pages.

407. *Al-Nayef A.* Bi-shadowing and delay equations. / Al-Nayef A., Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A. // — Dynamic and stability of systems. — 2010. — 11:2. — P. 121-134.

408. *Nash J.* The imbedding problem for Riemannian manifolds. / Nash J. // — Ann. Math., 63, 1956. — P. 20-63.

409. *Nashed M. Z.* A unified approach to generalized inverses of linear operators: I. Algebraic, topological and projectional properties. / Nashed M. Z., Votruba G. F. // — Bulletin of the AMS. — 1974. — 80, 5. — P. 825-830.

410. *Nashed M. Z.* A unified approach to generalized inverses of linear operators: II. Extremal and proximal properties./ Nashed M. Z., Votruba G. F. // — Bulletin of the AMS. — 1974. — 80, 5. — P. 831-835.

411. *Neubrander F.* Integrated semigroups and their applications to the Abstract Cauchy problem / Neubrander F. // — Pacific J. of Math. — 1988. — 135, 1. — P. 111-155.

412. *von Neumann J.* On regular rings. / von Neumann J. // — Proc. Amer. Math. Soc. — 1936. — 22. — P. 707-713.

413. *Nikitin A. G.* Group classification of nonlinear SchrÖdinger equations. / Nikitin A. G., Popovych R. O. // — P. 1-11.

414. *Moser J.* A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. / Moser J. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47, 1961. — P. 1824-1831.

415. *Oharu Shinnosuke.* Semigroups of linear operators in a Banach space. / Oharu Shinnosuke. // — Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1971/72. — 7. — P. 205-260.

416. *Ortega R.* Resonance and non-resonance in a problem of boundedness / Ortega R., Tineo A. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — 124, 7. — P. 2089-2096.

417. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. / Palmer K. J. // — *J.Diff. Eq.* — 1984. — 55. — P. 225-256.

418. *Palmer K. J.* An ordering for linear differential systems and a characterization od exponential separation in terms of reducibility. / Palmer K. J. // — Journ. of diff. eq. — 1984. — 53. — P. 67-97.

419. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. / Palmer K. J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1984. — 55. — p. 225 – 256.

420. *Palmer K. J.* The structurally stable linear systems on the half-line are those with exponential dichotomies. / Palmer K. J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1979. — 33. — P. 16-25.

421. *Palmer K. J.* Exponential separation, exponential dichotomy and spectral theory for linear systems of ordinary differential equations. / Palmer K. J. // — Journ. of Diff.Eq. — 1982. — 46. — P. 324-345.

422. *Palmer K. J.* An ordering for linear differential systems and a characterization of exponential separation in terms of reducibility. / Palmer K. J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1984. — 53. — P. 67-97.

423. *Palmer K. J.* Transversal heteroclinic points and Cherry's example of a nonintegrable Hamiltonian system. / Palmer K. J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1986. — 65. — P. 321-360.

424. *Papaschinopoulos G.* Criteria for an exponential dichotomy of difference equations. / Papaschinopoulos G., Schinas J. // — Czechoslovak Math. Journ. — 1985. — 35. — 2. — P. 295-299.

425. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / Pazy A. // — New York Springer-Verlag. — 1983. — 279 p.

426. *Penrose R. A.* Generalized Inverse for Matrices / Penrose R. A. // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1955. — vol. 51. — P. 406 – 413.

427. *Penrose R.A.* On best approximate solutions of linear matrix equations. / Penrose R.A. and Todd J. A. // — Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1956. — 52. — P. 17-19 doi:10.1017/ S0305004100030929

428. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. / Perron O. // — Math.Z. — 1930. — 32. — P. 138-152.

429. *Peterhof D.* Exponential dichotomies for solitary-wave solutions of semilinear elliptic equations on infinite cylinders. /Peterhof D., Sandstade B. // — Journ. of Diff. Eq. — 1997. — 140. — P. 266-308.

430. *Pinasco J. P.* The distribution of nonprincipal eigenvalues of singular second-order linear ordinary differential equations. / Pinasco J. P. // — Intern. journ. of Math. and Math. Sciences. — 2006. — Article ID29895. — P. 1-7.

431. *Pinasco J. P.* Lower bounds for eigenvalues on the one-dimensional p-Laplacian. / Pinasco J. P. // — Abstract and applied mathematics. — 2004. — 2(2004). — P. 147-153.

432. *Pinto M.* Dichotomy and existence of periodic solutions of quasilinear functional differential equations. / Pinto M. // — Nonlinear analysis. — 2010. — 72. — P. 1227-1234.

433. *Pogan A.* Schäffer spaces and uniform exponential stability of linear skew-product semiflows. / Pogan A., Preda P., Preda C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2005. — 212. — P. 191-207.

434. *Pogan A.* Schäffer spaces and exponential dichotomy for evolutionary processes. /Pogan A., Preda P., Preda C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2006. — 230. — P. 378-391.

435. *Pötzsche Christian.* Persistence and imperfection of nonautonomous bifurcation patterns. / Pötzsche Christian. // — Journ. of Diff. Eq. — 2011. — 250. — P. 3874-3906.

436. *Pokutnyi A. A.* Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in Banach space with unbounded linear part. / Pokutnyi A. A. // — Diff. Eq. — 2012. — 48, 6. — P. 803-813.

437. *Popescu L. H.* A topological classification of linear differential equations on Banach spaces. / Popescu L. H. // — Journ. of Diff. Eq. — 2004. — 203. — P. 28-37.

438. *Prada C.* $(L^p(\mathbb{R}_+, X),\ L^q(\mathbb{R}_+, X))$ – admissibility and exponential dichotomies of cocycles. / Prada C. // — Journ. of Diff. Eq. — 2010. — 249. — P. 578-598.

439. *Da Prato G.* Differential operators with non dense domain / Da Prato G., Sinestrari E. // Annali della Scuola Normale Superiora Di Pisa. — 1987. — 14. — P. 285-344.

440. *Prevatt T. W.* Application of exponential dichotomies to asymptotic integration and the spectral theory of ordinary differential operators. / Prevatt T. W. // — Journ. of Diff. Eq. — 1975. — 17. — P. 444-460.

441. *V.S.Pron'kin.* On quasiperiodic solutions of the matrix Riccati equation. / Pron'kin V.S. // Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics(1994),43(3):455-470

442. *Puig J.* Cantor spectrum for the almost Mathieu operator. / Puig J. // — Comm. Math. Phys. — 2004. — 244. — P. 297-309.

443. *Quesne C.* Quadratic algebra approach to an exactly solvable position-dependent mass Schrödinger equation in two dimensions. / Quesne C. //— SIGMA. — 2007. — 3 (067). — 14 p.

444. *Quesne C.* Point canonical transformation versus deformed shape invariance for position-dependent mass Schrödinger equations. / Quesne C. // — SIGMA. — 2009. — 5 (046). — 17 p.

445. *Rao C. R.* Generalized inverse of matrices and its applications. / Rao C. R., Mitra S. K. // — New York: Wiley. — 1971. — 240 p.

446. *Ramm A. G.* A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators. / Ramm A. G. // — *Amer. Math. Monthly.* — 2001. — 108, 9. — P. 855-860.

447. *Rasmussen M.* Dichotomy spectra and Morse decompositions of linear non-autonomous differential equations. / Rasmussen M. // — Journ. of Diff. Eq. — 2009. — 246. — P. 2242-2263.

448. *Roberts M.* Singularity theory and its applications. / Roberts M., Stewart I. // — Springer - Verlag Warwick 1989, part II: Singularities, Bifurcations and Dynamics. — 322 p.

449. *Rodrigues H. M.* Evolution Equations: Dichotomies and the Fredholm Alternative for Bounded Solutions. / Rodrigues H. M, Ruas-Filho J. G. // — *J.Diff. Eq.* — 1995. — 119. — P. 263-283.

450. *Rodrigues H. M.* On the relationship between exponential dichotomies and the Fredholm alternative. / Rodrigues H. M., Silveria M. // — Journ. of Diff. Eq. — 1988. — 73. — P. 78-81.

451. *Ruan S.* Exponential dichotomies, the Fredholm alternative, and transverse homoclinic orbits in partial functional differential equations. / Ruan S., Zhang W. // — Journ. of dynamics and differential equations. — 2005. — 17, 4. — P. 759-777.

452. *Sacker R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, II. / Sacker R., Sell G. // — Journ. of Diff. Eq. — 1976. — v.22. — p. 478 – 496.

453. *Sacker R. J.* Existence dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, IV. / Sacker R. J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1978. — 27. — P. 106-137.

454. *Sacker R. J.* The splitting index for linear differential systems. / Sacker R. J. // — Journ. of Diff. Eq. — 1979. — 33. — P. 368-405.

455. *Sacker R. J.* Dichotomies for Linear Evolutionary Equaitons in Banach Spaces. / Sacker R. J., Sell G. R. // — Journal of Diff. Eq. — 1994. — 113. — P. 17-67.

456. *Sakamoto Kunimochi.* Estimates on the strength of exponential dichotomies and application to integral manifolds. / Sakamoto Kunimochi. // — Journ. of Diff. Eq. — 1994. — 107. — P. 259-274.

457. *Samoilenko A. M.* On the reducibility of a singular linear system to central canonical form. / Samoilenko A. M., Yakovets V. P. // — Dokl. Akad. Nauk Ukrainy. — 1993. — 4. — P. 10-15.

458. *Samoilenko A.* Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. / Samoilenko A., Petrishin R. // — Springer Netherlands. — 2004. — 317 p.

459. *Schäffer J. J.* Linear differential equations with delays : Admissibility and conditional exponential stability, II. / Schäffer J. J. // — Journal of Diff. Eq. — 1971. — 10. — P. 471-484.

460. *Schwabik S.* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints / Schwabik S., Tvrdy M., Veivoda O. // — Praha, Academia. – 1979. — 245 p.

461. *Shvydkoy R.* Cocyles and Mane sequences with an application to ideal fluids. / Shvydkoy R. // — Journ. of Diff. Eq. — 2006. — 229. — P. 49-62.

462. *Sidorov N.A.* Continuous and generalized solutions of singular partial differential equations. / Sidorov N.A., Falaleev M.V. // — Lobachevskii journal of mathematics. — 2005. — 20. — P. 31-45.

463. *Siegmund S.* Normal forms for nonautonomous differential equations. / Siegmund S. // — Journ. of Diff. Eq. — 2002. — 178. — P. 541-573.

464. *Sinestrari E.* Classical solutions of parabolic equations in Holder spaces./ Sinestrari E. // Atti Accad. Naz. Lincei, VIII Ser., Rend., Cl.Sci.Fis.Mat.Nat. — 1983. — 75. — P. 289-297.

465. *Traple Janusz.* Weak almost periodic solutions of differential equations. / Traple Janusz. // — Journ. of Diff. Eq. — 1982. — 45. — P. 199-206.

466. *Veivoda O.* On Perturbed Nonlinear Boundary Value Problems / Veivoda O. // — Chec. Math. Journ. — 1961. — 11. — P. 323-364.

467. *Wexler D.* On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems / Wexler D. // — Ann. Vft. Mat. pura et Appl. — 1968. – V. 80. — P. 123-136.

468. *Vinograd R. E.* Exact bounds for exponential dichotomy roughness I. Strong dichotomy. / Vinograd R. E. // — Journ. of Diff. Eq. — 1988. — 71. — P. 63-71.

469. *Vinograd R.* Exact bounds for exponential dichotomy roughness II. An example of attainability. / Vinograd R. // — Journ. of Diff. Eq. — 1991. — 90. — P. 203-210.

470. *Vinograd R. E.* Exact bounds for exponential dichotomy roughness III. Semistrong dichotomy. / Vinograd R. E. // — Journ. of Diff. Eq. — 1991. — 91. — P. 245-267.

471. *Wyss Christian.* Perturbation theory for Hamiltonian operator matrices and Riccati equations. Dissertation, Bern. — 2008. - 164 p.

472. *Yagi A.* Abstract parabolic equations and their applications / Yagi A. // — Berlin: Springer, 2010. — 581 p.

473. *Yingfei Yi.* Asymptotic almost periodicity of scalar parabolic equations with almost periodic time dependence. / Yingfei Yi, Wenxian Shen. // — Journ. of Diff. Eq. — 1995. — 122. — P. 373-397.

474. *Wu Jiongyu.* Homoclinic orbits on invariant manifolds of a functional differential equation. / Wu Jiongyu, Zhang Weinan. // — Journ. of Diff. Eq. — 2000. — 165. — P. 414-429.

475. *Yanguang (Charles) Li.* Chaos and shadowing lemma for autonomous systems of infinite dimensions. / Yanguang (Charles) Li. // — Journal of dynamics and differential equations. — 2003. — 15, 4 — P. 699-729.

476. *Yingfei Yi.* Stability of integral manifold and orbital attraction of quasi-periodic motion. / Yingfei Yi. // — Journ. of Diff. Eq. — 1993. — 103. — P. 278-322.

477. *Yingfei Yi.* A generalized integral manifold theorem. / Yingfei Yi. // — Journ. of Diff. Eq. — 1993. — 102. — P. 153-187.

478. *Zehnder E.* An implicit function theorem for small divisor problems. / Zehnder E. // Bulletin of the AMS. — 1974. — 80, 1. — P. 174-179.