НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Стефанчук Марія Володимирівна

УДК 514.17+517.55

УЗАГАЛЬНЕНО ОПУКЛІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник —
Зелінський Юрій Борисович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}$	–	множина дійсних чисел;
$\mathbb{C}$	–	множина комплексних чисел;
$\mathbb{H}$	–	множина кватерніонів (алгебра кватерніонів);
$\mathbb{R}^n$	–	n-вимірний дійсний евклідів простір;
$\mathbb{C}^n$	–	n-вимірний комплексний евклідів простір;
$\mathbb{H}^n$	–	n-вимірний векторний простір, що є декартовим добутком алгебр кватерніонів $\mathbb{H}$;
$\overset{o}{\mathbb{H}^n}$	–	простір $\mathbb{H}^n$, поповнений нескінченно віддаленою точкою;
$\\|x\\|$	–	норма елемента x;
$\langle x, y\rangle$	–	скалярний добуток елементів x, y;
$x \in A$ $(x \notin A)$	–	елемент x належить (не належить) множині A;
$A \subset B$	–	множина A є підмножиною множини B;
$B \setminus A$	–	сукупність тих елементів множини B, які не належать множині A;
$\bigcap\limits_i A_i$	–	перетин довільної скінченної чи зліченної кількості множин A_i;
$\bigcup\limits_i A_i$	–	об'єднання довільної скінченної чи зліченної кількості множин A_i;
$\emptyset$	–	порожня множина;
∂A	–	межа множини A;
$\mathtt{Int}\ A$	–	внутрішність множини A;
$\mathtt{con}\ A$	–	конічна оболонка множини A;
$\mathtt{conv}\ A$	–	опукла оболонка множини A;
S^n	–	n-вимірна сфера;

A^*	–	множина, спряжена до множини A;
A^{**}	–	подвійна спряжена множина до множини A;
$H^k(K)$	–	k-вимірні групи когомологій множини K;
$A \bigoplus B$	–	пряма сума множин A і B;
χ_A	–	функція, яка приймає значення 1 в множині A і значення 0 поза цією множиною;
$S(O, r, R)$	–	сферичне кільце з центром O та радіусами межових сфер r, R;
$ray(O, \theta)$	–	промінь, який виходить з точки O у напрямку вектора θ;
A^δ	–	множина точок, які знаходяться на відстані, меншій, ніж δ, від множини A;
$m_n A$	–	n-вимірна міра Лебега множини A;
$d(A)$	–	діаметр множини A;
$\widetilde{H}^i(A)$	–	зведена група когомологій Александрова-Чеха множини A з коефіцієнтами в групі цілих чисел;
$[A]$	–	h-комбінація точок множини A;
$[A]^m$	–	m-кратна h-комбінація точок множини A;
$\widehat{A}$	–	h-оболонка множини A;
$]A[$	–	доповнення до зв'язної компоненти множини A, яка містить початок координат;
$\mathtt{hext}A$	–	множина h-екстремальних точок множини A;
$\mathtt{rhext}A$	–	множина h-екстремальних променів множини A;
$\mathtt{hconv}\ A$	–	h-оболонка множини A;
$A \times B$	–	декартовий добуток множин A і B;
$\mathtt{dim}_{\mathbb{H}} A$	–	гіперкомплексна розмірність множини A;
$\mathbb{H}^{n*}$	–	простір, спряжений до простору $\mathbb{H}^n$;
E_f	–	область визначення функції f;

$\delta(x\|E)$	–	індикаторна функція множини $E \subset \mathbb{H}^n$;
$\Gamma(f)$	–	графік функції f;
$W_E(y)$	–	опорна функція множини $E \subset \mathbb{H}^n$;
f^*	–	функція, спряжена з функцією f;
f^{**}	–	функція, двічі спряжена з функцією f.

ВСТУП

Актуальність теми. Поняття опуклості є загальновідомим та відіграє важливу роль у різних областях фундаментальної і прикладної математики. Опуклість — основний об'єкт дослідження спеціального розділу математики, який отримав назву опуклого аналізу. Опуклий аналіз — достатньо важливий і самостійний розділ математики, пов'язаний одночасно з класичним аналізом та геометрією. У даному розділі досліджуються опуклі множини, опуклі функції та опуклі функціонали.

Основи опуклого аналізу були закладені в кінці XIX століття Г. Мінковським, який є засновником опуклої геометрії, тобто геометрії опуклих множин у скінченновимірному просторі. Також у створення опуклої геометрії великий внесок здійснили Я. Штейнер, К. Каратеодорі, Е. Геллі, В. Бляшке, Т. Боннезен, В. Фенхель та інші вчені. Багато понять та концепцій опуклої геометрії, такі як опорна функція, функція Мінковського, поляра, крайня точка, віддільність, стали базою для створення на початку XX століття функціонального аналізу. З роботи Фенхеля "Опуклі конуси, опуклі множини та опуклі функції" розпочався новий етап опуклого аналізу, в якому детально досліджувалися властивості опуклих функціоналів. Формування опуклого аналізу як самостійного розділу математики розпочалося в 50-60-х роках XX століття.

Поняття та методи опуклого аналізу широко застосовуються в різних областях математики — опуклому програмуванні та варіаційному численні, теорії функцій, комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці та математичній статистиці. Крім цього, опуклість відіграє важливу роль при розв'язуванні екстремальних задач у сучасній математичній економіці.

Важлива властивість опуклості полягає в тому, що опуклі об'єкти допускають двоїстий опис. З одного боку, опукла множина описується означенням, тобто, якщо дві точки належать опуклій множині, то і весь відрізок з кінцями в цих точках теж належить цій множині. А з іншого боку, опуклу множину можна представити як перетин півпросторів, які містять цю множину. Тому кожній опуклій множині ставиться у відповідність двоїстий об'єкт – поляра цієї множини.

Ця властивість дозволяє отримати двоїстий опис і для опуклих функцій. Опуклі функції можна двоїсто означити як верхні грані афінних функцій. Тому з опуклою функцією пов'язана двоїста, або спряжена, функція, яку отримують за допомогою перетворення Лежандра.

Двоїстість дозволяє поставити у відповідність варіаційній задачі двоїсту задачу та вивчити зв'язок між ними. Це дуже корисно в математичній економіці, де двоїсті задачі виражаються у вигляді цін; в механіці, де основна і двоїста задачі – це дві добре відомі форми законів збереження, які характеризують відповідно зміщення та напруженість; у числовому аналізі, де двоїста задача може допомогти у розв'язанні основної. Крім цих стандартних застосувань, є ще одне важливе застосування двоїстості до варіаційного числення: двоїста задача дозволяє побудувати узагальнений розв'язок варіаційної задачі, в якій немає класичного розв'язання.

Поняття лінійно опуклої множини у двовимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^2$ вперше було введене у 1935 році Г. Беенке та Е. Пешлем [69] і почало широко використовуватися завдяки роботам А. Мартіно [89] і Л. Айзенберга [4] з 60-х років XX століття. Означення лінійної опуклості, дані Мартіно та Айзенбергом, дещо відрізняються одне від одного, але якщо не обмежуватися зв'язними областями і компактами, то означення, дане Айзенбергом, виділяє одну зв'язну компоненту множини, лінійно опуклої за Мартіно. У роботі [9] наведено приклад компакта, лінійно опуклого за Мартіно, що складається із зліченної кількості компонент, кожна компонента якого є лінійно опуклою за Айзенбергом і тільки одна з компонент – лінійно опукла за Мартіно. Інший приклад можна знайти у роботі [6]. Лінійно опуклі множини досліджувалися у роботах А. Мартіно [89], [88], Л. Айзенберга [1 - 6], Б. Зінов'єва [23], О. Южакова, В. Кривоколеска [64], В. Трутнєва [56], [57], С. Знаменського [24], [29], Ю. Зелінського [12], [11], [13], [9], Х. Кісельмана [84], [83], Л. Хермандера [80], [81], М. Андерсона, М. Пассаре, Р. Сігурдсона [66], В. Мельник [35], [36], М. Ткачука [22].

Лінійна опуклість множини є узагальненням поняття опуклості. Тут узагальнюється зовнішня властивість опуклих множин, яка полягає в існуванні гіперплощини, яка не перетинає вихідну множину. Хоча в термінах лінійно опуклих множин було розв'язано ряд цікавих задач комплексного аналізу, таке узагальнення є досить великим розширенням класу опуклих множин. Тому для отримання змістовних результатів обмежились більш вузьким (на областях та компактах) класом сильно лінійно опуклих множин. В означенні сильно лінійно опуклих множин узагальнюється внутрішня властивість опуклості, а саме зв'язність перетину множини з дійсною прямою. Найбільш яскраво властивості таких множин проявляються при описі просторів лінійних неперервних функціоналів $H'(E)$ на просторі функцій $H(E)$, голоморфних в області чи на компакті $E \subset \mathbb{C}^n$.

А. Мартіно помітив, що якщо використати спряжену множину як аналог зовнішності, то можна встановити ізоморфізм простору $H(E)$ з простором $H'(E^*)$. Перші результати такої двоїстості були отримані ним для опуклих областей та компактів і поширились Л. Айзенбергом на лінійно опуклі множини, які задовольняють деякі умови регулярності [2]. Мартіно назвав області і компакти, для яких справедлива двоїстість

$H(E) \approx H'(E^*)$, сильно лінійно опуклими. Властивості сильної лінійної опуклості вивчали В. М. Трутнєв [56], [57], Л. Я. Макарова [34], С. В. Знаменський [24], [25], [26], [27], [28].

Поняття m-опуклої множини в $\mathbb{R}^n$, $0 \leq m < n$, дозволяє з єдиної точки зору подивитися на деякі узагальнення опуклості, в тому числі і на лінійну опуклість. В означенні m-опуклої множини використовується узагальнення поняття опуклої множини завдяки існуванню m-площини, яка не перетинає дану множину (зовнішня властивість опуклості). З іншого боку, для узагальнення опуклості можна, як і в означенні опуклості та сильної лінійної опуклості, користуватися обмеженнями на перетини цієї множини прямою (внутрішня властивість). У цьому напрямку, а також у напрямку зв'язку між різними опуклостями майже немає результатів.

Лінійно опукла оболонка E^{**} довільної множини E будується досить абстрактно. Виникає питання: який критерій того, що точка $x \in \mathbb{C}^n \setminus E$ не належить лінійно опуклій оболонці множини E. Для випадку двох куль K_1, K_2 з центрами, рівновіддаленими від початку координат, Г. Худайберганов [58] знайшов співвідношення радіусів куль, при яких початок координат належить лінійно опуклій оболонці множини $E = K_1 \bigcup K_2$.

Означивши m-опуклу оболонку множини E як перетин m-опуклих множин, які містять множину E, приходимо до наступної задачі: знайти критерій того, що точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ належить m-опуклій оболонці множини E. Для випадку 1-опуклої оболонки множини, яка є об'єднанням деякого набору куль, дана задача була сформульована Г. Худайбергановим [59] та отримала назву задача про тінь:

Яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1} *та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.*

Іншими словами цю задачу можна переформулювати так: *яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

Г. Худайберганов [59] довів, що при $n = 2$ двох кругів достатньо для створення тіні в центрі кола. Розв'язання ним цієї задачі [59] при $n > 2$ було неправильним.

У другому розділі дисертаційної роботи дається остаточне розв'язання класичної задачі про тінь, а також досліджено ряд узагальнень цієї задачі, зокрема, задачу про тінь для півопуклості, задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери, задачу про тінь для сім'ї множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій у випадках 1-опуклості та 1-півопуклості, а також задачу про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах.

Багато вчених працювали над наступною задачею: знайти такі сім'ї множин, які після застосування до них певних геометричних перетворень будуть належати множині досить малої міри. Зокрема, Безікович [71], [72] здійснив побудову множини відрізків скінченної довжини та довільних напрямків, а також множини прямих довільних напрямків, Лебегові міри яких дорівнюють нулю. Також Безікович і Радо [73] побудували множину Лебегової міри нуль, яка містить кола довільних радіусів.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений опису побудови множини, що містить сфери довільних радіусів в просторі $\mathbb{R}^n$ та n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю.

Природним аналогом комплексного аналізу є гіперкомплексний аналіз. Тому виникає потреба перенести ряд результатів опуклого аналізу, відомих в дійсному та комплексному евклідових просторах, на n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$. Над цими проблемами працював Г. Мкртчян [38], [41]. Він ввів поняття гіперкомплексно опуклої, сильно гіперкомплексно опуклої множин та переніс ряд результатів лінійно опуклого аналізу на гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$. Цей напрямок продовжили розвивати Ю. Зелінський та його учні: М. Ткачук, Т. Осіпчук, Б. Кліщук.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню властивостей екстремальних елементів та $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$.

Багатозначні лінійно опуклі функції, графіки яких задаються лінійно опуклими множинами, в n-вимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ досліджувалися Ю. Б. Зелінським [9], [10].

П'ятий розділ дисертації присвячений узагальненню деяких результатів щодо багатозначних функцій в комплексному просторі на гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$. У дисертаційній роботі вперше введено поняття лінійно опуклої та спряженої функції в $\mathbb{H}^n$, а також досліджено ряд властивостей цих функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Інституті математики НАН України в рамках наукових тем "Алгебраїчно-аналітичні та топологічні методи комплексного аналізу" (номер державної реєстрації 0111U001026) і "Аналітичні та геометричні проблеми комплексного аналізу" (номер державної реєстрації 0106U000156).

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи* є дослідження властивостей узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих функцій в евклідових просторах, а також побудова множини нульової міри, яка містить довільну кількість множин певного класу.

Об'єктом дослідження є узагальнено опуклі множини та узагальнено опуклі оболонки цих множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ та $\mathbb{H}^n$, узагальнено опуклі функції в просторі $\mathbb{H}^n$, а також класи множин, які після застосування до них сім'ї геометричних перетворень належатимуть множині досить малої міри. *Предметом дослідження* є геометричні та топологічні властивості вказаних множин та функцій.

Для досягнення зазначеної мети у роботі було поставлено такі задачі:

1. Розв'язати класичну задачу про тінь в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, а також дослідити ряд узагальнень цієї задачі.

2. Побудувати множину, що містить сфери довільних радіусів у просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю.

3. Узагальнити теорему Клі опуклого аналізу на гіперкомплексний випадок, а також означити клас $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин та дослідити властивості цих множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$.

4. Означити лінійно опуклі та спряжені функції в просторі $\mathbb{H}^n$, а також дослідити властивості цих функцій.

При розв'язанні цих задач застосовуються методи опуклого та гіперкомплексного аналізу, а також методи геометрії та топології.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Повністю розв'язана класична задача про тінь. Встановлено, що при $n > 2$ $(n+1)$-ї кулі, центри кожної з яких лежать на $(n-1)$-вимірній сфері, необхідно і достатньо для створення тіні в центрі сфери. Досліджено ряд узагальнень класичної задачі про тінь, а саме – задачу про тінь для півопуклості, задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери, задачу про тінь для сім'ї множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій у випадках 1-опуклості та 1-півопуклості, а також задачу про тінь у комплексному

та гіперкомплексному просторах.

2. Побудовано множину, яка містить сфери з усіма можливими радіусами в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю.

3. Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку. Побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими). Досліджено властивості цих множин, зокрема, доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин щодо їх перетину.

4. Введено поняття лінійно опуклої та спряженої функції в $\mathbb{H}^n$, досліджено ряд властивостей цих функцій, зокрема, доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань опуклого та гіперкомплексного аналізу, а також теорії відображень.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, а також допомога у розв'язуванні деяких з них належать науковому керівнику — Ю. Б. Зелінському. Формулювання робочих гіпотез належать Ю. Б. Зелінському та М. В. Ткачуку. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 року);

– XIII Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015" (м. Київ, 1 – 3 квітня 2015 року);

– Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (м. Чернівці, 1 – 4 липня 2015 року);

– Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3 – 6 червня 2015 року);

– X Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 3 – 15 серпня 2015 року);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 року);

– XIV Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016" (м. Київ, 6 – 8 квітня 2016 року);

– International Conference "Complex analysis and related topics" (Lviv, May 30 – June 4, 2016);

– International Conference "Geometry and topology in Odessa – 2016" (Odessa, 2–8 June, 2016);

– XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 1 – 14 серпня 2016 року).

а також, на таких семінарах:

– семінари відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. Б. Зелінський);

– семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

– семінар кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук);

– семінар кафедри математичного аналізу фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у статтях [16], [19], [21], [48], [52], [54], у наукових фахових виданнях, а також у матеріалах міжнародних конференцій [17], [18], [46], [47], [49], [53], [55], [50], [51], [99].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаної літератури, що містить 101 джерело (на 14 сторінках). Повний обсяг дисертації становить 127 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LATEX.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику Ю. Б. Зелінському за постановку задач, корисні поради та постійну увагу до роботи, а також М. В. Ткачуку за корисні поради.

РОЗДІЛ 1

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Опуклі та лінійно опуклі множини

У математиці важливу роль відіграє поняття опуклості.

Означення 1.1.1. *Відрізком, що з'єднує точки* x^1 *,* x^2 *n-вимірного евклідового простору* $\mathbb{R}^n$ *, називається множина точок*

$$[x^1, x^2] = \{x \in \mathbb{R}^n | x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2, \lambda \in [0,1]\}.$$

Означення 1.1.2. *Множина* $X \in \mathbb{R}^n$ *називається опуклою, якщо разом з кожними двома точками* $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ *вона містить також весь відрізок* $[x^1, x^2]$ *, який з'єднує ці точки.*

Розглянемо деякі приклади опуклих множин.

Порожню множину будемо вважати опуклою. Прикладами опуклих множин в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^1$ є одноточкові множини, інтервали, відрізки, півпрямі.

Означення 1.1.3. *Підмножина X n-вимірного евклідового простору* $\mathbb{R}^n$ *називається афінним підпростором простору* $\mathbb{R}^n$ *, якщо разом з будь-якими двома точками* $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ *вона містить також пряму, яка проходить через ці точки.*

Усі афінні підпростори є опуклими множинами, бо разом з будь-якими двома своїми точками вони містять пряму, яка проходить через ці точки, а тому містять відрізок, що з'єднує ці точки. Афінні підпростори є більш вузьким класом множин, ніж опуклі множини. Це випливає з того, що опукла множина разом з будь-якими двома своїми точками повинна містити не всю пряму, що проходить через ці точки, а лише частину цієї прямої.

Приклад 1.1.1. *Півпростір.*

Множину точок виду $H = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | L(x) + \gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i + \gamma \leq 0\}$ або $H = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | L(x) + \gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i + \gamma \geq 0\}$, $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \neq (0, ..., 0)$, називають півпростором простору $\mathbb{R}^n$, який обмежений гіперплощиною $L(x) + \gamma = 0$.

Означення 1.1.4. *Точка $x \in \mathbb{R}^n$, яку можна записати у вигляді $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $x^1 \in X, ..., x^k \in X$, називається афінно залежною від множини X.*

Означення 1.1.5. *Множнина $X \in \mathbb{R}^n$ називається афінно незалежною, якщо в X не існує точки x, яка афінно залежна від $X \setminus \{x\}$.*

Приклад 1.1.2. *Симплекс.*

Множину точок $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_n \geq 0\}$, де $e_0, .., e_n$ – афінно незалежні точки простору $\mathbb{R}^n$, називають n-симплексом з вершинами $e_0, .., e_n$. При $n = 0$ симплекс є точкою, $n = 1$ – відрізком, $n = 2$ – трикутником, $n = 3$ – тетраедром.

Розглянемо деякі властивості опуклих множин.

Теорема 1.1.1. [32]. *Нехай $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – довільна сім'я опуклих множин $K_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Тоді перетин цих множин $D = \bigcap\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$ також є опуклою множиною.*

Теорема 1.1.2. [32]. *Нехай $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сім'я лінійно упорядкованих за включенням опуклих множин $K_\alpha \in \mathbb{R}^n$, тобто A лінійно упорядкована і $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow K_\alpha \subset K_\beta$. Тоді множина $V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$ опукла.*

Теорема 1.1.3. [32]. *Замикання $\overline{K} = \bigcap\limits_{F \supset K} F$, де F – замкнені мно-*

жини, і внутрішність $K^o = \bigcup_{G \subset K} G$, *де* G *– відкриті множини, опуклої множини* $K \in \mathbb{R}^n$ *опуклі.*

Теорема 1.1.4. [32]. *Нехай* $X_1, ..., X_m$ *– опуклі множини,* $a_1, ..., a_m$ *– довільні дійсні числа. Тоді множина* $\sum_{i=1}^m a_i X_i = \{x | x = \sum_{i=1}^m a_i x_i, x_i \in X_i, i = 1, ..., m\}$, *яка називається лінійною комбінацією множин* $X_1, ..., X_m$, *є опуклою.*

З теореми 1.1.4 випливає, що сума і різниця опуклих множин X_1 та X_2 є опуклими множинами.

Розглянемо аналоги опуклих множин в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, де n – довільне натуральне число. При $n = 1$ цей простір буде комплексною площиною. У просторі $\mathbb{C}^n$ аналогічно, як і в просторі $\mathbb{R}^n$, означається комплексний афінний підпростір, афінно залежні точки, афінно незалежні множини. Комплексний евклідів простір комплексної розмірності m буде дійсним евклідовим простором дійсної розмірності $2m$. Комплексні прямі, m-площини і гіперплощини є афінними підпросторами комплексної розмірності 1, m та $n-1$, відповідно.

Нехай E – довільна множина простору $\mathbb{C}^n$, яка містить початок координат $(0, 0, ..., 0)$.

Означення 1.1.6. *Спряженою множиною до множини* $E \subset \mathbb{C}^n$ *називається множина* $E^* = \{w | \langle w, z \rangle \neq 1, \forall z \in E\}$.

Не менш важливим, ніж опуклість, є поняття лінійної опуклості. Лінійна опуклість множини при $n = 2$ вперше була введена у 1935 році Беенке та Пешлем і почала широко використовуватися завдяки роботам Мартіно і Айзенберга з 60-х років минулого століття.

Сформулюємо означення лінійно опуклої області та лінійно опуклого компакта (припускається, що компакт зв'язний) за Айзенбергом.

Означення 1.1.7. *Область* D *називається лінійно опуклою, якщо* *для довільної точки* z^0 *межі* ∂D *області* D *існує комплексна гіперплощина, яка проходить через* z^0 *і не перетинає* D.

Означення 1.1.8. *Множина* E *апроксимується ззовні (зсередини) послідовністю областей* D_k, $k = 1, 2, \ldots$, *якщо* $D_{k+1} \subset\subset D_k$ *(відповідно,* $D_k \subset\subset D_{k+1}$*) і* $E = \bigcap_k D_k$ *(відповідно,* $E = \bigcup_k D_k$*).*

Запис $D_{k+1} \subset\subset D_k$ означає, що замикання $\overline{D_{k+1}}$ обмежене і разом з деяким своїм околом належить D_k.

Означення 1.1.9. *Компакт* K *називається лінійно опуклим, якщо існує послідовність лінійно опуклих областей, якими компакт* K *апроксимується ззовні.*

Лінійна опуклість області D, $\Theta \in D$, (компакта K, $\Theta \in K$) тісно пов'язана з властивостями множини D^{**} (K^{**}), яка спряжена до множини D^{*} (K^{*}). Позначимо $(D^{**})_c$ (відповідно, $(K^{**})_c$) зв'язну компоненту множини D^{**} (K^{**}) (максимальну зв'язну підмножину цієї множини, тобто таку підмножину, яка не міститься строго в жодній іншій підмножині даної множини), яка містить D (K).

Теорема 1.1.5. [4]. *Лінійно опукла область* $D \in \mathbb{C}^n$, $\Theta \in D$, *співпадає зі зв'язною компонентою відкритої множини* D^{**}, *тобто* $(D^{**})_c = D$.

Теорема 1.1.6. [4]. *Лінійно опуклий компакт* $K \in \mathbb{C}^n$, $\Theta \in K$, *співпадає зі зв'язною компонентою компакта* K^{**}, *тобто* $(K^{**})_c = K$.

Означення 1.1.10. *Множина* E *називається лінійно опуклою за Мартіно, якщо* $E^{**} = E$.

Також для означення лінійної опуклості множини за Мартіно можна використовувати одну з двох властивостей, які вказані у наступній теоремі.

Теорема 1.1.7. [4]. *Кожна з двох наступних властивостей еквівалентна лінійній опуклості за Мартіно множини* E ($\Theta \in E$)*:*

1) Для довільної точки $z^0 \notin E$ існує гіперплощина, яка проходить через z^0 і не перетинає E.

2) Якщо точка z^0 така, що довільна гіперплощина, яка проходить через z^0, перетинає E, то $z^0 \in E$.

З лінійної опуклості області чи компакта за Мартіно випливає їхня лінійна опуклість за Айзенбергом. Наступна теорема стверджує, що обернене твердження неправильне.

Теорема 1.1.8. [4]. *Існують області та компакти, лінійно опуклі за Айзенбергом, які не є лінійно опуклими за Мартіно.*

Поняття лінійної опуклості за Айзенбергом та Мартіно виникли з потреб теорії голоморфних функцій багатьох комплексних змінних. У термінах лінійної опуклості за Айзенбергом наступною теоремою даються необхідні і достатні умови для розкладу голоморфної функції багатьох комплексних змінних у рівномірно збіжний ряд "простих дробів":

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{kj1} + ... + a_{kjn} + b_{kj})}\ , \tag{1.1}$$

де $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_{jkm}|^2 = 1$, $j = 1, ..., n$, $k = 1, 2, ...$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$.

Теорема 1.1.9. [4]. *Для того щоб довільну функцію $f(z)$, голоморфну на компакті M, можна було розкласти у деякому околі M, що залежить від $f(z)$, у рівномірно збіжний ряд 1.1, необхідно і достатньо, щоб оболонка голоморфності компакта M була лінійно опуклою за Айзенбергом.*

Під оболонкою голоморфності компакта M розуміють перетин однолистих оболонок голоморфності послідовності областей D_k, $k = 1, 2, ...$, які апроксимують M ззовні, при цьому кожна голоморфна в D_k функція розкладається в ряд раціональних функцій, рівномірно збіжний всередині D_k.

Якщо замість лінійної опуклості за Айзенбергом застосувати лінійну опуклість за Мартіно, то умови теореми 1.1.9 стануть тільки достатніми.

Розглянемо деякі приклади лінійно опуклих за Мартіно множин.

Приклад 1.1.3. На комплексній площині довільна множина $E \subset \mathbb{C}^1$ лінійно опукла, оскільки при $n = 1$ гіперплощиною є точка, яка має розмірність 0.

Приклад 1.1.4. Довільна опукла замкнена множина $E \subset \mathbb{C}^n$ чи опукла область є лінійно опуклими, бо через довільну точку $z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0) \notin E$ можна провести гіперплощину дійсної розмірності $2n-1$, яка не перетинає E. Вона містить гіперплощину комплексної розмірності $n-1$, що проходить через точку $z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0) \notin E$ і не перетинає E.

З даного прикладу випливає, що опуклі множини є лінійно опуклими. Наступний приклад показує, що клас лінійно опуклих множин ширший, ніж клас опуклих множин.

Приклад 1.1.5. Довільна множина $E \subset \mathbb{C}^n$, яка є декартовим добутком $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ плоских множин $E_i \subset \mathbb{C}^1$, $i = 1, ..., n$, лінійно опукла, оскільки $\mathbb{C}^n \setminus E = \bigcup\limits_i ((\mathbb{C}^1 \setminus E_i) \times \mathbb{C}^{n-1}) = \bigcup\limits_i (\underbrace{\mathbb{C}^1 \times ... \times \mathbb{C}^1}_{i-1} \times (\mathbb{C}^1 \setminus E_i) \times \underbrace{\mathbb{C}^1 \times ... \times \mathbb{C}^1}_{n-i})$, але, очевидно, не завжди буде опуклою.

Розглянемо деякі властивості лінійно опуклих множин.

Теорема 1.1.10. [9]. *Перетин довільної сукупності лінійно опуклих множин лінійно опуклий.*

Теорема 1.1.11. [9]. *Нехай E_α, $\alpha \in A$, – сім'я лінійно упорядкованих за включенням лінійно опуклих відкритих множин $E_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, тобто A – лінійно упорядкована і $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow E_\alpha \subset E_\beta$. Тоді множина $E = \bigcup\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$ лінійно опукла.*

Теорема 1.1.12. [9]. *Якщо E лінійно опукла множина, то внутрішність цієї множини $\mathrm{int}E$ лінійно опукла множина.*

Лінійно опуклі множини досліджувалися представниками красноярської школи: В. Кривоколеском, О. Южаковим [64], С. Знаменським [24], [29], [25], Л. Макаровою, Г. Худайбергановим, В. Трутнєвим [56], [57], шведської школи: Х. Кіселманом [84], [83], Л. Хьормандером [80], [81], М. Пассаре, М. Андерсоном, Р. Сігурдсоном [66] та іншими.

Застосування топологічних та геометричних методів до потреб математичного аналізу досліджували науковці Інституту математики Національної Академії наук України: Ю. Трохимчук, П. Тамразов, Ю. Зелінський, О. Бахтін, В. Шарко, А. Бондар. Зокрема, Ю. Зелінський та його учні (В. Мельник, О. Герасін, І. Момот, М. Ткачук) заклали основи лінійно опуклого аналізу, що є комплексним аналогом дійсного опуклого аналізу.

1.2. Сильно лінійно опуклі множини

Означення 1.2.1. *Множина* $E \subset \mathbb{C}^n$ *називається сильно лінійно опуклою, якщо для довільної комплексної прямої* γ *множини* $\gamma \bigcap E$ *і* $\gamma^o \setminus \gamma \bigcap E$ *зв'язні* $(\gamma^o = \gamma \bigcup (\infty))$.

Дане означення узагальнює поняття опуклості в дійсному випадку на комплексний випадок, використовуючи внутрішні властивості множини: множина $E \subset \mathbb{R}^n$ опукла, якщо її перетин з довільною дійсною прямою зв'язний. Зауважимо, що означення лінійно опуклої множини є узагальненням поняття опуклості множини $E \subset \mathbb{R}^n$, використовуючи зовнішні властивості опуклих множин – існування гіперплощини, яка не перетинає дану множину.

Наведемо деякі приклади сильно лінійно опуклих множин.

Приклад 1.2.1. Довільна опукла множина $E \subset \mathbb{C}^n$.

Приклад 1.2.2. Довільна зв'язна та однозв'язна множина, що лежить на комплексній прямій $\lambda \subset \mathbb{C}^n$.

Приклад 1.2.3. Лінійно опукла область із зв'язною гладкою межею.

Відмітимо важливу властивість сильно опуклих областей та компактів.

Теорема 1.2.1. [9]. *Сильно лінійно опуклі області (компакти) лінійно опуклі.*

Для упорядкованої сім'ї сильно лінійно опуклих множин справедлива наступна властивість.

Теорема 1.2.2. [9]. *Нехай* $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *– сім'я лінійно упорядкованих за включенням сильно лінійно опуклих множин* $E_\alpha \in \mathbb{C}^n$ *. Тоді множини* $E = \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ *і* $E' = \bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ *теж сильно лінійно опуклі.*

Сильно лінійно опуклі множини знайшли застосування при розв'язуванні ряду задач багатовимірного комплексного аналізу: розкладі голоморфної функції на дроби простішого вигляду, ніж 1.1,

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{(a^p_{p_1} z_1 + ... + a^p_{p_n} z_n + b_p)^n} \;, \tag{1.2}$$

де $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_{pm}|^2 = 1$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |A_p| < \infty$, і в узагальнений ряд Лорана [57].

1.3. Опуклі оболонки

Означення 1.3.1. *Перетин (опуклий за теоремою 1.1.1) всіх опуклих множин, які містять задану множину* $X \subset \mathbb{R}^n$ *, називається опуклою оболонкою множини* X *і позначається* $\mathrm{conv}X = \bigcap\limits_{K\supset X} K$ *де* K *– опуклі множини.*

Опуклу оболонку множини X можна записати аналітично.

Теорема 1.3.1. [32]. *Нехай* X *– довільна множина в* $\mathbb{R}^n$ *. Тоді*

$$\mathrm{conv}X = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_k \geq 0,$$

$$x^1 \in X, ..., x^k \in X,\ k = 1, 2, ...\}.$$

Приклад 1.3.1. *Опукла оболонка афінно незалежних точок.* Нехай $e_0, ..., e_m$ – афінно незалежні точки простору $\mathbb{R}^n$. Тоді m-симплекс з вершинами $e_0, ..., e_m$, який лежить в $\mathtt{aff}\{e_0, ..., e_m\}$, є опуклою оболонкою сукупності його вершин.

У теоремі 1.3.1 нічого не сказано про кількість k доданків у записі точок опуклої оболонки множини X. Теорема Каратеодорі стверджує, що $k \leq n+1$, де n – розмірність евклідового простору, який містить множину X.

Теорема 1.3.2. (Каратеодорі)[32]. У просторі $\mathbb{R}^n$ будь-яку точку з $convX$ можна подати у вигляді

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_k \geq 0, x^1 \in X, ..., x^k \in X,\ k \leq n+1.$$

1.4. Опуклі функції

Означення 1.4.1. *Функція* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, яка визначена на опуклій множині* $X \subset \mathbb{R}^n$ *називається опуклою, якщо для довільних* $x^1, x^2 \in X$ *та довільного* $\lambda \in [0, 1]$ *виконується нерівність*

$$f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Це алгебраїчне означення опуклої функції.

Геометрично опуклість функції f, заданої на множині дійсних чисел, означає, що для довільних $x^1, x^2 \in \mathbb{R}$, $x^1 < x^2$, частина графіка функції f на $[x^1, x^2]$ лежить не вище хорди, яка з'єднує точки $(x^1, f(x^1))$ та $(x^2, f(x^2))$.

Також опуклу функцію можна означити через її надграфік. Надграфіком функції f називається множина

$$\mathtt{epi}f = \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | x \in X, f(x) \leq r\}.$$

Справедливе також геометричне означення опуклої функції.

Означення 1.4.2. *Функція* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *яка визначена на опуклій множині* $X \subset \mathbb{R}^n$ *називається опуклою, якщо її надграфік опукла множина в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Зауважимо, що алгебраїчне та геометричне означення опуклої функції еквівалентні.

1.5. Гіперкомплексна опуклість

Поширення теорії лінійно опуклих множин на гіперкомплексні простори над полем кватерніонів було розпочато у роботах Г. Мкртчяна [39], [40] та Ю. Зелінського [20].

В 1985 році Г. Мкртчян [39] ввів поняття гіперкомплексно опуклої множини, аналогічне поняттю лінійно опуклої множини за Мартіно.

Наведемо означення кватерніонів та основні позначення, що будуть потрібні нам далі.

Нехай $\mathbb{H}$ — алгебра кватерніонів $h = h_0 + e_1h_1 + e_2h_2 + e_3h_3$, де $h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$, а уявні одиниці e_i, $i = 1, 2, 3$, задовольняють умови

$$e_ie_i = -1, \quad e_ie_j = -e_je_i \quad (i \neq j, \quad j = 1, 2, 3),$$

$$e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_3 = e_1, \quad e_3e_1 = e_2.$$

Будемо розглядати n-вимірний гіперкомплексний простір

$$\mathbb{H}^n := \underbrace{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \ldots \times \mathbb{H}}_{n \geq 2},$$

елементами якого є точки $x := (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{H}^n$, де $x^j := h_0^j + e_1 h_1^j + e_2 h_2^j + e_3 h_3^j \in \mathbb{H}$, $j = \overline{1,n}$. Тоді кожна точка $h = (h_0, h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^{4n}$, де $h_k = \{h_k^j\}_{j=1}^n$, $k = \overline{0,3}$, ототожнюється з точкою $x \in \mathbb{H}^n$.

Нехай E – довільна множина простору $\mathbb{H}^n$, яка містить початок координат $O = (0,0,...,0)$. Покладемо $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

Множина $E^* = \{y | \langle x, y \rangle \neq 1, \forall x \in E\}$ називається *множиною, спряженою до множини E.*

Якщо кожній точці x поставити у відповідність гіперплощину $\{y | \langle x, y \rangle = 1\}$, то спряжену множину E^* можна інтерпретувати як множину гіперплощин, які не перетинають множину E.

Означення 1.5.1. *Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається гіперкомплексно опуклою, якщо через кожну точку доповнення до цієї множини $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{H}^n \setminus E$ проходить гіперплощина*

$$L = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}^n : \sum_{j=1}^{n} c_j \left(x_j - x_j^0 \right) = 0,\ c_j \in \mathbb{H} \right\},$$

що не перетинає E, $L \cap E = \emptyset$.

У рівнянні гіперплощини є істотним порядок множення, оскільки множення в алгебрі кватерніонів некомутативне. Тому для визначеності Г. Мкртчян розглядає праві гіперплощини, тобто такі, що точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}^n$ зі змінними координатами множиться на фіксовану точку $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{H}^n$ справа. Зауважимо, що при цьому гіперкомплексна розмірність гіперплощини дорівнює $n - 1$, а дійсна розмірність — $4n - 4$.

Наведемо деякі властивості спряжених та гіперкомплексно опуклих множин.

Теорема 1.5.1. [38]. *Для довільної множини $E \subset \mathbb{H}^n$ виконується рівність $(\bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha)^* = \bigcap\limits_{\alpha} E_\alpha^*$.*

Теорема 1.5.2. [38]. *Для гіперкомплексної опуклості множини* $E \subset \mathbb{H}^n$*, яка містить початок координат, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність* $(E^*)^* = E$*.*

Теорема 1.5.3. [38]. *Для довільної множини* $E \subset \mathbb{H}^n$ *образ проекції множини* E *на гіперкомплексну пряму гомеоморфний доповненню до перетину спряженої множини* E^* *з деякою розширеною гіперкомплексною прямою, яка проходить через початок координат.*

Теорема 1.5.4. [38]. *Нехай* $E \subset \mathbb{H}^n$ *– довільна множина і* HP^1 *– проективний простір [43], утворений у просторі* $\mathbb{H}^n$ *гіперплощинами, що проходять через фіксовану* $(n-2)$*-вимірну гіперкомплексну площину* $T \bigcap E = \emptyset$*. Тоді для проекції* $\pi : E \to HP^1$ *образ* $\pi(E)$ *гомеоморфний доповненню до перетину множини* E *деякою прямою, яка не проходить через початок координат.*

Теорема 1.5.5. [20]. *Довільна гіперкомплексно опукла множина* $E \subset \mathbb{H}^n$*, що містить хоча б одну пряму, є циліндром з твірними у вигляді паралельних одна одній* m*-площин,* $1 \le m \le n$*, та не більше, ніж* $4(n-m)$*-вимірною гіперкомплексно опуклою основою* G *дійсної розмірності, яка вже не містить жодної прямої.*

1.6. Короткий огляд результатів дисертації

У другому розділі дисертаційної роботи розглядаються питання, пов'язані із класичною задачею про тінь та її узагальненнями.

Класична задача про тінь була поставлена Г. Худайбергановим у 1982 році.

Задача про тінь. *Знайти мінімальну кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі* $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1} *та радіусами, меншими від радіуса сфери, таких, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих* *куль.*

Іншими словами цю задачу можна переформулювати: *яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

При $n = 2$ задача про тінь була розв'язана Г. Худайбергановим: показано, що для кола на площині двох кругів достатньо для створення тіні. У дисертаційній роботі повністю розв'язана задача про тінь при $n > 2$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.4.1. *Для того, щоб центр $(n-1)$-сфери в n-вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$-ї кулі.*

Крім цього, у даному розділі розглянуто деякі узагальнення класичної задачі про тінь. Сформульовано задачу про тінь для півопуклості: яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) радіуса сфери, необхідна для того, щоб довільний промінь, який виходить з центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Отримано повний розв'язок цієї задачі в двовимірному евклідовому просторі.

Теорема 2.5.1. *Для того, щоб центр кола $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-півопуклій оболонці сім'ї неперетинних відкритих (замкнених) кругів* *з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Крім цього, знайдено достатню кількість куль для створення тіні при $n = 3$ у випадку півопуклості.

Теорема 2.5.3. *Для того, щоб центр двовимірної сфери у тривимірному евклідовому просторі належав 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

Узагальнено задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери: яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-опуклій оболонці сім'ї куль?

Отримано розв'язок цієї задачі для випадку $n = 2$.

Теорема 2.6.1. *Для того, щоб внутрішність кола належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з центрами на колі та радіусами, меншими від радіуса кола, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Отримано розв'язок задачі про тінь для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 2.7.1. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо n елементів цієї сім'ї.*

Теорема 2.7.2. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо $2n$ елементів цієї сім'ї.*

Ю. Б. Зелінським була сформульована задача про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах: яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній чи 1-гіперкомплексній оболонці цих куль)?

У роботі досліджено, скільки таких куль достатньо для створення тіні при $n \geq 3$ у цих просторах.

Теорема 2.8.2. *Для того, щоб центр сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$, $n \geq 3$,* *належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ *та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо* $2n$ $(4n-2)$ *куль.*

У третьому розділі дисертаційної роботи узагальнено задачу, яку розв'язали Безікович та Радо [73] при $n = 2$ (вони побудували плоску множину Лебегової міри нуль, яка містить кола довільних радіусів), у випадку n-вимірного евклідового простору, де $n \geq 2$.

Теорема 3.2.1. *В n-вимірному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *існує множина міри нуль, яка містить сфери усіх радіусів.*

У четвертому розділі дисертаційної роботи досліджено властивості h-оболонки множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, доведено такі теореми.

Теорема 4.1.1. *Якщо множина* $E \in \mathbb{H}^n$ *є h-оболонкою, то* $E = [E]$.

Теорема 4.1.2. *Для довільної множини* $E \subset \mathbb{H}^n$ *її h-оболонку можна зобразити у вигляді* $\widehat{E} = (\bigcup\limits_{\lambda}]\lambda \bigcap E^*[)^*$.

Побудовано приклад, який показує, що спряжена множина до h-оболонки не завжди буде h-оболонкою.

Введено поняття екстремального h-променя множини простору $\mathbb{H}^n$.

Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку.

Теорема 4.2.1. *Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплекної прямої, буде h-оболонкою своїх h-екстремальних точок та h-екстремальних променів $E = \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}E \bigcup \mathrm{rhext}E)$.*

Крім цього, у даному розділі побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими).

Доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин в тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 4.3.1. *Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим компактом.*

Також встановлено, що компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять тривимірних циклів, та ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт будуть $\mathbb{H}$-квазіопуклими множинами.

Теорема 4.3.2. *Компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять тривимірних циклів, є $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Наслідок 4.3.1. *Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Також наведено приклад $\mathbb{H}$-квазіопуклої множини.

Теорема 4.3.3. *Кожен ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт* E *буде* $\mathbb{H}$*-квазіопуклим.*

У п'ятому розділі дисертаційної роботи узагальнено деякі результати щодо багатозначних функцій в n-вимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ на n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$.

Введено поняття лінійно опуклої та сторого (сильно) лінійно опуклої функцій у цьому просторі. Крім цього, дано означення багатозначної афінної функції, опорної та індикаторної функції множини, які є лінійно опуклими.

Досліджено деякі властивості лінійно опуклих функцій. Зокрема, встановлено, що перетин сім'ї лінійно опуклих фукцій та внутрішність лінійно опуклої функції є лінійно опуклими функціями.

Теорема 5.2.1. *Якщо* f_α, $\alpha \in A$, *є сім'єю лінійно опуклих функцій (*A *— довільна множина індексів), то функція* $f = \bigcap\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ *є лінійно опуклою.*

Теорема 5.2.2. *Якщо* f *— лінійно опукла функція і* $E_f = E_{\mathrm{int}(f)}$, *то* $\mathrm{int} f$ *— лінійно опукла функція.*

Введено поняття спряженої функції та доведено гіперкомплексний аналог нерівності Юнга-Фенхеля.

Наведено приклади функцій, спряжених до багатозначної афінної функції та індикаторної функції множини.

Доведено ряд властивостей функцій, спряжених до функцій $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Теорема 5.3.1. *Для кожної функції* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *справедливе включення* $f \subset f^{**}$.

Теорема 5.3.2. *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

Теорема 5.3.3. *Нехай* f *— власна лінійно опукла функція. Тоді* f^* *— власна функція.*

Теорема 5.3.4. *Задано відображення* $\Lambda\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$ *, яке є гіперкомплексно лінійним гомеоморфізмом, і функцію* $g\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *. Нехай*

$$f(x) = \lambda g(\Lambda x + w_0) + \langle x, y_0 \rangle + \gamma_0,$$

де $w_0 \in \mathbb{H}^n$ *,* $y_0 \in \mathbb{H}^{n*}$ *,* $\gamma_0 \in \mathbb{H}$ *,* $\lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ *. Тоді*

$$f^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)) - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0 \rangle - \gamma_0.$$

Наслідок 5.3.2. *Якщо* f *— відкрите відображення, то* $f^*(y)$ *компактне.*

Наслідок 5.3.3. *Якщо* f *— компактне відображення, то* $f^*(y)$ *відкрите.*

Наслідок 5.3.4. *Якщо* f *— сильно гіперкомплексно опукле відображення, то* $f^*(y)$ *— ациклічне.*

Також у цьому розділі доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 5.3.5. *Нехай багатозначна функція* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *така, що* $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ *для всіх* $x \in \mathbb{H}^n$. *Тоді для виконання рівності* $f^{**} = f$ *необхідно і достатньо, щоб* f *була лінійно опуклою.*

Введено поняття однорідної функції та досліджено деякі властивості цих функцій.

Теорема 5.3.6. *Нехай* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *є власною лінійною опуклою однорідною функцією і* $f(\Theta) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus 0$. *Тоді* f *є опорною функцією деякої множини.*

Наслідок 5.3.1. *Якщо однорідна лінійно опукла функція* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *є відмінною від афінної, то* $f^*(y) = \delta(y|E_{f^*})$.

Теорема 5.3.7. *Якщо* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *– однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{y \in E_{f^*}} \langle x, y \rangle.$$

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 5.3.8. *Нехай* $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, *є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*

$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

1.7. Висновки

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено попередній огляд літератури, викладено основні ідеї та принципи, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

Крім цього, зроблено короткий огляд результатів дисертації, що виносяться на захист.

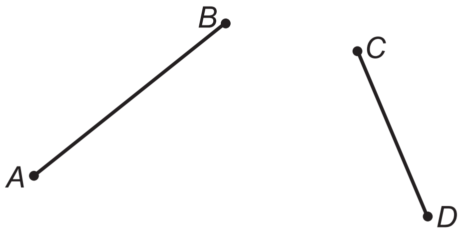
РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧА ПРО ТІНЬ

2.1. Узагальнення поняття опуклості

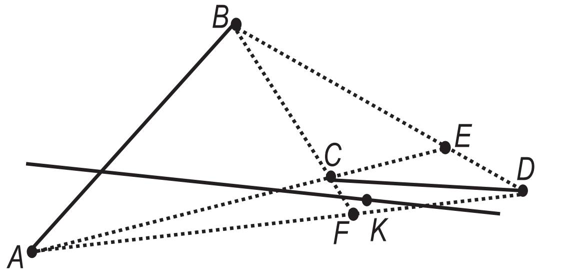
Означення 2.1.1. *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називаеться m-опуклою відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.*

Означення 2.1.2. *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називаеться m-опуклою, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, яка належить доповненню до цієї множини.*



Мал. 2.1.1.

Прикладом 1-опуклої множини в просторі $\mathbb{R}^2$ є множина, зображена на малюнку 2.1.1.



Мал. 2.1.2.

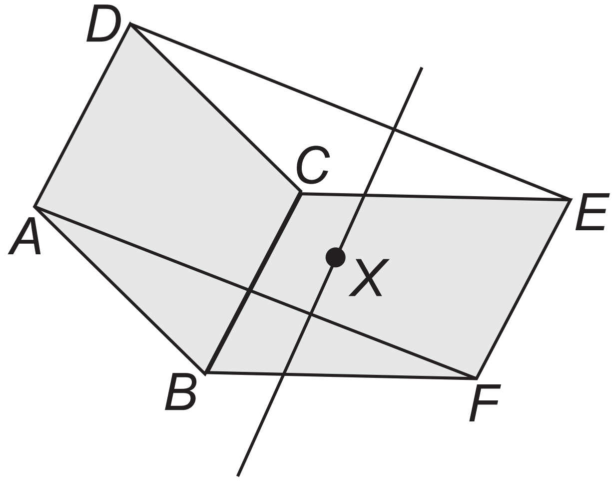
Множина, яка є об'єднанням відрізків AB і CD (малюнок 2.1.2), не є 1-опуклою. Щоб показати це, розглянемо 1-опуклу оболонку відрізків AB і CD – об'єднання трикутників CDE, CDF. Візьмемо довільну точку K, що належить якомусь з цих трикутників. Тоді довільна пряма, яка проходить через цю точку, буде перетинати принаймні один з відрізків AB або CD.

Клас m-опуклих множин включає в себе лінійно опуклі множини. Для лінійно опуклої множини $E \subset \mathbb{R}^n$ m-вимірна площина, де $m = n-1$, є гіперплощиною.

Твердження 2.1.1.[9]. *Якщо* E_1 *і* E_2 *– відповідно k-опукла та m-опукла множини, причому* $k + m \geq n$, *то множина* $E = E_1 \bigcup E_2$ *буде* $(k + m - n)$*-опуклою.*

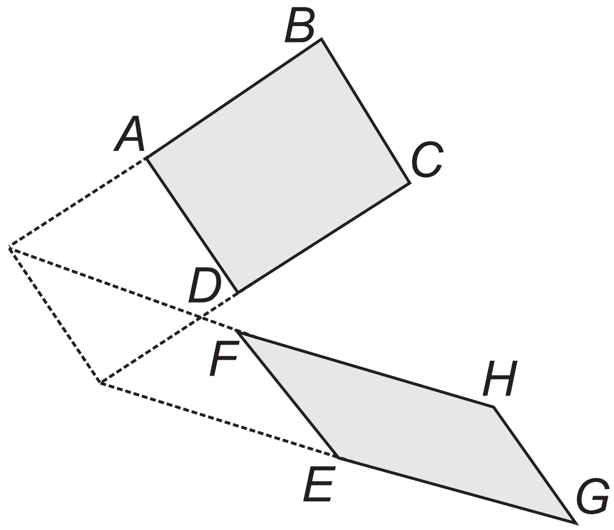
Твердження 2.1.2.[9]. *Якщо* E_1 *і* E_2 *– відповідно k-опукла та m-опукла множини, причому* $k \leq m$, *то множина* $E = E_1 \bigcap E_2$ *буде k-опуклою.*

Зауважимо, що клас m-опуклих множин містить в собі клас $(m+1)$-опуклих множин, тобто задане означенням 2.1.2 розбиття множин на класи упорядковане.



Мал. 2.1.3.

На малюнку 2.1.3 зображена множина, яка є об'єднанням паралелограмів $ABCD$ та $BCEF$ зі спільною стороною BC в просторі $\mathbb{R}^3$. Розглянемо 2-опуклу оболонку цієї множини. Це трикутна призма з основами ABF та DCE. Пряма, паралельна до бічних граней цієї призми, яка проходить через довільну точку X, що належить внутрішності призми, не перетинає жодного з паралелограмів $ABCD$ та $BCEF$. Але кожна площина, проведена через точку X, перетинає принаймні один з цих паралелограмів. Отже, об'єднання паралелограмів $ABCD$ та $BCEF$ зі спільною стороною BC 1-опукла, але не 2-опукла множина.



Мал. 2.1.4.

На малюнку 2.1.4 зображено множину, що є об'єднанням паралелограмів $ABCD$ та $EFHG$ в просторі $\mathbb{R}^3$. Вона як 1-опукла, так і 2-опукла, оскільки через довільну точку доповнення до цієї множини можна провести як пряму, так і площину, які не перетинають жодного з цих паралелограмів.

Твердження 2.1.3.[9]. *Довільну m-опуклу множину E можна зобразити як перетин циліндрів виду $E = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}\pi(E)$, де π – проекція E на $(n-m)$-вимірну площину.*

Ця теорема — аналог твердження про те, що опуклий компакт є перетином півпросторів, які його містять.

Твердження 2.1.4. *Нехай* $\{E_i\}_{i\in I}$ *– довільна сім'я m-опуклих множин (I – деяка скінченна чи зліченна множина індексів). Тоді перетин цих множин* $E = \bigcap\limits_{i\in I} E_i$ *є m-опуклою множиною.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, тоді ця точка не належить принаймні одній множині E_i. Оскільки E_i — m-опукла множина, то знайдеться m-вимірна площина, яка проходить через точку x і не перетинає множину E_i. Тоді ця площина не буде перетинати і множину E. Твердження доведене.

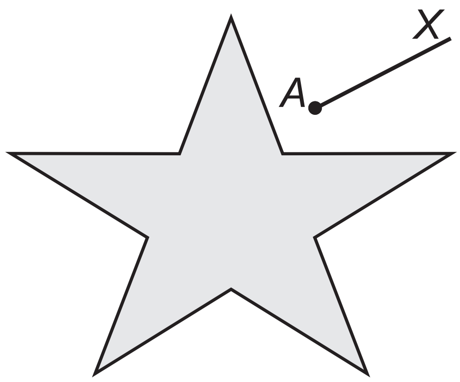
Твердження 2.1.4 показує, що m-опуклість множини задовольняє аксіому опуклості. Тому для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-опуклу множину, яка містить E, і називати її m-опуклою оболонкою множини E.

Означення 2.1.3. *m-опуклий (за твердженням 2.1.4) перетин всіх m-опуклих множин, які містять задану множину* $E \subset \mathbb{R}^n$, *називається m-опуклою оболонкою множини E.*

Розглянемо більш загальні щодо попередніх означень об'єкти.

Означення 2.1.4. *Множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *називається m-півопуклою відносно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $m > 0$, *якщо знайдеться m-вимірна півплощина L, яка проходить через цю точку,* $x \in L$, *і не перетинає дану множину,* $L \bigcap E = \emptyset$.

Означення 2.1.5. *Множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ *називається m-півопуклою, якщо вона m-півопукла відносно кожної точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, *яка належить доповненню до цієї множини.*



Мал. 2.1.5.

Прикладом 1-півопуклої, але не 1-опуклої, множини є множина, зображена на малюнку 2.1.5. Через довільну точку A, що не належить цій множині можна провести промінь AX, який не перетинає дану множину (але знайдуться точки доповнення до цієї множини такі, що довільна пряма, яка проходить через них, перетне дану множину).

Аналогічно, як і для m-опуклих, для m-півопуклих множин виконується аксіома опуклості.

Твердження 2.1.5. *Нехай* $\{E_i\}_{i\in I}$ *– довільна сім'я m-півопуклих множин (I – деяка скінченна чи зліченна множина індексів). Тоді перетин цих множин* $E = \bigcap\limits_{i\in I} E_i$ *є m-півопуклою множиною.*

Отже, для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ завжди знайдеться мінімальна m-півопукла множина, яка є перетином всіх m-півопуклих множин, які містять E.

Означення 2.1.6. *m-півопуклий (за твердженням 2.1.5) перетин всіх m-півопуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-півопуклою оболонкою множини E.*

Розглянемо аналоги m-опуклих множин в комплексному та гіперкомплексному просторах.

Означення 2.1.7. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ називається m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою відносно точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E$ $(x \in \mathbb{H}^n \setminus E)$, $m > 0$, якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіпер-*

комплексна) площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \bigcap E = \emptyset$.

Означення 2.1.8. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ називається m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою, якщо вона m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E$ $(x \in \mathbb{H}^n \setminus E)$, яка належить доповненню до цієї множини.*

Аналогічно дійсному випадку для довільної множини $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ можна розглядати мінімальну m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклу множину, яка містить E і називати її m-комплексною (m-гіперкомплексною) оболонкою множини E.

Означення 2.1.9. *Перетин всіх m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$, називається m-комплексною (m-гіперкомплексною) оболонкою множини E.*

2.2. Постановка задачі

Частковим випадком належності точки 1-опуклій оболонці об'єднання деякого набору куль є задача про тінь, поставлена Г. Худайбергановим у 1982 році [59].

Задача про тінь. *Знайти мінімальну кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, таких, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.*

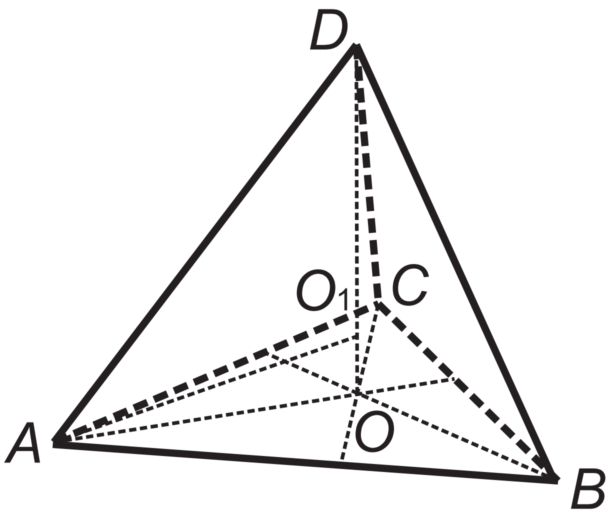
Іншими словами цю задачу можна сформулювати так: *яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї* *цих куль?*

Коротко цю задачу формулюють так: *яка мінімальна кількість таких куль створить тінь для центра сфери?*

Якщо у сферу вписати правильний n-вимірний симплекс та розмістити кулі з радіусами, величини яких дорівнюють половині довжини ребра симплекса, то ця система куль створить тінь для центра сфери. Однак при цьому порушиться одна умова – кулі будуть попарно дотикатися одна до одної. Нехай a – половина довжини ребра правильного симплекса. Для досить малого числа ε розглянемо сім'ю з $n+1$ куль, величини радіусів яких дорівнюють $a-\varepsilon, a-\varepsilon/2, a-\varepsilon/2^2, \ldots, a-\varepsilon/2^n$, відповідно. Розмістимо ці кулі так, щоб вони попарно дотикалися одна до одної, а їх центри утворювали симплекс, який мало відрізняється від правильного. Через центри цих куль проходить єдина сфера, центр якої належить 1-опуклій оболонці сім'ї куль. Внутрішності цих куль утворюють сім'ю з $(n+1)$-ї відкритої кулі, для якої центр сфери належить 1-опуклій оболонці цієї сім'ї. Якщо ж вихідні замкнені кулі трішки зменшити, то в силу неперервності, очевидно, що $(n+1)$-ї замкненої кулі достатньо для створення тіні.

Обчислимо, в якому відношенні центр сфери S^{n-1} ділить висоту правильного n-вимірного симплекса, вписаного в цю сферу, починаючи з вершини. Для цього знайдемо радіуси $(n-1)$-вимірних сфер, вписаних в симплекс та описаних навколо нього. Загальновідомо, що при $n = 2$ радіуси кіл, вписаних в правильний трикутник і описаних навколо нього, рівні $r = a\sqrt{3}/6$, $R = a\sqrt{3}/3$, відповідно, де a – довжина сторони трикутника. У цьому випадку дане відношення становить $2:1$.

Знайдемо відповідні радіуси та відношення при $n = 3$.



Мал. 2.2.1.

Розглянемо малюнок 2.2.1. Нехай довжина ребра симплекса дорівнює a. Тоді $AO = a\sqrt{3}/3$. $H = OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - a^2/3} = a\sqrt{6}/3$. Позначимо $\angle ADO = \alpha$. З прямокутного $\triangle ADO$ $\mathtt{sin}\ \alpha = AO/AD = \sqrt{3}/3$, $\mathtt{cos}\ \alpha = OD/AD = \sqrt{6}/3$. $AO_1 = DO_1$ – радіус двовимірної сфери, описаної навколо тетраедра $ABCD$. Знайдемо цей радіус з рівнобедреного $\triangle ADO_1$. За теоремою синусів $AO_1/\mathtt{sin}\ \alpha = AD/\mathtt{sin}(2\pi - 2\alpha)$; $AO_1/\mathtt{sin}\ \alpha = a/\mathtt{sin}\ 2\alpha$; $R = AO_1 = a/2\mathtt{cos}\ \alpha = 3a/2\sqrt{6} = a\sqrt{6}/4$. $r = OO_1 = OD - O_1D = a\sqrt{6}/3 - a\sqrt{6}/4 = a\sqrt{6}/12$ – радіус двовимірної сфери, вписаної в тетраедр $ABCD$. Отже, центр двовимірної сфери, вписаної в правильний тривимірний симплекс, ділить висоту симплекса у відношенні $R/r = 3:1$, починаючи з вершини.

Використовуючи математичну індукцію, покажемо, що радіуси $(n-1)$-вимірних сфер, описаних навколо правильного симплекса і вписаних в нього, рівні

$$R = \frac{a\sqrt{2n(n+1)}}{2(n+1)},$$

$$r = \frac{a\sqrt{2n(n+1)}}{2n(n+1)},$$

відповідно, а центр цих сфер ділить висоту симплекса у відношенні $n:1$, починаючи з вершини.

При $n=2$

$$R=\frac{a\sqrt{2\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 3}=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\frac{a\sqrt{2\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ R/r=2:1.$$

При $n=3$

$$R=\frac{a\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 4}=\frac{a\sqrt{6}}{4},\ r=\frac{a\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{a\sqrt{6}}{12},\ R/r=3:1.$$

Нехай ці формули справедливі при $n=k$. Доведемо їх при $n=k+1$.

$$H_{k+1}=\sqrt{a^2-R_k^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2k}{2(k+1)}}=\frac{a\sqrt{k+2}}{\sqrt{2(k+1)}}=\frac{a\sqrt{2(k+1)(k+2)}}{2(k+1)},$$

$$\texttt{sin}\ \alpha=\frac{R_k}{a}=\frac{\sqrt{2k(k+1)}}{2(k+1)},$$

$$\texttt{cos}\ \alpha=\frac{H_{k+1}}{a}=\frac{\sqrt{2(k+1)(k+2)}}{2(k+1)}.$$

$$R_{k+1}=\frac{a}{2\texttt{cos}\ \alpha}=\frac{a\sqrt{k+1}}{\sqrt{2(k+2)}}=\frac{a\sqrt{2(k+1)(k+2)}}{2(k+2)}.$$

$$r_{k+1}=H_{k+1}-R_{k+1}=\frac{a\sqrt{2(k+1)(k+2)}}{2(k+1)}-\frac{a\sqrt{2(k+1)(k+2)}}{2(k+2)}=$$

$$=\frac{a\sqrt{2(k+1)(k+2)}}{2(k+1)(k+2)}.$$

$$\frac{R_{k+1}}{r_{k+1}}=\frac{k+1}{1}.$$

Лема 2.2.1. *Якщо множина* $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}E_i\subset\mathbb{R}^n$ *є об'єднанням* $n-1$ *опуклих множин, то* E *– 1-опукла множина.*

Доведення. Оскільки кожна з множин E_i – опукла, то для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n$ існує гіперплощина L_i, яка проходить через цю точку і не перетинає множину E. Перетин цих гіперплощин $L = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_i$ містить шукану пряму. Отже, E – 1-опукла множина. Лема доведена.

З цієї леми випливає, що довільної сукупності з $(n-1)$-ї кулі недостатньо для створення тіні. Тому точне значення необхідної кількості куль n або $n+1$.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Наслідок 2.2.1. *Якщо множина $E = \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i \subset \mathbb{R}^n$ є об'єднанням $m-1$ опуклих множин, де $m < n$, то E – $(n-m)$-опукла множина.*

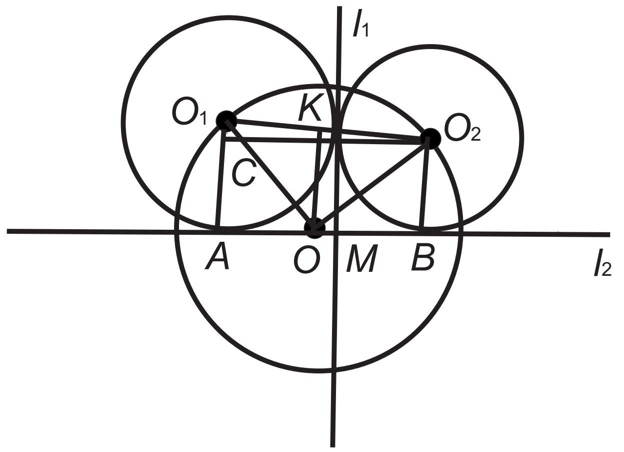
2.3. Задача про тінь для кругів з центрами на колі

При $n = 2$ ця задача була розв'язана Г. Худайбергановим. Він показав, що для кола на площині двох кругів необхідно і достатньо для створення тіні. Також було доведено, що при $n > 2$ мінімальна кількість куль дорівнює n. Проте дане доведення виявилося помилковим.

Використовуючи неперервність зміни прямих, наведемо інше розв'язання задачі про тінь при $n = 2$.

Теорема 2.3.1. *Існують два неперетинні замкнені (відкриті) круги з центрами на одиничному колі та радіусами, меншими одиниці, які забезпечують належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих кругів.*

Доведення. Дослідимо 1-опуклу оболонку об'єднання двох кругів K_1, K_2 з центрами відповідно O_1, O_2 та радіусами r_1, r_2 у випадку $n = 2$. Для цієї пари проведемо дотичну пряму l_1, яка розділяє ці круги, та дотичну пряму l_2, для якої обидва круги знаходяться в одній півплощині, що задається цією прямою. Розглянемо граничний випадок, коли круги дотикаються один до одного і пряма l_2 проходить через центр кола S^1. При цьому пряма l_1 проходить через точку дотику кругів. Нехай для радіусів кругів справедлива нерівність $1 \geq r_1 \geq r_2$.



Мал. 2.3.1.

На малюнку 2.3.1 розглянемо прямокутні трикутники $\triangle O_1KO$ та $\triangle O_2KO$. За теоремою Піфагора з одного боку $OK^2 = OO_1^2 - O_1K^2 = 1 - (r_1 - OM)^2$, а з іншого $OK^2 = OO_2^2 - O_2K^2 = 1 - (r_2 + OM)^2$, де OM – відстань від центра кола O до прямої l_1. Позначимо $OM = d$. Тоді $1 - (r_1 - d)^2 = 1 - (r_2 + d)^2$. Звідси отримуємо, що $2(r_2 + r_1)d = r_1^2 - r_2^2$ і $d = (r_1 - r_2)/2$.

Справедливі наступні рівності $O_1C = r_1 - r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$. З прямокутного $\triangle O_1O_2C$ за теоремою Піфагора $O_2C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1C^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Звідси $AB = O_2C = 2\sqrt{r_1r_2}$. Таким чином, точки дотику кругів вирізають з прямої l_2 відрізок довжиною $2\sqrt{r_1r_2}$, а відстань від центра кола до прямої l_1 дорівнює $(r_1 - r_2)/2$. Дізнаємось, в якому випадку останню відстань можна зробити максимальною. Для цього покладемо $r_1 = 1$ і знайдемо значення r_2, використовуючи те, що точка дотику круга K_1 з прямою l_2 співпадає з центром кола O. Отримаємо рівність $2\sqrt{r_2} = \sqrt{1 - r_2^2}$. Далі все зводиться до квадратного рівняння $r_2^2 + 4r_2 - 1 = 0$, один з коренів якого $r_2 = \sqrt{5} - 2$ показує, що величина максимально можливого відхилення прямої l_1 від центра кола O дорівнює $(3-\sqrt{5})/2$. Тепер стає зрозумілим, чому ми вибрали пряму l_2 такою, що проходить через центр кола. Збільшення радіуса круга K_2 зменшило б шукану відстань. Однак вибрані круги не задовольняють умов задачі, тому що величина радіуса більшого круга дорівнює одиниці і круги дотикаються. Користуючись неперервністю зміни прямої, ми можемо трішки зменшити радіус великого круга та розсунути центри кругів так, щоб пряма l_1 не проходила через центр кола O. Зауважимо, що круги можна брати відкритими. При цьому ми зможемо як завгодно близько наблизитися до знайденої константи $(3-\sqrt{5})/2$. Звідси і випливає доведення теореми.

Наслідок 2.3.1. *Існують дві неперетинні замкнені (відкриті) кулі з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, які забезпечують належність центра сфери $(n-1)$-опуклій оболонці сім'ї цих куль.*

Доведення. Нехай в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ задана сфера S^{n-1} з центром в точці O. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що радіус сфери дорівнює одиниці. Розглянемо дві замкнені кулі з центрами O_1, O_2 на цій сфері та радіусами r_1, r_2. Дослідимо $(n-1)$-опуклу оболонку об'єднання цих куль. Проведемо дотичну гіперплощину α_1, що розділяє кулі, та дотичну гіперплощину α_2, таку що обидві кулі знаходяться в одному півпросторі, який задається цією гіперплощиною. Розглянемо граничний випадок, коли кулі дотикаються та гіперплощина α_2 проходить через центр сфери S^{n-1}. При цьому гіперплощина α_1 проходить через точку дотику куль. Нехай для радіусів куль справедлива нерівність $1 \geq r_1 \geq r_2$.

Нехай A_1 і A_2 – точки дотику куль з центрами відповідно O_1, O_2 до гіперплощини α_2, OX – відстань від центра сфери O до відрізка O_1O_2, який з'єднує центри куль, OY – відстань від точки O до гіперплощини

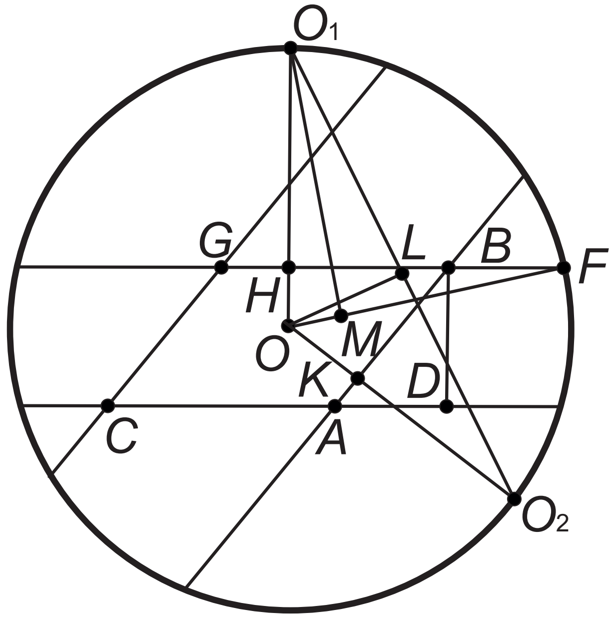
α_1. З прямокутного трикутника $\triangle O_1XO$ за теоремою Піфагора отримаємо $OX^2 = OO_1^2 - O_1X^2 = 1 - (r_1 - OY)^2$. Аналогічно з прямокутного трикутника $\triangle O_2XO$ $OX^2 = OO_2^2 - O_2X2 = 1 - (r_2 + OY)^2$. Позначимо $OY = d$. Маємо рівність $1 - (r_1 - d)^2 = 1 - (r_2 + d)^2$, з якої $2(r_2 + r_1)d = r_1^2 - r_2^2$ і $d = (r_1 - r_2)/2$.

Нехай O_2Z – відстань від центра кулі O_2 до відрізка O_1A_1. Справедливі наступні рівності $O_1Z = r_1 - r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$. З прямокутного $\triangle O_1O_2Z$ за теоремою Піфагора $O_2Z = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1Z^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Звідси $A_1A_2 = O_2Z = 2\sqrt{r_1r_2}$. Таким чином, відстань між точками дотику куль A_1 і A_2 до гіперплощини α_2 дорівнює $2\sqrt{r_1r_2}$, а від центра сфери S^{n-1} до гіперплощини α_1 – $(r_1 - r_2)/2$. Знайдемо радіуси куль, для яких остання відстань буде максимальною. Покладемо $r_1 = 1$. При цьому точка дотику A_1 кулі з центром O_1 з гіперплощиною α_2 співпадає з центром сфери O. З одного боку, $OA_2 = 2\sqrt{r_2}$, а з іншого за теоремою Піфагора $OA_2 = \sqrt{OO_2^2 - O_2A_2^2} = \sqrt{1 - r_2^2}$. Отримаємо рівність $2\sqrt{r_2} = \sqrt{1 - r_2^2}$. Піднісши обидві частини даного рівняння до квадрату, отримаємо квадратне рівняння $r_2^2 + 4r_2 - 1 = 0$, один з коренів якого дорівнює $r_2 = \sqrt{5} - 2$. Звідси випливає, що максимальна відстань від центра сфери O до гіперплощини α_1 становить $(3 - \sqrt{5})/2$. Ми отримали, що величина радіуса більшої кулі дорівнює одиниці і кулі дотикаються. Тобто вибрані кулі не задовольняють умови задачі. Користуючись неперервністю зміни гіперплощини, ми можемо трішки зменшити радіус більшої кулі та розсунути центри куль так, щоб гіперплощина α_1 не проходила через центр сфери O. Зауважимо, що кулі можна брати відкритими. При цьому ми зможемо як завгодно близько наблизитися до знайденої величини $(3 - \sqrt{5})/2$. Звідси і випливає доведення наслідку.

2.4. Основна теорема

Теорема 2.4.1. *Для того щоб центр $(n-1)$-сфери в n-вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$-ї кулі.*

Доведення. Покажемо, що у випадку двовимірної сфери у тривимірному евклідовому просторі трьох куль недостатньо для створення тіні в центрі сфери. Точки простору будемо позначати координатами (x, y, z). Не порушуючи загальності, припустимо, що сфера з центром в початку координат має радіус, величина якого дорівнює одиниці, і, що трьох відкритих куль достатньо для створення тіні в центрі сфери. Очевидно, що ці кулі повинні мати різні радіуси. Якщо радіуси куль були б рівними і кулі би дотикалися, то через точку їх дотику можна було б провести двовимірну площину, яка може перетнути тільки третю кулю. Тому згідно геометричної форми теореми Гана-Банаха [61] в цій площині через центр сфери проходить пряма, яка не перетинає жодної кулі. Припустимо, що для радіусів куль мають місце наступні нерівності $1 \geq r_1 > r_2 > r_3$. Ми можемо вважати, що кулі попарно дотикаються одна одної, в іншому разі ми могли б збільшити їх з тим же ефектом для тіні. Розмістимо центр кулі з найбільшим радіусом в точці $(0, 0, 1)$.



Мал. 2.4.1.

Через центри куль B_1, B_2 та початок координат проведемо двовимірну площину L (малюнок 2.4.1). Кожна з цих куль породжує круговий конус з центром в початку координат такий, що довільна пряма, яка міститься всередині конуса, перетинає цю кулю. Цей конус перетинає сферу по двох колах, які можна задати парою паралельних площин, що містять ці кола. В площині L їм ставляться у відповідність дві прямі GB і CA. Смуга між цими площинами вирізає із сфери частину точок, таких що довільна пряма, яка проходить через центр сфери і таку точку, не перетинає відповідну кулю. Аналогічно для другої кулі в площині L отримаємо дві прямі CG и AB.

Перетин двох смуг, які відповідають цим кулям, є циліндром в просторі $\mathbb{R}^3$, в основі якого лежить паралелограм $ABGC$. Цей циліндр вирізає на сфері множину тих точок, для яких кожна пряма, що проходить через центр сфери і таку точку, не перетинає обидві кулі. Тепер очевидно, що радіус третьої кулі, необхідної для створення тіні, не може бути меншим, ніж половина діагоналі BC цього паралелограма. Пряма OF дотикається до кулі B_1 в точці M, тому з рівності трикутників OO_1M і OHF випливає, що довжина HF дорівнює r_1. З прямокутного трикутника OHF за теоремою Піфагора отримаємо, що $OH = \sqrt{OF^2 - HF^2} = \sqrt{1 - r_1^2}$. Звідси випливає, що відстань між прямими GB і CA дорівнює $BD = 2\sqrt{1 - r_1^2}$. Оскільки кулі B_1 і B_2 дотикаються, то $O_1O_2 = r_1 + r_2$. У рівнобедреному трикутнику OO_1O_2 проведемо висоту OL. У прямокутному трикутнику OO_1L $\angle O_1OL = \mathtt{arcsin}(r_1 + r_2)/2$. Тому $\angle O_1OO_2 = 2\mathtt{arcsin}(r_1 + r_2)/2$.

Відрізок OO_1 перпендикулярний прямій GB, а відрізок OO_2 перпендикулярний прямій AB. У чотирикутнику $OHBK$ $\angle OHB = \angle OKB = 90°$, $\angle HOK + \angle HBK = 180°$. Тому $\angle O_1OO_2 = 180° - \angle GBA = \angle CAB$, $\angle BAD = 180° - \angle CAB = 180° - \angle O_1OO_2$, $\mathtt{sin}\angle BAD = \mathtt{sin}(180° - \angle O_1OO_2) = \mathtt{sin}\angle O_1OO_2 = \mathtt{sin}(2\mathtt{arcsin}(r_1 + r_2)/2)$. Знайдемо сторони паралелограма $ABGC$. З прямокутного трикутника ABD

$$AB = BD/\mathtt{sin}\angle BAD = 2\sqrt{1 - r_1^2}/\mathtt{sin}(2\mathtt{arcsin}(r_1 + r_2)/2).$$

Аналогічно $AC = 2\sqrt{1 - r_2^2}/\mathtt{sin}(2\mathtt{arcsin}(r_1 + r_2)/2)$.

Тепер за теоремою косинусів отримуємо

$$OB = \frac{\sqrt{2 - r_1^2 - r_2^2 - 2\sqrt{1 - r_1^2}\sqrt{1 - r_2^2}\cos(2\arcsin((r_1 + r_2)/2))}}{\sin 2(\arcsin((r_1 + r_2)/2))}. \quad (2.1)$$

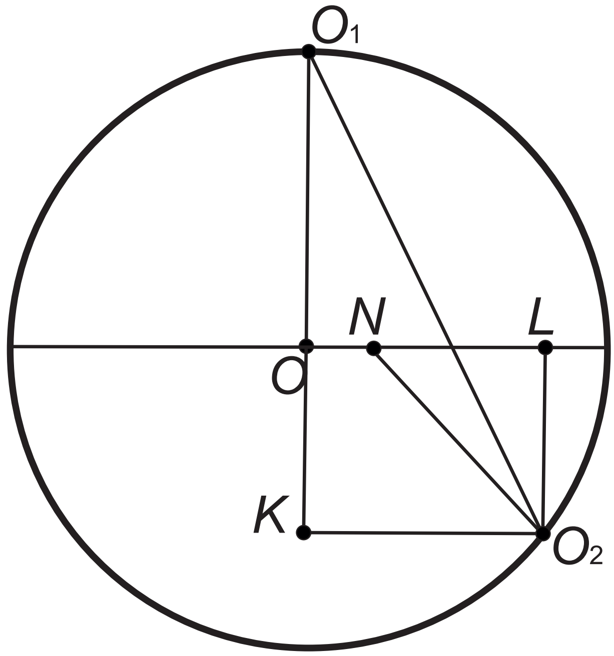
Проведемо числові оцінки. Оскільки з усіх вписаних в коло трикутників максимальний периметр має правильний трикутник, то сума радіусів куль не перевищує півпериметра правильного трикутника, вписаного в одиничне коло

$$r_1 + r_2 + r_3 \leq 1.5\sqrt{3} \approx 2.598. \quad (2.2)$$

Радіус кулі B_2 не може бути меншим, ніж $\sqrt{2}/2$, інакше з нерівності $r_2 > r_3$ випливає, що довільна пряма, яка проходить через початок координат та лежить в площині xOy, не зможе перетнути кулі B_2 і B_3, а куля B_1 з цією площиною не перетинається.

Використовуючи програму Derive з 2.1 отримуємо, що при радіусі $r_2 < 0.77$ радіус $r_3 > 0.77$. Відповідно, не виконується нерівність

$r_2 > r_3$. Якщо ж $r_2 > 0.85$, то за допомогою програми Derive отримаємо нерівність $r_1 + r_2 + r_3 > 2.6$, що суперечить 2.2. Для суми радіусів куль отримаємо нерівності $1.54 < 2r_2 < r_1 + r_2 \le 1 + r_2 < 1.85$.



Мал. 2.4.2.

Далі отримаємо наступні оцінки (малюнок 2.4.2)

$$\cos\angle KO_1O_2 = \frac{O_1O_2}{2OO_1} = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

$$O_1K = O_1O_2\cos\angle KO_1O_2 = (r_1 + r_2)\frac{r_1 + r_2}{2},$$

$$1,1858 \le O_1K = \frac{(r_1 + r_2)^2}{2} \le 1,7113,$$

$$0,9826 \ge KO_2 = OL = (r_1 + r_2)\sqrt{1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{4}} \ge 0,7029,$$

$$0,1858 \le OK = O_1K - 1 = LO_2 \le 0,7113,$$

$$0,4654 \le NL = \sqrt{NO_2^2 - LO_2^2} = \sqrt{r_2^2 - LO_2^2} \le 0,5216.$$

Відрізок NL дорівнює радіусу кола, по якому куля B_2 перетинає площину xOy. Точка L – центр цього кола. Відношення NL/OL задає синус половини кута α, з якого це коло видно з початку координат.

Для $\mathtt{sin}(\alpha/2)$ маємо оцінку зверху $\mathtt{sin}(\alpha/2) = NL/OL \leq 0,6621$, тоді $\mathtt{arcsin}(\alpha/2) = \mathtt{arcsin}(0,6621) \leq 0,7236$. Тому радіанна міра кута α не перевищує 1,4472.

Оскільки радіус кулі B_2 менший, ніж радіус кулі B_3, то одержуючи аналогічні оцінки, отримаємо, що коло, по якому куля B_3 перетинається з площиною xOy, теж видно з початку координат під кутом, радіанна міра якого не перевищує 1,4472. Обидва ці кола разом закривають кут, радіанна міра якого не перевищує 2,8945. Цей кут є меншим, ніж розгорнутий кут π. Тому в площині xOy існує пряма, яка проходить через початок координат і не перетинає жодної з трьох куль. Отже, для створення тіні в центрі сфери при $n = 3$ необхідно чотири кулі. При $n > 3$ необхідна кількість куль отримується застосуванням математичної індукції. Для цього розглянемо гіперплощину, яка проходить через центр сфери і не перетинає одну з куль. Для створення тіні в початку координат для куль цієї гіперплощини, згідно припущення індукції, необхідно n куль. Тому, додаючи кулю, яка не перетинає вибрану гіперплощину, отримуємо, що для створення тіні в початку координат необхідна $(n + 1)$-а куля. Теорема доведена.

2.5. Задача про тінь для півопуклості

Розглянемо аналог задачі про тінь для півопуклості, яка є частковим випадком належності точки 1-півопуклій оболонці деякої сім'ї куль.

Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільний промінь, який виходить з центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Наступна теорема дає розв'язок цієї задачі для випадку $n = 2$.

Теорема 2.5.1. *Для того, щоб центр кола* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *належав 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Доведення. Впишемо в коло гострокутний трикутник з нерівними сторонами $a > b > c$. У вершинах цього трикутника розмістимо три замкнені круги радіусів, відповідно, $p - a$, $p - b$, $p - c$, де $p = (a + b + c)/2$. Тоді, очевидно, що 1-півопукла оболонка об'єднання цих кругів складається з кругів та внутрішності трикутника. Якщо центр кола не належить об'єднанню кругів, то така конструкція забезпечить тінь і в цій точці. Користуючись неперервністю, трішки зменшимо радіуси цих кругів. Таким чином, отримаємо, що при $n = 2$ три замкнені (відкриті) круги вирішують задачу про тінь.

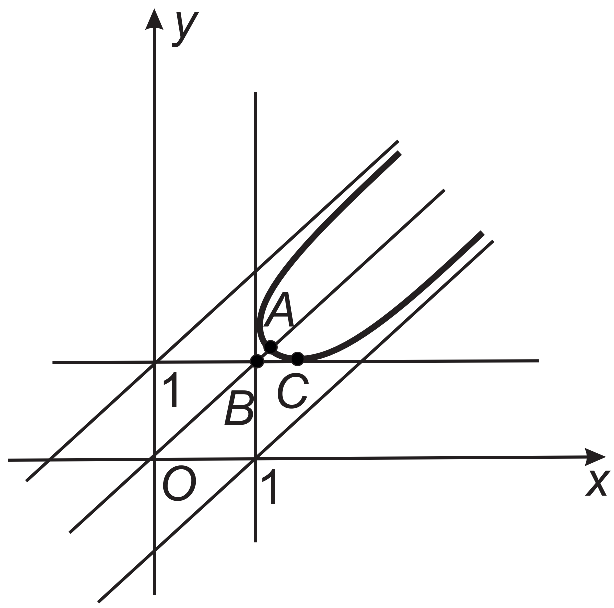
Дослідимо співвідношення сторін трикутника, які забезпечують розв'язок даної задачі. З нерівностей $p - a < p - b < p - c$ випливає, що радіус описаного кола повинен перевищувати число $p - c$. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що сторона $c = 1$ та справедливі нерівності $a > b > 1$. Інші трикутники з потрібною властивістю можна отримати перетворенням подібності. Для радіуса кола, описаного навколо трикутника, справедлива формула

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{(a+b+1)(-a+b+1)(a-b+1)(a+b-1)}}.$$

Замінюючи сторони трикутника змінними $x = a$, $y = b$, отримаємо, що координати потрібних сторін повинні знаходитися всередині криволінійного трикутника ABC, двома сторонами якого є прямі $x = y$, $y = 1$, а третя крива задається неявним рівнянням

$$x + y - 1 = \frac{2xy}{\sqrt{(x+y+1)(-x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)}}.$$



Мал. 2.5.1.

Побудовою графіка в Derive (малюнок 2.5.1) переконуємося, що множина таких точок непорожня. Теорема доведена.

Із збільшенням розмірності простору задача про тінь для півопуклості ускладнюється. Покажемо, що існують сім'ї опуклих множин, 1-півопукла оболонка яких співпадає з такою сім'єю.

Лема 2.5.1. *Якщо множина K є об'єднанням n опуклих компактів K_i, $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$, то $H^k(K) = 0$, $k \geq n-1$ при $n > 1$, ($H^k(K)$ – k-вимірні групи когомологій компакта K [45]).*

Доведення. Доведемо теорему методом математичної індукції. Об'єднання двох опуклих компактів не може бути носієм жодного коциклу в додатних розмірностях [101]. Тому теорема справедлива для $n = 2$. Припустимо, що теорема виконується при $m = n-1$. Доведемо її для випадку $m = n$. Застосуємо точну когомологічну послідовність Майєра-В'єторіса

[45] для тріади
$$(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i, K_n).$$

Випишемо три її послідовні члени
$$H^j(\bigcup_{i=1}^{n-1}(K_i \bigcap K_n)) \to H^{j+1}(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \to H^{j+1}(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i) \bigoplus H^{j+1}(K_n).$$

Множини $K_i \bigcap K_n$ опуклі. Тому за припущенням індукції перший член послідовності нульовий при $j \geq n-2$. Те ж саме випливає і для обох доданків третього члена послідовності. Тепер в силу точності послідовності отримуємо твердження леми.

Теорема 2.5.2. *Кожна множина* $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ *в* $\mathbb{R}^n$*, де всі множини* K_i *– опуклі компакти, є 1-півопуклою.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Виберемо сферу S^{n-1} з центром в точці x так, щоб всередині кулі, обмеженої цією сферою, не було точок множини K. Для кожного компакта K_i побудуємо однопорожнинний конус $\mathtt{con}K_i$ з вершиною в точці x. Нехай множини E_i задані перетинами $E_i = \mathtt{con}K_i \bigcap S^{n-1}$. Розглянемо їх опуклі оболонки [32] $F_i = \mathtt{conv}E_i$. Кожна з побудованих таким способом множин опукла і є підмножиною відповідного конуса. Об'єднання множин F_i не може містити всю сферу S^{n-1}, бо воно було б носієм ненульового коциклу, що неможливо за лемою 2.5.1. Тому на сфері S^{n-1} знайдеться точка y, яка не належить об'єднанню $\bigcup F_i$. І тоді промінь з початком в точці x, який проходить через точку y, не перетинає жодної з множин K_i. Оскільки точка x довільна, то теорема доведена.

Зауваження 2.5.1. З множини $(n-1)$-вимірних граней n-вимірного симплекса легко скласти множину, яка не буде 1-півопуклою.

Ускладнимо задачу, наклавши на множину додаткові умови. Наступна теорема дає достатні умови належності центра сфери 1-півопуклій оболонці сім'ї куль з центрами на цій сфері.

Теорема 2.5.3. *Для того, щоб центр двовимірної сфери в тривимірному евклідовому просторі належав 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

Доведення. Нехай $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ – одинична сфера. Точки простору будемо позначати координатами (x, y, z). Виберемо дві відкриті кулі одиничного радіуса з центрами в точках $(0, 0, 1)$ і $(0, 0, -1)$. Тепер промені, які не перетинають ці дві кулі, лежать в площині xOy. Відкрита куля радіуса $\sqrt{2} - 1$ з центром в точці $(1, 0, 0)$ дотикається до двох заданих куль і її видно з початку координат в площині xOy під кутом α, синус половини якого дорівнює $\sqrt{2} - 1$. Відповідно, $\alpha/2 = \arcsin(\sqrt{2} - 1)$, $\alpha = 0,8542$. Оскільки цей кут поміщається 7,35 разів у розгорнутому кутові 2π, то заповнимо коло в площині xOy чотирма кулями радіуса $\sqrt{2} - 1$ з центрами в точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$. Після цього між ними розмістимо чотири кулі радіусів $\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1$ з центрами в точках перетину одиничного кола площини xOy з бісектрисами координатних кутів. Ці кулі дотикаються до двох сусідніх з попередніх чотирьох. Оскільки радіуси сусідніх куль з центрами в площині xOy різні, то цей набір з десяти куль забезпечить належність центра сфери 1-півопуклій оболонці їх об'єднання. Трішки зменшивши радіуси куль, бачимо, що існує набір замкнених десяти куль з цими ж властивостями. Теорема доведена.

Вкладенням вищерозглянутого тривимірного простору як лінійного підпростору в $\mathbb{R}^n$ отримаємо наступну оцінку для $(n-2)$-опуклості.

Наслідок 2.5.1. *Для того, щоб центр $(n-1)$-вимірної сфери в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ належав $(n-2)$-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо* *десяти куль.*

Попередні міркування не переносяться на більш високі розмірності та не дають необхідних умов навіть у тривимірному просторі. Тому наступні питання залишаються відкритими.

Запитання 1. Яка мінімальна кількість куль у тривимірному евклідовому просторі забезпечить належність центра сфери їх 1-півопуклій оболонці?

У розмірностях, вищих, ніж три, невідомо навіть, чи існує скінченна кількість куль, достатня для створення тіні у випадку півопуклості.

Запитання 2. Чи існує скінченна кількість куль з переліченими вище умовами в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, яка забезпечить належність центра сфери їх 1-півопуклій оболонці?

Якщо центри куль розмістити на двох концентричних сферах, то, використовуючи конструкцію для 1-опуклості в $\mathbb{R}^n$, радіус другої сфери та кулі з центрами на цій сфері отримаємо гомотетією відносно центра першої сфери. Коефіцієнт гомотетії виберемо з від'ємним знаком, так щоб образ гомотетії не перетинався з вихідною множиною. Очевидно, що центр сфери буде належати 1-півопуклій оболонці куль. Тому для виконання умови необхідно і достатньо $2n + 2$ кулі з центрами на двох концентричних сферах.

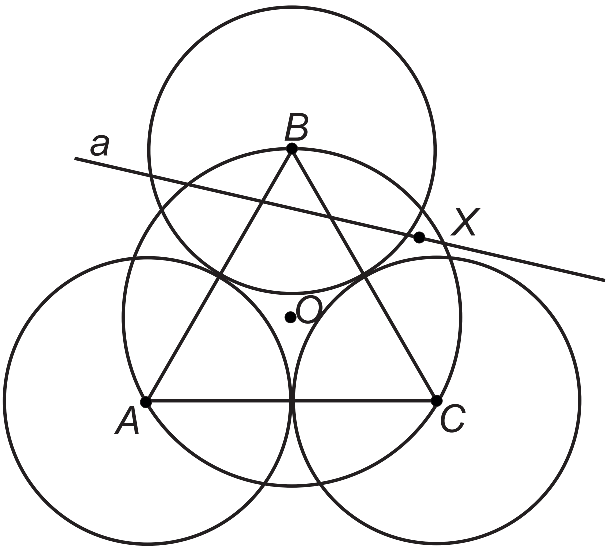
2.6. Задача про тінь для довільної точки внутрішності сфери

Узагальнимо задачу про тінь для куль з центрами на сфері. Яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-опуклій оболонці сім'ї куль?

Для випадку $n = 2$ справедлива наступна теорема.

Теорема 2.6.1. *Для того, щоб внутрішність кола належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з центрами на колі та радіусами, меншими від радіуса кола, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Доведення. Впишемо в коло правильний трикутник ABC. Побудуємо три відкриті (замкнені) круги з центрами у вершинах трикутника та радіусами, які рівні половині сторони трикутника.



Мал. 2.6.1.

Бачимо, що довільна пряма a, яка проходить через будь-яку точку X внутрішності кола, перетне хоча б один з даних кругів (малюнок 2.6.1). Тобто внутрішність кола належить 1-опуклій оболонці цих кругів. Але при цьому кулі попарно дотикаються. Для уникнення цього для досить малого ε розглянемо три круги радіусів $c - \varepsilon, c - \varepsilon/2, c - \varepsilon/2^2$, де c – половина довжини сторони трикутника. Розмістимо круги так, щоб вони попарно дотикалися, а їхні центри утворювали трикутник, який мало відрізняється від правильного. Через центри цих кругів проходить єдине коло, внутрішність якого належить 1-оболонці цих кругів. Внутрішності кругів з центрами у вершинах трикутника утворюють сім'ю з трьох відкритих куль, для якої внутрішність кола, описаного навколо трикутника ABC, належить 1-оболонці цієї сім'ї. Якщо круги замкнені, то в силу неперервності, трохи зменшивши їхні радіуси, отримаємо, що трьох замкнених куль достатньо для створення тіні для внутрішності кола, описаного навколо трикутника. Теорема доведена.

Зауваження 2.6.1. Для випадку $n > 2$ метод, використаний при доведенні теореми 2.6.1, нам не підходить. При $n = 3$ впишемо у двовимірну сферу правильний тривимірний симплекс та розмістимо у його вершинах чотири кулі з радіусами, рівними половині ребра симплекса. Тоді через кожну з точок, яка є серединою ребра симплекса, можна провести пряму, яка не буде перетинати жодної з цих куль.

Зауваження 2.6.2. Аналогічно до міркувань, які ми використовували при доведенні теореми 2.6.1, можна показати, що при $n = 3$ існує скінченна кількість куль з центрами на сфері, для яких довільна точка внутрішності сфери належить їх 1-опуклій оболонці. Але знайти мінімальну кількість цих куль поки що не вдалося.

Зауваження 2.6.3. $(n + 1)$-ї кулі достатньо, щоб усі точки, які містяться у кулі, обмеженій сферою, належали до $(n - 1)$-опуклої оболонки системи куль. Для правильного симплекса візьмемо кулі з центрами у його вершинах та радіусами, рівними половині висоти симплекса. Тоді опукла оболонка цієї системи співпадає з її $(n - 1)$-опуклою оболонкою та містить сферу.

Зауваження 2.6.4. Узагальнимо задачу про тінь для півопуклості. Яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-півопуклій оболонці сім'ї куль? При $n > 1$ не існує скінченної кількості куль для створення тіні у довільній точці внутрішності сфери. Візьмемо дві кулі, центри яких найближчі. На відрізку, що з'єднує центри цих куль знайдеться точка, яка не належить їх об'єднанню, та існує промінь з початком у будь-якій точці внутрішності сфери, який проходить через дану точку, що не перетинає систему куль.

2.7. Задача про тінь для сім'ї множин, отриманих із заданої опуклої множини за допомогою паралельних перенесень і гомотетій

Нехай в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задана опукла множина з непорожньою внутрішністю. Із даної множини за допомогою групи геометричних перетворень отримана сім'я попарно неперетинних замкнених множин. Виникає запитання – скільки (найменша кількість) елементів цієї сім'ї достатньо для того, щоб вибрана точка $x \in \mathbb{R}^n$ належала 1-опуклій оболонці цієї сім'ї (тобто для того, щоб довільна пряма, яка проходить через точку x, перетинала принаймні одну з цих множин)? У роботі Ю. Б. Зелінського [10] було отримано розв'язок цієї задачі для групи геометричних перетворень, яка складається з рухів та гомотетій опуклої множини з непорожньою внутрішністю. Показано, що для цього необхідно і достатньо n елементів даної сім'ї. Розглянемо аналогічну задачу для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 2.7.1. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і* *достатньо n елементів цієї сім'ї.*

Доведення. Нехай B — задана опукла множина з непорожньою внутрішністю і $O \in \mathbb{R}^n$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$. Виконаємо паралельне перенесення множини B так, щоб точка O належала внутрішності множини B. Локально межу опуклої множини можна задати опуклою функцією [67], яка диференційовна майже всюди на області задання [32]. Тому в будь-якому околі довільної точки межі множини B знайдеться точка, в якій існує дотична гіперплощина. Опишемо навколо множини B многогранник з якомога меншою кількістю граней, які є дотичними гіперплощинами до множини B. В залежності від виду множини B кількість граней многогранника буде лежати в межах від $n+1$ (n-вимірний симплекс) до $2n$ (паралелепіпед). Якщо кількість граней більша, ніж $n+1$, то кількість пар паралельних граней буде від 0 до n.

Розглянемо випадок, коли навколо множини описаний паралелепіпед. З точки O проведемо n променів, перпендикулярних до кожної з граней паралелепіпеда, які не є паралельними. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ – точки перетину променів з гранями паралелепіпеда, а $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – точки перетину променів з множиною B, інколи ці точки відповідно співпадають. На кожному з променів $OX_1, OX_2, ..., OX_n$ в досить малих околах точок $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ виберемо точки $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ так, щоб точки Y_i були внутрішніми точками відрізків OZ_i, $i = 1, ..., n$. Виконаємо паралельні перенесення множини B на вектори $\overrightarrow{Z_1O}, \overrightarrow{Z_2O}, ..., \overrightarrow{Z_nO}$. Отримаємо множини $B_1, B_2, ..., B_n$. Однак, утворені таким способом множини можуть перетинатися.

Нехай r_1 – радіус мінімального кола з центром в точці O, яке містить кожну з множин $B_1, B_2, ..., B_n$. А r_2 – радіус максимального кола з центром в цій точці, внутрішність якого не перетинається із жодною з утворених множин і яке дотикається принаймні до однієї з них. Виконаємо гомотетичні перетворення множин $B_2, ..., B_n$ з коефіцієнтами, відповідно,

$$k_1 = r_2/r_1,\ k_2 = (r_2/r_1)^2 = {k_1}^2, ...,\ k_{n-1} = (r_2/r_1)^{n-1} = {k_1}^{n-1}.$$

Отримаємо множини $B_2^{'}, ..., B_n^{'}$. Утворені таким способом множини $B_1, B_2^{'}, ..., B_n^{'}$ не перетинаються. Легко переконатися, що двосторонній конус, заданий множинами $B_1, B_2^{'}, ..., B_n^{'}$, містить всі точки простору $\mathbb{R}^n$. Таким чином, n опуклих множин достатньо для створення тіні. З леми 1 [16] випливає, що $(n-1)$-ї опуклої множини замало для створення тіні. Тому для цього необхідно і достатньо n опуклих множин. Легко переконатися, що кількість опуклих множин залишиться такою самою, якщо навколо множини B описати многогранник з меншою кількістю граней. Теорема доведена.

Розглянемо аналог задачі про тінь для півопуклості. Яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою деяких геометричних перетворень, достатня для того, щоб вибрана точка $x \in \mathbb{R}^n$ належала 1-півопуклій оболонці цієї сім'ї (тобто для того, щоб довільний промінь з початком в цій точці перетинав принаймні одну з цих множин). У роботі Ю. Б. Зелінського [10] було отримано розв'язок цієї задачі для групи геометричних перетворень, яка складається з рухів та гомотетій опуклої множини з непорожньою внутрішністю (показано, що для цього необхідно і достатньо $(n+1)$-ї множини). Ми розв'язали дану задачу для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 2.7.2. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхі-*

дно і достатньо 2n елементів цієї сім'ї.

Доведення. Як і у доведенні теореми 2.7.1, опишемо навколо опуклої множини B многогранник з якомога меншою кількістю граней. У внутрішності множини B виберемо довільну точку O. З цієї точки проведемо промені, перпендикулярні до кожної грані многогранника. В залежності від виду многогранника кількість таких променів буде лежати в межах від $n+1$ до $2n$. Нехай $X_1, X_2, ..., X_{n+1}, ..., X_{2n}$ – точки перетину променів з гранями многогранника, а $Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1}, ..., Y_{2n}$ – точки перетину променів з множиною B, інколи ці точки відповідно співпадають. На кожному з променів $OX_1, OX_2, ..., OX_{n+1}, ..., OX_{2n}$ в досить малих околах точок $Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1}, ..., Y_{2n}$ виберемо точки $Z_1, Z_2, ..., Z_{n+1}, ..., Z_{2n}$ так, щоб точки Y_i були внутрішніми точками відрізків OZ_i, $i = 1, ..., n+1, ..., 2n$ (в залежності від виду многогранника кількість цих променів буде від $n+1$ до $2n$). Виконаємо паралельні перенесення множини B на вектори $\overrightarrow{Z_1O}, \overrightarrow{Z_2O}, ..., \overrightarrow{Z_{n+1}O}, ..., \overrightarrow{Z_{2n}O}$. Отримаємо множини $B_1, B_2, ..., B_{n+1}, ..., B_{2n}$. Однак, утворені таким способом множини можуть перетинатися.

Нехай r_1 – радіус мінімального кола з центром в точці O, яке містить кожну з множин $B_1, B_2, ..., B_{n+1}, ..., B_{2n}$. А r_2 — радіус максимального кола з центром в цій точці, внутрішність якого не перетинається з жодною з утворених множин і яке дотикається принаймні до однієї з них. Виконаємо гомотетичні перетворення множин $B_2, ..., B_{n+1}, ..., B_{2n}$ з коефіцієнтами, відповідно,

$$k_1 = r_2/r_1,\ k_2 = (r_2/r_1)^2 = {k_1}^2, ...,\ k_n = (r_2/r_1)^n = {k_1}^n, ...,$$

$$k_{2n-1} = (r_2/r_1)^{2n-1} = {k_1}^{2n-1}.$$

Отримаємо множини $B_2', ..., B_{n+1}', ..., B_{2n}'$. Утворені таким способом множини $B_1, B_2', ...,\ B_{n+1}', ..., B_{2n}'$ не перетинаються. Легко переконатися, що конус, заданий цими множинами, містить усі точки простору $\mathbb{R}^n$. Таким чином, якщо навколо множини B можна описати n-вимірний симплекс, то $(n+1)$-ї опуклої множини достатньо для створення тіні, якщо паралелепіпед – то для цього достатньо $2n$ множин, а в іншому випадку — достатньо від $n+2$ до $2n-1$ опуклих множин. З теореми 4 [16] випливає, що n опуклих множин замало для створення тіні. Тому для цього необхідно і достатньо $2n$ опуклих множин. Теорема доведена.

2.8. Задача про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах

Ю. Б. Зелінським [10] була сформульована задача про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах. Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній чи 1-гіперкомплексній оболонці цих куль)?

Встановлено, що в комплексному (гіперкомплексному) просторі при $n = 2$ для створення тіні необхідно і достатньо дві кулі.

Теорема 2.8.1. [10]. *Для того щоб вибрана точка в 2-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^2$ $(\mathbb{H}^2)$*, належала 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль, які дану точку не містять, необхідно і достатньо дві кулі.*

Дослідимо, скільки таких куль достатньо для створення тіні при $n \geq 3$ у цих просторах.

Теорема 2.8.2. *Для того, щоб центр сфери в n-вимірному* *комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$, $n \geq 3$, *належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ *та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо* $2n$ $(4n-2)$ *куль.*

Доведення. В n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ розглянемо сферу S^{2n-1} (S^{4n-1}). Через центр цієї сфери проведемо дійсну площину розмірності $2n-1$ $(4n-3)$. Вона перетне сферу S^{2n-1} (S^{4n-1}) по сфері S^{2n-2} (S^{4n-4}). Через центр сфери S^{2n-1} (S^{4n-1}) проведемо довільну комплексну (гіперкомплексну) пряму, яка не належить площині $\mathbb{R}^{2n-1}$ $(\mathbb{R}^{4n-3})$. Ця комплексна (гіперкомплексна) пряма має дійсну розмірність 2 (4). Перетин даної прямої та площини $\mathbb{R}^{2n-1}$ $(\mathbb{R}^{4n-3})$ буде містити дійсну пряму. Для того щоб центр сфери $S^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ $(S^{4n-4} \subset \mathbb{R}^{4n-3})$ належав 1-оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на цій сфері та з радіусами, меншими від радіуса сфери, необхідно і достатньо $2n$ $(4n-2)$ куль. Тому $2n$ $(4n-2)$ куль достатньо для того, щоб центр сфери $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї куль з відповідними умовами. Теорема доведена.

Наступні запитання залишаються відкритими.

Запитання 1. Яка мінімальна кількість куль в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ при $n \geq 3$ забезпечить належність початку координат їх 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці?

Запитання 2. Яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль з центрами на фіксованій сфері та з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ при $n \geq 3$ забезпечить належність центра сфери їх 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці?

2.9. Висновки

У другому розділі дисертаційної роботи досліджено узагальнено опуклі множини та їх узагальнено опуклі оболонки.

1. Повністю розв'язана класична задача про тінь, яка є частковим випадком належності точки узагальнено опуклій оболонці деякої сім'ї куль. Встановлено, що при $n > 2$ $(n+1)$-ї кулі, центри яких лежать на $(n-1)$-вимірній сфері, необхідно і достатньо для створення тіні в центрі сфери. При $n = 2$ наведено інший спосіб розв'язання задачі про тінь (у цьому випадку для створення тіні в початку координат необхідно і достатньо двох кругів).

2. Крім цього, у даному розділі розглянуто деякі узагальнення класичної задачі про тінь. Сформульовано задачу про тінь для півопуклості. Отримано повний розв'язок цієї задачі в двовимірному евклідовому просторі. Встановлено, що для створення тіні в центрі кола необхідно і достатньо трьох кругів. Знайдено достатню кількість куль для створення тіні при $n = 3$ у випадку півопуклості. Показано, що десяти куль з центрами на двовимірній сфері достатньо для створення тіні в центрі сфери.

3. Узагальнено задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери та отримано розв'язок цієї задачі на площині (для створення тіні в довільній точці внутрішності круга необхідно і достатньо трьох кругів).

4. Розв'язано задачу про тінь для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій. Показано, що у випадку 1-опуклості n елементів цієї сім'ї, а у випадку 1-півопуклості $2n$ множин необхідно і достатньо для створення тіні у довільній точці n-вимірного евклідового простору.

5. Досліджено, скільки куль достатньо для створення тіні у центрі сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) просторі. Вста-

новлено, що в комплексному просторі це число становить $2n$, а в гіперкомплексному $(4n-2)$.

Результати розділу опубліковано в [16], [19], [21].

РОЗДІЛ 3

МНОЖИНА МІРИ НУЛЬ, ЯКА МІСТИТЬ СФЕРИ ДОВІЛЬНИХ РАДІУСІВ

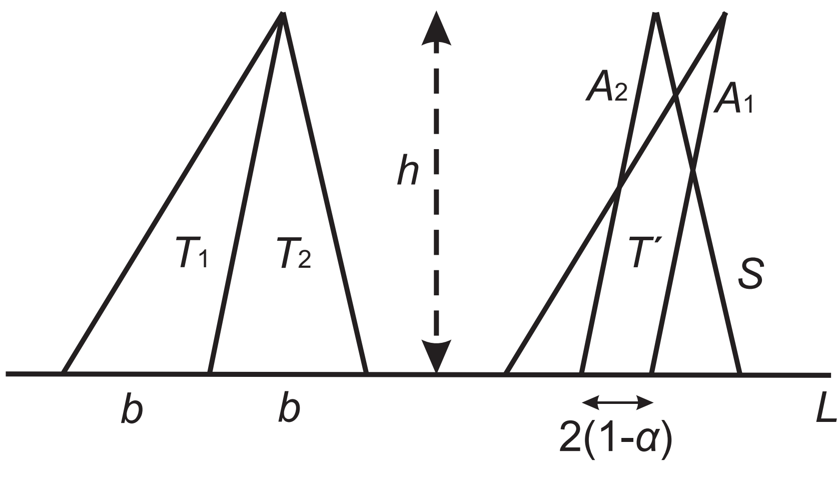
3.1. Початкові відомості. Історія проблеми

У 1917 році, коли А. С. Безікович працював над задачами про інтегрування Рімана, виникло наступне запитання: якщо f є інтегровною за Ріманом функцією, визначеною на площині, то чи завжди можна знайти ортогональну систему координат, так що відносно цих координат інтеграл $\int f(x,y)dx$ буде існувати як інтеграл Рімана для всіх y, де результуюча функція від y також інтегровна за Ріманом [72]?

Безікович зазначив, що, якби він побудував компактну множину F плоскої Лебегової міри нуль, яка містить одиничний лінійний відрізок довільного напрямку, він міг би відповісти на своє запитання, показавши суперечливий приклад: фіксуємо систему координат, так що довільний лінійний відрізок в F, паралельний до однієї з осей, не має жодної раціональної відстані до неї. Нехай F_0 є множиною всіх точок в F принаймні з однією раціональною координатою. Оскільки F містить одиничний лінійний відрізок довільного напрямку, на якому множина F_0 та доповнення до неї щільні, то існує відрізок довільного напрямку, на якому функція $f = \chi_{F_0}$ не є інтегровною за Ріманом. Однак, f інтегровна за Ріманом на цій площині.

Безікович фактично досягнув успіху у побудові множини відрізків одиничної довжини довільних напрямків, Лебегова міра якої дорівнює нулю, відомої як множина Безіковича [72], [71]. Його початкова побудова була спрощена Перроном [94], Радемахером [95], Шонбергом [96], [97], самим Безіковичем [71] та Фішером [75]. Основна ідея всіх цих побудов полягає в утворенні "дерев Перрона". Очевидно, що така фігура містить одиничний лінійний відрізок довільного напрямку зліва і справа від початкового (рівностороннього) трикутника. Беручи дві копії такої множини і повертаючи їх на 60° і 120°, ми отримаємо множину Какейя. Причому міра цієї множини може бути як завгодно малою.

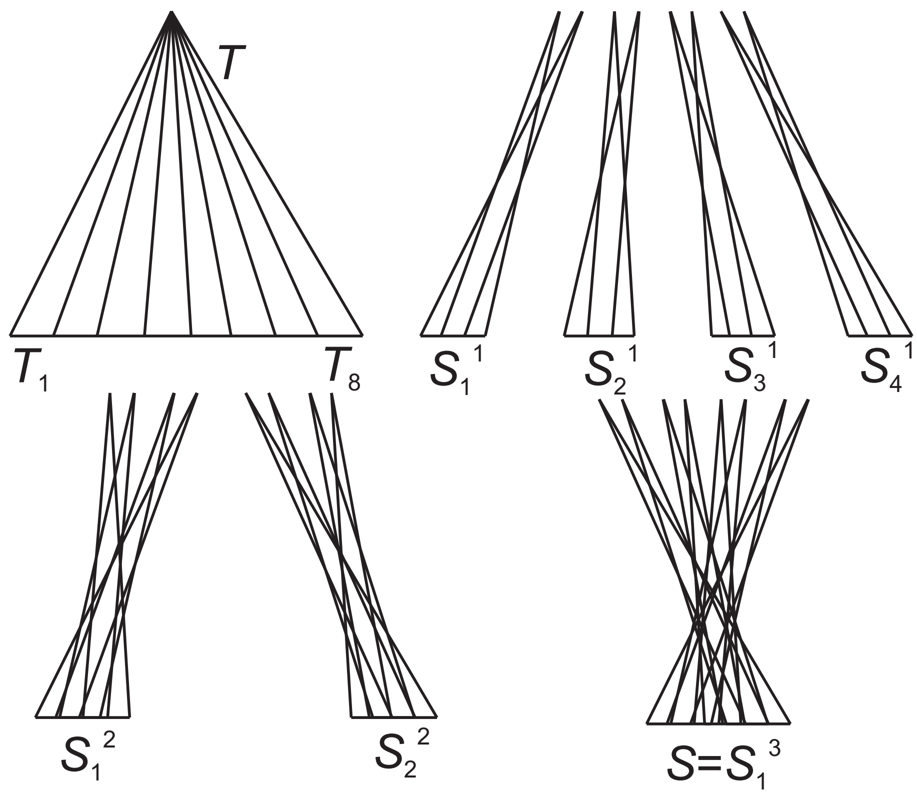
Лема 3.1.1. [71], [72]. *Розглянемо трикутник T з основою на прямій L. Поділимо основу трикутника T на два рівні відрізки і з'єднаємо точки поділу з протилежною вершиною для утворення двох сусідніх трикутників T_1 і T_2 з довжинами основ b і висотами h. Нехай $1/2 < \alpha < 1$. Якщо трикутник T_2 переміщений на відстань $2(1-\alpha)$ вздовж прямої L, то трикутник T_1 частково покриває отриману фігуру S, що складається з трикутника T', подібного до трикутника T з коефіцієнтом подібності α^2, та двох допоміжних трикутників A_1, A_2.*



Мал. 3.1.1.

Цей елементарний процес (малюнок 3.1.1) є одним з основних компонентів побудови множини Безіковича. Трикутники, подібні до трикутника T', називають "серцем". А трикутники, подібні до трикутників A_1 та A_2, – "руками". Утворена фігура матиме крихітне серце і багато рук.

Теорема 3.1.1. [71], [72]. *Розглянемо трикутник T з основою на прямій L. Поділимо основу трикутника T на 2^k рівних відрізків і з'єднаємо точки поділу з протилежною вершиною для утворення 2^k трикутників $T_1, ..., T_{2^k}$. Якщо k досить велике, то існує переміщення вздовж прямої L для кожного T_i $(1 \le i \le 2^k)$, таке що площа утвореної (замкненої) фігури S, яка є об'єднанням цих переміщених трикутників T_i, як завгодно мала. Крім того, для відкритої множини V, яка містить T, це переміщення можна зробити таким, що $S \subset V$ (з більшим k, якщо необхідно).*

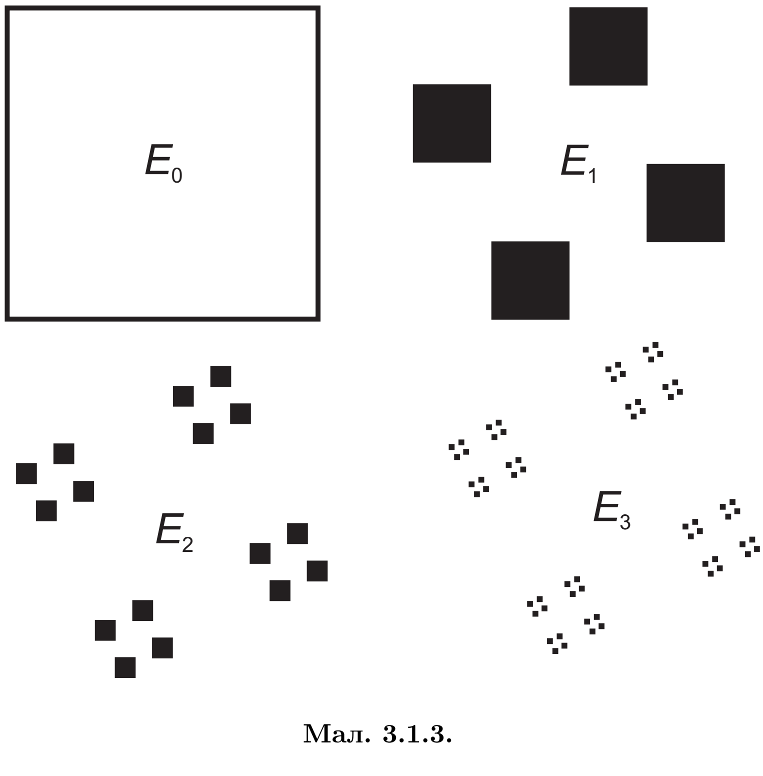


Мал. 3.1.2.

На малюнку 3.1.2 зображено етапи побудови множини S у випадку $k = 3$.

Теорема 3.1.2. [71], [72]. *Для $n \geq 2$ існує множина $F \subset \mathbb{R}^n$, n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю, яка містить одиничний лінійний відрізок довільного напрямку.*

Іншим способом для побудови множини Безіковича є двоїстий підхід. Основною ідеєю є параметризація прямих точками так званих неоднорідних 1-множин, наприклад, Канторової множини. Ітерація Канторової множини E починається з квадрата зі стороною довжини 2 з центром у початку координат. На будь-якому кроці кожен квадрат A_k буде замінений чотирма меншими квадратами зі сторонами довжини $1/4d$, де d – довжина сторони квадрата A_k. Відносно нижньої лівої вершини квадрата A_k нижні ліві вершини малих квадратів розміщені, відповідно, $(0, 1/2d)$, $(1/4d, 0)$, $(1/2d, 3/4d)$, $(3/4d, 1/4d)$.



Мал. 3.1.3.

На малюнку 3.1.3 зображені перші три ітерації Канторової множини.

Відзначимо, що обидві проекції на вісь x та на вісь y містять весь відрізок $[-1, 1]$ на кожному кроці ітерації. Отже, ми можемо параметризувати множину прямих $L(E) = \{y = ax + b, (a, b) \in E\}$ з усіма кутовими коефіцієнтами з відрізка $[-1, 1]$. З іншого боку, беручи ще одну обернену копію множини $L(E)$, ми отримаємо множину, яка містить пряму довільного напрямку. Виявляється, що множина $L(E)$ має міру нуль. Потрібно показати, що кожна проекція множини E на вісь, яка не паралельна ні до осі x, ні до осі y, має міру нуль. Множини з цією властивістю названі неоднорідними 1-множинами, міра яких дорівнює нулю. Таким чином, існує підсилена версія теореми 3.1.2.

Теорема 3.1.3. [70]. *Для $n > 2$ існує множина $F \subset \mathbb{R}^n$, n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю, що містить пряму довільного напрямку.*

Приблизно в той самий час, як Безікович, у 1917 році, японський математик С. Какейя задав схоже запитання: яка найменша площа плоскої області, всередині якої одиничний лінійний відрізок ("голка") можна неперервно повернути на 180°, змінюючи при цьому орієнтацію відрізка на протилежну [82]?

Какейя [82] висловив гіпотезу, що найменшою опуклою множиною, що задовольняє цю властивість, є рівносторонній трикутник одиничної висоти. Це було доведено тільки через кілька років Джуліусом Палом [93]. Для випадку неопуклої множини вони висловили гіпотезу, що фігурою, яка задовольняє дану властивість, є триточковий дельтоїд, площа якого $\pi/8 \approx 0.39$, тоді як площа трикутника $\sqrt{3}/3 \approx 0.58$. Однак ця проблема залишилася невирішеною.

Внаслідок ізоляції Росії від західного світу, Безікович не знав про задачу Какейя. Коли він дізнався про неї, то змінивши свою початкову побудову та використовуючи лему Пала [93], отримав наступний результат, опублікований у 1928 році в Математичному журналі [71]:

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує плоска область з площею, меншою, ніж ε, всередині якої одиничний лінійний відрізок ("голка") можна поверну-

ти на 180° *.*

Лема 3.1.2. (Пала)[93]. *Задано дві паралельні прямі* L_1, L_2 *. Тоді довільний одиничний відрізок може бути неперервно переміщений з* L_1 *до* L_2 *на множину як завгодно малої міри.*

Оскільки при повороті відрізка умова неперервності не виконується, даний результат не є повним розв'язанням задачі Какейя.

Разом з теоремою 3.1.1 розв'язання задачі Какейя про голку є наступним.

Теорема 3.1.4. *Задано* $\varepsilon > 0$ *та одиничний лінійний відрізок* M_0 *з кінцями в точках* a_0 *і* b_0 *. Існує множина E, Лебегова міра якої менша* ε *, і неперервне переміщення* $\{M_t\}_{t\in[0,1]}$ *, така що* $M_t \in E$ *для всіх* $t \in [0,1]$ *і* $a_0 = b_1$ *,* $b_0 = a_1$ *.*

У 1967 році Безікович та Радо [73] побудували плоску замкнену множину, що містить кола усіх можливих радіусів, і Лебегова міра якої дорівнює нулю. Коротко опишемо етапи побудови цієї множини. На першому етапі побудови плоске кругове кільце з центром в початку координат та шириною 1 розрізають на n кілець першого порядку, ширина кожного з яких n^{-1} . Ці кільця переміщають у напрямку $2\pi/n$ так, що відрізки їхніх радіусів збігаються у цьому напрямку. При цьому зовнішнє кільце залишається фіксованим, а всі інші кільця переміщаються на відстань ln^{-1} , де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Якщо n велике, то об'єднання перетворених кілець дуже тонке в області $0 \leq \theta < 2\pi/n$. На другому етапі кожне кільце першого порядку розрізають на n кілець другого порядку, які потім так само переміщають у напрямку $4\pi/n$ на відстань ln^{-2} , де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Об'єднання n^2 перетворених кілець дуже тонке в області $0 \leq \theta < 4\pi/n$. На етапі k, якщо n досить велике, об'єднання перетворених кілець порядка k дуже тонке в області $0 \leq \theta < 2k\pi/n$. Тому плоска міра утвореної множини, яка лежить у кільці $9 \leq |z| \leq 11$, може бути як завгодно малою для досить великого n.

Теорема 3.1.5. [73]. *Існує плоска замкнена множина міри нуль, яка містить кола довільних радіусів.*

3.2. Основна теорема

Нехай $\mathbf{M} = (M_i, i \in \mathbb{N})$ є сім'єю множин в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Нас цікавлять такі сім'ї множин, які після застосування до них сім'ї $\mathbf{T}$ геометричних перетворень $T_i, (i \in \mathbb{N})$, по-перше, будуть належати множині досить малої міри і, по-друге, їх об'єднання матиме міру нуль.

У роботах [71], [72], [73] це питання досліджувалося для множин евклідової площини. Зокрема, Безікович [71], [72] розглядав випадки, коли $\mathbf{M}$ є сім'єю всіх відрізків скінченної довжини та довільних напрямків, а також сім'єю прямих довільних напрямків. Крім цього, у роботі [73] Безікович і Радо досліджували дане питання для сім'ї кіл усіх радіусів. У результаті геометричних перетворень об'єднання цих сімей можна було помістити у замкнену множину плоскої міри нуль.

У роботі [54] ми дослідили цю проблему для сім'ї сфер довільних радіусів в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. За допомогою сім'ї геометричних перетворень отримано множину, що є об'єднанням сфер довільних радіусів та Лебегова міра якої дорівнює нулю.

Теорема 3.2.1. *В n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ існує множина міри нуль, яка містить сфери усіх радіусів.*

Доведення. Спочатку побудуємо множину міри $< \varepsilon$, яка містить сфери всіх радіусів з відрізка $[a, b]$. Для цього візьмемо сферичне кільце з межовими сферами радіусів a і b та розділимо його на досить велику кількість N сферичних кілець однакової товщини. Кожне з цих кілець паралельно перенесемо на деякий вектор так, щоб в результаті міра їх об'єднання стала в $u < 1$ разів меншою від початкової.

Розглянемо перетворення $T(e,n)$ сферичного кільця $S(O,r,R)$ з центром O і радіусами межових сфер r, R (e — деякий одиничний вектор, n – натуральне число). Будемо вважати, що внутрішня межова сфера належить кільцю, а зовнішня — ні. Розділимо $S(O,r,R)$ на n кілець однакової товщини:

$$S(O,r,R) = \bigsqcup_{1\le k\le n} S(O,\ r+(k-1)\delta,\ r+k\delta),\ \delta = \frac{R-r}{n}.$$

Перенесемо кільця паралельно так, щоб в результаті всі вони мали спільну зовнішню дотичну гіперплощину, перпендикулярну e. Тоді,

$$T(e,n)S(O,r,R) =$$

$$= \left\{ S(O+(n-k)\delta e,\ r+(k-1)\delta,\ r+k\delta);\ \delta = \frac{R-r}{n},\ 1\le k\le n \right\}.$$

Зауважимо, що результатом перетворення є множина кілець, і кожне кільце в результаті перетворення $T(e,n)$ було паралельно перенесене на вектор

$$\tau_k = (n-k)\delta e = \frac{n-k}{n}(R-r)e.$$

Візьмемо тепер множину одиничних векторів $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, які утворюють ε-сітку на одиничній сфері. Здійснимо перетворення $T(e_1,n)S(O,a,b)$, а тоді застосуємо $T(e_2,n)$ до кожного утвореного кільця і так далі. В результаті ми отримаємо множину n^m кілець товщини $(b-a)/n^m$, кожне з яких отримане паралельним перенесенням на вектор

$$t_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{k_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n-k_i}{n^i}(b-a)e_i$$

від початкового положення, де $j = 1 + \sum\limits_{i=1}^{m}(k_i-1)n^{i-1} \in [1, n^m]$ – індекс на множині отриманих n^m кілець, $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ – мультиіндекс, який відповідає j, k_i – індекс кільця на i-му кроці. Об'єднання кілець після i-го кроку позначимо U_i.

Відмітимо, що $\|t_j\| \leq b-a$, $\sum\limits_{i=l+1}^{m} \tau_{k_i} \leq (b-a)/n^l$. Таким чином, після i-го кроку товщина кожного кільця стане $(b-a)/n^i$, а центри кожного з них будуть віддалені від початку координат не більше, ніж на $b-a$, при цьому за всі наступні кроки кожне утворене кільце перенесеться не більше, ніж на $(b-a)/n^i$.

Розглянемо перетин об'єднання множини U_N сферичних кілець з променем $ray(O, \theta)$, який виходить з початку координат у напрямку вектора θ. Якщо ми доведемо, що лінійна міра цього перетину менша, ніж $u(b-a)$, то цим ми доведемо, що міра множини кілець в $u < 1$ разів менша, ніж початкова міра кільця $S(O, a, b)$. При цьому, внаслідок неперервної залежності міри перетину від вектора θ, достатньо довести нерівність для ε-сітки векторів $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Очевидно, що кожен елемент множини $T(e, n)S(O, r, R)$ належить множині

$$\left\{x;\ \|x - O\| \leq R,\ \left\|x - O - \frac{n-1}{n}(R-r)e\right\| > r\right\}.$$

При цьому точка O віддалена від початку координат не далі, ніж на $b-a$. Перенесемо початок координат в точку O і знайдемо міру перетину

$$\mu\left(ray(O+g,\ e)\bigcap\left\{x;\ \|x\| \leq R,\ \left\|x - \frac{n-1}{n}(R-r)e\right\| > r\right\}\right),$$

$\|g\| \leq b-a.$

Нехай $x = x_1 e + g$, тоді шукана міра не перевищує

$$\mu\left(\left\{x_1;\ x_1^2 \leq R^2 - \|g\|^2,\ (x - \frac{n-1}{n}(R-r))^2 > r^2 - \|g\|^2\right\}\right) =$$

$$= \sqrt{R^2 - \|g\|^2} - \sqrt{r^2 - \|g\|^2} - \frac{n-1}{n}(R-r) \leq$$

$$\leq (R-r)\left(\frac{R+r}{\sqrt{R^2 - \|g\|^2} + \sqrt{r^2 - \|g\|^2}} - \frac{n-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq (R-r)\left(\sqrt{\frac{b}{2a-b}} - \frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{2}(R-r),$$

при $b-a \leq b/10,\ n \geq 4$.

Таким чином, довільне сферичне кільце можна розділити на скінченну кількість неперетинних кілець, кожне з яких задовольняє умову $b-a \leq b/10$.

Описаний процес, розпочатий у сферичному кільці з радіусами внутрішнього та зовнішнього кіл a і b, назвемо процесом P_n. Даний процес можна застосувати до будь-якого сферичного кільця, причому радіус внутрішньої сфери має бути додатний.

Тепер побудуємо замкнену обмежену множину S^* міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів r, $a \leq r < b$, $a > 0$. Для довільної n-вимірної множини $\mathbf{T}$ позначимо через T^δ множину всіх точок, які знаходяться на відстані, меншій, ніж δ, від хоча б однієї точки з множини $\mathbf{T}$.

Опишемо індуктивну побудову сім'ї множин $S_\nu^{\delta_\nu}$ $(\nu = 1, 2, ...)$. Нехай ν додатне ціле число і S_ν об'єднання скінченної кількості кілець A_λ і нехай $\delta_\nu > 0$. Нехай $m_n S_\nu^{\delta_\nu} < 2^{-\nu}$ і сфери, що обмежують A_λ, мають радіуси r_λ, R_λ. Припустимо, що проміжки, $r_\lambda \leq r < R_\lambda$ покривають проміжок $0 < a \leq r < b$. S_1 і δ_1 можна побудувати за вищеописаним методом. Поділимо кожне A_λ на k концентричних підкілець однакової ширини і застосуємо P_n до кожного підкільця. Якщо k і n досить великі, то кожне кільце розрізане на скінченну кількість кілець. Застосувавши до них менше, ніж $2^{-\nu}$, геометричних перетворень, отримаємо об'єднання $S_{\nu+1}$, міра якого $\mu(S_{\nu+1}) < 2^{-\nu-1}$. Причому замикання $S_{\nu+1}$ лежить у внутрішності $S_\nu^{\delta_\nu}$. Тоді $\delta_{\nu+1}$ таке, що $S_\nu^{\delta_\nu} \supset S_{\nu+1}^{\delta_{\nu+1}}$ і $\mu(S_{\nu+1}^{\delta_{\nu+1}}) < 2^{-\nu-1}$. Це і завершує індуктивну побудову.

Нехай $S_\nu^{'}$ є замиканням $S_\nu^{\delta_\nu}$. Тоді $S_1^{'} \supset S_2^{'} \supset ...$ і $m_n S_\nu^{'} < 2^{-\nu}$. Покладемо $\bigcap S_\nu^{'} = S^*$. Тоді S^* замкнена і обмежена множина, а також $\mu(S^*) = 0$.

Розглянемо довільне число r, $a \leq r < a$. Тоді для довільного ν існує число a_ν таке, що сфера $\|z - a_\nu\| = r$ лежить в S'_ν. З означення $S_{\nu+1}$ випливає, що ми можемо зробити так, щоб $\|a_\nu - a_{\nu+1}\| < 2^{-\nu}$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} a_\nu = a^*$ існує і сфера $\|z - a^*\| = r$ належить S^*.

Нехай m – додатне ціле число. За вищеописаним методом для довільного додатного цілого k побудуємо замкнену обмежену множину T_{mk} міри нуль, яка містить сфери довільного радіуса r у діапазоні

$$m\left(\frac{10}{11}\right)^k \leq r < m\left(\frac{10}{11}\right)^{k-1}.$$

Тоді $d(T_{mk}) \to 0$, коли $k \to \infty$. Вибираємо $a_{mk} \in T_{mk}$. Тоді множина

$$S_m = \{z - a_{mk} : k > 0,\ z \in T_{mk}\}$$

замкнена, обмежена, має міру нуль та містить сфери довільного радіуса $r < m$. А множина

$$S = \{z + d(S_m) + m : m > 0,\ z \in S_m\}$$

задовольняє умову теореми.

3.3. Висновки

У третьому розділі дисертаційної роботи узагальнено задачу, яку розв'язали Безікович та Радо [73] при $n = 2$ (вони побудували плоску множину Лебегової міри нуль, яка містить кола довільних радіусів), у випадку n-вимірного евклідового простору, де $n \geq 2$. Доведено існування множини, n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю і яка містить сфери з усіма можливими радіусами в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Результати розділу опубліковано в [54].

РОЗДІЛ 4

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ ТА КВАЗІОПУКЛІ МНОЖИНИ В ГІПЕРКОМПЛЕКСНОМУ ПРОСТОРІ

4.1. h-оболонка множини

Будемо розглядати n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — довільна множина, яка містить початок координат $O = \{0, 0, ..., 0\}$. Покладемо $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$, $\langle x, h \rangle = x_1h_1 + x_2h_2 + ... + x_nh_n$. Множина $E^* = \{h | \langle x, h \rangle \neq 1, \ \forall x \in E\}$ називається *спряженою* множиною до множини E [38].

Гіперплощиною називається множина $L \subset \mathbb{H}^n$, що задовольняє одну з умов: $\langle x, a \rangle = w$, $\langle x - x_0, a \rangle = 0$, де x — довільна точка множини L, x_0 — фіксований вектор, w — фіксований скаляр з $\mathbb{H}$, a — фіксований ковектор. Назвемо ковектор a *нормаллю*. Відповідно, *афінними* будемо називати лише функції виду: $l(x) = \langle x, a \rangle + b$, $b \in \mathbb{H}$.

Означення 4.1.1. [38]. *Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається гіперкомплексно опуклою, якщо для довільної точки $x_0 \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує гіперплощина, яка проходить через точку x_0 і не перетинає множину E.*

Нагадаємо, що оскільки в алгебрі кватерніонів множення некомутативне, то надалі розглядатимемо праві гіперплощини, тобто точку зі змінною координатою множимо на фіксовану точку справа.

Означення 4.1.2. [38]. *Множина* $E \subset \mathbb{H}^n$ *називається сильно гіперкомплексно опуклою, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою* γ *ациклічний, тобто* $\widetilde{H}^i(\gamma \bigcap E) = 0, \ \forall i \geq 0$, *де* $\widetilde{H}^i(\gamma \bigcap E)$ – *зведена група когомологій Александрова-Чеха множини* $\gamma \bigcap E$ *з коефіцієнтами в групі цілих чисел.*

У [41] доведено, що сильно гіперкомплексно опуклі компакти будуть гіперкомплексно опуклими.

Нехай $E \subset \mathbb{H}$ — довільна множина. Доповнення до об'єднання необмежених компонент множини $\mathbb{H} \setminus E$ називається *h-комбінацією точок множини* E та позначається $[E]$. Якщо E — довільна множина в просторі $\mathbb{H}^n, n > 1$, то скажемо, що точка x належить h-комбінації точок з E, якщо існує перетин множини E гіперкомплексною прямою γ такий, що $x \in [E \bigcap \gamma]$. Множину таких точок з $\mathbb{H}^n$ називають *h-комбінацією точок* E і позначають $[E]$; m-кратну h-комбінацію визначають за індукцією $[E]^m = [[E]^{m-1}]$ [20].

Означення 4.1.3. [20], [38]. *h-оболонкою множини* $E \subset \mathbb{H}^n$ *називається множина* $\widehat{E} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$, *де* $\pi : \mathbb{H}^n \to \lambda$ – *усі можливі лінійні проекції множини на гіперкомплексні прямі,* $[\pi(E)]$ – *h-комбінація точок множини* $\pi(E)$, *а* $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n | \ \pi(x) \in \pi(E)\}$ – *її повний прообраз.*

Наступна теорема стверджує, що для довільної множини простору $\mathbb{H}^n$ множина точок її h-оболонки співпадає з h-комбінацією точок цієї множини.

Теорема 4.1.1. *Якщо множина* $E \subset \mathbb{H}^n$ *є h-оболонкою, то* $E = [E]$.

Доведення. Нехай $x \in [\lambda \bigcap E]$ для деякої гіперкомплексної прямої λ. Тоді, очевидно, буде виконуватися включення $\pi(x) \in [\pi(\lambda \bigcap E)]$ для всіх проекцій π, тому що обмеження будь-якої проекції π на кожну пряму є або гомеоморфізмом, або проекцією в точку.

Дослідимо більш детально процедуру утворення h-оболонки множини E. За властивістю 19 гіперкомплексно опуклих множин [38] множина $[\pi(E)]$ гомеоморфна доповненню в $\overset{o}{\mathbb{H}} = \overset{o}{\lambda}$ ($\overset{o}{\mathbb{H}}$ – одноточкова компактифікація прямої) до зв'язної компоненти, що містить початок координат, деякого перерізу $\lambda \bigcap E^*$, де λ – гіперкомплексна пряма, а E^* – множина, спряжена до множини E. Позначимо цю компоненту $]\lambda \bigcap E^*[$. Крім цього, дану компоненту можна зобразити ще й так $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$. (Це випливає з того, що множину $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$ можна інтерпретувати як об'єднання гіперплощин, які не перетинають множину $\pi^{-1}[\pi(E)]$. Остання множина не містить нескінченно віддаленої точки (∞). Тому (∞) належить об'єднанню гіперплощин, а отже, множині $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$. Оскільки нескінченно віддалена точка (∞) гомеоморфна початку координат $\theta = (0, 0, ..., 0)$, що належить множині $]\lambda \bigcap E^*[$, то $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$ гомеоморфна $]\lambda \bigcap E^*[$.) Взагалі кажучи, об'єднання $\bigcup\limits_{\lambda}]\lambda \bigcap E^*[$ може не бути гіперкомплексно опуклою множиною. Однак за властивостями 9 та 15 гіперкомплексно опуклих множин [38] справедливі наступні рівності

$$(\bigcup_{\pi}(\pi^{-1}[\pi(E)])^*)^* = \bigcap_{\pi}(\pi^{-1}[\pi(E)])^{**} = \bigcap_{\pi}\pi^{-1}[\pi(E)] = \widehat{E}.$$

Звідси випливає наступна теорема, яка дає ще один спосіб побудови h-оболонки.

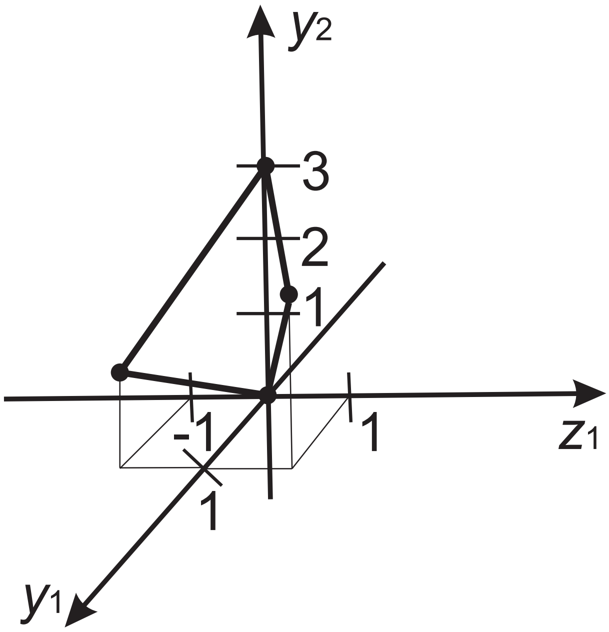
Теорема 4.1.2. *Для довільної множини* $E \subset \mathbb{H}^n$ *її* h*-оболонку можна зобразити у вигляді* $\widehat{E} = (\bigcup\limits_{\lambda}]\lambda \bigcap E^*[)^*$.

Доведення випливає з виконання рівності

$$\widehat{E} = (\bigcup_{\pi}(\pi^{-1}[\pi(E)])^*)^* = (\bigcup_{\lambda}]\lambda \bigcap E^*[)^*.$$

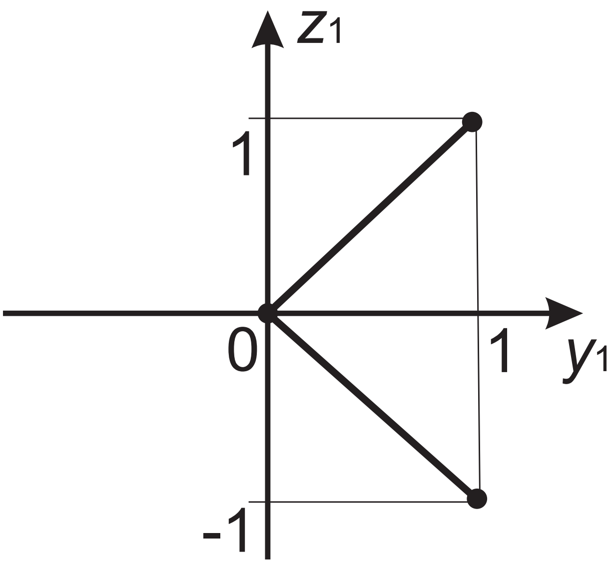
Варто відмітити, що спряжена множина до h-оболонки не завжди буде h-оболонкою. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 4.1.1. Нехай K – компакт, який лежить у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3 = \{(y_1, z_1, y_2)|\ x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1,$ $x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$.



Мал. 4.1.1.

$K = \{(y_1, z_1, y_2)|\ (y_1 - |z_1| = 0,\ 0 \le y_1 \le 1) \wedge [[(y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3),\ z_1 \le 0] \vee [(y_2 = 2y_1) \vee (y_2 = -y_1 + 3),\ z_1 > 0]]\}$ (малюнок 4.1.1).



Мал. 4.1.2.

Тоді при канонічній проекції $\pi_1(K)$ на пряму $x_2 = 0$ отримаємо ациклічний компакт $K_1 = \{(y_1, z_1, 0, 0)|\ y_1 - |z_1| = 0,$

$0 \leq y_1 \leq 1\}$ (малюнок 4.1.2), а при проекції $\pi_2(K)$ на пряму x_2 паралельно прямій, яка проходить через точки $(1-i,1)$, $(1+i,2)$, отримаємо компакт $\pi_1(K) = K_2$, який складається з двох відрізків, оскільки відрізки $[y_1 = -z_1,\ 0 \leq y_1 \leq 1,\ y_2 = y_1] \cap \mathbb{R}^3$ і $[y_1 = z_1,$ $0 \leq y_1 \leq 1,\ y_2 = 2y_1] \cap \mathbb{R}^3$, $[y_1 = -z_1,\ 0 \leq y_1 \leq 1,\ y_2 = -2y_1 + 3] \cap \mathbb{R}^3$ і $[y_1 = z_1,\ 0 \leq y_1 \leq 1,\ y_2 = -y_1 + 3] \cap \mathbb{R}^3$ попарно ототожнюються при цій проекції. Тому $[K_1] = K_1$ і $[K_2] = K_2$. Легко бачити, що $K = \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2)$. При всіх інших проекціях образ $\pi(K)$ буде ненульовим одновимірним циклом. Тому $\pi(K) \neq [\pi(K)]$ при $\pi \neq \pi_1$ або $\pi \neq \pi_2$. Але $\widehat{K} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] \subset \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2) = K$. Отже, $\widehat{K} = K$. Однак, взагалі кажучи, $\pi(\widehat{K}) \neq [\pi(K)]$.

За теоремою 4.1.2 $\widehat{K} = (\bigcup\limits_{\gamma}]\gamma \bigcap K^*[)^* = (K_3)^*$, де $K_3 = \{(y_1, z_1, y_2)|\ y_1 - |z_1| = 0,\ 0 \leq y_1 \leq 1,\ (y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3)\}$ – частина компакта K, що складається з двох відрізків.

4.2. Екстремальні елементи

Означення 4.2.1. [38]. *h-інтервалом з центром в точці x радіуса r називається перетин відкритої кулі радіуса r з центром в точці x з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку x.*

Означення 4.2.2. [38]. *Точка $x \in E \subset \mathbb{H}^n$ називається h-екстремальною точкою множини E, якщо в E немає жодного h-інтервалу, який містить x.*

Означення 4.2.3. *h-променем назвемо замкнену необмежену ациклічну підмножину гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.*

Означення 4.2.4. *Екстремальним h-променем множини $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо h-промінь H, який належить множині E, якщо множина $E \setminus H$ гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя H*

буде h-екстремальною точкою для множини E. (Це еквівалентне тому, що жодна точка променя H не буде внутрішньою для довільного h-інтервалу, який належить множині E та має хоча б одну точку за межами H.)

Для множини $E \subset \mathbb{H}^n$ позначимо: hext E – множину її h-екстремальних точок, rhext E – множину h-екстремальних променів, hconv E – h-оболонку E.

З леми 4.2.1, яка є аналогом теореми Каратеодорі, враховуючи, що жодна h-екстремальна точка не може бути отримана h-комбінацією інших точок компакта K, випливають наступні наслідки.

Лема 4.2.1. [20]. *h-оболонка гіперкомплексно опуклого компакта в* $\mathbb{H}^n$ *співпадає з сукупністю не більше, ніж n-кратних комбінацій своїх h-екстремальних точок.*

Наслідок 4.2.1. *Якщо* $K \subset \mathbb{H}^n$ *– компакт і* $\widehat{K}$ *– його h-оболонка, яка співпадає з h-комбінацією* $[K]^m$, *то кожна h-екстремальна точка множини* $\widehat{K}$ *належить K.*

Наслідок 4.2.2. *Довільну точку простору* $\mathbb{H}^n$, *яка належить h-оболонці* $\widehat{K} = [K]^m$, *можна зобразити у вигляді не більше, ніж n-кратної комбінації точок компакта K.*

Наслідок 4.2.3. *Для того, щоб h-оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K співпадала з ним, необхідно, щоб усі його перерізи гіперкомплексними прямими* γ *не містили тривимірних коциклів, тобто* $H^3(K \bigcap \gamma) = 0$.

Наслідок 4.2.4. *Для того, щоб h-оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K співпадала з ним, необхідно, щоб усі проекції його спряженої множини* K^* *на гіперкомплексні прямі були зв'язними.*

Останній наслідок отримується з попереднього, використовуючи властивості 19 та 20 гіперкомплексно опуклих множин [38].

Приклад 4.2.1. Нехай $S^4_+ \subset \mathbb{R}^5 \subset \mathbb{H}^2$ – півсфера у п'ятивимірному дійсному евклідовому просторі $\mathbb{R}^5 = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2)|\ x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1,\ x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$, $S^4_+ = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2)|\ y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 = 1,\ z_1 \geq 0\}$. Легко бачити, що $(S^4_+)^{**} = K_+ = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2)|\ y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 \leq 1,\ z_1 \geq 0\}$ і K_+ – опуклий компакт, який співпадає зі своєю h-оболонкою. Довільний перетин S^4_+ гіперкомплексною прямою співпадає з перетином S^4_+ дійсною прямою або дійсною чотиривимірною площиною виду $y_2 = \texttt{const}$ в $\mathbb{R}^5$. Всі такі перетини не містять тривимірних циклів. Тому $[S^4_+] = S^4_+ \neq K_+$.

Цей приклад показує, що лему 4.2.1 та її наслідки не завжди можна застосовути до гіперкомплексно неопуклих компактів.

Розповсюдимо теорему Клі опуклого аналізу [32] на гіперкомплексний випадок.

Лема 4.2.2. *Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ – замкнене сильно гіперкомплексно опукле тіло (тобто $\mathrm{int}E \neq \emptyset$) з непорожньою сильно гіперкомплексно опуклою межею ∂E, тоді E має вигляд $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$, де E_1 – ациклічна підмножина прямої $\mathbb{H}$ з непорожньою внутрішністю відносно цієї прямої.*

Доведення. Оскільки межа ∂E – сильно гіперкомплексно опукла, то для довільної точки $x \in \texttt{int}E$ існує гіперплощина, яка не перетинає ∂E. Тому множина E містить гіперплощину. Отже, за теоремою 3 [20] множину E можна зобразити у вигляді декартового добутку $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Множина E_1 буде ациклічною, тому що існують перетини E гіперкомплексними прямими, які гомеоморфні E_1.

Означення 4.2.5. *Афінна підмножина L називається дотичною до множини E, якщо $L \bigcap \overline{E} \subset \partial E$, $L \bigcap \overline{E} \neq \emptyset$.*

Лема 4.2.3. *Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – сильно гіперкомплексно опукла замкнена множина та L – її дотична гіперкомплексна пряма, то*

$\mathrm{hext}(E\bigcap L) = (\mathrm{hext}E)\bigcap L$.

Доведення. Оскільки справедливе включення множин $E\bigcap L \subset E$, то за означенням h-екстремальних точок маємо $\mathtt{hext}(E\bigcap L) \supset (\mathtt{hext}E)\bigcap L$. Нехай точка $x \in \mathtt{hext}(E\bigcap L)$. Тоді не може виконуватися включення $x \in [K] \setminus K$, де $K \subset E$, бо інакше було б $K \subset E\bigcap L$ (тому що $x \in L$ та L є гіперкомплексною прямою, дотичною до E). А це суперечить тому, що $x \in \mathtt{hext}(E\bigcap L)$. Отже, справедливе обернене включення $\mathtt{hext}(E\bigcap L) \subset (\mathtt{hext}E)\bigcap L$ та лема доведена.

Зауваження 4.2.1. Аналогічно доводиться рівність $\mathtt{rhext}(E\bigcap L) = (\mathtt{rhext}E)\bigcap L$ для h-екстремальних променів.

Теорема 4.2.1. *Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплекної прямої, буде h-оболонкою своїх h-екстремальних точок та h-екстремальних променів* $E = \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}E\bigcup \mathrm{rhext}E)$.

Доведення. Доведення проведемо індукцією згідно гіперкомплексної розмірності множини E. При $\mathtt{dim}_{\mathbb{H}}E = 0$ та $\mathtt{dim}_{\mathbb{H}}E = 1$ теорема очевидна. Припустимо, що теорема справедлива при всіх гіперкомплексних розмірностях множини E, які менші m $(1 < m \leq n)$. Доведемо її для $\mathtt{dim}_{\mathbb{H}}E = m$.

За умовою теореми множина E не містить гіперкомплексної прямої, тому не може співпадати ні з її афінною оболонкою, ні з декартовим добутком $E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Тому з леми 4.2.2 випливає, що непорожня межа ∂E не буде сильно гіперкомплексно опуклою множиною.

За означенням сильної гіперкомплексної опуклості перетин множини E довільною гіперкомплексною прямою буде також сильно гіперкомплексно опуклим. Нехай x – довільна точка множини E. Якщо x належить якійсь дотичній прямій L до E, то за припущенням індукції маємо включення $x \in \mathtt{hconv}((\mathtt{hext}E\bigcap L)\bigcup \mathtt{rhext}(E\bigcap L))$. Якщо ж існують точки множини E, через які не проходить жодна дотична до E гіперкомплексна пряма, тоді знайдеться точка $x \in \mathtt{int}E$.

У цьому випадку через точку x проведемо гіперкомплексну пряму l. Перетин $l \bigcap E$ є сильно гіперкомплексно опуклою множиною та не співпадає з l. Тому $x \notin [\partial(l \bigcap E)]$. Нехай тепер y – довільна точка межі перетину $\partial(l \bigcap E)$. Згідно сильної гіперкомплексної опуклості, через точку y можна провести дотичну до множини E пряму T. За припущенням індукції отримаємо включення $y \in \mathtt{hconv}((\mathtt{hext}E \bigcap T) \bigcup \mathtt{rhext}(E \bigcap T))$. Зауважимо, що це виконується для кожної точки $y \in \partial(l \bigcap E)$. Тоді, враховуючи лему 4.2.3 та зауваження 4.2.1, отримаємо $x \in \mathtt{hconv}(\mathtt{hext}E \bigcup \mathtt{rhext}E)$. В силу довільності вибору точки x $E \subset \mathtt{hconv}(\mathtt{hext}E \bigcup \mathtt{rhext}E)$. Обернене включення тривіальне. Теорема доведена.

4.3. Квазіопуклі множини

Клас сильно гіперкомплексно опуклих множин є незамкненим відносно перетинів. Тому для нього не виконується основна аксіома опуклості – перетин будь-якої кількості опуклих множин повинен бути опуклим. Означимо клас множин, який включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненим відносно перетинів.

Означення 4.3.1. *Гіперкомплексно опуклу множину $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \bigcap E) = 0$.*

Очевидно, що клас $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі області та компакти.

Покажемо замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин в тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 4.3.1. *Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим компактом.*

Доведення. Доведення достатньо провести для двох компактів. Нехай K_1, K_2 – два довільні $\mathbb{H}$-квазіопуклі компакти, γ – довільна гіперкомплексна пряма, яка перетинає множину $K_1 \bigcap K_2$. Використаємо точну когомологічну послідовність Майєра-В'єторіса

$$H^3(\gamma \bigcap K_1) \bigoplus H^3(\gamma \bigcap K_2) \to H^3(\gamma \bigcap K_1 \bigcap K_2) \to H^4(\gamma \bigcap (K_1 \bigcup K_2)).$$

Оскільки компакти K_1 та K_2 $\mathbb{H}$-квазіопуклі, то $H^3(\gamma \bigcap K_1) = 0$ та $H^3(\gamma \bigcap K_2) = 0$. Тому $H^3(\gamma \bigcap K_1) \bigoplus H^3(\gamma \bigcap K_2) = 0$.

З іншого боку, компактний перетин $\gamma \bigcap (K_1 \bigcup K_2) = (\gamma \bigcap K_1) \bigcup (\gamma \bigcap K_2)$ не може містити всю гіперкомплексну пряму γ, яка є чотиривимірним дійсним многовидом, тому $H^4(\gamma \bigcap (K_1 \bigcup K_2)) = 0$.

З точності когомологічної послідовності випливає, що $H^3(\gamma \bigcap K_1 \bigcap K_2) = 0$. Це еквівалентне тому, що перетин множини $K_1 \bigcap K_2$ довільною гіперкомплексною прямою не містить тривимірного коциклу. Звідси випливає $\mathbb{H}$-квазіопуклість компакта $K_1 \bigcap K_2$. Теорема доведена.

Лема 4.3.1. *Якщо всі співмножники E_j, $j = 1, ..., n$, ациклічні, то довільний перетин множини $E = E_1 \times ... \times E_n \subset \mathbb{H}^n$ не містить тривимірного коциклу.*

Доведення. Доведення проведемо для випадку, коли $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{H}^2$ та гіперкомплексна пряма γ проходить через початок координат. Цього завжди можна досягти заміною координат. Рівняння прямої має вигляд

$$\gamma = \{x |\ x_1 = k_1 x_2,\ x_3 = ... = x_n = 0,\ k = -\frac{r_1}{r_2},\ r_i = |x_i|,\ i = 1, 2\}.$$

Оскільки в прямій γ координати x_1, x_2 пов'язані між собою співвідношеннями $x_1 = kx_2$, а множини E_2 та kE_2, $k \neq 0$, гомеоморфні між собою, то перетин $\gamma \bigcap E$ співпадає з $E_1 \bigcap kE_2$.

З точності когомологічної послідовності Майєра-В'єторіса

$$H^3(E_1)\bigoplus H^3(kE_2)\to H^3(E_1\bigcap kE_2)\to H^4(E_1\bigcup kE_2),$$

оскільки $H^3(E_1)\bigoplus H^3(kE_2)=0$ та $H^4(E_1\bigcup kE_2)=0$, отримуємо, що $H^3(E_1\bigcap kE_2)=0$. Лема доведена.

З леми 4.3.1 фактично випливає, що декартовий добуток $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Означення 4.3.2. [20]. *Лінійним поліедром називається множина виду* $E=\{x|\ f_j(x)\in E_j,\ j\in J=\{1,2,...,N\}\}$, *де* $E_j\subset\mathbb{H}^1$, $f_j(x)=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k$, *причому довільні дві функції* $f_k(x),\ f_j(x),\ k\neq j$, *є лінійно незалежними, а кожна з функцій* f_j *відображає* E *в підмножину гіперкомплексної прямої* E_j.

Оскільки довільний компактний лінійний поліедр можна зобразити у вигляді перетину не більше, ніж n (n – скінченне число і позначає кількість граней поліедра) декартових добутків $\Gamma_i\times K_i$, $i=\overline{1,n}$, множини Γ_i, де Γ_i – грань поліедра, на кулю K_i досить великого радіуса в $(n-1)$-вимірній гіперкомплексній гіперплощині, яка ортогональна до грані Γ_i, то з теореми 4.3.1 отримуємо наступне твердження.

Теорема 4.3.2. *Компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять тривимірних циклів, є* $\mathbb{H}$*-квазіопуклою множиною.*

Наслідок 4.3.1. *Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде* $\mathbb{H}$*-квазіопуклою множиною.*

Зауваження 4.3.1. У роботі [41] доведено, що гіперкомплексно опукла область з гладкою межею буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 4.3.3. *Кожен ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт* E *буде* $\mathbb{H}$*-квазіопуклим.*

Доведення. Розглянемо перетин множини E гіперкомплексною прямою γ. Нехай перетин $\gamma\bigcap E$ містить негомологічний нулю тривимірний цикл Z. Візьмемо точку $x_0\in\gamma\setminus\gamma\bigcap E$, зачеплену з циклом Z.

Оскільки множина E гіперкомплексно опукла, то існує гіперкомплексна гіперплощина L, яка проходить через точку x_0 і не перетинає E. Тоді $(4n-4)$-вимірний цикл $K = L\bigcup(\infty)$ зачеплений з тривимірним циклом Z. Оскільки множина E однозв'язна, то цикл Z гомологічний нулю в E. Тоді існує ланцюг C в E, який обмежується циклом Z. За теоремою про зачеплення $C\bigcap K \neq \emptyset$, що суперечить тому, що множина $K\bigcap E$ порожня. Теорема доведена.

4.4. Висновки

У четвертому розділі дисертаційної роботи досліджено властивості h-оболонки множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Побудовано приклад, який показує, що спряжена множина до h-оболонки не завжди буде h-оболонкою. Введено поняття екстремального h-променя множини простору $\mathbb{H}^n$. Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку. Побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими). Доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин в тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною. Крім цього, встановлено, що компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять тривимірних циклів, та ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт будуть $\mathbb{H}$-квазіопуклими множинами.

Результати розділу опубліковано в [48].

РОЗДІЛ 5

ЛІНІЙНО ОПУКЛІ ТА СПРЯЖЕНІ ФУНКЦІЇ В ГІПЕРКОМПЛЕКСНОМУ ПРОСТОРІ

5.1. Початкові відомості

Будемо розглядати гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n = 1, 2, \dots$, який є прямим добутком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ [30] ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$). Зауважимо, що операція множення гіперкомплексних чисел може не задовольняти комутативний закон.

Для довільного скаляра $\lambda \in \mathbb{H}$ і вектора $x \in \mathbb{H}^n$ задамо множення вектора на скаляр у вигляді: $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, причому добуток на число справа добутком на скаляр загалом не буде. Вектори x, y називаються *колінеарними*, якщо $x = \lambda y$ з певним $\lambda \in \mathbb{H}$.

Також введемо поняття лінійного функціонала $l\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, що має характеристичну властивість: $l(ax + by) = al(x) + bl(y)$ при всіх x і y з $\mathbb{H}^n$ і довільних a і b з $\mathbb{H}$. Обмежимось розглядом лінійних функціоналів, що можуть бути записані у вигляді: $l(x) = x_1a_1 + \dots + x_na_n$, де $a = (a_1, \dots, a_n)$ є фіксованим елементом з $\mathbb{H}^n$. Тоді, беручи до уваги, що довільний $a \in \mathbb{H}^n$ породжує функціонал даного типу, назвемо $a = (a_1, \dots, a_n)$ *ковектором* і *елементом спряженого простору* $\mathbb{H}^{n*}$. Для довільної пари $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^{n*}$ визначимо скалярний добуток $\langle x, y\rangle$: $\langle x, y\rangle := \sum_{m=1}^{n} x_m y_m$. Якщо $\langle x, y\rangle = 0$, то вектори x і y назвемо *ортогональни-*

ми. Очевидно, що всі пари векторів, колінеарні, відповідно, x і y, також є ортогональними.

Гіперплощиною назвемо множину $L \subset \mathbb{H}^n$, що задовольняє одну з умов: $\langle x, a \rangle = w$, $\langle x - x_0, a \rangle = 0$, де x — довільна точка множини L, x_0 — фіксований вектор, w — фіксований скаляр з $\mathbb{H}$, a — фіксований ковектор. Назвемо ковектор a *нормаллю.* Відповідно, *афінними* будемо називати лише функції виду: $l(x) = \langle x, a \rangle + b$, $b \in \mathbb{H}$.

Означення 5.1.1. *Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається лінійно опуклою (справа), якщо для кожної точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує кватерніонна гіперплощина $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \langle x - x^0, a \rangle = 0,$ $a \in \mathbb{H}^{n*}\}$, яка проходить через x^0 і не перетинає E.*

Означення 5.1.2. [32]. *Гіперплощина $l \subset \mathbb{H}^n$ називається опорною до множини $E \subset \mathbb{H}^n$, якщо множина E міститься в замкненому півпросторі $\overline{H}_1$, але не міститься в жодному іншому замкненому півпросторі, який належить півпростору $\overline{H}_1$.*

Означення 5.1.3. *Лінійно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається строго лінійно опуклою, якщо для довільної опорної гіперплощини l перетин $l \bigcap E$ не містить внутрішніх відносно l точок.*

Означення 5.1.4. [39], [38]. *Замкнена або відкрита множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається сильно лінійно опуклою, якщо для довільної гіперкомплексної прямої γ множина $\gamma \bigcap E$ ациклічна.*

У спряженому просторі будемо розглядати лінійно опуклі множини зліва, вони мають властивості, аналогічні властивостям лінійно опуклих множин справа.

5.2. Лінійно опуклі функції

Введемо поняття багатозначної функції. Функція $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$. Область визначення такої функції будемо позначати через $E_f := \{x \in \mathbb{H}^n :$ існує $y \in \mathbb{H},\ y = f(x)\}$. *Графіком функції* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається множина точок виду $\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}\}$, яка задовольняє умову $y \in f(x)$.

Означення 5.2.1. *Багатозначна функція $f\colon E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається лінійно опуклою, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція l, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \bigcap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$.*

Означення 5.2.2. *Лінійно опукла функція $f\colon E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається сильно лінійно опуклою (відповідно, строго лінійно опуклою), якщо її графік $\Gamma(f)$ є сильно лінійно опуклою (відповідно, строго лінійно опуклою) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$ (в строгому випадку вимагаємо ще відкритість області визначення функції для того, щоб уникнути вертикальних дотичних $x = x_0$ до графіка $\Gamma(f)$, які будуть опорними гіперплощинами до графіка функції f, і їх перетин з графіком функції f може мати внутрішні відносно цих гіперплощин точки).*

Означення лінійно опуклої функції можна поширити на багатозначні функції, які приймають значення в розширеній гіперкомплексній площині $\overset{o}{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \bigcup (\infty)$, компактифікованій однією точкою, вважаючи, що в тих точках $x \in \mathbb{H}^n$, де $f(x)$ не визначена, $f(x) = \infty$ (при цьому ми вважаємо, що в довільному околі точки x існують точки, в яких функція визначена).

Ефективною множиною лінійно опуклої функції f назвемо проекцію на $\mathbb{H}^n$ графіка функції f. Лінійно угнутою функцією назвемо таку багатозначну функцію f, для якої функція $\varphi = \mathbb{H} \setminus f$ — лінійно опукла.

Багатозначною афінною функцією назвемо функцію лінійно опуклу і лінійно угнуту одночасно, для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $(f(x) \bigcap \mathbb{H})$, $(\mathbb{H} \setminus f(x))$ є непорожньою (тобто в цій точці значення функції f відмінне від $\emptyset$ і $\mathbb{H}$).

Легко перевірити, що для багатозначної афінної функції справедлива рівність $f(x) = f(\Theta) + l(x)$, де l — однозначна афінна функція, а $\Theta = (0, 0, ..., 0)$.

Дійсно, візьмемо точку x_0, для якої $f(x_0) \notin \{\emptyset, \mathbb{H}\}$, і точки $y_1 \in f(x_0)$, $y_2 \in \mathbb{H} \setminus f(x_0)$. Внаслідок афінності існують гіперплощини $l_1,\ l_2 : (x_0, y_1) \in l_1 \subset \Gamma(f),\ (x_0, y_2) \in l_2 \subset \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$. Звідси випливає, що для довільної точки x такої, що $x \in E_f$, виконуються умови: $f(x) \notin \{\emptyset, \mathbb{H}\}$ і гіперплощини $l_1,\ l_2$ не перетинаються. Сім'я гіперкомплексних гіперплощин має геометричні властивості, аналогічні до властивостей комплексних гіперплощин. А саме: дві гіперплощини або паралельні, або перетинаються (якби ми взяли сім'ю мішаних гіперплощин $\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - x_i^0)a_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i(x_i - x_i^0) = 0$, то це було б вже не так). Отже, для довільної іншої пари точок $y_1 \in f(\Theta),\ y_2 \in \mathbb{H} \setminus f(\Theta)$ гіперплощини $l_1,\ l_2$ паралельні і задаються рівнянням виду: $y = y_k + l(x)$, $k = 1, 2$, звідки слідує, що $f(x) = \bigcup\limits_{y \in f(\Theta)} y + l(x) = f(\Theta) + l(x)$.

Лінійно опуклу функцію назвемо *власною*, якщо хоча б для одного x має місце співвідношення: $f(x) \bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність: $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Наведемо деякі приклади лінійно опуклих функцій.

Для кожного вектора нормалі y розглянемо всі гіперплощини l : $\langle x, y \rangle = w$, які не перетинають деяку множину E: $l \bigcap E = \emptyset$. Для кожного y множину всіх таких w, що $l \bigcap E = \emptyset$, позначимо через $W_E(y)$.

Означення 5.2.3. *Функція*

$$W_E(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$

називається опорною функцією множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

Зауважимо, що графік опорної функції $\Gamma(W_E) = \{(y, W_E(y)) : y \in \mathbb{H}^{n*}\}$ є конусом. Якщо $z \in \Gamma(W_E)$, то $\forall \alpha \in \mathbb{H}$ має місце включення $\alpha z \in \Gamma(W_E)$.

Означення 5.2.4. *Якщо* $E \subset \mathbb{H}^n$ *– лінійно опукла множина, то функція*

$$\delta(x|E) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in E, \\ \infty, & \text{якщо } x \notin E, \end{cases}$$

називається її індикаторною функцією.

Легко переконатися, що опорна та індикаторна функції лінійно опуклі.

Теорема 5.2.1. *Якщо* f_α, $\alpha \in A$, *є сім'єю лінійно опуклих функцій (A — довільна множина індексів), то функція* $f = \bigcap\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ *є лінійно опуклою.*

Доведення. Маємо $\Gamma(f) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \Gamma(f_\alpha)$. Але перетин лінійно опуклих множин є лінійно опуклим [38]. Тому $\Gamma(f)$ лінійно опукла множина і функція f лінійно опукла.

Означення 5.2.5. *Скажемо, що функція* $g = \mathrm{int} f$, *якщо її графік можна подати у вигляді* $\Gamma(g) = \mathrm{int}\,(\Gamma(f))$, *де* $\mathrm{int}(\cdot)$ *позначає внутрішність відповідної множини.*

Теорема 5.2.2. *Якщо* f *— лінійно опукла функція і* $E_f = E_{\mathrm{int}(f)}$, *то* $\mathrm{int} f$ *— лінійно опукла функція.*

Доведення. Оскільки f – лінійно опукла функція, то $\Gamma(f)$ – лінійно опукла множина. Тому $\Gamma(\mathtt{int}(f)) = \mathtt{int}\,(\Gamma(f))$ теж лінійно опукла множина [38]. Звідси $\mathtt{int}(f)$ – лінійно опукла функція. Умова $E_f = E_{\mathtt{int}(f)}$ забезпечує те, що гіперплощина, яка не перетинає $\Gamma(\mathtt{int} f)$, задає афінну функцію в точках $(x, y) \in \Gamma(f) \backslash \Gamma(\mathtt{int} f)$, так як $\mathtt{int} f \neq \emptyset$ при $x \in E_{(\mathtt{int} f)}$ (знову уникаємо вертикальних дотичних $x = x_0$).

5.3. Спряжені функції

Нехай $f\colon E_f \longrightarrow \overset{o}{\mathbb{H}} = \mathbb{H}\bigcup(\infty)$ — багатозначна функція.

Розглянемо опорну функцію до графіка $\Gamma(f)$.

$W_{\Gamma(f)}(z^*) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup\limits_{z\in\Gamma(f)} \langle z, z^*\rangle = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup\limits_{x\in\mathbb{H}^n, y\in f(x)} (\langle x, x^*\rangle + yy^*)$, де $z = (x, y)$, $z^* = (x^*, y^*)$, $x \in \mathbb{H}^n$, $x^* \in \mathbb{H}^{n*}$; y, $y^* \in \mathbb{H}$. Оскільки графік опорної функції є конусом, то він повністю задається своїм зрізом, наприклад гіперплощиною $l : z^*_{n+1} = -1$. $W_{\Gamma(f)}(x^*)\bigcap l = = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup\limits_{x\in\mathbb{H}^n} (\langle x, x^*\rangle - f(x))$.

Функцією, *спряженою* з f, назвемо функцію, що задається рівністю

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)). \tag{5.1}$$

З означення спряженої функції випливає гіперкомплексний аналог нерівності Юнга-Фенхеля [9]:

$$\langle x, y\rangle \notin f(x) + f^*(y). \tag{5.2}$$

Співвідношення (5.2) можна переписати у вигляді

$$\langle x, y\rangle \in \mathbb{H} \setminus (f(x) + f^*(y)),$$

або

$$f(x)\bigcap(\langle x, y\rangle - f^*(y)) = \emptyset$$

при всіх $x \in \mathbb{H}^n$, $y \in \mathbb{H}^{n*}$.

Знайдемо функцію, спряжену до функції $f^*(y)$.

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)).$$

Побудуємо функції, спряжені до лінійно опуклих функцій, розглянутих у попередньому розділі.

Приклад 5.3.1. Спряженою з багатозначною афінною функцією $f(x) = \langle x, y_0\rangle + f(\Theta)$, де $f(\Theta)$ — множина, є функція

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle - f(\Theta)) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y - y_0\rangle - f(\Theta)) =$$

$$= \begin{cases} \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (-f(\Theta)), & \text{якщо } y = y_0, \\ \infty, & \text{якщо } y \neq y_0. \end{cases}$$

Приклад 5.3.2. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^n \setminus E \neq \emptyset$, $f(x) = \delta(x|E)$. Тоді

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - \delta(x|E)) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{x \subset E} \langle x, y\rangle,$$

тобто спряженою з індикаторною функцією власної підмножини E буде опорна функція цієї множини.

Будемо записувати $f_1 \supseteq f_2$, якщо $f_1(x) \supseteq f_2(x)$ при всіх x, причому не виключаємо випадок $f_2(x) = \emptyset$ для деяких точок x. Також будемо говорити при цьому, що f_1 є *продовженням* функції f_2, а f_2 є *звуженням* функції f_1. Із включень $f_1 \supseteq f_2$ та рівностей 5.1 і 5.2 випливає, що $f_1^* \subseteq f_2^*$.

Теорема 5.3.1. *Для кожної функції* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *справедливе включення* $f \subset f^{**}$.

Доведення. З нерівності 5.2 отримаємо

$$\langle x, y\rangle - f^*(y) \notin f(x),\ \langle x, y\rangle - f^*(y) \subset \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus f(x),$$

$$\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x, y\rangle - f^*(y)) \supset f(x),\ \bigcap_y [\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x, y\rangle - f^*(y))] \supset f(x),$$

$$\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)) \supset f(x),\ f \subset f^{**}.$$

Означення 5.3.1. *Багатозначна функція* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *називається відкритою (відповідно, замкненою чи компактною), коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в* $\mathbb{H}^{n+1}$.

Теорема 5.3.2. *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

Доведення. Значення спряженої функції можна записати у вигляді $f^*(y) = \bigcap\limits_x (\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x, y\rangle - f(x)))$. При фіксованому x функція $\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x, y\rangle - f(x))$ є багатозначною афінною функцією по y, тому її можна подати у вигляді $\langle x, y\rangle + [\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (-f(x))]$. Графік $\Gamma(f^*)$ є перетином графіків замкнених лінійно опуклих функцій виду $\langle x, y\rangle + [\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (-f(x))]$, тому $\Gamma(f^*)$ є замкненою та лінійно опуклою множиною.

Аналогічно доводяться замкненість і лінійна опуклість функції, що є спряженою до відкритої функції.

Зауваження 5.3.1. Відмітимо, що при доведенні теореми 5.2.2 відкритість вихідної функції ми використовували тільки у доведенні замкненості спряженої функції. Відповідно, функція, що є спряженою до функції $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, буде лінійно опуклою.

Теорема 5.3.3. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Доведення. Якщо $x_0 \in E_f$, то

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)) \subset \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x_0, y\rangle - f(x_0)).$$

Відповідно, $\mathbb{H} \setminus f^*(y) \supset \langle x_0, y\rangle - f(x_0) \neq \emptyset$ для всіх y. З другого боку, оскільки f – власна лінійно опукла функція, то існує афінна функція $l(x) = \langle x, y\rangle + \alpha$, яка не перетинає $\Gamma(f)$. Тоді для цього y : $\langle x, y\rangle + \alpha \notin f(x)$; $\langle x, y\rangle - f(x) \notin -\alpha$; $-\alpha \subset \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x, y\rangle - f(x))$. Отже, $f^*(y) \supset -\alpha \neq \emptyset$.

Розглянемо лінійне відображення $A\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $A(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$. Якщо ковектори $l_1, \ldots, l_n$ лінійно незалежні, то відображення A є сюр'єктивним, а, отже, внаслідок лінійності, є гомеоморфізмом. Доведемо, що обернене відображення A^{-1} також лінійне. Дійсно, $A^{-1}(ax+by)=z$, $A(z)=ax+by$, з іншого боку: $A(aA^{-1}x+bA^{-1}y)=ax+by$. Тепер з гомеоморфності відображення A випливає, що $A^{-1}(ax+by)=z=aA^{-1}(x)+bA^{-1}(y)$.

Отже, довільне лінійне відображення $A\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $A(x)=(l_1(x),\ldots,l_n(x))$, що задається квадратною матрицею, рядки якої є координатами лінійно незалежних ковекторів, є лінійним гомеоморфізмом. Справедливе також обернене твердження.

Теорема 5.3.4. *Задано відображення $\Lambda\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, яке є гіперкомплексно лінійним гомеоморфізмом, і функцію $g\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$. Нехай*

$$f(x)=\lambda g(\Lambda x+w_0)+\langle x,y_0\rangle+\gamma_0,$$

де $w_0\in\mathbb{H}^n$, $y_0\in\mathbb{H}^{n*}$, $\gamma_0\in\mathbb{H}$, $\lambda\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$. Тоді

$$f^*(y)=\lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y-y_0))-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle-\gamma_0.$$

Доведення. Маємо

$$f^*(y)=\overset{o}{\mathbb{H}}\setminus\bigcup_x\big(\langle x,y\rangle-\lambda g(\Lambda x+w_0)-\langle x,y_0\rangle-\gamma_0\big)=$$

$$=\overset{o}{\mathbb{H}}\setminus\bigcup_x\big(\langle x,y-y_0\rangle-\lambda g(\Lambda x+w_0)-\gamma_0\big)=$$

$$=\overset{o}{\mathbb{H}}\setminus\bigcup_x\big(\langle w,\Lambda^{-1*}(y-y_0)\rangle-\lambda g(w)-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle-\gamma_0\big)=$$

$$=\left(\overset{o}{\mathbb{H}}\setminus\bigcup_w\lambda(\langle w,\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y-y_0)\rangle-g(w))-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle-\gamma_0\right)=$$

$$=\lambda\left(\overset{o}{\mathbb{H}}\setminus\bigcup_w(\langle w,\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y-y_0)\rangle-g(w))\right)-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle-\gamma_0=$$

$$=\lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y-y_0))-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle-\gamma_0.$$

(Нехай $w=\Lambda x+w_0$, тоді $x=\Lambda^{-1}(w-w_0)$, а $\langle x,y-y_0\rangle=\langle\Lambda^{-1}w,y-y_0\rangle-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle=\langle w,\Lambda^{-1*}(y-y_0)\rangle-\langle\Lambda^{-1}w_0,y-y_0\rangle$).

З цієї теореми випливають формули для обчислення деяких спряжених функцій:

$$f(x) = g(x + x_0) \Rightarrow f^*(y) = g^*(y) - \langle y_0, y\rangle;$$

$$f(x) = g(x) + \langle x, y_0\rangle \Rightarrow f^*(y) = g^*(y - y_0);$$

$$f(x) = \lambda g(\mu x),\ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0 \Rightarrow f^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\mu^{-1}y).$$

Доведемо гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 5.3.5. *Нехай багатозначна функція* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *така, що* $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ *для всіх* $x \in \mathbb{H}^n$. *Тоді* $f^{**} = f$ *тоді і тільки тоді, коли* f *є лінійно опуклою.*

Доведення. Доведемо, що рівність $f^{**} = f$ рівносильна лінійній опуклості функції f.

Якщо $f^{**} = f$, то, згідно з зауваженням 5.3.1, функція, спряжена до довільної функції, буде лінійно опуклою. Якщо $f(\mathbb{H}^n) \equiv \infty$, то рівність $f^{**} = f$ отримується з формул 5.1 і 5.2. Маємо $f^*(y) = \mathbb{H}$ для всіх $y \in \mathbb{H}^{n*}$ і $f^{**} = \infty$. Оскільки за теоремою 5.3.1 завжди виконується $f \subset f^{**}$, то достатньо показати, що для лінійно опуклої функції справедливе включення $f \supseteq f^{**}$.

Нехай в деякій точці x_0 має місце нерівність $f(x_0) \neq f^{**}(x_0)$. Тоді існує афінна функція $l(x) = \langle x, y_0\rangle + \alpha$, така, що $\Gamma(l) \bigcap \Gamma(f) = \emptyset$ і $w_0 = \langle x_0, y_0\rangle + \alpha$, де $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. Тоді

$$f^*(y_0) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y_0\rangle - f(x)) = \bigcap_x [\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x, y_0\rangle - f(x))] \supsetneqq (-\alpha),$$

так як $[\langle x, y_0\rangle - f(x)] \neq -\alpha$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Для функції f^{**} справедливе включення

$$f^{**}(x_0) = \bigcap_y [\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x_0, y\rangle - f^*(y))] \subset$$

$$\subset \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x_0, y_0\rangle - f^*(y_0)) \subset \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (\langle x_0, y_0\rangle + \alpha) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus w_0.$$

Тому $w_0 \notin f^{**}(x_0)$, що суперечить вибору точки $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. Теорема доведена.

Означення 5.3.2. *Функція f називається однорідною, якщо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.*

Теорема 5.3.6. *Нехай $f \colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ є власною лінійно опуклою однорідною функцією і $f(\Theta) = \mathbb{H} \setminus 0$. Тоді f є опорною функцією деякої множини.*

Доведення. Розглянемо множину $A = \{y \in \mathbb{H}^{n*} |\ f(x) \not\ni \langle x, y\rangle,$ $\forall x \in \mathbb{H}^n\}$ і покажемо, що $f(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup\limits_{y\in A} \langle x, y\rangle = W_A(x)$. Якщо $y \in A$, то $\langle x, y\rangle \notin f(x)$ і $0 \notin \langle x, y\rangle - f(x)$ для всіх x. Відповідно, $f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup\limits_{x\in\mathbb{H}^n} (\langle x, y\rangle - f(x)) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus f(\Theta) = 0$. Якщо $y \notin A$, то $\langle x, y\rangle \in f(x)$ для деякого $x_0 \in \mathbb{H}^n$, $x_0 \neq 0$. Тоді

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{x\in\mathbb{H}^n} (\langle x, y\rangle - f(x)) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus (f(\Theta) \bigcup_{x\in\mathbb{H}^n\setminus\Theta} (\langle x, y\rangle - f(x))) =$$

$$= \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \Big((\mathbb{H} \setminus 0) \bigcup (\langle x_0, y\rangle - f(x_0))\Big) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \Big((\mathbb{H} \setminus 0) \bigcup 0\Big) = \infty.$$

Згідно з теоремою 5.3.3 одержуємо, що f^* є власною функцією. Тому $A \neq \emptyset$ і $f^* = \delta_A$. Беручи до уваги гіперкомплексну теорему Фенхеля–Моро і приклад 5.3.2, одержуємо рівність $f = f^{**} = \delta_A^* = W_A$. Тобто f — опорна функція множини A.

Звідси отримуємо наступне твердження.

Наслідок 5.3.1. *Якщо однорідна лінійно опукла функція $f \colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ є відмінною від афінної, то $f^*(y) = \delta(y|E_{f^*})$.*

Теорема 5.3.7. *Якщо $f \colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ – однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{y\in E_{f^*}} \langle x, y\rangle.$$

Доведення. Якщо f — лінійно опукла функція, то за теоремою Фенхеля–Моро $f = f^{**} = \delta^*$. Беручи до уваги приклад 5.3.2, переконуємось, що f є опорною функцією множини E_{f^*}.

Одним з прикладів однорідної функції буде гіперкомплексна функція Мінковського, яку означимо наступним чином. Нехай E — множина в $\mathbb{H}^n$, $\Theta \in E$. Покладемо $R_E(x) = \{w \in \mathbb{H} \,|\, w^{-1}x \in E\}$ при $x \in \mathbb{H}^n \setminus \Theta$, $R_E(\Theta) = \mathbb{H} \setminus 0$. Покажемо однорідність функції R_E. Маємо $R_E(\lambda x) = \{w \in \mathbb{H} \,|\, w^{-1}(\lambda x) \in E\} = \{\lambda w \in \mathbb{H} \,|\, (\lambda w)^{-1}(\lambda x) = w^{-1}\lambda^{-1}(\lambda x) = w^{-1}x \in E\} = \lambda R_E(x)$.

Однорідна функція має наступні властивості:

1) якщо E – гіперкомплексно опукла множина, то функція R_E гіперкомплексно опукла;

2) якщо $x \in E$, то $1 \in R_E$; якщо $x \notin E$, то $1 \notin R_E$.

Розглянемо сім'ї рівнянь

$$w = \langle x, y \rangle - \alpha, \tag{5.3}$$

які при фіксованому y задають сім'ї паралельних гіперплощин в $\mathbb{H}^{n+1}$, що залежать від α. Якщо $\alpha \in \langle x_0, y \rangle - f(x_0)$, то ця гіперплощина перетинає графік $\Gamma(f)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо, що множина $\bigcup\limits_{x_0}(\langle x_0, y\rangle - f(x_0))$ задає образ графіка $\Gamma(f)$ при проектуванні π_L сім'єю 5.3 на вісь $x = 0$. Тому згідно 5.1 і 5.2

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \pi_L(\Gamma(f)). \tag{5.4}$$

Наслідок 5.3.2. *Якщо f — відкрите відображення, то $f^*(y)$ компактне.*

Цей наслідок випливає з 5.4 і того, що проекція π_L зберігає відкритість.

Наслідок 5.3.3. *Якщо f — компактне відображення, то $f^*(y)$ відкрите.*

Наслідок випливає з 5.4, оскільки неперервне однозначне відображення π_L зберігає компактність.

Наслідок 5.3.4. *Якщо f — сильно гіперкомплексно опукле відображення, то $f^*(y)$ — ациклічне.*

Наслідок випливає з 5.4 і наслідку 5.3.2.

Означення 5.3.3. *Нехай $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію $(\bigcup\limits_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcup\limits_\alpha f_\alpha(x)$ назвемо об'єднанням функцій f_α, а $(\bigcap\limits_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcap\limits_\alpha f_\alpha(x)$ — їх перетином.*

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 5.3.8. *Нехай $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*

$$\Big(\bigcup_\alpha f_\alpha\Big)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

Доведення. Використовуючи вираз 5.1 для спряжених функцій, одержуємо

$$\Big(\bigcup_\alpha f_\alpha\Big)^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x \Big(\langle x, y\rangle - \bigcup_\alpha f_\alpha(x)\Big) =$$

$$= \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x \bigcup_\alpha \Big(\langle x, y\rangle - f_\alpha(x)\Big) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_\alpha \bigcup_x \Big(\langle x, y\rangle - f_\alpha(x)\Big) =$$

$$= \bigcap_\alpha \Big(\overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f_\alpha(x))\Big) = \bigcap_\alpha f_\alpha^*(y).$$

5.4. Висновки

У п'ятому розділі дисертаційної роботи узагальнено деякі результати щодо багатозначних функцій в комплексному просторі на n-вимірний гіперкомплексний простір. Введено поняття лінійно опуклої та спряженої функції в $\mathbb{H}^n$. Наведено приклади лінійно опуклих та спряжених функцій. Зокрема, таких лінійно опуклих функцій як багатозначна афінна функція, опорна та індикаторна функції множини. Крім цього, побудовано функції, спряжені до багатозначної афінної функції та індикаторної функції множини. Встановлено, що перетин довільної кількості лінійно опуклих функцій та внутрішність графіка лінійно опуклої функції є лінійно опуклою функцією. Доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро, а також ряд властивостей функцій, спряжених до функцій $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Результати розділу опубліковано в [52].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено геометричні та топологічні властивості узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих оболонок цих множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ та $\mathbb{H}^n$, узагальнено опуклих функцій в просторі $\mathbb{H}^n$, а також в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ побудовано множину нульової міри, яка містить довільну кількість множин деякого класу.

Основні результати дисертації такі:

— Досліджено узагальнено опуклі множини та їх узагальнено опуклі оболонки. Повністю розв'язана класична задача про тінь, яка є частковим випадком належності точки узагальнено опуклій оболонці деякої сім'ї куль. Встановлено, що при $n > 2$ $(n+1)$-ї кулі, центри яких лежать на $(n-1)$-вимірній сфері, необхідно і достатньо для створення тіні в центрі сфери. Розглянуто деякі узагальнення класичної задачі про тінь. Сформульовано задачу про тінь для півопуклості. Отримано повний розв'язок цієї задачі в двовимірному евклідовому просторі. Встановлено, що для створення тіні в центрі кола необхідно і достатньо трьох кругів. Знайдено достатню кількість куль для створення тіні при $n = 3$ у випадку півопуклості. Показано, що десяти куль з центрами на двовимірній сфері достатньо для створення тіні в центрі сфери. Узагальнено задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери та отримано розв'язок цієї задачі на площині (для створення тіні в довільній точці внутрішності круга необхідно і достатньо трьох кругів). Отримано розв'язок задачі про тінь для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій. Показано, що у випадку 1-опуклості n елементів цієї сім'ї, а у випадку 1-півопуклості $2n$ множин необхідно і достатньо для створення тіні у довільній точці n-вимірного евклідового простору. Досліджено, скільки куль достатньо для створення тіні у центрі сфери в комплексному (гіперкомплексному) просторах. Встановлено, що в комплексному просторі це число становить $2n$, а в гіперкомплексному $4n-2$.

— В n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ побудовано множину, n-вимірна Лебегова міра якої дорівнює нулю і яка містить сфери з усіма можливими радіусами.

— Досліджено властивості h-оболонки множин в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Введено поняття екстремального h-променя множини простору $\mathbb{H}^n$. Доведено аналог теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному випадку. Побудовано клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів (такі множини названі $\mathbb{H}$-квазіопуклими). Доведено замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин в тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною. Крім цього, встановлено, що компактний лінійний поліедр та ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт будуть $\mathbb{H}$-квазіопуклими множинами.

— Узагальнено деякі результати щодо багатозначних функцій в комплексному просторі на n-вимірний гіперкомплексний простір. Введено поняття лінійно опуклої та спряженої функції в $\mathbb{H}^n$. Встановлено, що перетин довільної кількості лінійно опуклих функцій та внутрішність графіка лінійно опуклої функції є лінійно опуклою функцією. Доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро, а також ряд властивостей функцій, спряжених до функцій $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$.

Отримані в дисертаційній роботі результати та розвинені в ній методи можуть бути корисними в подальших дослідженнях питань опуклого та гіперкомплексного аналізу, а також теорії відображень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айзенберг Л. А. Линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ и разделение особенностей голоморфных функций / Л. А. Айзенберг // Бюлетень польской академии наук, Серия мат., астр. и физ. наук. — 1967. — Т. 15, № 7. — С. 487 – 495.

2. Айзенберг Л. А. Линейные функционалы в просторах аналитических функций и линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ / Л. А. Айзенберг // Исследования по линейным операторам в теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — Ленинград: Наука, 1978. — Т. 81. — С. 29 – 32.

3. Айзенберг Л. А. О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби / Л. А. Айзенберг // Тезисы кратких научных сообщений Международного матем. конгресса, секция 4. — 1966. — С. 29.

4. Айзенберг Л. А. О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби / Л. А. Айзенберг // Сибирск. матем. журн. — 1967. — Т. 8, № 5. — С. 1124 – 1142.

5. Айзенберг Л. А. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе / Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков // Новосибирск: Наука, 1979. — 368 с.

6. Айзенберг Л. А. О линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ / Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, Л. Я. Макарова // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9,

№ 4. — С. 731 – 746.

7. Берже М. Геометрия. В 2-х т. / М. Берже. — М.: Мир, 1984. — Т. 1. — 560 с.; Т. 2. — 368 с.

8. Бермант А. Ф. Курс математического анализа. Ч.1 / А. Ф. Бермант. — 9-е изд. — М.: Физматгиз, 1959. — 358 с.

9. Зелинский Ю. Б. Выпуклость. Избранные главы / Ю. Б. Зелинский // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2012. — Т. 92. — 280 с.

10. Зелинский Ю. Б. Задача о тени для семейства множеств / Ю. Б. Зелинский // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 197 – 204.

11. Зелинский Ю. Б. Многозначные отображения в анализе / Ю. Б. Зелинский. — К.: Наукова думка, 1993. — 264 с.

12. Зелинский Ю. Б. О линейно выпуклых областях с гладкими границами / Ю. Б. Зелинский // Укр. мат. журн. – 1988. — Т. 40, № 1. — С. 53 – 58.

13. Зелинский Ю. Б. О локально линейно выпуклых областях / Ю. Б. Зелинский // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 2. — С. 280 – 284.

14. Зелинский Ю. Б. О многозначных линийно выпуклых функциях / Ю. Б. Зелинский // Комплексный анализ, алгебра и топология. — К.: Ин-т матем. АН УССР, 1990. — С. 52 – 61.

15. Зелинский Ю. Б. Теорема Хелли и смежные вопросы / Ю. Б. Зелинский // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, №1. — С. 125 – 128.

16. Зелинский Ю. Б. Задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Доп. НАН України. — 2015. — № 5. — С. 15 – 20.

17. Зелинский Ю. Б. Задача о тени и смежные вопросы / Ю. Б. Зелинский, І. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого – 1 березня 2015 р., Ворохта: Тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 24 – 25.

18. Зелінський Ю. Б. Задача про тінь для сфер / Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська, М. В. Стефанчук // Міжнародна конференція молодих математиків, 3 — 6 червня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2015. — С. 74.

19. Зелинский Ю. Б. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени / Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 12. — С. 1658 – 1666.

20. Зелинский Ю. Б. Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях / Ю. Б. Зелинский, Г. А. Мкртчян // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 311, № 6. — С. 1299 – 1302.

21. Зелінський Ю. Б. Узагальнення задачі про тінь / Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 6. — С. 757 – 762.

22. Зелинский Ю. Б. О послойной линейной выпуклости / Ю. Б. Зелинский, М. В. Ткачук // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2006. — Т. 3, № 4. — С. 366 – 373.

23. Зиновьев Б. С. Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно выпуклых областей с гладкими границами в пространстве $\mathbb{C}^n$ / Б. С. Зиновьев // Изв. вузов. Матем. — 1971. — № 6. — С. 61 – 69.

24. Знаменский С. В. Геометрический критерий сильной линейной выпуклости / С. В. Знаменский // Функционал. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, № 3. — С. 83 – 84.

25. Знаменский С. В. Семь задач о $\mathbb{C}$-выпуклости / С. В. Знаменский // Комплексный анализ в современной математике: к 80-летию со дня рождения Б. В. Шабата. — М.: ФАЗИС, 2001. — С. 123 – 132.

26. Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций / С. В. Знаменский // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 3. — С. 31 – 43.

27. Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. II. Существование голоморфных решений линейных систем уравнений / С. В. Знаменский // Сиб. мат. журн. — 1988. — Т. 29, № 6. — С. 49 – 65.

28. Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость / С. В. Знаменский // Комплексный анализ и математическая физика. — Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1988. — С. 35 – 52.

29. Знаменский С. В. Томография в пространствах аналитических функционалов / С. В. Знаменский // Доклады АН СССР. — 1990. — Т. 312, № 5. — С. 1037 – 1040.

30. Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. — 144 с.

31. Клищук Б. А. Об отображениях, сохраняющих гиперкомплексную выпуклость / Б. А. Клищук // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — 2013. — Т. 10, № 1. — С. 133 – 139.

32. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.

33. Магарил-Ильяев Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. — М.: Едиториал УРСС. — 2003. — 176 с.

34. Макарова Л. Я. Достаточные условия сильной линейной выпуклости для полиэдров / Л. Я. Макарова // Некотрие вопросы многомерного комплексного анализа. — Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1980. — С. 89 – 94.

35. Мельник В. Л. Об обобщенно выпуклых множествах / В. Л. Мельник — Киев, 1991. — 9 с. — (Препр. АН УССР. Ин-т матем.; 91.1).

36. Мельник В. Л. Топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин / В. Л. Мельник // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 9. — С. 1236 – 1243.

37. Мкртчян Г. А. Гиперкомплексно выпуклые области с гладкой границей / Г. А. Мкртчян // Докл. АН УССР. — 1986. — Сер. А, № 3. — С. 15 – 17.

38. Мкртчян Г. А. О гиперкомплексно выпуклых множествах / Г. А. Мкртчян. — Киев: ИМ АН УССР, 1987. — 17 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т матем.; 87.42)

39. Мкртчян Г. А. О гиперкомплексной выпуклости / Г. А. Мкртчян // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 177.

40. Мкртчян Г. А. О локально гиперкомплексно выпуклых областях / Г. А. Мкртчян // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. — Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1986. — С. 30.

41. Мкртчян Г. А. О сильной гиперкомплексной выпуклости / Г. А. Мкртчян // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 2. — С. 182 – 187.

42. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973. — 471 с.

43. Рохлин В. А. Начальный курс топологии / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. — М.: Наука, 1977. — 488 с.

44. Солтан В. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости / В. Солтан. — Кишинев: Штиинца, 1984. — 224 с.

45. Спеньер Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

46. Стефанчук М. В. Властивості лінійно опуклих та спряжених функцій в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук // XI Літня школа „Алгебра, Топологія, Аналіз", 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2016. — С. 88 – 89.

47. Стефанчук М. В. Деякі узагальнення задачі про тінь / М. В. Стефанчук // XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016", 6 – 8 квітня 2016 р., Київ: Матеріали конференції. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2016. — С. 77 – 81.

48. Стефанчук М. В. Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук // Доп. НАН України. — 2016. — № 4. — С. 13 – 19.

49. Стефанчук М. В. Екстремальні елементи та $\mathbb{H}$-квазіопуклі множини в $\mathbb{H}^n$ / М. В. Стефанчук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 – 27 лютого 2016 р., Ворохта: Тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 139 – 142.

50. Стефанчук М. В. Узагальнено опуклі множини і задача про тінь / М. В. Стефанчук // X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 3 – 15 серпня 2015 р., Одеса: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 62.

51. Стефанчук М. В. Узагальнення задачі про тінь для сім'ї множин / М. В. Стефанчук // International Conference "Geometry and topology in Odessa – 2016", 2 – 8 червня 2016 р., Одеса: Тези доповідей. — Одеса, 2016. — С. 56.

52. Стефанчук М. В. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 225 – 235.

53. Стефанчук М. В. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // XIII Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2015", 1 – 3 квітня 2015 р., Київ: Матеріали конференції. — Київ, 2015. — С. 48 – 49.

54. Стефанчук М. В. Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 285 – 289.

55. Стефанчук М. В. Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фале, 1 – 4 липня 2015 р., Чернівці: Тези доповідей. — Чернівці, 2015. — С. 111 – 112.

56. Трутнев В. М. Некоторые свойства функций, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах / В. М. Трутнев // Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, № 5. — С. 253 – 254.

57. Трутнев В. М. Об одном аналоге ряда Лорана для функций многих комплексных переменных, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах / В. М. Трутнев // Голоморфные функции многих комплексных переменных. — Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. — С. 139 – 152.

58. Худайберганов Г. Об одной задаче Грауэрта / Г. Худайберганов // Докл. АН УзССР. — 1975. — № 3. — С. 7 – 8.

59. Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров / Г. Худайберганов // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 — 85 Деп.

60. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2 / Б. В. Шабат. — 3-е изд. — М.: Наука, 1985. — 455 с.

61. Шеффер Х. Топологические векторные пространства / Х. Шеффер. — М.: Мир, 1971. — 360 с.

62. Щепин Е. В. Критерий выпуклости открытого множества / Е. В. Щепин // III Тираспол. симпоз. по общ. топологии и ее прилож. — Кишинев: Штиинца, 1973. — С. 146.

63. Эдвардс Р. Функциональный анализ / Р. Эдвардс. — Москва: Мир. — 1969. — 1072 с.

64. Южаков А. П. Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ / А. П. Южаков, В. П. Кривоколеско // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, № 2. — С. 452 – 458.

65. Яглом И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. — М., Л.: Государственное изд. техн.-теор. л-ры. — 1951. — 343 с.

66. Anderson M. Complex convexity and analytic functionals / M. Anderson, M. Passare, R. Sigurdson. — Reykjavik, 1995. — 71 p.

67. Anderson R. D. Convex functions and upper-semi-continuous collections / M. Anderson, V. L. Klee // Duke Math. J. — 1952. — Vol. 19. — P. 349 – 357.

68. Aumann G. On a topological characterization of compact convex pointsets / G. Aumann // Ann. Math. — 1936. — Vol. 37, № 3. — P. 443 – 447.

69. Behnke H. Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen / H. Behnke, E. Peschl // Math. Ann. — 1935. — Vol. 111, № 2. — P. 158 – 177.

70. Besicovitch A. S. On fundamental geometric properties of plane linesets / A. S. Besicovitch // J. London Math. Soc. — 1964. — Vol. 39. — P. 441 – 448.

71. Besicovitch A. S. On Kakeya's problem and a similar one / A. S. Besicovitch // Math. Zeit. — 1928. — Vol. 27. — P. 312 – 320.

72. Besicovitch A. S. Sur deux questions d'integrabilite des fonctions / A. S. Besicovitch // J. Soc. Phys. — Math.(Perm'). — 1919 (1920). — Vol. 2. — P. 105 – 123.

73. Besicovitch A. S. A plane set of measure zero containing circumferences of every radius / A. S. Besicovitch, R. Rado // J. London Math. Soc. — 1968. — Vol. 43. — P. 717 – 719.

74. Daverman R. J. Problems about finite dimensional manifolds / R. J. Daverman // Preprint, 1989.

75. Fisher B. On a Problem Besicovitch / B. Fisher // The American Mathematical Monthly. — 1973. — Vol. 80, № 7. — P. 785 – 787.

76. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen 4 u = 0 und 44 u = 0 mit vier reellen Variablen / R. Fueter // Comment. Math. Helv. — 1935. — Vol. 7. — P. 307 – 330.

77. Fueter R. Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen / R. Fueter // Comment. Math. Helv. — 1936. — Vol. 8. — P. 371 – 378.

78. Gürlebeck K. Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis / K. Gürlebeck, W. Sprössig. — Cambridge University Press, 1991. — 334 p.

79. Hamilton W. R. Elements of quaternions / W. R. Hamilton. — London: Longmans Green, 1866. — 888 p.

80. Hörmander L. Notions of convexity / L. Hörmander. — Boston: Birhäuser, 1994. — (Progress in Mathematics. — Vol. 127)

81. Hörmander L. Weak linear convexity and a related notion of concavity / L. Hörmander // Math. Scand. — 2008. — Vol. 102. — P. 73 – 100.

82. Kakeya S. Some problems on minima and maxima regarding ovals / S. Kakeya // Tohoku Science Reports. — 1917. — Vol. 6. — P. 71 – 88.

83. Kiselman Ch. O. A differential inequality characterizing weak lineal convexity / Ch. O. Kiselman // Math. Ann. — 1998. — Vol. 311, № 1. — P. 1 – 10.

84. Kiselman Ch. O. Lineally convex Hartogs domains / Ch. O. Kiselman // Acta Math. Vietnamica. — 1996. — Vol. 21. — P. 69 – 94.

85. Kosiński A. A theorem on families of acyclic sets and its applications / A. Kosiński // Pacific J. Math. — 1962. — Vol. 12. — P. 317 – 325.

86. Kravchenko V. V. Applied quaternionic analysis / V. V. Kravchenko. — Heldermann-Verlag, 2003. — 136 p. (Research and Exposition in Mathematics Series. — Vol. 28)

87. Kravchenko V. V. Integral representations for spatial models of mathematical physics / V. V. Kravchenko, M. V. Shapiro. — Addison Wesley Longman, 1996. — 247 p. (Pitman Research Notes in Mathematics Series. — Vol. 351)

88. Martineau A. Sur la notion d'ensemble fortement lineairement convexe / A. Martineau. — Montpellier, 1966. — 18 p. — (Preprint)

89. Martineau A. Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes convexité linéele / A. Martineau // Math. Ann. — 1966. — Vol. 163, № 1. — P. 62 – 88.

90. Mauldin R. D. The Scottish Book / R. D. Mauldin. — Boston: Birkhäuser Verlag, 1981. — 281 p.

91. Montejano L. About a problem of Ulam concerning flat sections of manifolds / L. Montejano // Comment. Math. Helv. — 1990. — Vol. 65(1). — P. 462 – 473.

92. Montejano L. A characterization of convex sets in terms of acyclic support sets / L. Montejano, E. Shchepin // Bull. London Math. Soc. — 1996. — Vol. 28, № 5. — P. 501 – 504.

93. Pal J. Ein Minimumproblem für Ovale / J. Pal // Math. Annalen. — Vol. 83. — P. 311 – 319.

94. Perron O. Über einen Satz von Besicovitch / O. Perron // Math. Zeitschrift. — 1928. — Vol. 28. — P. 383 – 386.

95. Rademacher H. A. On a theorem of Besicovitch / H. A. Rademacher // Stud. Math. Anal. related Topics, Essays in Honor of G. Polya. — Stanford University Press, 1962. — P. 294 – 296.

96. Schoenberg I. J. On certain minima related to the Besicovitch-Kakeya Problem / I. J. Schoenberg // Mathematica (Cluj). — 1962. — Vol. 4 (27). — P. 145 – 148.

97. Schoenberg I. J. On the Besicovitch-Perron solution of the Kakeya Problem / H. A. Rademacher // Stud. Math. Anal. related Topics, Essays in Honor of G. Polya. — Stanford University Press, 1962. — P. 359 – 363.

98. Schreier J. Über Schnitte konvexer Flächen. / J. Schreier // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A. — 1933. — № 4/8. — P. 155 – 157.

99. Stefanchuk M. Hypercomplex hulls and extreme elements in hypercomplex space / M. Stefanchuk // International Conference "Complex analysis and related topics" (Lviv, May 30 – June 4, 2016): Abstracts. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 89.

100. Sudbery A. Quaternionic analysis / A. Sudbery // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1979. — Vol. 85. — P. 199 – 225.

101. Zelinskii Yu. Integral complex geometry / Yu. Zelinskii // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź, Sér. Rech. Déform. — 2010. — Vol. 60, № 3. — P. 73 – 80.