

## ВІДГУК

на дисертацію Марії Володимирівни Стефанчук  
"Узагальнено опуклі множини та їх застосування",  
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

Поняття опуклості відіграє важливу роль у різних областях фундаментальної та прикладної математики. Опуклий аналіз знаходить застосування у варіаційному численні, математичній теорії керування, теоретичній механіці, теорії пружності, теорії наближень, економіці. Основні факти та поняття опуклого аналізу сформувались іще у 18-му та на початку 19-го століть. Так, Г. Мінковський створив спеціальний розділ геометрії — опуклу геометрію. Значний вклад у створення та розвиток опуклої геометрії внесли також Я. Штейнер, К. Каратеодорі, Е. Хеллі, В. Бляшке, Т. Боннезен, В. Фенхель та ін. Основні поняття опуклої геометрії, такі як опорна функція, полярна, крайня точка, зіграли значну роль у створенні на початку 20-го століття функціонального аналізу. Поняття лінійної опуклості було запроваджене Г. Беенке та Е. Пешлем у середині 30-х років минулого століття для областей з  $\mathbb{C}^2$  з метою побудови комплексного аналога опуклості, в якому роль евклідових прямих і площин відігравали б комплексні прямі та площини. Проте надалі з'ясувалось, що точним комплексним аналогом опуклості є запроваджене А. Мартіно поняття сильної лінійної опуклості, яке знайшло застосування в ряді задач багатовимірного комплексного аналізу. С. В. Знаменський довів, що клас сильно лінійно опуклих множин складається з таких лінійно опуклих областей або компактів, перетини яких комплексними прямими ациклічні (тобто зв'язні і мають непорожнє зв'язне доповнення). Геометричні властивості лінійно та сильно лінійно опуклих множин систематично досліджувались в роботах А. Мартіно, Л. А. Айзенберга, Л. Я. Макарової, А. П. Южакова, В. А. Степаненко, Б. С. Зінов'єва, Ю. Б. Зелінського, М. В. Ткачука та ін.

Подальші узагальнення цих понять були зроблені в роботах Х. Кісельмана, Ю. Б. Зелінського, Г. А. Мкртчяна та ін. Зокрема, Г. А. Мкртчян уперше запропонував гіперкомплексний аналог опуклості у багатовимірному кватерніонному просторі  $\mathbb{H}^n$ . Після запровадження у 1985 році Г. А. Мкртчяном гіперкомплексної опуклості стало можливим розвивати багатовимірний кліффордів (зокрема, кватерніонний) опуклий аналіз, що знайшло відображення в роботах Т. М. Осіпчук, Б. А. Кліщука та четвертому розділі даної дисертації.

Дисертація присвячена теорії узагальнено опуклих множин та узагальнено опуклих функцій в евклідових просторах. Вона актуальна як з погляду можливих застосувань до багатовимірних задач математичної фізики та прикладних дисциплін, так і розвитку методів опуклого аналізу стосовно досліджених у роботі проблем.

Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків та списку цитованої літератури з 101 джерела і займає 127 сторінок.

У вступі надано загальну характеристику роботи та відображено її основні результати.

У першому розділі здійснено вичерпний огляд літератури за темою дисертації, наведено основні відомі результати та короткий виклад результатів дисертації.

Другий розділ присвячений розв'язанню задачі про тінь, поставленої Г. Худайбергановим у 1982 році: яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль у просторі  $\mathbb{R}^n$  з центрами на сфері  $S^{n-1}$  та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль. Г. Худайберганов довів, що при  $n = 2$  необхідно і достатньо двох

кругів. В дисертаційній роботі повністю розв'язана задача про тінь для всіх  $n > 2$ . Показано, що в  $n$ -вимірному дійсному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , необхідно і достатньо  $(n + 1)$ -ї кулі. Також у цьому розділі досліджено ряд узагальнень класичної задачі про тінь: задачу про тінь для півопуклості, задачу про тінь для довільної внутрішньої точки обмеженої даною сферою кулі, задачу про тінь для сім'ї множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи геометричних перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій у випадках 1-опуклості та 1-півопуклості, а також задачу про тінь у просторах  $\mathbb{C}^n$  та  $\mathbb{H}^n$ .

У третьому розділі узагальнюється на  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , розв'язана Безіковичем і Радо задача про побудову плоскої множини лебегової міри нуль, яка містить кола довільних скінченних радіусів. В дисертації побудовано множину, що містить сфери довільних радіусів у просторі  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ ,  $n$ -вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю.

У четвертому розділі досліджено властивості  $h$ -оболонки множин та екстремальні елементи в  $n$ -вимірному гіперкомплексному просторі  $\mathbb{H}^n$ , узагальнено на гіперкомплексний випадок теорему Клі опуклого аналізу про те, що всяка замкнена опукла множина, яка не містить прямої, є опуклою оболонкою своїх екстремальних точок та екстремальних променів. Крім того, у просторі  $\mathbb{H}^n$  побудовано клас так званих  $\mathbb{H}$ -квасііопуклих множин, який містить сильно гіперкомплексно опуклі множини та замкнений відносно перетинів, та досліджено їх властивості.

П'ятий розділ присвячений узагальненню деяких результатів про багатозначні функції у просторі  $\mathbb{C}^n$  на гіперкомплексний простір  $\mathbb{H}^n$ . Багатозначні лінійно опуклі функції, графіки яких задаються лінійно опуклими множинами, в  $n$ -вимірному комплексному просторі  $\mathbb{C}^n$  досліджувались Ю. Б. Зелінським. У дисертаційній роботі вперше введено поняття багатозначної лінійно опуклої та спряженої функцій в  $\mathbb{H}^n$ , наведено приклади таких функцій та досліджено ряд їх властивостей. Доведено гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро про те, що для лінійної опуклості функції необхідно і достатньо, щоб вона співпадала з двічі спряженою до неї функцією.

Зауваження:

- на с. 17 у формулюванні означень 1.1.2, 1.1.3 замість  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$  слід писати  $x^1, x^2 \in X$  і у формулюванні означення 1.1.2 вилучити слово "весь";
- на с. 20 вжито без пояснення символ  $\Theta$ , що має означати початок координат, проте на с. 27 початок координат позначено іншим символом  $O$ ;
- на с. 21 в 13 рядку замість "розкладу" слід писати "розкладання", а в 19 рядку пропущено дужки у посиланні на формулу (1.1);
- на с. 23 у формулюванні означення 1.2.1 пропущено дужки у виразі  $\gamma^\circ \setminus (\gamma \cap E)$ ;
- на с. 38 у формулюванні означень 2.1.1, 2.1.2, на с. 41 у формулюванні означень 2.1.4, 2.1.5 та на с. 43 у формулюванні означень 2.1.7 — 2.1.9 є зайві символічні позначення, які дублюють словесні пояснення;

Ці недоліки не є суттєвими, легко виправляються і не знижують наукової значимості дисертації.

Робота М. В. Стефанчук є завершеною науковою працею, присвяченою дослідженню актуальних наукових проблем. Усі основні результати роботи є новими і строго обґрунтованими. Результати дисертації можуть бути застосовані для подальшого розвитку опуклого та гіперкомплексного аналізу.

Основні результати дисертації своєчасно і в повній мірі опубліковані у 6 роботах автора у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань, затверджених МОН України. Результати дисертації були апробовані на 10 наукових конференціях та доповідалися на багатьох наукових семінарах. Автореферат правильно і достатньо повно відо-

бражає зміст дисертації.

Усе вищесказане дозволяє зробити висновок, що за обсягом проведених наукових досліджень, їх науковим рівнем, актуальністю, науковою новизною, значимістю отриманих результатів та кількістю публікацій дисертаційна робота "Узагальнено опуклі множини та їх застосування" відповідає сучасному рівню розвитку математики та всім вимогам пп. 11, 14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова КМУ від 24 липня 2013 р. № 567), що висуваються до кандидатських дисертацій, а її автор Марія Володимирівна Стефанчук заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз.

Завідувач кафедри математичного аналізу  
Житомирського державного університету  
імені Івана Франка,  
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

О. Ф. Герус

27 лютого 2017 р.



за спеціалізованої

Ради Д 26.206.01 28.02.2017 р.

Ст- / Артемиченко Ж.І./