НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Радченко Данило Віталійович

УДК 517.5

Багатовимірне формозберігаюче наближення

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук, професор **Шевчук Ігор Олександрович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри математичного аналізу.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України **Моторний Віталій Павлович**, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, професор кафедри математичного аналізу і теорії функцій;
	кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Романюк Віктор Сергійович**, Інститут математики НАН України, старший науковий співробітник відділу теорії функцій.

Захист відбудеться «14» березня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «4» лютого 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради — Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Про важливість відображень, що мають додатний якобіан має знати кожний студент-математик другого курсу. Ще Вінер довів, що будь-який гомеоморфізм квадрата на площині, за умови що він зберігає орієнтацію, можна як завгодно добре наблизити аналітичними гомеоморфізмами з додатним якобіаном. У багатовимірному випадку, Дональдсон та Салліван показали, що питання про існування наближення гомеоморфізмів дифеоморфізмами тісно пов'язані з деякими глибокими питаннями теорії многовидів і довели що таке наближення існує не завжди. З іншого боку, можна розглядати питання наближення більш широкими класами гладких відображень, а саме відображеннями що мають невід'ємний або додатний якобіан і виникає природне питання щодо знаходження необхідних та достатніх умов існування таких наближень. Проблема, що розв'язана в цій дисертації була сформульована проф. П. П. Забрейко та проф. В. Г. Кротовим і поставлена автору науковим керівником.

Започаткували теорію формозберігаючого наближення в 60-х роках минулого століття Г. Г. Лоренц, К. Целлер, А. Ньюмен та О. Шиша. Зокрема, перші двоє авторів побудували приклад монотонної функції, величини монотонного наближення котрої незрівнянно більші за величини наближення без обмежень. Тим не менш, з'ясувалося, що якщо величина найкращого наближення без обмежень має степеневий порядок, то вона мажорує величину найкращого монотонного наближення. Для комонотонного наближення це явище також має місце, але не завжди. Через це виникло питання дослідити всі випадки коли це явище має місце і коли воно не має місця.

Питання про сталу Вітні давно є привабливим для математиків. Сам Вітні довів тільки те, що така стала існує для кожного натурального k і дав її оцінки лише для $k = 1, 2, 3, 4$. Ю. А. Брудний та Бл. Сєндов показали, що стала Вітні задовольняє нерівність

$$W(k) < (2k)^{2k}.$$

При цьому Сєндов висунув гіпотезу про те, що стала Вітні не перевищує 1, а інтерполяційна стала Вітні не перевищує 2. У результаті робіт Брудного, Сєндова, Крякіна, Такєва, Іванова, Боянова, Гілєвіча, Шевчука та інших, було доведено, що інтерполяційна стала Вітні не перевищує 3, а сама стала Вітні задовольняє нерівність

$$W(k) < 2 + \frac{1}{e^2}.$$

Для $k < 10$ гіпотеза Сєндова підтверджена в роботах Ю. Крякіна та Д. Желнова. Стосовно багатовимірного випадку, навіть для лінійного наближення на кубі доведення нерівності Вітні викликало труднощі, а оцінка сталої для $k = 2$ була знайдена Ю. А. Брудним та Н. Калтоном — 802. Природно виникло питання покращити цю оцінку.

Задача знаходження квадратурних формул на багатовимірних сферах, що мають назву сферичних дизайнів, є важливим розділом сучасної теорії наближень. Добре відомим є той факт, що сферичні дизайни є локальними (і навіть глобальними) мінімумами деяких функцій енергії. У зв'язку з цим фактом професор Е. Сафф сформулював питання щодо існування локальних максимумів стандартного електростатичного потенціалу на сфері. В дисертації доведено, що степенева функція енергії N точок на сфері з від'ємним показником не має локальних максимумів, що дає відповідь на питання професора Саффа.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка у рамках держбюджетної науково-дослідної теми ТЗ НДР № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації № 0111U006561).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження деяких питань теорії наближення, що є узагальненнями питання про монотонне наближення, а також питань сферичних дизайнів та сталих Вітні.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії наближень, топології та комбінаторики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— знайдено необхідні та достатні умови на відображення для існування наближень відображеннями з невід'ємним якобіаном; у випадку існування таких наближень, наведено конструктивну процедуру для їх знаходження; побудовано приклади відображень, що можна наблизити відображеннями з невід'ємним якобіаном, але неможливо наблизити відображеннями з додатним якобіаном.

— досліджено випадки, в яких величина найкращого наближення кусково-монотонної функції мажорує величину найкращого комонотонного наближення, за умови, що величина найкращого наближення має степеневий порядок; побудовано контрприклади в усіх випадках коли це не так.

— для всіх достатньо великих натуральних чисел m побудовано графи-концентратори з параметрами $(6m, 4m, 3m, 5.05)$, що мають набагато менше ребер ніж найкращі відомі до цього приклади; досліджено зв'язок задачі лінійного наближення на кубі з наближенням майже адитивних функцій множин адитивними; покращено оцінку сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі з 802 до 73.

— доведено, що для електростатичного потенціалу на двовимірній сфері не існує скінченних конфігурацій, що є локальними максимумами; у випадку багатовимірної сфери аналогічний результат доведено для потенціалу $t^{-\alpha}$ для всіх α таких, що число $\alpha + 2$ не менше за число вимірів сфери.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Її результати доповнюють та узагальнюють окремі розділи теорії наближень і можуть бути використані для її подальшого розвитку. Побудовані контрприклади та запропоновані конструкції можуть слугувати побудові чисельних алгоритмів.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях та семінарах:

— Функціональні методи в теорії наближень та теорії операторів III, Світязь, Волинська область, 22–26 серпня 2009 р.;
— Minimal Energy Point Sets, Lattices, and Designs, Відень, Австрія, 29 вересня – 22 листопада 2014 р.
— 5-а міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Київ, Україна, 9 – 11 листопада 2016 р.
— Засідання Харківського математичного товариства, Харківський Національний Університет імені В. Н. Каразіна (керівники: проф. Л. А. Пастур, Є. Я. Хруслов);
— Семінар з теорії наближення, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара (керівник: проф. В. П. Моторний);
— Науковий семінар з теорії аналітичних функцій, механіко-математичний факультет Львівського національного університету імені Івана Франка (керівники: проф. А. А. Кондратюк, О. Б. Скасків);
— Науковий семінар з теорії функцій, Інститут математики НАН України (керівник: проф. А. С. Романюк);
— Науковий семінар «Сучасний аналіз», механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: проф. О. О. Курченко, В. М. Радченко, І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 статтях [1], [2], [3], [4], [5], серед них дві у наукових виданнях України, що включені до переліку фахових видань, затверджених МОН України та три у закордонних виданнях, що включені до наукометричних баз, а також у тезах доповідей наукових конференцій [6], [7].

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків. Обсяг дисертації 129 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел та публікацій автора (55 найменувань) займає 6 сторінок.

До кожного розділу наведено висновки, що характеризують основні результати дослідження.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, її новизна, наведено короткий зміст роботи з переліком основних результатів дисертації та апробації отриманих результатів, наведено список публікацій та відмічено особистий внесок дисертанта в них.

В *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою, сформульовано необхідні поняття і твердження з теорії наближень та топології, які використовуються в дисертації.

Другий розділ присвячено питанням існування наближення відображеннями з невід'ємним та додатним якобіаном.

Перший пункт даного розділу присвячено постановці та формулюванню основних результатів що стосуються наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном. Необхідні умови для існування наближення у випадку невід'ємного якобіану даються в термінах топологічного степеня відображення.

В наступному підрозділі наведені деякі більш загальні питання формозберігаючого наближення у багатовимірному випадку.

Далі нагадуються необхідні відомості з кусково-лінійної топології та теорії топологічного степеня відображень та доводяться деякі допоміжні результати про продовження відображень зі збереженням топологічного степеня.

Далі доводяться результати про наближення локально взаємно-однозначних відображень. У двовимірному випадку доведено наступний результат.

Теорема 2.1. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область, а $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ – неперервне, локально взаємно-однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке поліноміальне відображення $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ з додатним якобіаном на $\overline{\Omega}$, що $\|f - p\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$.*

Аналогічний результат, за спрощеного припущення, що $\overline{\Omega} = [0,1]^3$ доводиться також у тривимірному випадку.

Теорема 2.2. *Нехай $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ - неперервне, локально взаємно-однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке поліноміальне відображення $g\colon [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ з додатним якобіаном на $[0,1]^3$, що $\|f - g\| < \varepsilon$.*

За допомогою поняття топологічного степеня відображень доводиться наступна необхідна умова для існування наближень з невід'ємним якобіаном.

Теорема 2.3. *Якщо неперервне відображення $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ можна як завгодно добре наблизити відображеннями класу C^1 з невід'ємним якобіаном, то для довільної відкритої підмножини $U \subset \Omega$ і довільної точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ виконується нерівність*

$$\deg(f, U, p) \geqslant 0.$$

Далі, у двовимірному випадку, за умови що відображення f є *легким*, доведено, що необхідна умова є також і достатньою. Нагадаємо, що неперервне відображення називається *легким*, якщо для довільного y з множини значень f множина $f^{-1}(y)$ є тотально незв'язною.

Теорема 2.4. *Нехай Δ – обмежена область і $f : \Delta \to \mathbb{R}^2$ – легке неперервне відображення. Припустимо, що для будь-якої відкритої множини U такої, що $\overline{U} \subset \Delta$ і будь-якої точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ виконується нерівність* $\deg(f, U, p) > 0$.

Тоді для будь-якої області Ω такої, що $\overline{\Omega} \subset \Delta$ і будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке відображення $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ класу C^∞ з невід'ємним якобіаном таке, що $\|f - g\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$.

При цьому, якщо область Δ – однозв'язна, то існує поліноміальне відображення g з тими самими властивостями.

Доведення існування наближення в цій теоремі є конструктивним і спирається на відповідний результат про наближення відображеннями з додатним якобіаном, а також на теорему Стоілова про топологічну характеризацію комплексно-аналітичних функцій.

Нарешті, в останньому підрозділі наведено контрприклад, що ілюструє деякі відмінності від одновимірного випадку.

Теорема 2.5. *Нехай відображення $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^2$ задано рівністю*

$$f(x, y) \;=\; (x^2 - y^2,\, 2xy).$$

Тоді для довільного відображення $g : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^2$ класу C^1 зі строго додатним якобіаном виконується нерівність

$$\|f - g\|_{\overline{B_1(0)}} \;\geqslant\; \frac{1}{4}.$$

Третій розділ присвячено задачі комонотонного наближення на відрізку. Під комонотонним наближенням розуміється задача наближення неперервної функції f, заданої на відрізку $[-1,1]$, що змінює монотонність $s \geqslant 1$ разів в точках $y_1, \dots, y_s$. При цьому дозволяється наближати лише поліномами що змінюють характер монотонності в тих самих точках що і f. Будемо використовувати позначення $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$, де $-1 < y_1 < \dots < y_s < 1$. Позначимо через Δ^1 множину всіх неперервних монотонно неспадних функцій на відрізку $[-1,1]$. Також позначимо через $\Delta^1(Y_s)$ множину всіх неперервних функцій на $[-1,1]$, що є монотонно неспадними на відрізку $[y_s, 1]$, монотонно незростаючими на $[y_{s-1}, y_s]$, тощо.

Нехай $\mathbf{P}_n$ – простір алгебраїчних поліномів степеня $< n$ і позначимо $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C[-1,1]}$. Позначимо через

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n} \|f - P_n\|$$

величину найкращого наближення без обмежень. Позначимо також через

$$E_n^{(1)}(f) = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^1} \|f - P_n\|$$

величину найкращого монотонного наближення, а через

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^1(Y_s)} \|f - P_n\|$$

величину найкращого комонотонного наближення з вузлами $-1 < y_1 < \dots < y_s < 1$.

Нехай величина найкращого наближення без обмежень, $E_n(f)$, задовольняє нерівності

$$E_n(f) \leqslant n^{-\alpha}, \quad n \geqslant 1$$

для деякого $\alpha > 0$. Розглядається питання про те, чи обов'язково величина комонотонного наближення задовольняє нерівності

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(\alpha, s) n^{-\alpha}, \quad n \geqslant 1,$$

і якщо ні, то що можна сказати в цьому випадку. Виявляється, що для кожного $s \geqslant 1$ існує виняткова множина A_s значень α для яких така оцінка не може виконуватись. У випадку монотонного наближення ($s=0$) відповідна оцінка завжди виконується, тобто $A_0=\varnothing$.

Наведемо означення виключних множин показників A_s. Покладемо $A_1 := \{2\}$. Для будь-якого $s \geqslant 2$, визначимо

$$A_s := \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant 2\left[\frac{s}{2}\right], \text{ або } j=2i, 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Для малих значень s ці множини мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2\},\\ A_2 &= \{1,2,4\},\\ A_3 &= \{1,2,4,6\},\\ A_4 &= \{1,2,3,4,6,8\},\\ A_5 &= \{1,2,3,4,6,8,10\},\\ &\dots \end{aligned}$$

Для того щоб сформулювати негативні результати позначимо супремум величин найкращого комонотонного наближення за всіма Y_s через $E_n^{1,s}(f)$:

$$E_n^{1,s}(f) := \sup_{Y_s : f\in\Delta^1(Y_s)} E_n^{(1)}(f, Y_s).$$

У випадку якщо показник належить виключній множині A_s, виконується наступний результат.

Теорема 3.2. *Нехай $s \in \mathbf{N}$ і $\alpha \in A_s$. Тоді для будь-якого $m \in \mathbf{N}$ існує така функція $f \in C^1(-1,1)\cap\Delta_s^1$, що для всіх $n \geqslant 1$ виконується нерівність $E_n(f) \leqslant n^{-\alpha}$, але*

$$m^\alpha E_m^{1,s}(f) \geqslant c(s)\log m,$$

де $c(s) > 0$ це стала що залежить лише від s.

З іншого боку, якщо показник не належить виключній множині, то має місце наступний позитивний результат.

Теорема 3.3. *Нехай $s \in \mathbf{N}$, і $\alpha > 0$ такі, що $\alpha \notin A_s$. Тоді якщо $f \in \Delta_s^1$ така, що для всіх $n \geqslant 1$ виконується нерівність $E_n(f) \leqslant n^{-\alpha}$, то*

$$n^\alpha E_n^{1,s}(f) \leqslant c(\alpha, s), \quad n \geqslant 1,$$

де $c(\alpha, s)$ це стала, що залежить лише від α та s.

У випадку коли $\alpha \in A_s$ позитивний результат має місце, але лише за умови, що відповідна нерівність виконується не для всіх $n \geqslant 1$, а починаючи з деякого N що залежить від α та Y_s.

Теорема 3.4. *Нехай $s \in \mathbf{N}$ і $\alpha \in A_s$. Тоді для кожної функції $f \in \Delta^1(Y_s)$ такої, що для всіх $n \geqslant 1$ виконується нерівність $E_n(f) \leqslant n^{-\alpha}$, виконується нерівність*

$$n^\alpha E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(\alpha, s), \quad n \geqslant N(\alpha, Y_s),$$

де $c(\alpha, s)$ це стала що залежить лише від α і s, а $N(\alpha, Y_s)$ – стала що залежить лише від Y_s та від α.

У *четвертому* розділі дисертації розглянуто питання оцінки сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі.

Стала Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі визначається аналогічно до класичної сталої Вітні, як найменша стала $w_2(d)$ (інфімум) для якої виконується нерівність

$$\min_L \|f - L\|_{[0,1]^d} \leqslant w_2(d) \max_{x,y \in [0,1]^d} \left| f(x) - 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + f(y) \right|,$$

де $f \colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ – неперервна функція на d-вимірному кубі, а L пробігає множину всіх лінійних функцій.

Калтон і Брудний довели, що для будь-якого значення d виконується нерівність $w_2(d) < 802$. Основна ідея доведення полягала в тому, що цю задачу можна пов'язати з задачею наближення майже адитивних функцій множин адитивними, яку в свою чергу можна розв'язати використовуючи комбінаторне поняття графів-концентраторів.

Означення концентратора. *Дводольний граф з m входами та p виходами називається (m, p, q, r)-концентратором, якщо він має не більше ніж mr ребер і для будь-якої підмножини з $k \leqslant q$ входів, існує k неперетинних ребер, що ведуть до деяких k виходів.*

Піпенгер довів за допомогою ймовірнісного методу, що для всіх достатньо великих значень m існує $(6m, 4m, 3m, 6)$-концентратор. Покращуючи його метод в роботі отримано дещо точніший результат.

Теорема 4.1. *Для будь-якого достатньо великого натурального числа m існує $(6m, 4m, 3m, 5.05)$-концентратор.*

Використовуючи цей новий клас концентраторів та деякі додаткові міркування в роботі доведено наступний результат.

Теорема 4.2. *Для будь-якої неперервної функції* $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ *виконується нерівність*

$$\min_L \|f - L\|_{[0,1]^d} \leqslant 73 \max_{x,y\in[0,1]^d} \Big|f(x) - 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + f(y)\Big|.$$

Таким чином оцінку сталої Вітні покращено з 802 до 73.

Окрім того, в роботі доведено точніший результат для наближення функцій множин, аналогічний до результату Калтона і Робертса.

Теорема 4.3. *Для довільної алгебри* $\mathfrak{A}$ *множин і довільного відображення* $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ *що задовольняє нерівність*

$$|\nu(A) + \nu(B) - \nu(A\cap B) - \nu(A\cup B)| \leqslant 1 \quad \textit{для довільних } A, B \in \mathfrak{A},$$

і для якого виконується $\nu(\varnothing) = 0$*, існує така адитивна функція множин* $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$*, що задовольняє нерівність*

$$|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K$$

для всіх $A \in \mathfrak{A}$*, де* K *задовольняє* $K < 36$*.*

П'ятий розділ присвячено питанню про існування локальних максимумів потенціальної енергії скінченних конфігурацій точок на багатовимірних сферах.

Для довільної конфігурації з N різних точок на сфері $x_1, \ldots, x_N \in S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ можна визначити потенціальну енергію за формулою

$$E_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; \sum_{i\neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^\alpha}.$$

Тут через S^d позначається багатовимірна сфера в $(d+1)$-вимірному евклідовому просторі. Добре відомим є той факт, що глобальні мінімуми таких енергетичних функціоналів часто виявляються дуже симетричними конфігураціями. Зокрема, такі конфігурації виникають в задачі знаходження квадратурних формул на багатовимірних сферах (так звані сферичні дизайни). Окрім вище наведеної функції енергії також часто використовується логарифмічний потенціал

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; -\sum_{i\neq j} \log |x_i - x_j|.$$

Зважаючи на важливість локальних мінімумів таких функцій, існування яких гарантується компактністю та обмеженістю знизу, природно виникає питання про існування і властивості локальних максимумів, що відповідають нестабільним станам рівноваги системи точок. Виявляється, що в більшості випадків такі локальні максимуми існувати не можуть. Точніше, доведено наступні дві теореми. Для $\alpha > 0$ виконується наступний результат.

Теорема 5.1. *Нехай $d \geqslant 2$ і*

$$E_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; \sum_{i\neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^\alpha}.$$

Тоді для довільного $\alpha \geqslant d-2$ функція $E_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ не має локальних максимумів.

Для двовимірної сфери і логарифмічної енергії має місце аналогічний результат.

Теорема 5.2. *Нехай $d = 2$ і*

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; -\sum_{i\neq j} \log|x_i - x_j|.$$

Тоді $E(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ не має локальних максимумів.

Доведення обох теорем спирається на необхідні умови другого порядку для локальних максимумів та ймовірнісний метод, застосування котрого доводить існування напряму в якому ця умова порушується.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена деяким питанням теорії наближення однієї та багатьох змінних.

В дисертаційній роботі отримано такі результати.

1) Знайдено умову, яка є необхідною і достатньою для існування послідовності поліноміальних відображень на площині з

невід'ємним якобіаном, збіжної до заданого відображення, у випадку, якщо відображення має тотально незв'язні шари. Аналогічну задачу розв'язано для відображень з додатним якобіаном. Обидві задачі розв'язано у двовимірному випадку, а другу задачу також у тривимірному випадку.

2) Доведено, що якщо величина найкращого наближення без обмежень кусково-монотонної функції має степеневий порядок, то вона мажорує величину найкращого комонотонного наближення, за виключенням скінченного числа показників. В усіх виключних випадках побудовано контрприклади.
3) Для всіх достатньо великих m доведено існування графів-концентраторів з параметрами $(6m, 4m, 3m, 5.05)$. За допомогою цих графів суттєво покращено оцінку сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі (попередньо було відомо, що значення сталої менше за 802, а за новим результатом — 73).
4) Доведено, що у випадку степеневої функції з від'ємним показником, потенціальна енергія системи точок на двовимірній сфері не може мати локальних максимумів. За деяких додаткових умов аналогічний результат доведено також для багатовимірних сфер. Крім того, неіснування локальних максимумів доведено також для логарифмічного потенціалу на двовимірній сфері.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Bondarenko, A. V. On concentrators and related approximation constants / A. V. Bondarenko, A. Prymak, D. Radchenko // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 402, no. 1. — P. 234–241.

[2] Leviatan, D. Positive results and counterexamples in comonotone approximation / D. Leviatan, D. V. Radchenko, I. A. Shevchuk // Constructive Approximation. — 2012. — Vol. 36, no. 2. — P. 243–266.

[3] Radchenko, D. V. Local maxima of the potential energy on spheres / D. V. Radchenko // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. —

Vol. 65, no. 10. — P. 1427–1429.

[4] Радченко, Д. В. О приближении отображениями с неотрицательным якобианом / Д. В. Радченко // Математические заметки. — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 263–275.

[5] Радченко, Д. В. Наближення відображеннями з додатнім якобіаном у тривимірному просторі / Д. В. Радченко // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2016. — Т. 35, № 1. — С. 6–8.

Тези конференцій:

[6] Радченко, Д. В. Про існування наближення відображеннями з додатним якобіаном / Д. В. Радченко // XXIV Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція «Ключові проблеми сучасної науки», 15–30 вересня 2016 р.: Тези допов. — Дніпропетровськ, 2016. — С. 88.

[7] Radchenko, D. V. Approximation by maps satisfying first-order differential inequalities / D. V. Radchenko // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky November 9–11, 2016: Book of abstracts. — Vinnytsia, 2016. — P. 158.

АНОТАЦІЇ

Радченко Д. В. Багатовимірне формозберігаюче наближення — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном, комонотонного наближення на відрізку та оцінкам сталих Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі. У роботі також доведено неіснування локальних максимумів для функції енергії Ріса конфігурації точок на сфері.

Наведено необхідні та (для $d = 2, 3$) деякі достатні умови на відображення $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ для того, щоб існувала послідовність відображень з невід'ємним якобіаном, що рівномірно збігається до f на $[0,1]^d$. Також наведено деякі достатні умови для наближення від-

ображеннями зі строго додатним якобіаном. В доведенні використовується поняття топологічного степеня відображення. Також побудовано приклади, що показують, що умови строгої додатності та невід'ємності визначають різні класи функцій, що можна наблизити відповідними відображеннями.

В комонотонному наближенні розглядається питання про мажоризацію величини найкращого комонотонного наближення величиною наближення без обмежень за умови степеневого порядку спадання останньої. Доведено, що це явище має місце за виключенням скінченної кількості виключних показників спадання.

Покращено оцінку сталих Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі з 802 до 73 для всіх вимірів. Крім того побудовано новий клас графів-концентраторів.

В роботі також доведено неіснування локальних максимумів для деяких функцій енергії систем точок на сфері.

Ключові слова: монотонне наближення, комонотонне наближення, якобіан відображення, локально взаємно однозначні відображення, стала Вітні, n-вимірний куб, концентратори, локальні максимуми, енергія Ріса.

Радченко Д. В. Многомерное формосохраняющее приближение. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена исследованию приближения отображениями с неотрицательным якобианом, комонотонного приближения на отрезке и оценкам констант Уитни линейного приближения на многомерном кубе. В работе также доказывается несуществование локальных максимумов функционала энергии Рисса конфигурации точек на сфере.

Приведены необходимые и (при $d = 2, 3$) некоторые достаточные условия на отображение $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ для того, чтобы существовала последовательность отображений с неотрицательным якобианом, которая равномерно сходится к f на $[0,1]^d$. Также приведены некоторые достаточные условия для существования приближения отображениями со строго положительным якобианом. В доказательствах

используется понятие топологической степени отображения. Также построены примеры, которые показывают, что условия строгой положительности и неотрицательности приводят к разным классам функций которые можно ими приблизить.

Касательно комонотонного приближения, рассматривается вопрос о мажоризации величины наилучшего комонотонного приближения величиной наилучшего приближения без ограничений при условии степенного порядка убывания последней. Доказано, что мажоризация имеет место за исключением конечного числа исключительных показателей убывания.

Улучшены оценки констант Уитни линейного приближения на n-мерном кубе с 802 до 73 во всех размерностях. Также построен новый класс графов-концентраторов.

Кроме того, в работе доказано несуществование локальных максимумов некоторых функций энергии систем точек на сфере.

Ключевые слова: монотонное приближение, комонотонное приближение, якобиан отображения, локально взаимно-однозначные отображения, константа Уитни, n-мерный куб, концентраторы, локальные максимумы, энергия Рисса.

Radchenko D. V. High-dimensional shape-preserving approximation. — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The topic of this Candidate's thesis is the study of approximation by mappings with nonnegative Jacobian, comonotone approximation on the interval, and new bounds for Whitney constants of n-dimensional cubes. It is also proved that the Riesz energy functional of point configurations on spheres does not have local maxima.

Necessary and (for $d = 2, 3$) some sufficient conditions are given on a mapping $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ for there to exist a sequence of mappings with nonnegative Jacobian that converges uniformly to f on $[0,1]^d$. Sufficient conditions are also given for the existence of approximation by mappings with strictly positive Jacobian. The proofs employ the concept of topological degree. Examples are also given that show that maps with nonnegative and strictly positive Jacobians lead to different classes of maps that can be approximated by them.

For comonotone approximation we consider the question about majorization of the degree of best comonotone approximation by the degree of best unconstrained approximation under the condition that the latter has power decay. We prove that majorization holds except for a finite number of exceptional exponent values.

For linear approximation on n-dimensional cubes the estimates of Whitney constants are improved from 802 to 73 in all dimensions. Moreover, a new class of concentrator graphs is constructed.

It is also proved that certain energy functionals of point configurations on spheres do not have local maxima.

Key words: monotone approximation, comonotone approximation, Jacobian of a mapping, locally univalent mappings, Whitney constant, n-dimensional cube, concentrators, local maxima, Riesz energy.