НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Стефанчук Марія Володимирівна

УДК 514.17+517.55

УЗАГАЛЬНЕНО ОПУКЛІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗЕЛІНСЬКИЙ Юрій Борисович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу комплексного аналізу
і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет технологій і дизайну,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ГЕРУС Олег Федорович,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться "14" березня 2017 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "07" лютого 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А. С. РОМАНЮК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поняття опуклості є загальновідомим та відіграє важливу роль у різних областях фундаментальної і прикладної математики. Опуклість — основний об'єкт дослідження спеціального розділу математики, який отримав назву опуклого аналізу.

Основи опуклого аналізу були закладені у кінці XIX століття Г. Мінковським, який є засновником опуклої геометрії, тобто геометрії опуклих множин у скінченновимірному просторі. Також у створення опуклої геометрії великий внесок здійснили Я. Штейнер, К. Каратеодорі, Е. Геллі, В. Бляшке, Т. Боннезен, В. Фенхель та інші вчені. Багато понять та концепцій опуклої геометрії, такі, як опорна функція, функція Мінковського, поляра, крайня точка, віддільність, стали базою для створення на початку XX століття функціонального аналізу. З роботи Фенхеля "Опуклі конуси, опуклі множини та опуклі функції" розпочався новий етап опуклого аналізу, в якому детально досліджувалися властивості опуклих функціоналів. Формування опуклого аналізу як самостійного розділу математики розпочалося у 50-60-х роках XX століття.

Поняття та методи опуклого аналізу широко застосовуються у різних областях математики — опуклому програмуванні та варіаційному численні, теорії функцій, комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці та математичній статистиці. Крім цього, опуклість відіграє важливу роль при розв'язуванні екстремальних задач у сучасній математичній економіці.

Поняття лінійно опуклої множини у двовимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^2$ вперше було введене у 1935 році Г. Беенке та Е. Пешлем і почало широко використовуватися завдяки роботам А. Мартіно і Л. Айзенберга з 60-х років XX століття.

Лінійно опуклі множини досліджувалися у роботах А. Мартіно, Л. Айзенберга, Б. Зінов'єва, О. Южакова, В. Кривоколеска, В. Трутнєва, С. Знаменського, Ю. Зелінського, Х. Кісельмана, Л. Хермандера, М. Андерсона, М. Пассаре, Р. Сігурдсона, В. Мельник, М. Ткачука.

Лінійна опуклість множини є узагальненням поняття опуклості. Тут узагальнюється зовнішня властивість опуклих множин, яка полягає в існуванні гіперплощини, що не перетинає вихідну множину. Хоча у термінах лінійно опуклих множин було розв'язано ряд цікавих задач комплексного аналізу, таке узагальнення є досить великим розширенням класу опуклих множин. Тому для отримання змістовних результатів обмежились більш вузьким (на областях та компактах) класом сильно лінійно опуклих множин. В означенні сильно лінійно опуклих множин узагальнюється внутрішня властивість опуклості, а саме зв'язність перетину множини з дійсною прямою. Найбільш яскраво властивості таких множин проявляються при описі просторів лінійних неперервних функціоналів $H'(E)$ на просторі функцій $H(E)$, голоморфних в області чи на компакті $E \subset \mathbb{C}^n$.

Поняття m-опуклої множини у просторі $\mathbb{R}^n$, $0 \leq m < n$, дозволяє з єдиної точки зору подивитися на деякі узагальнення опуклості, у тому числі і на лінійну опуклість. В означенні m-опуклої множини використовується узагальнення поняття опуклої множини завдяки існуванню m-площини, яка не перетинає дану множину (зовнішня властивість опуклості). З іншого боку, для узагальнення опуклості можна, як і в означенні опуклості та сильної лінійної опуклості, користуватися обмеженнями на перетини цієї множини прямою (внутрішня властивість). У цьому напрямку, а також у напрямку зв'язку між різними опуклостями майже немає результатів.

Означивши m-опуклу оболонку множини E як перетин m-опуклих множин, які містять множину E, приходимо до наступної задачі: знайти критерій того, що точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ належить m-опуклій оболонці множини E. Для випадку 1-опуклої оболонки множини, яка є об'єднанням деякого набору куль, дана задача була сформульована Г. Худайбергановим [1] та отримала назву "задача про тінь":

Яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.

Г. Худайберганов довів, що при $n = 2$ двох кругів достатньо для створення тіні у центрі кола. Актуальним є розв'язання задачі про тінь при $n > 2$, а також дослідження ряду узагальнень цієї задачі.

Багато вчених працювали над наступною задачею: знайти такі

[1] Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров / Г. Худайберганов // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 — 85 Деп.

сім'ї множин, які після застосування до них певних геометричних перетворень будуть належати множині досить малої міри. Зокрема, Безікович [2], [3] здійснив побудову множини відрізків скінченної довжини та довільних напрямків, а також множини прямих довільних напрямків, лебегові міри яких дорівнюють нулю. Також Безікович і Радо [4] побудували множину лебегової міри нуль, яка містить кола довільних скінченних радіусів.

Актуальною є побудова множини, яка містить сфери довільних радіусів у просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю.

Природним аналогом комплексного аналізу є гіперкомплексний аналіз. Тому виникає потреба перенести ряд результатів опуклого аналізу, відомих у n-вимірних дійсному та комплексному просторах, на n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$. Над цими проблемами працював Г. Мкртчян. Він увів поняття гіперкомплексно опуклої, сильно гіперкомплексно опуклої множин та переніс ряд результатів лінійно опуклого аналізу на гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$. Цей напрямок продовжили розвивати Ю. Зелінський та його учні: М. Ткачук, Т. Осіпчук, Б. Кліщук.

Важливим є дослідження екстремальних елементів, $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин, лінійно опуклих та спряжених функцій в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Інституті математики НАН України у рамках наукових тем "Алгебраїчно-аналітичні та топологічні методи комплексного аналізу" (номер державної реєстрації 0111U001026) і "Аналітичні та геометричні проблеми комплексного аналізу" (номер державної реєстрації 0106U000156).

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи* є дослідження властивостей узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих функцій в евклідових просторах, а також побудо-

[2] Besicovitch A. S. On Kakeya's problem and a similar one / A. S. Besicovitch // Math. Zeit. — 1928. — **27**. — P. 312 – 320.

[3] Besicovitch A. S. Sur deux questions d'integrabilité des fonctions / A. S. Besicovitch // J. Soc. Phys. — Math.(Perm'). — 1919 (1920). — **2**. — P. 105 – 123.

[4] Besicovitch A. S. A plane set of measure zero containing circumferences of every radius / A. S. Besicovitch, R. Rado // J. London Math. Soc. — 1968. — **43**. — P. 717 – 719.

ва множини нульової міри, яка містить довільну кількість множин певного класу.

Об'єктом дослідження є узагальнено опуклі множини та узагальнено опуклі оболонки цих множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ та $\mathbb{H}^n$, узагальнено опуклі функції у просторі $\mathbb{H}^n$, а також класи множин, які після застосування до них сім'ї геометричних перетворень належатимуть множині досить малої міри.

Предметом дослідження є геометричні та топологічні властивості вказаних множин та функцій.

Для досягнення зазначеної мети у роботі було поставлено *такі задачі*:

1. Розв'язати класичну задачу про тінь у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, а також дослідити ряд узагальнень цієї задачі.

2. Побудувати множину, що містить сфери довільних скінченних радіусів у просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю.

3. Узагальнити теорему Клі опуклого аналізу на гіперкомплексний випадок, а також означити клас $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин та дослідити властивості цих множин у n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$.

4. Означити лінійно опуклі та спряжені функції у просторі $\mathbb{H}^n$, а також дослідити властивості цих функцій.

При розв'язанні цих задач застосовуються методи опуклого та гіперкомплексного аналізу, а також методи геометрії та топології.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Повністю розв'язана класична задача про тінь. Встановлено, що при $n > 2$ $(n+1)$-ї кулі, центри кожної з яких лежать на $(n-1)$-вимірній сфері у просторі $\mathbb{R}^n$, необхідно і достатньо для створення тіні у центрі сфери. Досліджено ряд узагальнень класичної задачі про тінь, а саме — задачу про тінь для півопуклості, задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери, задачу про тінь для сім'ї множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій у випадках 1-опуклості та 1-півопуклості, а також задачу про тінь у комплексному та гіперкомплексному просторах.

2. Побудовано множину, яка містить сфери з усіма можливими

скінченними радіусами в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю.

3. Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку. Побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими). Досліджено властивості цих множин, зокрема, доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин щодо їх перетину.

4. Введено поняття лінійно опуклої та спряженої функцій у просторі $\mathbb{H}^n$, досліджено ряд властивостей цих функцій, зокрема, доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань опуклого та гіперкомплексного аналізу, а також теорії відображень.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, а також допомога у розв'язуванні деяких з них належать науковому керівнику — Ю. Б. Зелінському. Формулювання робочих гіпотез належать Ю. Б. Зелінському та М. В. Ткачуку. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 року); Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015" (м. Київ, 1 – 3 квітня 2015 року); Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (м. Чернівці, 1 – 4 липня 2015 року); Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3 – 6 червня 2015 року); X Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 3 – 15 серпня 2015 року); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 року); XIV Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016" (м. Київ, 6 – 8 квітня 2016 року); International Conference "Complex analysis and related topics" (м. Львів, 30 травня –

4 червня 2016 року); International Conference “Geometry and topology in Odessa – 2016” (м. Одеса, 2 – 8 червня 2016 року); XI Літній школі “Алгебра, Топологія, Аналіз” (м. Одеса, 1 – 14 серпня 2016 року).

Крім цього, результати дисертації були предметом доповідей та обговорень на семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. Б. Зелінський); семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк); семінарі кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук); семінарі кафедри математичного аналізу фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у статтях [1 — 6] у наукових спеціалізованих виданнях і у збірниках тез конференцій [7 — 16].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаної літератури, що містить 101 джерело (на 14 сторінках). Повний обсяг дисертації становить 127 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LATEX.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику Ю. Б. Зелінському за постановку задач, корисні поради та постійну увагу до роботи, а також М. В. Ткачуку за корисні поради.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

У **першому розділі** дається огляд наукових праць, проблематика яких тісно пов’язана з дослідженнями, які містяться у дисертаційній роботі, а також робиться короткий огляд результатів дисертації.

У **другому розділі** дисертаційної роботи розглядаються питання, пов’язані із класичною задачею про тінь та її узагальненнями.

Класична задача про тінь була поставлена Г. Худайбергановим у 1982 році.

Задача про тінь. *Знайти мінімальну кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, таких, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.*

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається *m-опуклою*, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ знайдеться m-вимірна площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$. Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-опуклу множину, яка містить E, і називати її *m-опуклою оболонкою множини E*.

Іншими словами, задачу про тінь можна переформулювати так: *яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

При $n = 2$ задача про тінь була розв'язана Г. Худайбергановим: показано, що для кола на площині двох кругів достатньо для створення тіні. У дисертаційній роботі повністю розв'язана задача про тінь при $n > 2$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.4.1. *Для того, щоб центр $(n-1)$-сфери в n-вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$-ї кулі.*

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається *m-півопуклою*, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, знайдеться m-вимірна півплощина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$. Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-півопуклу множину, яка містить E, і називати її *m-півопуклою оболонкою множини E.*

Крім цього, у другому розділі дисертаційної роботи сформульовано задачу про тінь для півопуклості: яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими радіуса сфери (які не перевищують його), достатня для того, щоб довільний промінь, який виходить з центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Отримано повний розв'язок цієї задачі у двовимірному евклідовому просторі.

Теорема 2.5.1. *Для того, щоб центр кола $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-півопуклій оболонці сім'ї неперетинних відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Крім цього, знайдено кількість куль, достатню для створення тіні при $n = 3$ у випадку півопуклості.

Теорема 2.5.3. *Для того, щоб центр двовимірної сфери у тривимірному евклідовому просторі належав 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

Узагальнено задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери: яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-опуклій оболонці сім'ї куль?

Отримано розв'язок цієї задачі для випадку $n = 2$.

Теорема 2.6.1. *Для того, щоб внутрішність кола належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з центрами на колі та радіусами, меншими від радіуса кола, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Отримано розв'язок задачі про тінь в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 2.7.1. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо n елементів цієї сім'ї.*

Теорема 2.7.2. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою гру-*

пи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо $2n$ елементів цієї сім'ї.

Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{H}^n$) називається *m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою*, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E$ ($x \in \mathbb{H}^n \setminus E$), якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$. Для довільної множини $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{H}^n$) можна розглядати мінімальну m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклу множину, яка містить E, і називати її *m-комплексною (m-гіперкомплексною)* оболонкою множини E.

Ю. Б. Зелінським була сформульована задача про тінь у комплексному та гіперкомплексному просторах: яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній чи 1-гіперкомплексній оболонці цих куль)?

У роботі досліджено, скільки таких куль достатньо для створення тіні при $n \geq 3$ у цих просторах.

Теорема 2.8.2. *Для того, щоб центр сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$, належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо $2n$ ($4n-2$) куль.*

У **третьому розділі** дисертаційної роботи узагальнено задачу, яку розв'язали Безікович та Радо [5] при $n = 2$ (вони побудували плоску множину лебегової міри нуль, яка містить кола довільних скінченних радіусів), у випадку n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, де $n > 2$.

Теорема 3.2.1. *В n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ існує множина міри нуль, яка містить сфери усіх радіусів.*

У **четвертому розділі** дисертаційної роботи досліджено екстремальні елементи множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі

[5] Besicovitch A. S. A plane set of measure zero containing circumferences of every radius / A. S. Besicovitch, R. Rado // J. London Math. Soc. — 1968. — **43**. — P. 717 – 719.

$\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $E \subset \mathbb{H}$ — довільна множина. Доповнення до об'єднання необмежених компонент множини $\mathbb{H}\setminus E$ називається *h-комбінацією точок множини* E та позначається $[E]$. Якщо E — довільна множина у просторі $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, то скажемо, що точка x належить h-комбінації точок з E, якщо існує перетин множини E гіперкомплексною прямою γ такий, що $x \in [E\bigcap\gamma]$.

h-оболонкою множини $E \subset \mathbb{H}^n$ називається множина $\widehat{E} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$, де $\pi : \mathbb{H}^n \longrightarrow \lambda$ – усі можливі лінійні проекції множини на гіперкомплексні прямі, $[\pi(E)]$ – h-комбінація точок множини $\pi(E)$, а $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n |\ \pi(x) \in \pi(E)\}$ – її повний прообраз.

Множина $E^* = \{h | \langle x, h\rangle \neq 1,\ \forall x \in E\}$ називається *спряженою множиною* до множини E.

Доведено наступні теореми.

Теорема 4.1.1. *Якщо множина $E \in \mathbb{H}^n$ є h-оболонкою, то $E = [E]$.*

Теорема 4.1.2. *Для довільної множини $E \subset \mathbb{H}^n$ її h-оболонку можна зобразити у вигляді $\widehat{E} = (\bigcup\limits_{\lambda}]\lambda \bigcap E^*[)^*$.*

Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *гіперкомплексно опуклою*, якщо для довільної точки $x_0 \in \mathbb{H}^n\setminus E$ існує гіперкомплексна гіперплощина, яка проходить через точку x_0 і не перетинає множину E.

Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *сильно гіперкомплексно опуклою*, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою γ ациклічний, тобто $\widetilde{H}^i(\gamma \bigcap E) = 0,\ \forall i \geq 0$, де $\widetilde{H}^i(\gamma \bigcap E)$ – зведена група когомологій Александрова-Чеха множини $\gamma \bigcap E$ з коефіцієнтами у групі цілих чисел.

h-інтервалом з центром у точці x радіуса r називається перетин відкритої кулі радіуса r з центром у точці x з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку x.

Точка $x \in E \subset \mathbb{H}^n$ називається *h-екстремальною точкою множини* E, якщо в E немає жодного h-інтервалу, який містить x.

h-променем називається замкнена необмежена ациклічна підмножина гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.

Екстремальним h-променем множини $E \subset \mathbb{H}^n$ називається h-промінь H, який належить множині E, якщо множина $E \setminus H$ гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя H буде h-екстремальною точкою для множини E. (Це еквівалентне тому, що жодна точка променя H не буде внутрішньою для довільного h-інтервалу, який належить множині E та має хоча б одну точку за межами H).

Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку.

Теорема 4.2.1. *Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплексної прямої, буде h-оболонкою своїх h-екстремальних точок та h-екстремальних променів $E = \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}E \bigcup \mathrm{rhext}E)$.*

Крім цього, у даному розділі побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими).

Гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається $\mathbb{H}$-*квазіопуклою множиною*, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \bigcap E) = 0$.

Доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин у тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 4.3.1. *Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим компактом.*

Також встановлено, що компактний лінійний поліедр, усі грані якого не містять тривимірних циклів, та ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт будуть $\mathbb{H}$-квазіопуклими множинами.

Теорема 4.3.2. *Компактний лінійний поліедр, усі грані якого не містять тривимірних циклів, є $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Наслідок 4.3.1. *Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Теорема 4.3.3. *Кожен ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт E буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим.*

У **п'ятому розділі** дисертаційної роботи узагальнено деякі результати щодо багатозначних функцій в n-вимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ на n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$.

Функція $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$. Область визначення такої функції будемо позначати через $E_f := \{x \in \mathbb{H}^n : \text{ існує } y \in \mathbb{H},\, y = f(x)\}$.

Багатозначна функція $f\colon E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція l, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \bigcap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$.

Лінійно опукла функція $f\colon E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається сильно лінійно опуклою, якщо її графік $\Gamma(f)$ є сильно лінійно опуклою множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$.

Досліджено деякі властивості лінійно опуклих функцій. Зокрема, встановлено, що перетин сім'ї лінійно опуклих фукцій та внутрішність лінійно опуклої функції є лінійно опуклими функціями.

Теорема 5.2.1. *Якщо f_α, $\alpha \in A$, є сім'єю лінійно опуклих функцій (A — довільна множина індексів), то функція $f = \bigcap\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ є лінійно опуклою.*

Теорема 5.2.2. *Якщо f — лінійно опукла функція і $E_f = E_{\mathrm{int}(f)}$, то $\mathrm{int} f$ — лінійно опукла функція.*

Функцією, *спряженою* з f, називається функція, що задається рівністю

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)). \tag{1}$$

Доведено ряд властивостей функцій, спряжених до функцій $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Теорема 5.3.1. *Для кожної функції $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ справедливе включення $f \subset f^{**}$.*

Теорема 5.3.2. *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

Лінійно опукла функція називається *власною*, якщо хоча б для одного x виконується співвідношення: $f(x) \bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність: $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Теорема 5.3.3. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Теорема 5.3.4. *Задано відображення $\Lambda\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, яке є гіперкомплексно лінійним гомеоморфізмом, і функцію $g\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$. Нехай*

$$f(x) = \lambda g(\Lambda x + w_0) + \langle x, y_0\rangle + \gamma_0,$$

де $w_0 \in \mathbb{H}^n$, $y_0 \in \mathbb{H}^{n*}$, $\gamma_0 \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Тоді

$$f^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)) - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0.$$

Також у цьому розділі доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 5.3.5. *Нехай багатозначна функція* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *така, що* $\mathbb{H}\setminus f(x) \neq \emptyset$ *для всіх* $x \in \mathbb{H}^n$. *Тоді для виконання рівності* $f^{**} = f$ *необхідно і достатньо, щоб* f *була лінійно опуклою.*

Введено поняття однорідної функції та досліджено деякі властивості цих функцій.

Функція f називається *однорідною*, якщо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.

Багатозначною афінною функцією називається функція, лінійно опукла і лінійно угнута одночасно, для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $(f(x)\bigcap \mathbb{H})$, $(\mathbb{H} \setminus f(x))$ є непорожньою (тобто у цій точці значення функції f відмінне від $\emptyset$ і $\mathbb{H}$).

Функція

$$W_E(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{x\in E} \langle x, y\rangle$$

називається *опорною функцією множини* $E \subset \mathbb{H}^n$.

Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – лінійно опукла множина, то функція

$$\delta(x|E) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in E, \\ \infty, & \text{якщо } x \notin E, \end{cases}$$

називається її *індикаторною функцією.*

Теорема 5.3.6. *Нехай* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *є власною лінійною опуклою однорідною функцією і* $f(\Theta) = \overset{o}{\mathbb{H}}\setminus 0$. *Тоді* f *є опорною функцією деякої множини.*

Наслідок 5.3.1. *Якщо однорідна лінійно опукла функція* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *є відмінною від афінної, то* $f^*(y) = \delta(y|E_{f^*})$.

Теорема 5.3.7. *Якщо* $f\colon \mathbb{H}^n\setminus\Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *– однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{y\in E_{f^*}} \langle x, y\rangle.$$

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 5.3.8. *Нехай* $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, *є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*

$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено геометричні та топологічні властивості узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих оболонок цих множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ та $\mathbb{H}^n$, узагальнено опуклих функцій у просторі $\mathbb{H}^n$, а також в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ побудовано множину нульової міри, яка містить довільну кількість множин деякого класу.

Основні результати дисертації такі:

— Досліджено узагальнено опуклі множини та їх узагальнено опуклі оболонки. Повністю розв'язана класична задача про тінь, яка є частковим випадком належності точки узагальнено опуклій оболонці деякої сім'ї куль. Встановлено, що при $n > 2$ $(n+1)$-ї кулі, центри яких лежать на $(n-1)$-вимірній сфері, необхідно і достатньо для створення тіні у центрі сфери. Розглянуто деякі узагальнення класичної задачі про тінь. Сформульовано задачу про тінь для півопуклості. Отримано повний розв'язок цієї задачі у двовимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$. Встановлено, що для створення тіні у центрі кола необхідно і достатньо трьох кругів. Знайдено кількість куль, достатню для створення тіні при $n = 3$ у випадку півопуклості. Показано, що десяти куль з центрами на двовимірній сфері достатньо для створення тіні у центрі сфери. Узагальнено задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери та отримано розв'язок цієї задачі на площині (для створення тіні у довільній точці внутрішності круга необхідно і достатньо трьох кругів). Отримано розв'язок задачі про тінь для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій. Показано, що у випадку 1-опуклості n елементів цієї сім'ї, а у випадку 1-півопуклості $2n$ елементів необхідно і достатньо для створення тіні у довільній точці n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Досліджено, скільки куль достатньо для створення тіні у комплексному (гіперкомплексному) просторах. Встановлено, що у комплексному просторі $2n$, а у гіперкомплексному $4n-2$ куль достатньо для створення тіні.

— В n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ побудовано множину, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю і яка містить сфери з усіма можливими скінченними радіусами.

— Досліджено властивості h-оболонки множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Введено поняття екстремального h-променя множини простору $\mathbb{H}^n$. Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку. Побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими). Доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин у тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною. Крім цього, встановлено, що компактний лінійний поліедр та ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт будуть $\mathbb{H}$-квазіопуклими множинами.

— Узагальнено деякі результати щодо багатозначних функцій у комплексному просторі на n-вимірний гіперкомплексний простір. Введено поняття лінійно опуклої та спряженої функції в $\mathbb{H}^n$. Встановлено, що перетин довільної кількості лінійно опуклих функцій та внутрішність графіка лінійно опуклої функції є лінійно опуклими функціями. Доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро, а також ряд властивостей функцій, спряжених до функцій $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Отримані у дисертаційній роботі результати та розвинені у ній методи можуть бути корисними у подальших дослідженнях питань опуклого та гіперкомплексного аналізу, а також теорії відображень.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Зелинский Ю. Б. Задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Доповіді НАН України. — 2015. — № 5. — С. 15 – 20.

2. Зелинский Ю. Б. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, 12. — С. 1658 – 1666.

3. Зелінський Ю. Б. Узагальнення задачі про тінь / Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, 6. — С. 757 – 762.

4. Стефанчук М. В. Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук // Доповіді НАН України. — 2016. — № 4. — С. 13 – 19.

5. Стефанчук М. В. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 3. — С. 225 – 235.

6. Стефанчук М. В. Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 4. — С. 285 – 289.

7. Зелинский Ю. Б. Задача о тени и смежные вопросы / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого — 1 березня 2015 р., Ворохта: Тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 24 – 25.

8. Зелінський Ю. Б. Задача про тінь для сфер / Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська, М. В. Стефанчук // Міжнародна конференція молодих математиків, 3 — 6 червня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 74.

9. Стефанчук М. В. Властивості лінійно опуклих та спряжених функцій в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук // XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 1 — 14 серпня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. — Київ, 2016. — С. 88 – 89.

10. Стефанчук М. В. Деякі узагальнення задачі про тінь / М. В. Стефанчук // XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2016", 6 — 8 квітня 2016 р., Київ: Матеріали конференції. — Київ, 2016. — С. 77 – 81.

11. Стефанчук М. В. Екстремальні елементи та $\mathbb{H}$-квазіопуклі множини в $\mathbb{H}^n$ / М. В. Стефанчук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 — 27 лютого 2016 р., Ворохта: Тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 139 – 142.

12. Стефанчук М. В. Узагальнено опуклі множини і задача про тінь / М. В. Стефанчук // X Літня школа "Алгебра, Топологія, Ана-

ліз”, 3 — 15 серпня 2015 р., Одеса: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 62.

13. Стефанчук М. В. Узагальнення задачі про тінь для сім'ї множин / М. В. Стефанчук // International Conference “Geometry and topology in Odessa — 2016”, 2 — 8 червня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. — Одеса, 2016. — С. 56.

14. Стефанчук М. В. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // XIII Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна — 2015”, 1 — 3 квітня 2015 р., Київ: Матеріали конференції. — Київ, 2015. — С. 48 – 49.

15. Стефанчук М. В. Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, 1 — 4 липня 2015 р., Чернівці: Тези доповідей. — Чернівці, 2015. — С. 111 – 112.

16. Stefanchuk M. Hypercomplex hulls and extreme elements in hypercomplex space / M. Stefanchuk // International Conference “Complex analysis and related topics” (Lviv, May 30 – June 4, 2016): Abstracts. — Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 89.

АНОТАЦІЇ

Стефанчук М. В. Узагальнено опуклі множини та їх застосування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню властивостей узагальнено опуклих множин у дійсному евклідовому n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірних комплексному та гіперкомлексному просторах $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$, узагальнено опуклих функцій у просторі $\mathbb{H}^n$, а також побудові множини нульової міри, яка містить довільну кількість множин певного класу. Важливі результати у цих напрямках були отримані А. Мартіно, Л. Айзенбергом, Г. Худайбергановим, Ю. Зелінським, Г. Мкртчяном, М. Ткачуком, Т. Осіпчук, А. Безіковичем, Р. Радо та іншими.

У дисертаційній роботі повністю розв'язано класичну задачу про тінь, а також досліджено ряд узагальнень цієї задачі (задачу про

тінь для півопуклості, задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери, задачу про тінь для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, задачу про тінь у комплексному та гіперкомплексному просторах), в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ побудовано множину, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю і яка містить сфери з усіма можливими радіусами, досліджено h-оболонки множин та екстремальні елементи у просторі $\mathbb{H}^n$, узагальнено деякі результати щодо багатозначних функцій у комплексному просторі на n-вимірний гіперкомплексний простір, зокрема, доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро, а також ряд властивостей функцій, спряжених до функцій $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Ключові слова: m-опукла множина, m-півопукла множина, m-опукла оболонка, m-півопукла оболонка, гіперкомплексно опукла множина, h-оболонка множини, h-екстремальна точка, h-екстремальний промінь, $\mathbb{H}$-квазіопукла множина, лінійно опукла функція, спряжена функція.

Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и их применение. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию свойств обобщенно выпуклых множеств в действительном евклидовом n-мерном пространстве, n-мерных комплексном и гиперкомлексном пространствах, обобщенно выпуклых функций в пространстве $\mathbb{H}^n$, а также построению множества нулевой меры, содержащего любое количество множеств определенного класса. Важные результаты в этих направлениях были получены А. Мартино, Л. Айзенбергом, Г. Худайберганowым, Ю. Зелинским, Г. Мкртчяном, М. Ткачуком, Т. Осипчук, А. Безиковичем, Р. Радо и другими.

В диссертационной работе полностью решено классическую задачу о тени при $n > 2$.

Теорема 2.4.1. *Для того, чтобы центр $(n-1)$-сферы в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ принадлежал 1-выпуклой оболочке семьи попарно непересекающихся открытых (замкнутых)* *шаров с радиусами, величины которых не превышают (меньше) радиуса сферы, и с центрами на сфере, необходимо и достаточно $(n+1)$-го шара.*

Кроме того, исследован ряд обобщений задачи о тени (задача о тени для полувыпуклости, задача о тени для произвольной точки внутренности сферы, задача о тени для семьи множеств, полученных с выпуклого множества с непустой внутренностью с помощью группы геометрических преобразований, которая состоит из параллельных переносов и гомотетий, задача о тени в комплексном и гиперкомплексном пространствах).

В n-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ построено множество, n-мерная лебегова мера которого равна нулю и которое содержит сферы со всеми возможными радиусами.

Теорема 3.2.1. *В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ существует множество меры нуль, которое содержит сферы всех радиусов.*

Исследованы h-оболочки множеств, h-экстремальные элементы и $\mathbb{H}$-квазивыпуклые множества в пространстве $\mathbb{H}^n$. В частности, доказано аналог теоремы Кли выпуклого анализа в гиперкомплексном пространстве.

Теорема 4.2.1. *Каждое замкнутое сильно гиперкомплексно выпуклое множество $E \subset \mathbb{H}^n$, которое не содержит гиперкомплекной прямой, будет h-оболочкой своих h-экстремальных точек и h-экстремальных лучей $E = \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}E \bigcup \mathrm{rhext}E)$.*

Обобщено некоторые результаты по многозначных функциях в комплексном пространстве на n-мерное гиперкомплексное пространство, в частности, доказано гиперкомплексный аналог теоремы Фенхеля-Моро, а также ряд свойств функций, сопряженных с функциями $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Теорема 5.3.5. *Пусть многозначная функция $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ такая, что $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Тогда для выполнения равенства $f^{**} = f$ необходимо и достаточно, чтобы f была линейно выпуклой.*

Ключевые слова: m-выпуклое множество, m-полувыпуклое множество, m-выпуклая оболочка, m-полувыпуклая оболочка, гиперкомплексно выпуклое множество, h-оболочка множества, h-экстремальная точка, h-экстремальный луч, $\mathbb{H}$-квазивыпуклое множество, линейно выпуклая функция, сопряженная функция.

Stefanchuk M. V. Generalized convex sets and its applications. — Manuscript.

The thesis is presented for the scientific degree of the Candidate of Physics and Mathematics by Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

This thesis is devoted to investigation of properties of generalized convex sets in the real Euclidean n-dimensional space $\mathbb{R}^n$ and in the n-dimensional complex and hypercomplex spaces $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{H}^n$ respectively. The significant results in these directions were obtained by A. Martino, L. Aisenberg, G. Hudajberganov, Yu. Zelinskii, G. Mkrtchyan, M. Tkachuk, T. Osipchuk, A. Besicovitch, R. Rado and others.

In the thesis there was solved the classical problem of shadow. There was also studied some generalizations of this problem: the problem of shadow for half-convexity, the problem of shadow for arbitrary point of the interior of a sphere, the problem of shadow for the family of sets obtained from a convex set with non-empty interior by a group of geometric transformations which consists from parallel translations and homotheties, the problem of shadow in the complex and hypercomplex spaces. In the n-dimensional Euclidean space for $n \geq 2$ there was constructed the set whose n-dimensional Lebesgue measure equals zero and this set contains spheres of all radiuses. There was also studied h-hulls of sets and h-extremal elements in the space $\mathbb{H}^n$. Some results concerning multivalued functions in the complex space were generalized into the n-dimensional hypercomplex space: there was proved the hypercomplex analogue of the Fenchel-Moreau theorem and a lot of properties of functions that are conjugate to functions $f \colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Key words: m-convex set, m-half-convex set, m-convex hull, m-halfconvex hull, hypercomplex convex set, h-hull of a set, h-extremal point, h-extremal ray, $\mathbb{H}$-quasiconvex set, linearly convex function, conjugate function.

Підписано до друку 31.01.2017. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1. Ум. друк. арк. 0,93.
Тираж 120 пр. Зам. 55.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.