Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Радченко Данило Віталійович

УДК 517.5

Багатовимірне формозберігаюче наближення

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Шевчук Ігор Олександрович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Загальні позначення

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;

$\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір;

$|x|$ – евклідова норма точки $x \in \mathbb{R}^n$;

$\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ – множина усіх дійсних матриць розміру $n \times m$;

$\det(A)$ – визначник квадратної матриці A;

$\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ – група дійсних невироджених матриць порядку d;

$\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R})$ – група лінійних перетворень порядку d що зберігають орієнтацію; множина усіх матриць в $\mathbb{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ з додатним визначником;

$\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ – спеціальна лінійна група порядку d; множина матриць в $\mathbb{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ з визначником 1;

$B_r(x)$ – куля радіуса r з центром в точці x в метричному просторі;

$O_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$ – відкритий r-окіл множини A в метричному просторі;

$\mathrm{dist}(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} |x - y|$ – найменша відстань між точками множин F_1 і F_2;

$\mathrm{diam}(F) = \sup_{x,y \in F} |x - y|$ – діаметр множини F;

Класи відображень

$C(A, B)$ – неперервні відображення між топологічними просторами A і B;

$C^k(U, \mathbb{R}^m)$ – диференційовні відображення класу C^k задані на відкритій множині U ($k \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$);

$C^k(A, \mathbb{R}^m)$ – неперервні відображення на множині A, що мають гладке продовження класу C^k на деякий відкритий окіл A;

$C^k_{\mathcal{S}}(U, \mathbb{R}^m)$ – неперервні відображення на множині $U \subset \mathbb{R}^n$, що мають форму $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,n}$;

$C^k_{\mathcal{S}}(A, \mathbb{R}^m)$ – неперервні відображення на множині $A \subset \mathbb{R}^n$, що мають гладке продовження класу C^k на деякий відкритий окіл A з формою $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,n}$;

$Df(x)$ – диференціал відображення f в точці x;

$Jf(x)$ – якобіан (визначник) відображення f в точці x;

$\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$ – рівномірна норма відображення заданого на компакті K;

$\deg(f, U, p)$ – топологічна степінь відображення f на множині U відносно точки p;

$\omega_\delta(x)$ – стандартна функція класу C^∞ з носієм $\overline{B_\delta(0)}$;

$\deg(f, U, p)$ – топологічна степінь відображення f на множині U відносно точки p.

Класи функцій

$\mathbb{P}_n$ – простір алгебраїчних поліномів степені $< n$;

$C[a, b]$ – неперервні функції на відрізку $[a, b]$;

Δ^1 – множина неспадних функцій на відрізку $[-1, 1]$;

$\mathbf{Y}_s$ – множина усіх наборів $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$ точок y_i таких, що $-1 < y_1 < \dots < y_s < 1$;

$\Delta^1(Y_s)$ – множина усіх функцій що змінюють характер монотонності в точках набору Y_s;

$E_n(f)$ – величина найкращого наближення функції f на $[-1,1]$;

$E_n^{(1)}(f)$ – величина найкращого монотонного наближення неспадної функції f на $[-1,1]$;

$E_n^{(1)}(f, Y_s)$ – величина найкращого монотонного наближення неспадної функції f на $[-1,1]$ з вузлами Y_s;

$\Delta_h(g,x)$ – симетрична різниця функції g в точці x з кроком h, $g\left(x+\frac{h}{2}\right) - g\left(x-\frac{h}{2}\right)$;

$\Delta_h^k(g,x)$ – k-та симетрична різниця функції g в точці x з кроком h, $\Delta_h(\Delta_h^{k-1}(g,x))$;

$\omega(g,t,I)$ – модуль неперервності функції g на відрізку $I=[a,b]$;

$\omega_k(g,t,I)$ – k-й модуль гладкості функції g на відрізку $I=[a,b]$;

$Z[a,b]$ – клас Зигмунда, $f \in C[a,b]$ такі, що $\omega_2(f,t,[a,b]) \leqslant t$;

ВСТУП

Робота присвячена двом узагальненням задачі монотонного наближення та суміжним питанням теорії наближень. Перше узагальнення це задача комонотонного наближення неперервної функцій на відрізку, де функцію, що змінює характер монотонності скінченну кількість разів, треба наблизити поліномами такого самого типу. Друге узагальнення це задача наближення відображеннями, що мають невід'ємний якобіан, це багатовимірне узагальнення вимагає інших методів дослідження і виявляється пов'язаним з деякими питаннями геометричної топології. Третє питання, що розглядається в цій роботі, стосується знаходження оцінки сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі. Крім того, розглянуто питання про потенціальну енергію конфігурацій точок на багатовимірних сферах, пов'язане зі сферичними дизайнами.

Актуальність теми. Про важливість відображень, що мають додатний якобіан має знати кожний студент-математик другого курсу. Ще Вінер довів, що будь-який гомеоморфізм квадрата на площині що зберігає орієнтацію можна як завгодно добре наблизити аналітичними гомеоморфізмами з додатним якобіаном. У багатовимірному випадку, Дональдсон та Салліван показали, що питання про існування наближення гомеоморфізмів дифеоморфізмами тісно пов'язане з глибокими питаннями теорії многовидів і довели що таке наближення існує не завжди. З іншого боку, можна розглядати питання наближення більш широкими класами гладких відображень, а саме відображеннями що мають невід'ємний або додатний якобіан і виникає природне питання щодо знаходження необхідних та достатніх умов для існування таких наближень. Проблема, що розв'язана в цій дисертації була сформульована проф. П. П. Забрейко, В. Г. Кротовим і поставлена автору науковим керівником.

Започаткували теорію формозберігаючого наближення, в 60-х роках минулого століття, Г. Г. Лоренц, К. Целлер, А. Ньюмен та О. Шиша. Зокрема, перші двоє авторів побудували приклад монотонної функції, монотонні наближення якої незрівнянно більші ніж наближення без обмежень. Тим не менш, з'ясувалося, що якщо наближення без обмежень мають степеневий порядок, то вони мажорують величини найкращого монотонного наближення. Для комонотонного наближення це явище також має місце, але не завжди. Через це виникло питання дослідити всі випадки коли це явище має місце і коли воно не має місце.

Питання про сталу Вітні давно є привабливим для математиків. Сам Вітні довів тільки те, що така стала існує для кожного натурального k і дав її оцінки лише для $k = 1, 2, 3, 4$. Ю. А. Брудний та Бл. Сєндов показали, що вона обмежена числом $(2k)^{2k}$ і при цьому Сєндов висунув гіпотезу про те, що стала Вітні не перевищує 1, а інтерполяційна стала Вітні не перевищує 2. У результаті робіт Брудного, Сєндова, Крякіна, Такєва, Іванова, Боянова, Гілєвіча, Шевчука та інших, доведено, що інтерполяційна стала Вітні не перевищує 3, а сама стала Вітні не перевищує $2 + 1/e^2$, а для «$k < 10$» гіпотеза Сєндова підтверджена в роботах Ю. Крякіна та Д. Желнова. Стосовно багатовимірного випадку, то навіть для лінійного наближення на кубі доведення нерівності Вітні викликало труднощі, а оцінка сталої для $k = 2$ була знайдена Ю. А. Брудним та Н. Калтоном – 802. Природно виникло питання покращити цю оцінку.

Задача знаходження квадратурних формул на багатовимірних сферах, що мають назву сферичних дизайнів, є важливим розділом сучасної теорії наближень. Добре відомим є той факт, що сферичні дизайни є локальними (і навіть глобальними) мінімумами деяких простих функцій енергії. У зв'язку з цим фактом професор Е. Сафф сформулював питання щодо існування локальних максимумів стандартного електростатичного потенціалу на сфері. В дисертації доведено, що степенева функція енергії N точок на сфері з від'ємним показником не має локальних максимумів, що дає відповідь на питання професора Саффа.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка у рамках держбюджетної науково-дослідної теми ТЗ НДР № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації № 0111U006561).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження деяких питань теорії наближення, що є узагальненнями питання про монотонне наближення, а також питань сферичних дизайнів та сталих Вітні.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії наближень, топології та комбінаторики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— знайдено необхідні та достатні умови на відображення для існування наближень відображеннями з невід'ємним якобіаном; у випадку існування таких наближень, наведено конструктивну процедуру для їх знаходження; побудовано приклади відображень, що можна наблизити відображеннями з невід'ємним якобіаном, але неможливо наблизити відображеннями з додатним якобіаном.

— досліджено випадки, в яких величина найкращого наближення кусково-монотонної функції мажорує величину найкращого комонотонного наближення, за умови, що величина найкращого наближення має степеневий порядок; побудовано контрприклади в усіх випадках коли це не так.

— для всіх достатньо великих натуральних чисел m побудовано графи-концентратори з параметрами $(6m, 4m, 3m, 5.05)$, що мають набагато менше ребер ніж найкращі відомі до цього приклади; досліджено зв'язок задачі лінійного наближення на кубі з наближенням майже адитивних функцій множин адитивними; покращено оцінку сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі з 802 до 73.

— доведено, що для електростатичного потенціалу на двовимірній сфері не існує скінченних конфігурацій, що є локальними максимумами; у випадку багатовимірної сфери аналогічний результат доведено для потенціалу $t^{-\alpha}$ для всіх α таких, що число $\alpha+2$ не менше за число вимірів сфери.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Її результати доповнюють та узагальнюють окремі розділи теорії наближень і можуть бути використані для її подальшого розвитку. Побудовані контрприклади та запропоновані конструкції можуть слугувати побудові чисельних алгоритмів.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях та наукових семінарах. Це такі конференції:

— Функціональні методи в теорії наближень та теорії операторів III, Світязь, Волинська область, 22–26 серпня 2009 р.;

— Minimal Energy Point Sets, Lattices, and Designs, Відень, Австрія, 29 вересня – 22 листопада 2014 р.;

— 5-а міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б.Лопатинського, Київ, Україна, 9 – 11 листопада 2016 р.

Це такі семінари:

— Засідання Харківського математичного товариства, Харківський Національний Університет імені В. Н. Каразіна (керівники: проф. Л. А. Пастур, Є. Я. Хруслов);

— Семінар з теорії наближення, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара (керівник: проф. В. П. Моторний);

— Науковий семінар з теорії аналітичних функцій, механіко-математичний факультет Львівського національного університету імені Івана Франка (керівники: проф. А. А. Кондратюк, О. Б. Скасків);

— Науковий семінар з теорії функцій, Інститут математики НАН України (керівник: проф. А. С. Романюк);

— Науковий семінар «Сучасний аналіз», механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: проф. О. О. Курченко, В. М. Радченко, І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 статтях [5], [29], [40], [51], [52], серед них дві у наукових виданнях України, що включені до переліку фахових видань, затверджених МОН України та три у закордонних виданнях, що включені до наукометричних баз, а також у тезах доповідей наукових конференцій [53], [41].

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків. Обсяг дисертації 129 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел та публікацій автора (53 найменування) займає 6 сторінок.

До кожного розділу наведено висновки, що характеризують основні результати дослідження.

Зміст роботи. Дисертаційна робота присвячена дослідженню наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном, комонотонного наближення на відрізку, оцінок сталих Вітні лінійного наближення на багатовимірних кубах. У роботі також доведено неіснування локальних максимумів енергії Ріса для точок на сфері.

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, які у свою чергу поділяються на підрозділи, та списку використаних джерел.

У вступі дисертаційної роботи розкривається актуальність теми дисертаційного дослідження, її новизна, приведено основний зміст роботи з переліком основних тверджень і теорем дисертації та апробації отриманих результатів, наведений список публікацій та відмічено особистий внесок дисертанта в них.

Перший розділ присвячено огляду літератури та з опису необхідних відомостей з теорії наближень та топології.

Другий розділ присвячений питанню наближення відображеннями з невід'ємним (або додатним) якобіаном. Перший пункт даного розділу присвячений постановці та формулюванню основних результатів що стосуються наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном. Необхідні умови на існування наближення у випадку невід'ємного якобіана даються в термінах топологічної степені. Також розглядається більш загальне формулювання питань формозберігаючого наближення у багатовимірному випадку. В наступному пункті нагадуються необхідні відомості з кусково-лінійної топології та топологічною теорії степенів відображень та доводяться деякі допоміжні результати про продовження відображень зі збереженням топологічної степені. В усіх випадках де доведено існування наближень, їх існування доводиться конструктивно. Нарешті, наведено декілька контрприкладів, що ілюструють відмінності від одновимірного випадку.

У третьому розділі досліджується задача комонотонного наближення на відрізку. У випадку якщо наближення без обмежень мають степеневий порядок, то, за винятком скінченної кількості випадків для показника, вони мажорують величини найкращого комонотонного наближення. В усіх виключних випадках побудовано відповідні контрприклади.

У четвертому розділі дисертації розглянуто питання оцінки сталої Вітні для лінійного наближення на багатовимірному кубі. Значно покращується оцінка на сталу Вітні (з 802 до 73). Доведення використовує зв'язок цієї задачі з комбінаторною задачею побудови концентраторів.

У п'ятому розділі розглядається питання пов'язане з відшуканням квадратурних формул на сферах, а саме питання про властивості скінченних конфігурацій точок на багатовимірній сфері, що є стаціонарними відносно функціоналу потенціальної енергії $t^{-\alpha}$. Для достатньо великих α (у випадку двовимірної сфери для всіх додатних α) доведено, що такі конфігурації не можуть бути локальними максимумами.

До кожного розділу наведено висновки, що характеризують основні результати дослідження.

Подяка. Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику професору Шевчуку Ігорю Олександровичу за постановку задач і теми дослідження, постійну увагу, підтримку в роботі та численні корисні зауваження.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Монотонне та комонотонне наближення

Однією з класичних задач теорії наближення є задача рівномірного наближення неперервної функції $f \in C[-1,1]$ алгебраїчними поліномами. Позначимо через $\mathbb{P}_n$ простір поліномів степені $< n$, а через $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C[-1,1]}$ – рівномірну норму у просторі $C[-1,1]$. Для довільної неперервної функції $f \in C[-1,1]$, позначимо через

$$E_n(f) \;=\; \inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|$$

величину найкращого наближення функції f. Результати, що пов'язують швидкість спадання послідовності $E_n(f)$ з класом гладкості функції f добре відомі і складають фундамент теорії наближення (див. [13, гл. 5]). Типовим результатом такого типу є пряма теорема Джексона для тригонометричних поліномів [23], [13, гл. 5, теор. 5.1]

$$\widetilde{E}_n(f) \;\leqslant\; \frac{c}{n^r}\omega(f^{(r)}, 1/n),$$

де f це гладка періодична функція класу C^r, а ω це звичайний модуль неперервності

$$\omega(f,t) \;=\; \sup_{|x_1-x_2|\leqslant t} |f(x_1)-f(x_2)|.$$

Більш тонкі питання виникають, якщо накласти деякі обмеження на функцію f і на клас поліномів, якими дозволено цю функцію наближувати – ці питання складають так звану теорію формозберігаючого наближення. До неї відносяться питання наближення опуклої функції опуклими поліномами, монотонної функції монотонними поліномами, тощо.

Теорію формозберігаючого наближення започаткували, в 60-х роках минулого століття, G. G. Lorentz, K. Zeller, A. Newman, та O. Shisha.

Будемо позначати клас монотонних неперервних функцій символом Δ^1. В 1965 році O. Shisha [45] довів наступний результат. Якщо функція f належит класу $C^r \cap \Delta^1$, то

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{c(r)}{n^r}\omega(f^{(r)}, 1/n).$$

Насправді він довів дещо більш загальний результат для q-монотонного наближення. Доведення цього факту базувалось на дуже простому спостереженні, що якщо $f \in C^1[-1,1] \cap \Delta^1$, то

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant cE_{n-1}(f').$$

Справді, для того, щоб довести цю нерівність, нехай $Q \in \mathbb{P}_{n-1}$ – такий поліном, що $E_{n-1}(f') = \|f' - Q_{n-1}\|$, а $P_n \in \mathbb{P}_n$ – такий поліном, що $P_n(0) = f(0)$ та $P_n'(x) := Q(x) + E_{n-1}(f')$. Тоді

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \|f - P_n\| = \left\| \int_0^x (f'(t) - P_n(t))dt \right\| \leqslant 2E_{n-1}(f'),$$

а також $P_n' \geqslant 0$, звідки $P_n \in \Delta^1$.

Незабаром, Лоренц і Зеллер [34] побудували приклад такої функції $f \in \Delta^1 \cap C^1[-1,1]$, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = \infty.$$

Таким чином, вони довели відсутність простого звязку між величинами найкращого монотонного наближення і величиною найкращого наближення без обмежень.

З іншого боку за рік до цього, в роботі [33] Лоренц і Зеллер вже довели точний аналог нерівності Джексона для монотонного наближення, а саме, що для довільної функції f з класу $\Delta^1 \cap C^r[-1,1]$ виконується нерівність

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{c(r)}{n^r}\omega(f^{(r)}, n^{-1}), \quad n \geqslant r.$$

За умови $r = 0$ покращити цю нерівність вперше вдалось ДеВору [10], котрий довів, що для будь-якої монотонної неперервної функції f виконується нерівність

$$E_n^{(1)}(f) \;\leqslant\; c\omega_2(f, n^{-1}), \quad n \geqslant 2.$$

(Тут ω_k – k-й модуль неперервності, тобто

$$\omega_k(f, t, [a,b]) \;=\; \sup_{x, x+kh \in [a,b]} \Big| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x+jh) \Big|,$$

і ми позначаємо $\omega_k(f,t) = \omega_k(f,t,[-1,1])$.)

Пізніше Швєдов (див. [55]) довів, що в останній нерівності неможливо замінити ω_2 на ω_3. Точніше, він довів, що, для кожного $A > 0$ і $n \in \mathbb{N}$, існує така монотонна неперервна функція $f = f_{n,A}$, що

$$E_n^{(1)}(f) \;\geqslant\; A\omega_3(f, 1).$$

Узагальненням задачі монотонної апроксимації є задача комонотонного наближення. В цьому випадку функція f змінює характер монотонності в скінченній кількості фіксованих вузлів $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$ (де $-1 < y_1 < \cdots < y_s < 1$) і дозволяється наближувати f тільки поліномами такого самого виду. Позначимо клас функцій, що змінюють монотонність в вузлах Y_s та є неспадними на $[y_s, 1]$ через $\Delta^1(Y_s)$.

Ньюман [38] отримав першу "оптимальну" оцінку у комонотонному наближенні. Він показав, що, якщо функція f належить $\Delta^1(Y_s)$, то виконується нерівність

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(s)\omega(f, n^{-1}), \quad n \geqslant 1.$$

Після цього Швєдов [54] довів, що, якщо $f \in \Delta^1(Y_s)$, то

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(s)\omega_2(f, n^{-1}), \quad n \geqslant \mathcal{N}.$$

де $\mathcal{N} = \mathcal{N}(Y_s)$. Крім того, він довів, що ця оцінка, взагалі кажучи, не має місця, якщо стала $\mathcal{N}$ є незалежною від Y_s.

Подальші результати в цьому напрямку було отримано Гілевічем та Шевчуком та Дзюбенко, Гілевічем та Шевчуком в роботах [18] та [14].

В цій роботі розглядається питання про порядок комонотонного наближення за умови, що величина найкращого наближення без обмежень має степеневий порядок. Для монотонного наближення має місце наступний результат.

Теорема. *Нехай* $\alpha > 0$. *Якщо* $f \in C[-1,1]$ – *монотонна функція що задовільняє*

$$n^\alpha E_n(f) \leqslant 1, \quad n \geqslant 1,$$

то виконується нерівність

$$n^\alpha E_n^{(1)}(f) \leqslant c(\alpha), \quad n \geqslant 1.$$

де $c(\alpha)$ *це стала, що залежить тільки від* α.

Для $\alpha < 2$, цей результат випливає з [28], для $\alpha > 2$ він випливає з результатів роботи [26], а для $\alpha = 2$ цей результат було доведено в [30].

Для комонотонного наближення схоже явище також має місце, цьому присвячено розділ 3 цієї роботи.

1.2. Наближення дифеоморфізмами

Найпростішим багатовимірним аналогом задачі монотонного наближення є задача наближення заданого гомеоморфізму $f : B^d \to \mathbb{R}^d$ замкненої одиничної кулі $B^d \subset \mathbb{R}^d$ відображеннями з більш гладкого класу (наприклад, дифеоморфізмами класу C^k або ж кусково-лінійними гомеоморфізмами або поліноміальними гомеоморфізмами).

Для $d = 2$ це питання було вперше досліджено Франкліном і Вінером в [16]. Вони довели, що в двовимірному випадку взаємно однозначні відображення можна навіть наблизити поліноміальним гомеоморфізмами. Їх метод суттєво спирався на властивості аналітичних функцій і тому не може бути використаним в розмірностях більше за 2.

Для $d = 3$ існування таких наближень випливає з аналогічного результату про кусково лінійне наближення, див. [36, pp. 239-246].

Дещо несподівано, для $d = 4$ відповідь негативна, тобто існує такий гомеоморфізм $f : B^4 \to \mathbb{R}^4$ що не може бути наближений дифеоморфізмами. Цей результат довели Дональдсон і Салліван в [12].

1.3. Теоретичні відомості з геометричної топології

Поняття топологічної степені вперше ввів Брауер для доведення теореми про інваріантність поняття області (див. монографії [15] та [7]). Нагадаємо це твердження.

Твердження. *Нехай U – відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$, а $f : U \to \mathbb{R}^n$ – неперервне ін'єктивне відображення. Тоді $f(U)$ – відкрита множина, а f – гомеоморфізм U на $f(U)$.*

Поняття топологічної степені виявилось дуже корисним в топології та математичному аналізі (прикладом застосування в аналізі є теорема Брауера про нерухому точку) і є одним з найпростіших результатів алгебраїчної топології. Точне означення та багато інших прикладів застосування можна знайти в [7].

Топологічна степінь це ціле число, що залежить від трійки (f, U, p), де $U \subset \mathbb{R}^n$, відображення $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ є неперервним, а точка p не належить $f(\partial U)$. Топологічна степінь має дуже багато властивостей, що дозволяють легко її обчислювати, а також отримувати з цих обчислень якісні результати. Нагадаємо для зручності ці властивості (див., наприклад, [15, Ch. 1.2]).

(I) ***Гомотопічна інваріантність.*** Якщо відображення $h : [0, 1] \times \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ неперервне і $p \notin h([0, 1] \times \partial U)$, то якщо позначити $f_t(x) =$

$h(t, x)$, буде виконуватись наступна рівність

$$\deg(f_0, U, p) = \deg(f_1, U, p).$$

(II) ***Залежність від значень на границі.*** Якщо $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$ і $p \notin f(\partial U) = g(\partial U)$, то

$$\deg(f, U, p) = \deg(g, U, p).$$

(III) ***Розклад.*** Якщо $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ і U_i – відкриті, попарно неперетинні множини і $\partial U_i \subset \partial U$, то для $p \notin f(\partial U)$ виконується

$$\deg(f, U, p) = \sum_{i=1}^{m} \deg(f, U_i, p).$$

(IV) ***Неперервність за*** f***.*** При заданому f і $p \notin f(\partial U)$ існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного неперервного $g : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ з $\|f - g\|_{\overline{U}} < \varepsilon$ виконується $p \notin g(\partial U)$ та

$$\deg(f, U, p) = \deg(g, U, p).$$

(V) ***Неперервність за*** p***.*** При фіксованому відображенні f, степінь $\deg(f, U, p)$ як функція p є постійною на кожній компоненті зв'язності $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$.

(VI) ***Рівняння.*** Якщо $\deg(f, U, p) \neq 0$, то рівняння $f(x) = p$ має розв'язок в U.

(VII) ***Вирізання.*** Якщо $K \subset \overline{U}$ це компакт такий, що $p \notin f(K)$, то

$$\deg(f, U, p) = \deg(f, U \setminus K, p).$$

(VIII) ***Нормалізація.*** Якщо позначити через id_U тотожнє відображення на U, то

$$\deg(id_U, U, p) = \begin{cases} 1, & p \in U \\ 0, & p \notin U. \end{cases}$$

Доведення цих тверджень можна знайти в [15, теор. 2.1, 2.3, 2.4, 2.6 та 2.7] та [7, тв. 1.2.6].

Теореми про продовження вкладень. Теореми про продовження вкладень сфер, що часто також називають теоремами Шенфліса, дозволяє в багатьох випадках "інтерполювати" багатовимірний гомеоморфізм по значенням на деякій сфері. Класична теорема Шенфліса стосується топологічних гомеоморфізмів на площині.

Теорема (топологічна теорема Шенфліса). *Якщо* $Q = [0,1]^2$ *і* $f\colon \partial Q \to \mathbb{R}^2$ *– гомеоморфізм на свій образ, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, що* $F|_{\partial Q} = f$*.*

Наступний результат було вперше доведено Мойсом (див. [36, теор. 17.12]). Він є аналогом теореми Шенфліса в кусково-лінійної топології.

Теорема (кусково-лінійна теорема Шенфліса). *Нехай* $d \in \{2,3\}$*. Тоді, якщо* $Q = [0,1]^d$ *і* $f\colon \partial Q \to \mathbb{R}^d$ *– кусково-лінійний гомеоморфізм, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм* $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$*, що* $F|_{\partial Q} = f$*.*

Має місце також аналогічне твердження для гладких вкладень сфери.

Теорема (гладка теорема Шенфліса). *Тоді, якщо* $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ *і* $f\colon \partial B \to \mathbb{R}^2$ *– дифеоморфізм на свій образ, то існує такий нескінченно гладкий дифеоморфізм* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, що* $F|_{\partial B} = f$*.*

У тривимірному випадку аналогічний результат належить Александеру (див. [1]).

Теорема (теорема Александера). *Тоді, якщо* $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ *і* $f\colon \partial B \to \mathbb{R}^3$ *– дифеоморфізм на свій образ, то існує такий нескінченно гладкий дифеоморфізм* $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, що* $F|_{\partial B} = f$*.*

Зауважимо, що диференційовний варіант теореми Шенфліса залишається вірним також в розмірностях $\geqslant 5$ в той час як 4-вимірний випадок є відомим відкритим питанням.

Деякі узагальнення теореми Шенфліса на інші класи відображень можна знайти в роботах [3], [21], [22] та монографії [36].

Аналогічно, можна розглянути задачу продовження неперервного відображення кола до аналітичного відображення диску (аналітичного з точністю до дифеоморфізму площини). Необхідні та достатні умови в цьому випадку було знайдено в [48], але вони виявляються досить складними (зокрема, ці умови не зводяться лише до умов на топологічну степінь відносно деяких точок).

1.4. Нерівність Вітні

Нагадаємо нерівність Вітні для неперервних функцій на відрізку $[0, 1]$. Вітні [49] довів, що для довільної неперервної функції f виконується нерівність

$$E_k(f) \leqslant W(k)\omega_k(f, 1/k),$$

де $W(k)$ – деякі сталі. Сам Вітні довів тільки те, що така стала існує для кожного натурального k і дав її оцінки для $k = 1, 2, 3, 4$.

Інтерполяційні сталі Вітні, $W_I(k)$ визначаються схожим чином. Якщо неперервна функція задовільняє умові $f(j/(k-1)) = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, то

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant W_I(k)\omega_k(f, 1/k).$$

Ю. А. Брудний та Бл. Сєндов показали, що стала Вітні обмежена числом $(2k)^{2k}$. При цьому Сєндов висунув гіпотезу про те, що стала Вітні не перевищує 1, а інтерполяційна стала Вітні не перевищує 2. У результаті робіт Брудного, Сєндова, Крякіна, Такєва, Іванова, Боянова, Гілєвіча, Шевчука (див. [17]) та інших, було доведено, що для інтерполяційна сталої Вітні виконується нерівність

$$W_I(k) \leqslant 3.$$

Також було доведено, що стала Вітні не перевищує $2 + 1/e^2$. Для $k < 10$ гіпотеза Сєндова була підтверджена в роботах Ю. Крякіна та Д. Желнова.

В багатовимірного випадку сталі Вітні можна визначати для довільної опуклої множини. При цьому величина сталої суттєво залежить від форми множини. Для сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі Брудний і Калтон [6] довели наступний результат. Для довільного неперервного відображення $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ існує така лінійна функція L, що

$$\sup_{x\in[0,1]^n} |f(x) - L(x)| \ \leqslant\ 802\, \omega_2(f, [0,1]^n),$$

де для довільної опуклої множини K

$$\omega_2(f, K) \ = \ \sup_{x,y\in K} \Big| f(x) + f(y) - 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big|.$$

Тісно пов'язаною з оцінкою сталої Вітні на багатовимірному кубі є задача про наближення функцій множин адитивними функціями. Калтон і Робертс [24] довели наступний результат. Якщо функція $\nu : \{0,1\}^X \to \mathbb{R}$ задовольняє

$$|\nu(A) + \nu(B) - \nu(A\cup B)| \leqslant 1 \quad \text{для } A, B \subset X, \text{ таких що } A\cup B = \varnothing.$$

і $\nu(\varnothing) = 0$, то існує така адитивна функція множин $\mu : \{0,1\}^X \to \mathbb{R}$, що задовільняє $|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K$ для усіх $A \in \{0,1\}^X$, де $K < 45$.

РОЗДІЛ 2
НАБЛИЖЕННЯ ВІДОБРАЖЕННЯМИ З НЕВІД'ЄМНИМ ЯКОБІАНОМ

2.1. Постановка задачі

Позначення. Позначимо через $|x|$ звичайну евклідову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$, тобто якщо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Для неперервного відображення $f : K \to \mathbb{R}^n$, де K – компактна підмножина $\mathbb{R}^n$, визначимо $\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ і $r > 0$ позначимо через $B_r(x)$ відкриту кулю радіусу r з центром в x. Для довільної підмножини $A \subset \mathbb{R}^n$ позначимо відкритий r-окіл A через $O_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$. Для множин $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, за означенням покладемо $\operatorname{dist}(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} |x - y|$. Визначимо діаметр $\operatorname{diam}(F)$ підмножини $F \subset \mathbb{R}^n$ за формулою $\operatorname{diam}(F) = \sup_{x,y \in F} |x - y|$.

Нехай $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ - гладке відображення класу C^1, а x – це деяка точка в області $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Позначимо через $Df(x)$ диференціал відображення f в точці x, тобто $Df(x)$ - таке лінійне відображення з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, що

$$|f(x + h) - f(x) - Df(x)[h]| = o(|h|), \quad h \to 0.$$

Позначимо через $J_f(x)$ – якобіан (визначник) відображення f в точці x. Будемо говорити, що $x \in \Omega$ – критична точка відображення f, якщо ранг відображення $Df(x)$ є меншим за $\min(n, m)$. У випадку $n = m$ точка x буду критичною точкою відображення f тоді і тільки тоді, коли $J_f(x) = 0$. Точка $p \in \mathbb{R}^n$ називається критичним значенням f, якщо існує хоча б одна критична точка f що відображається в p. Якщо точка $p \in \mathbb{R}^n$ не є критичним значенням, будемо говорити, що p - регулярне значення. Зауважимо, що будь-яка точка $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\Omega)$ за означенням є регулярним значенням.

В деяких ситуаціях нам буде зручно ототожнювати $\mathbb{R}^2$ з $\mathbb{C}$ задля спрощення обчислень. Для довільної підмножини $A \subset \mathbb{R}^n$ під гладкими, аналітичними, та комплексно аналітичними (у випадку $\mathbb{R}^2$) відображеннями на A будемо розуміти відповідні відображення визначені на деякому відкритому околі $U \supset A$.

В декількох місцях нам знадобляться гладкі функції з компактним носієм, тому буде зручно визначити їх тут.

Стандартна невід'ємна функція класу C^∞ з носієм в $\overline{B_1}(0)$ задається формулою

$$\omega(x) = \begin{cases} c \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & \text{якщо } |x| < 1 \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де $c \int_{B_1(0)} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}) dx = 1$. Позначимо також масштабовану версію через

$$\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{2.1}$$

Відмітимо, що $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$.

Постановка задачі. Якщо $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ - монотонно зростаюча неперервна функція, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує монотонно зростаючий на $[0,1]$ поліном p, такий, що

$$\|f - p\|_{[0,1]} := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Це так звана теорема Вейерштрасса для монотонного наближення. Мабуть найпростіше доведення спирається на поліноми Бернштейна

$$B_{n,f}(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

Дійсно, простий підрахунок похідної поліному Бернштейна показує, що він монотонно зростає, і крім того, добре відомо, що

$$\lim_{n \to \infty} \|f - B_{n,f}\|_{[0,1]} = 0.$$

Розглянемо наступний двовимірний аналог цієї задачі.

Задача 2.1. *Яким умовам має задовольняти неперервне відображення $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$, щоб його можна було як завгодно добре наблизити неперервно диференційованими відображеннями з невід'ємним якобіаном?*

Природно називати таке наближення "зберігаючим орієнтацію". Зауважимо, що ми намагаємось наближувати лише гладкими функціями, але як буде показано, в більшості випадків коли ми можемо наблизити f гладкими відображеннями з невід'ємним якобіаном, ми також можемо наблизити його поліноміальними відображеннями з невід'ємним якобіаном.

Крім цього розглянемо дещо більш загальну постановку цього питання.

Задача 2.1′. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з кусково C^1-гладкою жордановою границею. Яким умовам має задовольняти неперервне відображення $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, щоб його можна було як завгодно добре наблизити неперервно диференційованими відображеннями з невід'ємним якобіаном?*

Умова Ω має кусково C^1-гладку жорданову границю означає, що $\partial\Omega$ це об'єднання скінченної кількості неперетинних (за виключенням кінців) C^1-гладких замкнених жорданових кривих. Нагадаємо, що $\overline{F}$ позначає замикання, а $\partial F = \overline{F} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus F}$ - границю підмножини $F \subset \mathbb{R}^2$. Як завжди, будемо казати, що $f : A \to \mathbb{R}^2$ - відображення класу C^n, якщо існує відкрита множина $U \supset A$ і відображення $g : U \to \mathbb{R}^2$ з неперервними частковими похідними порядку до n включно, така що $f = g|_A$ ($n \in \mathbb{N}$ або $n = \infty$).

Спочатку нагадаємо деякі відомі результати. З результатів [16] випливає, що у двовимірному випадку взаємно однозначні відображення можна навіть наблизити поліноміальним відображенням з ненульовим якобіаном (додатнім або від'ємним в залежності від того як відображення змінює орієнтацію). Більш того, ми покажемо що це твердження виконується за слабкішої умови на $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, а саме локальної взаємно однозначності.

Ця умова означає, що $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ для кожної точки $p \in \overline{\Omega}$ існує її відкритий окіл U такий, що звуження $f|_U$ є ін'єктивним.

Теорема 2.1. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область, а $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ – неперервне, локально взаємно однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке поліноміальне відображення $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ з додатним якобіаном на $\overline{\Omega}$, що $\|f - p\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$.*

Аналогічний результат є вірним також у тривимірному просторі, але його доведення є технічно значно складнішим, і тому ми для спрощення будемо розглядати лише випадок $\overline{\Omega} = [0, 1]^3$.

Теорема 2.2. *Нехай $f : [0, 1]^3 \to \mathbb{R}^3$ - неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке C^∞-гладке відображення $g \colon [0, 1]^3 \to \mathbb{R}^3$ з додатним якобіаном на $[0, 1]^3$ таке, що $\|f - g\| < \varepsilon$.*

Зрозуміло, що ця умова не є необхідною для задачі $2.1'$. Очевидний контрприклад – постійне відображення.

Отже потрібно шукати іншу необхідну і достатню умову для задачі 2.1. В одновимірному випадку очевидною необхідною та достатньою умовою є: "f – неспадна функція."

Ми сформулюємо необхідну умову в термінах топологічної степені відображення. Нехай X – замкнена підмножина $\mathbb{R}^d$. Топологічна степінь це деяка цілозначна функція на множині трійок (f, U, p), де $f : X \to \mathbb{R}^d$ – неперервне, $U \subset \mathbb{R}^d$ – відкрита підмножина, така що $\overline{U} \subset X$, а p – точка в $\mathbb{R}^2 \setminus f(\partial U)$. Позначатимемо топологічну степінь через $\deg(f, U, p)$.

Найпростіше визначається топологічна степінь гладкого відображення в регулярному значенні.

Означення 2.1. *Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ - обмежена відкрита підмножина, $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ - гладке відображення класу C^1, а $p \notin f(\partial U)$ - регулярне* *значення* f. *Означимо*

$$\deg(f, U, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \mathrm{sgn} J_f(x),$$

де сума вважається рівною 0 *у випадку коли множина* $f^{-1}(p)$ *порожня, а* sgn *- це функція знаку.*

Зокрема для тотожного відображення id_U маємо $\deg(id_U, U, p) = 1$ якщо $p \in U$, і $\deg(id_U, U, p) = 0$ інакше.

Виявляється, що це означення можна поширити на всі неперервні відображення зі збереженням багатьох цікавих властивостей. Детальніше про означення та властивості топологічної степені відображень написано в монографіях [7; 15]. Для зручності наведемо потрібні нам властивості топологічної степені в наступному твердженні.

Твердження 2.1. *Топологічна степінь* $\deg(f, U, p)$ *має наступні властивості.*

(I) *Якщо відображення* $h : [0, 1] \times \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *неперервне і* $p \notin h([0, 1] \times \partial U)$, *то якщо позначити* $f_t(x) = h(t, x)$, *буде виконуватись наступна рівність*

$$\deg(f_0, U, p) = \deg(f_1, U, p).$$

(II) *При заданих* f *і* $p \notin f(\partial U)$ *існує таке* $\varepsilon > 0$ *що для довільного неперервного відображення* $g : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *що задовільняє нерівність* $\|f - g\|_{\overline{U}} < \varepsilon$ *маємо* $p \notin g(\partial U)$ *і*

$$\deg(f, U, p) = \deg(g, U, p).$$

(III) *При фіксованому відображенні* f, *степінь* $\deg(f, U, p)$ *як функція* p *є постійною на кожній компоненті зв'язності* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$.

(IV) *Якщо* $\deg(f, U, p) \neq 0$, *то рівняння* $f(x) = p$ *має роз'язок в* U.

Доведення можна знайти в [15, теор. 2.1, 2.3, 2.4, 2.6 і 2.7] і [7, твер. 1.2.6].

Топологічна степінь для $d = 1$. Пояснимо більш детально поняття топологічної степені у найпростішому випадку, тобто коли розмірність $d = 1$. Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ - неперервне відображення, $U = (a,b) \subset [0,1]$ - відкритий інтервал, а $p \in \mathbb{R}$ - точка відмінні від $f(a)$ та $f(b)$. Визначимо $\deg(f,U,p)$ за наступним правилом

$$\deg(f,U,p) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } f(a) < p < f(b), \\ -1, \text{ якщо } f(b) < p < f(a), \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Якщо $U = \cup_i I_i$ - об'єднання неперетинних інтервалів, і $p \notin f(\partial U)$, то визначимо степінь за формулою

$$\deg(f,U,p) = \sum_i \deg(f, I_i, p).$$

Це визначення коректне, тому що $\deg(f, I_i, p) \neq 0$ лише для скінченної кількості інтервалів I_i, що легко довести використовуючи компактність $[0,1]$.

Тепер ми можемо виразити властивість монотонності $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ за допомогою топологічної степені. А саме, f - неспадна тоді і тільки тоді, коли на кожному під-інтервалі $U = (a,b) \subset [0,1]$ для кожного $p \in \mathbb{R}$ такого що $p \in f(U) \setminus \{f(a), f(b)\}$ виконується нерівність

$$\deg(f,U,p) \geqslant 0.$$

Хоча це означення не є зручним в одновимірному випадку, на відміну від поняття "f - неспадна функція", поняття топологічної степені визначено для відображень $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, даючи тим самим природний аналог монотонних функцій в багатовимірному випадку.

Топологічна степінь для $d = 2$. У випадку $d = 2$ поняття топологічної степені виявляється дуже тісно пов'язаним з поняття числа обертів замкненої кривої на площині. Точніше, якщо

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$$

це відкритий диск, а відображення $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^2$ є неперервним і $p \in \mathbb{R}^2$ це така точка, що $p \notin f(\partial U)$, то

$$\deg(f, U, p) \;=\; w(\gamma, p),$$

де $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ визначено як $\gamma(t) = f(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Тут через $w(\gamma, p)$ позначено число обертів орієнтованої замкненої кривої γ навколо заданої точки p, тобто загальна кількість обертів проти годинникової стрілки, що крива γ робить навколо p.

За допомогою поняття топологічної степені ми можемо сформулювати необхідну умову існування наближення в задачі $2.1'$.

Теорема 2.3. *Якщо неперервне відображення $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ можна як завгодно добре наблизити відображеннями класу C^1 з невід'ємним якобіаном, то для довільної відкритої підмножини $U \subset \Omega$ і довільної точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ виконується нерівність* $\deg(f, U, p) \geqslant 0$.

Зауважимо, що ця умова залишається необхідною для будь-якої розмірності.

На жаль нам не вдалося довести що ця умова є також достатньою для задачі $2.1'$, але ми маємо теорему 2.4, яка грубо кажучи стверджує, що достатня умова це

$$\deg(f, U, p) > 0.$$

Нагадаємо, що неперервне відображення $f : X \to Y$ називається *легким*, якщо для будь-якого $y \in Y$ множина $f^{-1}(y)$ є цілком незв'язною (тобто компонентами зв'язності $f^{-1}(y)$ є лише одноточкові підмножини).

Теорема 2.4. *Нехай Δ - обмежена область і $f : \Delta \to \mathbb{R}^2$ - легке неперервне відображення. Припустимо, що для будь-якої відкритої множини U такої, що $\overline{U} \subset \Delta$ і будь-якої точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ виконується нерівність* $\deg(f, U, p) > 0$.

Тоді для будь-якої області Ω такої, що $\overline{\Omega} \subset \Delta$ і будь-якого $\varepsilon > 0$, існує відображення $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ класу C^∞ з невід'ємним якобіаном таке, що $\|f - g\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$.

При цьому, якщо область Δ – однозв'язна, то існує поліноміальне відображення g з тими самими властивостями.

Ми також наведемо контрприклад, що показує різницю між наближенням гладкими відображеннями з невід'ємним якобіаном та наближенням відображеннями зі строго додатним якобіаном. Це відрізняє багатовимірний випадок від одновимірного, оскільки в останньому клас функцій що можна наблизити неспадними гладкими функціями збігається з класом функцій, що можна наблизити строго зростаючими гладкими функціями.

Теорема 2.5. *Нехай відображення $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^2$ задається рівністю*

$$f(x, y) \;=\; (x^2 - y^2,\, 2xy).$$

Тоді для довільного відображення $g : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^2$ з класу C^1 зі строго додатним якобіаном виконується нерівність

$$\|f - g\|_{\overline{B_1(0)}} \;\geqslant\; \frac{1}{4}.$$

2.2. Загальна постановка деяких задач багатовимірного формозберігаючого наближення

У цьому пункті ми сформулюємо більш абстрактно деякі задачі багатовимірного формозберігаючого наближення у загальному випадку. Зокрема, ми означимо поняття "форми" неперервно диференційовної функції, як деяку властивість її похідних (або більш загально, як деяку умову на всі її похідні до k-го порядку включно). Для спрощення ми будемо лише розглядати форми функцій першого порядку (під цим розуміється, що умови накладаються лише на перші похідні, див. далі). В одновимірному випадку існує лише два нетривіальні види форм – форма монотонних функцій та форма ліпшицевих функцій. Відповідні задачі теорії наближень добре відомі – це монотонне наближення та наближення поліномами з обмеженою похідною. На відміну від одновимірного випадку, за відсутності додаткових умов, навіть у випадку перетворень площини існує нескінченно багато різних форм.

Результати цього розділу не є необхідними для доведення теорем 2.1–2.4, але за допомогою поняття форми відображення можна пояснити, чому задача наближення перетвореннями з невід'ємним якобіаном є природним узагальненням задачі монотонного наближення.

Будемо розглядати нескінченно диференційовні відображення з деякої підмножини $A \subset \mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^m$, цей клас функцій позначатимемо $C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ (ми будемо використовувати скорочене позначення $C^\infty(A)$). Як було зазначено вище, у випадку коли множина A не є відкритою, під $C^\infty(A)$ буде розуміється клас

$$C^\infty(A) \; = \; \bigcup_{A \subset U} C^\infty(U)|_A,$$

тобто функції, що мають нескінченно диференційовне продовження на деякий відкритий окіл U множини A.

Означення 2.2. *Формою будемо називати будь-яку підмножину $\mathcal{S}$ множини $\mathbb{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ дійсних матриць розміру $m \times d$.*

Здебільшого будемо вважати, що множина $\mathcal{S}$ є зв'язною. Оскільки множина $\mathbb{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ має природну топологію (розглядаючи матриці як елементи $\mathbb{R}^{md}$), то ми будемо казати, що форма $\mathcal{S}$ є замкненою, відкритою, компактною, тощо, якщо відповідну властивість має множина $\mathcal{S}$ як підмножина топологічного простору $\mathbb{M}_{m,d}(\mathbb{R})$.

Означення 2.3. *Будемо казати, що нескінченно диференційовна відображення $f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ має форму $\mathcal{S}$, якщо для будь-якого $x \in A$, диференціал функції належить $\mathcal{S}$, тобто $Df(x) \in \mathcal{S}$. Будемо позначати клас усіх нескінченно диференційовних функцій форми $\mathcal{S}$ через $C^\infty_{\mathcal{S}}(A, \mathbb{R}^m)$.*

Інакше кажучи, відображення деякої форми це відображення що задовільняють деяким обмеженням на похідні. Через поняття форми можна визначити багато класів функцій з математичного аналізу.

Приклад 2.1. *Нехай $d = m = 1$ і форма $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ задається $\mathcal{S} = [0, \infty)$. Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([a,b], \mathbb{R})$ складається із усіх монотонно неспадних нескінченно диференційовних функцій. Якщо ж $\mathcal{S} = (0, \infty)$, то клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([a,b])$ містить лише строго монотонно зростаючі функції f.*

Приклад 2.2. *Нехай $d = m = 1$ і форма $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ задається $\mathcal{S} = [-L, L]$. Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([a,b], \mathbb{R})$ складається із усіх нескінченно диференційовних ліпшицевих функцій із константою ліпшиця $\leqslant L$.*

Для того, щоб узагальнити останній приклад, нехай $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,d}$ задається

$$\mathcal{S} \;=\; \{A \in \mathbb{M}_{m,d} \mid \quad \|A\| \leqslant L\},$$

де через $\|\cdot\|$ позначено операторну норму матриці відносно евклідових норм в $\mathbb{R}^d$ і $\mathbb{R}^m$. Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}(U, \mathbb{R}^m)$ складається із усіх нескінченно диференційовних ліпшицевих відображень зі сталою Ліпшиця $\leqslant L$.

Приклад 2.3. *Нехай $d = 1, m \geqslant 2$ і форма $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,1} \cong \mathbb{R}^m$ задається $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$. Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([a,b], \mathbb{R}^m)$ складається із усіх натуральних параметризацій гладких кривих в $\mathbb{R}^m$.*

Приклад 2.4. *Нехай $d = m = 2$ і форма $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{2,2}$ задається*

$$\mathcal{S} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}(U)$ складається з усіх голоморфних функцій на множині U.

Приклад 2.5. *Нехай $d = m$ і форма $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,m}$ задається*

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R}) : \; \det(X) > 0\}.$$

Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([0,1]^m, \mathbb{R}^m)$ складається з гладких відображень, що (локально) зберігають орієнтацію.

Приклад 2.6. *Нехай $d = m$ і форма $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,m}$ задається*

$$\mathcal{S} = \mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R}) : \ \det(X) = 1\}.$$

Тоді клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([0,1]^m, \mathbb{R}^m)$ складається з гладких відображень, що (локально) зберігають об'єм.

Сформулюємо тепер основні питання "теорії наближення зі збереженням форми $\mathcal{S}$".

Задача 2.2 (теорема Веєрштраса). *Для заданої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ і $A = \overline{\Omega}$ описати замикання множини $C^\infty_{\mathcal{S}}(A, \mathbb{R}^m)$ у просторі всіх неперервних відображень $C(A, \mathbb{R}^m)$.*

Позначимо через $\mathbb{P}^{\mathcal{S}}$ (відповідно через $\mathbb{P}^{\mathcal{S}}_n$) множину поліноміальних відображень форми $\mathcal{S}$ (відповідно множину поліноміальних відображень, що мають форму $\mathcal{S}$ і степінь $< n$).

Задача 2.3 (існування поліноміального наближення). *Для заданої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ і $A = \overline{\Omega}$ з'ясувати чи для всіх відображень $f \in C^\infty_{\mathcal{S}}(A, \mathbb{R}^m)$ існує послідовність поліноміальних відображень $p_n \in \mathbb{P}^{\mathcal{S}}$, що збігається до f рівномірно на A.*

Задача 2.4 (величина найкращого наближення). *Знайти оцінки для величини найкращого наближення з заданою формою*

$$E^{\mathcal{S}}_n(f, A) \ = \ \min\{\|f - p\|_A \ : \ p \in \mathbb{P}^{\mathcal{S}}_n\}$$

через властивості відображення f.

Зауважимо, що у багатовимірному випадку всі ці задачі є досить нетривіальними (при цьому остання задача є дуже нетривіальною вже у випадку одновимірного формозберігаючого наближення). У випадку теореми Веєрштраса це буде зрозуміло з подальших результатів цього розділу. Щодо існування поліноміального наближення, то неважко навести приклади множини $\mathcal{S}$ для яких множина усіх поліноміальних відображень складається лише з лінійних відображень, а клас $C^\infty_{\mathcal{S}}$ містить нелінійні відображення. Для цього достатньо розглянути підмножину $\mathcal{S}$ задану трансцендентними аналітичними рівняннями.

Перерахуємо деякі прості властивості класів $C^\infty_{\mathcal{S}}$.

- якщо $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subset \mathbb{M}_{m,n}$, то
$$C^\infty_{\mathcal{S}}(U, \mathbb{R}^m) + C^\infty_{\mathcal{S}'}(U, \mathbb{R}^m) \subseteq C^\infty_{\mathcal{S}+\mathcal{S}'}(U, \mathbb{R}^m),$$
де $\mathcal{S} + \mathcal{S}' = \{A + B : \ A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{S}'\}$ це сума Мінковського;
- якщо $L(x)$ це лінійне відображення з диференціалом A, то
$$L + C^\infty_{\mathcal{S}}(U, \mathbb{R}^m) = C^\infty_{A+\mathcal{S}}(U, \mathbb{R}^m);$$
- якщо $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{m,n}$, $\mathcal{S}' \subset \mathbb{M}_{n,k}$, то
$$C^\infty_{\mathcal{S}'}(V, W) \circ C^\infty_{\mathcal{S}}(U, V) \subseteq C^\infty_{\mathcal{S}\cdot\mathcal{S}'}(U, W);$$
- якщо $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \bigsqcup \mathcal{S}''$, то
$$C^\infty_{\mathcal{S}} = C^\infty_{\mathcal{S}'} \bigsqcup C^\infty_{\mathcal{S}''}.$$

У випадку, коли $\mathcal{S}$ є відкритою множиною, задача існування поліноміального наближення (а також, в деякій мірі, і задача знаходження оцінок величини найкращого наближення) завжди має позитивне рішення.

Твердження 2.2. *Якщо множина $\mathcal{S}$ є відкритою, то для будь-якого відображення $f \in C^\infty_{\mathcal{S}}(A, \mathbb{R}^m)$ існує послідовність поліноміальних відображень $p_n \in \mathbb{P}^{\mathcal{S}}$, що збігається до f рівномірно на A. Крім того, якщо A є замиканням області з гладкою жордановою границею, то для будь-якого k існує така стала $c_k(f)$, що послідовність p_n можна обрати з властивістю*
$$\|f - p_n\|_A \ \leqslant \ \frac{c_k(f)}{\deg(p_n)^k}.$$

Доведення. Оскільки множина A є компактною то образ $Df(A)$ є компактом у відкритій множині $\mathcal{S}$, а отже деякий його малий ε-окіл також лежить в $\mathcal{S}$. Тому достатньо знайти наближення до f, що одночасно наближують перші похідні f. Відповідний результат випливає з [2, теор. 1, теор. 2]. $\square$

Якщо множина $\mathcal{S}$ не є відкритою, то, взагалі кажучи, поліноміальних наближень може і не існувати (відповідно і питання про величину найкращого наближення стає нецікавим). Насправді, якщо покласти $\mathcal{S} = \{(t, e^t) | t \in \mathbb{R}\}$ то $\mathbb{P}^{\mathcal{S}}$ складатиметься лише з лінійних відображень, а отже ними можна наблизити лише лінійні відображення.

Далі, розглянемо задачу Веєрштраса. Як буде зрозуміло з випадку наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном, це питання не є простим. Найбільш прості ситуації виникають коли область визначення або область значень є одновимірною.

Нехай $m = 1$. В цьому випадку, форма відображень зберігається при рівномірному наближенні. Точніше, виконується наступний результат.

Теорема 2.6. *Нехай $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_{1,n} \cong \mathbb{R}^n$, і послідовність $f_n \in C^\infty_{\mathcal{S}}(U)$ збігається до функції $f \in C^\infty(U)$ рівномірно на компактних підмножинах U. Тоді $f \in C^\infty_{\overline{\mathcal{S}}}(U)$.*

Доведення. Використовуючи зсув на лінійну функцію та лінійну заміну змінних, легко звести твердження задачі до наступного випадку. (Вважатимемо, що $0 \in U$ та $f(0) = 0$.) Якщо для будь-якого $A \in \mathcal{S}$ виконується $|A| \geqslant 1$, то треба довести, що $\nabla f(0) \neq 0$. Дійсно, припустимо, що $\nabla f(0) = 0$. Тоді на кулі $B_r(0)$ виконується нерівність

$$\|f\|_{B_r(0)} < cr^2$$

для деякого значення $c > 0$ (що не залежить від r). З іншого боку, розглядаючи інтегральну криву, що проходить через 0, для векторного поля ∇f_n

отримуємо нерівність

$$\max_{\overline{B_r(0)}} f_n - \min_{\overline{B_r(0)}} f_n \geqslant 2r.$$

Тут ми використали геометрично очевидний факт, що будь-яка крива в $\overline{B_r(0)}$, що проходить через 0 має довжину $\geqslant 2r$. Таким чином, маємо

$$\|f - f_n\|_{\overline{B_r(0)}} \geqslant r - cr^2.$$

розглядаючи $r = \alpha/(2c)$ де $\alpha \leqslant 1$ отримуємо

$$\|f - f_n\|_{\overline{B_r(0)}} \geqslant \frac{\alpha}{4c},$$

що суперечить збіжності $f_n \rightrightarrows f$ на $\overline{B_r(0)}$ при достатньо малих r. □

Таким чином, у випадку $d \geqslant 2$, $m = 1$ будь-яка замкнена форма відображення зберігається при рівномірному наближенні.

Розглянемо тепер випадок коли, навпаки, область визначення є одновимірною, тобто $d = 1$, $m \geqslant 2$. На відміну від попереднього випадку, форма відображення може змінюватись дуже сильно. Розглянемо знову приклад 2.3:

$$\mathcal{S} \ = \ \{x \in \mathbb{R}^m \ : \ |x| = 1\}.$$

Як вже було зазначено, клас $C^\infty_{\mathcal{S}}([0,1], \mathbb{R}^m)$ складається з усіх натуральних параметризацій гладких кривих в $\mathbb{R}^m$. Очевидно, що якщо послідовність функцій $\gamma_n \in C^\infty_{\mathcal{S}}([0,1], \mathbb{R}^m)$ збігається до функції $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$, то для будь-яких $x, y \in [0,1]$ виконується нерівність

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \ \leqslant \ |x - y|.$$

З іншого боку, з загальної теореми Неша про існування ізометричних вкладень, що було доведено в [37], випливає, що достатньою умовою для існування рівномірного наближення γ елементами $C^\infty_{\mathcal{S}}([0,1], \mathbb{R}^m)$ є умова

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \ \leqslant \ (1 - \epsilon)|x - y|$$

для деякого $\epsilon > 0$.

Останнє, що ми хочемо обговорити в цьому підрозділі, це питання щодо зміни координат. В деякому сенсі поняття форми не є природною властивістю відображення (за відсутності додаткових структур, таких як комплексна структура, міра об'єму, метрика, тощо), оскільки форма залежить від вибору координат в області визначення та в області значень. При цьому, якщо зробити лінійні перетворення $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, то форма $\mathcal{S}$ перетвориться на $B\mathcal{S}A$. Єдиний клас форм, що є інваріантними відносно таких перетворень є форма $\mathcal{S}_{\mathrm{rk},k}$, що складаються з усі матриць фіксованого рангу k, та її доповнення. З іншого боку, якщо в просторі задано орієнтацію, то природно дозволяти лише відображення A, B з додатним визначником. Якщо $d \neq m$, то відповідь не зміниться, але у випадку $d = m$ інваріантними стають також форми, що складаються з усіх матриць з додатним (або невід'ємним) визначником. Оскільки в одновимірному випадку це в точності монотонні відображення, то в багатовимірному випадку саме умова невід'ємності визначника є природним узагальненням монотонності.

Надалі ми будемо розглядати лише задачу наближення для $\mathcal{S}$ що складається з лінійних відображень з невід'ємним (або додатним) визначником. При цьому властивості відображень цієї форми є особливими у порівнянні з деякими іншими множинами. Однією з основних причин цього є інваріантність множини $\mathcal{S}$ відносно перетворень координат що зберігають орієнтацію.

Зауваження 2.1. Аналогічним чином можна визначити поняття форми k-го порядку, де замість підмножин в просторі матриць треба буде розглядати підмножини у просторі дійсних тензорів типу $m \times n \times n \times \cdots \times n$, симетричних відносно координат з індексами $2, \ldots, k$.

Зауваження 2.2. Глобальні властивості поняття форми функції зникають, якщо замість класу нескінченно диференційовних функцій розглядати функції з більш широких класів і замінити умову «$Df(x) \in \mathcal{S}$ для всіх $x \in A$» на умову «$Df(x) \in \mathcal{S}$ для майже всіх $x \in A$». Наприклад, якщо $\mathcal{S} = \{\pm 1\}$, то множина нескінченно диференційовний функцій форми $\mathcal{S}$ буде складатися лише з лінійних функцій $\pm x + c$, у той час як умова майже всюди визначає клас кусково лінійних функцій що у своєму замиканні містить усі ліпшицеві функції зі сталою ліпшиця $\leqslant 1$.

2.3. Кусково-лінійна топологія та теореми про продовження

Кусково-лінійна топологія. Нагадаємо деякі означення з кусково-лінійної топології (див. [36, pp. 2-5]).

Означення 2.4. ***Симпліціальний комплекс*** *$\mathcal{K}$ це набір симплексів (в $\mathbb{R}^n$) що задовольняє наступні умови:*

(i) *Будь-яка грань симплексу з $\mathcal{K}$ також належить $\mathcal{K}$.*

(ii) *Перетин будь-яких двох симплексів $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ має бути спільною гранню симплексів σ_1 і σ_2.*

Ми завжди будемо вважати, що симпліціальний комплекс скінченний.

Розмірність симплексу заданого як опукла оболонка $n+1$ афінно незалежних точок в $\mathbb{R}^m$ покладається рівною n. Будемо казати, що симпліціальний комплекс $\mathcal{K}$ має розмірність k (або є k**-комплексом**, якщо k це максимальна розмірність симплексів з $\mathcal{K}$. Будемо називати k-комплекс **однорідним**, якщо кожний симплекс в $\mathcal{K}$ що має розмірність менше ніж k є гранню деякого іншого симплексу в $\mathcal{K}$. Називатимемо n**-скелетом** симпліціального комплексу $\mathcal{K}$ підмножину всіх симплексів $\mathcal{K}$ що мають розмірність не вище за n, позначатимемо його $\mathcal{K}^n$.

Для комплексу $\mathcal{K}$ позначимо через $|\mathcal{K}|$ об'єднання всіх його симплексів, будемо називати цей простір **базовим простором** комплексу $\mathcal{K}$. Симпліціальний комплекс $\mathcal{L}$ називається **підрозбиттям** комплексу $\mathcal{K}$ якщо кожний симплекс $\mathcal{L}$ міститься в деякому симплексі $\mathcal{K}$ і $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$.

Означення 2.5. *Відображення $f : |\mathcal{K}| \to \mathbb{R}^n$ називається* ***лінійним*** *(відносно $\mathcal{K}$) якщо для будь-якого симплексу $\sigma \in \mathcal{K}$ звуження $f|_\sigma$ є лінійною функцією. Відображення $f : |\mathcal{K}| \to \mathbb{R}^n$ називається* ***кусково-лінійним****, якщо існує таке підрозбиття $\mathcal{L}$, що відображення f лінійне відносно $\mathcal{L}$.*

Властивості кусково-лінійних відображення мають багато спільного з властивостями гладких відображень, а тому ми будемо використовувати їх як проміжний клас в для наближення.

Теорема Стоілова. Нагадаємо наступні означення.

Означення 2.6. *Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами називається* ***відкритим****, якщо образ $f(U)$ довільної відкритої підмножини $U \subset X$ є відкритою підмножиною в Y.*

Означення 2.7. *Топологічний простір C називається тотально незв'язним, якщо всі компоненти зв'язності C є одноточковими множинами.*

Типовими прикладами тотально незв'язних просторів є: дискретні простори, канторова множина, множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ з топологією, індукованою з $\mathbb{R}$.

Означення 2.8. *Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається* ***легким****, якщо для довільної точки $y \in f(U)$ повний прообраз $f^{-1}(p)$ з топологією, індукованою з X, є тотально незв'язним простором.*

Наступна теорема, доведена Стоіловим (Stoïlow), дає топологічну характеризацію голоморфних відображень з точністю до спряження гомеоморфізмами (див. [47, p.121], [50, p.103]).

Твердження 2.3. *Нехай задана відкрита область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а також легке, відкрите неперервне відображення $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Тоді існує голоморфна функція $h : U_1 \to U_2$, та пара гомеоморфізмів $s_1 : \Omega \to U_1$ і*

$s_2 : U_2 \to s_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2$ *таких, що* $f = s_2 \circ h \circ s_1$.

Теореми про продовження. Нам знадобляться наступні добре відомі теореми про продовження.

Твердження 2.4 (теорема Шенфліса, [36], ст. 65). *Нехай* $\Gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ *- параметризація деякої жорданової кривої, де* $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$. *Тоді існує гомеоморфізм* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *такий, що* $f|_{S^1} = \Gamma$.

Доведення див. [36, С. 65-71].

Зауважимо, що цей результат вірний лише у двовимірному випадку. Виконується також кусково-лінійний аналог цієї теореми (see [36, Ch. 3, Ch. 17]).

Твердження 2.5 (кусково-лінійна теорема Шенфліса). *Нехай* $n \in \{2, 3\}$, Δ *- невироджений симплекс в* $\mathbb{R}^n$, *а* $f : \partial\Delta \to f(\partial\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ *- кусково-лінійний гомеоморфізм. Тоді існує кусково-лінійний гомеоморфізм* $h : \Delta \to h(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ *такий, що* $h|_{\partial\Delta} = f$.

Доведення також можна знайти в [36].

Сформулюємо також більш технічні результати, доведення яких буде дано в наступному розділі.

Лема 2.1 (Продовження з кільця). *Нехай* $\rho > 0$, C *- коло радіусу* $R > \rho$ *з центром в* 0 *а відображення* $\psi : O_\rho(C) \to \mathbb{R}^2$ *- дифеоморфізм класу* C^k. *Припустимо, що* $0 \notin \psi(O_\rho(C))$ *і що в полярних координатах* (r, φ), *де відображення записано як* $\psi(r, \varphi) = (\psi^r(r, \varphi), \psi^\varphi(r, \varphi))$, *виконуються нерівності* $\partial\psi^r/\partial r > 0$, $\partial\psi^\varphi/\partial\varphi > 0$. *Тоді для деякого* $\varepsilon \in (0, \rho)$ *існує* $\Psi : B_R(0) \cup O_\varepsilon(C) \to \mathbb{R}^2$ *– дифеоморфізм класу* C^k *такий, що* $\psi|_{O_\varepsilon(C)} = \Psi|_{O_\varepsilon(C)}$.

Лема 2.2 (Локально унівалентне продовження). *Нехай задана обмежена область з жордановою кусково-гладкою границею* Ω *і неперервне локально взаємно однозначне відображення* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$. *Тоді існує відкрита множина* $U \supset \overline{\Omega}$ *і локально взаємно однозначне відображення*

$g : U \to \mathbb{R}^2$ *таке, що* $g|_{\overline{\Omega}} = f$.

2.4. Доведення допоміжних результатів

Кусково-лінійне наближення. Спочатку ми доведемо результат про кусково-лінійне наближення локально взаємно однозначних відображень. Доведення проводиться за такою ж схемою, що й доведення теореми про наближення кусково-лінійними гомеоморфізмами [36, pp. 46-51] і спирається на кусково-лінійну теорему Шенфліса.

Для того щоб сформулювати лему нам потрібні деякі позначення. Комбінаторною відстанню між двома вершинами симпліціального 1-комплексу назвемо найменшу можливу кількість ребер у шляху що з'єднує ці вершини. Позначимо комбінаторну відстань через $\mathrm{cdist}(u, v)$. Для двох множин вершин U, V позначимо $\mathrm{cdist}(U, V) := \max_{u \in U, v \in V} \mathrm{cdist}(u, v)$. При цьому комбінаторним діаметром U назвемо величину $\mathrm{cdist}(U, U)$.

Лема 2.3. *Нехай* $\mathcal{K}^1$ *- 1-комплекс,* $d \in \mathbb{N}, d \geqslant 3$. *Нехай неперервне відображення* $f : |\mathcal{K}^1| \to \mathbb{R}^2$ *має ту властивість, що воно є взаємно однозначним на будь-якому підкомплексі* $\mathcal{K}^1$ *комбінаторного діаметру* $\leqslant d$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує кусково-лінійне відображення* $g : |\mathcal{K}^1| \to \mathbb{R}^2$ *що задовольняє ту саму властивість таке, що* $\|f - g\| < \varepsilon$ *і* $f(v) = g(v)$ *для всіх вершин* v *з* $\mathcal{K}^1$.

Доведення. Для довільних двох сусідніх вершин v, w позначимо через $\overline{vw}$ ребро з вершинами v і w. Розглянемо таке під-розбиття $\mathcal{L}^1$ комплексу $\mathcal{K}^1$, що $\mathrm{diam}(f(\overline{v_i v_j})) < \varepsilon/3$ для будь-якого ребра $v_i v_j$ комплексу $\mathcal{L}^1$. Нехай v_i - вершини $\mathcal{L}^1$, $w_i = f(v_i)$, а $A_{ij} = f(\overline{v_i v_j})$. Тоді $\mathrm{diam}(A_{ij}) < \varepsilon/3$ і тому для всіх $x, y \in O_{\varepsilon/3}(A_{ij})$ виконується нерівність $\mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon$. Продовжимо функцію $\mathrm{cdist} = \mathrm{cdist}_{\mathcal{K}^1}$ на вершини $\mathcal{L}^1$ наступним чином. Нехай v і w - деякі вершини $\mathcal{L}^1$. Якщо v і w - вершини $\mathcal{K}^1$, то означимо $\mathrm{cdist}_{\mathcal{L}^1}(v, w) = \mathrm{cdist}_{\mathcal{K}^1}(v, w)$. Якщо v належить ребру $\overline{v_1 v_2}$ комплексу $\mathcal{K}^1$, а w належить ребру $\overline{w_1w_2}$, то визначимо $\mathrm{cdist}_{\mathcal{L}^1}(v,w) = \max_{i,j} \mathrm{cdist}_{\mathcal{K}^1}(v_i,w_i)$. Аналогічно визначається нова відстань в двох інших випадках. Ця розширена функція задовільняє послаблену нерівність трикутника $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c) + 1$, але має важливу властивість: якщо підкомплекс $\mathcal{K}^1$ має комбінаторний діаметр d, то відповідний підкомплекс $\mathcal{L}^1$ також має комбінаторний діаметр d (у новому сенсі).

Визначимо $N_i = O_{\varepsilon_i}(w_i)$, де ε_i вибрані так, щоб виконувались умови:

(i) $\overline{N_i} \cap \overline{N_j} = \varnothing$ за умови $dist(v_i,v_j) \leqslant d$;

(ii) $\varepsilon_i < \varepsilon/3$;

(iii) Для довільних трьох вершин v_i, v_k, v_j, таких що $dist(v_i,v_j) \leqslant d$, $dist(v_i,v_k) \leqslant d$ і v_jv_k - ребро, перетин $\overline{N_i} \cap A_{kj}$ непустий тільки тоді, коли $v_k = v_i$ або $v_j = v_i$.

Нехай x_{ij} - остання точка A_{ij} (в порядку від w_i), яка лежить в $\overline{N_i}$. Нехай x'_{ij} - перша точка A_{ij} після x_{ij}, яка належить $\overline{N_j}$. Нехай також A'_{ij} - частина кривої A_{ij} від x_{ij} до x'_{ij}. Тоді криві A'_{ij} і A'_{kl} не перетинаються при $dist(v_iv_j, v_kv_l) \leqslant d$. Далі, розглянемо δ-околи A'_{ij}, де $\delta < \varepsilon/3$ - таке, що ці околи не перетинаються коли відповідні A'_{ij} не перетинаються. Тоді для кожного ребра v_iv_j існує ламана B_{ij} в $O_\delta(A'_{ij})$, що з'єднує x_{ij} з x'_{ij} (див. [36], Теор.6.1). Значить, B_{ij} і B_{kl} не перетинаються за умови $dist(v_iv_j, v_kv_l) \leqslant d$.

Нехай тепер y_{ij} - остання точка в B_{ij}, що лежить в $\overline{N_i}$, а y'_{ij} - пешп точка в B_{ij}, після y_{ij}, що належить $\overline{N_j}$. Означимо тепер B'_{ij} як частину ламаної B_{ij} від точки y_{ij} до точки y'_{ij}. Нарешті, покладемо $B''_{ij} = w_iy_{ij} \cup B'_{ij} \cup y'_{ij}w_j$. Ламана B''_{ij} з'єднує w_i з w_j. Ребра v_iv_j і v_kv_l можуть перетинатись по кінцям лише за умови $dist(v_iv_j, v_kv_l) \leqslant d$. Крім того, $B''_{ij} \subset O_{\varepsilon/3}(A_{ij})$. Означимо тепер $g : |\mathcal{K}^1| \to \mathbb{R}^2$ на кожному ребрі $g|_{v_iv_j}$ як кусково-лінійний гомеоморфізм, який переводить v_iv_j в B''_{ij}, точку v_i в точку w_i і точку v_j в точку w_j. Тоді g володіє бажаною властивістю і інтерполює f в вершинах $\mathcal{K}^1$. Для того щоб показати, що g є ε-наближенням до f, помітимо, шо при $x \in v_iv_j$ обидві точки $f(x)$ і $g(x)$ лежать в $O_{\varepsilon/3}(A_{ij})$, отже $|f(x) - g(x)| <$

ε. □

Використовуючи цей результат ми доведемо наступну лему.

Лема 2.4. *Нехай $\mathcal{K}$ - плоский симпліціальний комплекс і $f : |\mathcal{K}| \to \mathbb{R}^2$ - локально взаємно однозначне неперервне відображення. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує локально взаємно однозначне кусково-лінійне відображення $g : |\mathcal{K}| \to \mathbb{R}^2$ таке, що $\|f - g\|_{|\mathcal{K}|} < \varepsilon$.*

Доведення. Спочатку розглянемо для кожної точки $x \in |\mathcal{K}|$ такий її окіл $O_\varepsilon(x)$, що звуження $f|_{O_\varepsilon(x)}$ взаємно однозначне. Сімейство таких околів утворює покриття, отже ми можемо обрати скінченне під-покриття. Нехай δ - число Лебега цього покриття. Нехай також $\mathcal{L}$ - таке під-розбиття комплексу $\mathcal{K}$, що для кожного трикутника $\sigma \in \mathcal{L}$ виконуються нерівності $diam(\sigma) < \delta/3$ і $diam(f(\sigma)) < \varepsilon/3$. Крім того, для кожного трикутника $\sigma \in \mathcal{L}$ позначимо через $D(\sigma)$ множину усіх вершин $\mathcal{L}$ на комбінаторній відстані не більше 3 від σ, не включаючи вершини самого трикутника σ. Далі, покладемо

$$\theta_\sigma = \frac{1}{3} \min \{\varepsilon, d(f(\sigma), f(D(\sigma)))\}.$$

Нарешті, покладемо $\delta_1 = \min_\sigma \theta_\sigma$.

Нехай $g_1 : |\mathcal{L}^1| \to \mathbb{R}^2$ - δ_1-наближення до f, побудоване в лемі 2.3 при $d = 3$. Тоді, в силу кусково-лінійної теореми Шенфліса, існує продовження відображення g_1 до кусково-лінійного відображення $g : |\mathcal{L}| \to \mathbb{R}^2$ такого, що воно взаємно однозначне на кожному трикутнику. Докажемо спочатку, що g є ε-наближенням до f. Ми знаємо, що для кожного трикутника $\sigma \in \mathcal{L}$ виконується нерівність $diam(f(\sigma)) < \varepsilon/3$. Оскільки $\delta_1 < \varepsilon/3$, то $g(\partial\sigma) \subset O_{\varepsilon/3}(f(\sigma))$. З того, що $g|_\sigma$ є гомеоморфізмом випливає також, що $g(\sigma) \subset O_{\varepsilon/3}(f(\sigma))$. Отже, для довільної точки $x \in \sigma$, точки $f(x)$ і $g(x)$ обидві лежать в околі $O_{\varepsilon/3}(f(\sigma))$, звідки маємо $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Доведемо тепер, що побудоване відображення локально взаємно однозначне. Нехай σ_1 і σ_2 - два різних трикутники комплексу $\mathcal{L}$ з непорожнім перетином. Якщо $\sigma_1 = \sigma_2$, то доводити нічого, оскільки звуження g на σ_1 є гомеоморфізмом. В іншому випадку комбінаторний діаметр підкомплексу $\sigma_1 \cup \sigma_2$ рівен 2, звідки g_1 - взаємно однозначне на множині $\partial\sigma_1 \cup \partial\sigma_2$. Значить $g(\partial\sigma_1) \cap g(\partial\sigma_2) = g(\partial\sigma_1 \cap \partial\sigma_2)$, звідки або $g(\sigma_1) \subset g(\sigma_2)$ або $g(\sigma_1) \cap g(\sigma_2) = g(\sigma_1 \cap \sigma_2)$. У випадку $g(\sigma_1) \subset g(\sigma_2)$, нехай x - одна з вершин трикутника σ_1 яка не є вершиною трикутника σ_2. Тоді $g(x) \in g(\sigma_1) \subset g(\sigma_2) \subset O_{\delta_1}(f(\sigma_2))$, звідки

$$d(f(D(\sigma_2)), f(\sigma_2)) \leqslant d(f(x), f(\sigma_2)) < d(g(x), f(\sigma_2)) + \delta_1 < 2\delta_1,$$

що суперечить вибору δ_1. $\square$

Леми про продовження. Доведемо тепер леми про продовження.

Лема 2.1 (Продовження з кільця). *Нехай $\rho > 0$, C - коло радіусу $R > \rho$ з центром в 0 а відображення $\psi : O_\rho(C) \to \mathbb{R}^2$ - дифеоморфізм класу C^k. Припустимо, що $0 \notin \psi(O_\rho(C))$ і що в полярних координатах (r, φ), де відображення записано як $\psi(r, \varphi) = (\psi^r(r, \varphi), \psi^\varphi(r, \varphi))$, виконуються нерівності $\partial\psi^r/\partial r > 0$, $\partial\psi^\varphi/\partial\varphi > 0$. Тоді для деякого $\varepsilon \in (0, \rho)$ існує $\Psi : B_R(0) \cup O_\varepsilon(C) \to \mathbb{R}^2$ – дифеоморфізм класу C^k такий, що $\psi|_{O_\varepsilon(C)} = \Psi|_{O_\varepsilon(C)}$.*

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $R = 1$, а $\rho < 1/10$. покладемо

$$\Psi_1(r, \varphi) = (\psi^r(r, \varphi)\omega_1(r), \psi^\varphi(r, \varphi)$$

і

$$\Psi_2(r, \varphi) = \Psi_1(\omega_2(r), \varphi),$$

де $\omega_i(t)$ - гладкі функції класу C^∞ з наступними властивостями:

- $\omega_1(1 - \rho) = 0$;
- $\omega_1'(t) > 0$ для $t \in (1 - \rho, 1 - \rho/2)$;
- $\omega_1(t) = 1$ для $t > 1 - \rho/2$;

- $\omega_2'(t) > 0$ для $t > 0$;
- $\omega_2(t) = t$ для $t > 1 - \rho/2$;
- $\omega_2(0) = 1 - \rho$.

Тоді

$$J_{\Psi_1}(r,\varphi) = \omega_1(r) J_\psi(r,\varphi) + \omega_1'(r)\psi^r \frac{\partial \psi^\varphi}{\partial \varphi} > 0,$$

і

$$J_{\Psi_2}(r,\varphi) = J_{\Psi_1}(\omega_2(r),\varphi)\omega_2'(r) > 0.$$

Спочатку покажемо, що відображення Ψ_1 однозначне на кільці $\{(r,\varphi) : 1-\rho < r < 1\}$. Справді, нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, тоді з умови $\partial\psi^\varphi/\partial\varphi > 0$ випливає, що для будь-якого $r \in (1-\rho, 1)$ існує єдине число $f(r) \pmod{2\pi}$ таке, що $\psi^\varphi(r, f(r)) = \alpha$. Оскільки ψ - дифеоморфізм, відображення f також має бути неперервним. Більш того, відображення $\psi^r(r, f(r))$ неперервне і ін'єктивне, отже воно строго зростає за r (не спадне, бо інакше ψ буде відображати зовнішню частину границі на внутрішню, що суперечить $\partial\psi^r/\partial r > 0$). Якщо для деяких r_1, φ_1 і r_2, φ_2 виконується $\Psi_1(r_1,\varphi_1) = \Psi_1(r_2,\varphi_2)$, то $\psi^\varphi(r_1,\varphi_1) = \psi^\varphi(r_2,\varphi_2) = \alpha$, звідки $\varphi_1 = f(r_1)$, $\varphi_2 = f(r_2)$. З цього випливає, що

$$\psi^r(r_1, f(r_1))\omega_1(r_1) = \psi^r(r_2, f(r_2))\omega_2(r_2),$$

отже $r_1 = r_2$, оскільки функція $\psi^r(r, f(r))\omega_1(r)$ монотонна. Разом з цього слідує, що Ψ_2 - C^k-дифеоморфізм деякого проколотого околу 0, і продовжує ψ, а також задовольняє нерівності $\partial\Psi_2^r/\partial r > 0$ та $\partial\Psi_2^\varphi/\partial\varphi > 0$. Крім того, відображення Ψ_2 - взаємно однозначне на $B_1(0)$ і $\Psi_2(0) = 0$.

Далі, нехай $d < 1/10$ таке, що $B_d(0) \cap \psi(O_\rho(C)) = \varnothing$. Визначимо $\alpha(r,\varphi)$ за рівністю

$$\Psi_2^r(\alpha(r,\varphi),\varphi) = r, r < d.$$

Ця рівність має єдиний розв'язок, бо $\partial\Psi_2/\partial r > 0$. Крім того, застосувавши теорему про неявну функцію до

$$F(\alpha, r, \varphi) = \Psi_2^r(\alpha(r,\varphi),\varphi) - r$$

ми отримуємо що відображення α належить класу C^k і монотонно зростає за r. Розглянемо

$$\beta(r,\varphi)=\int\limits_0^r\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial r}(s,\varphi)\omega_3(s)+c(\varphi)(1-\omega_3(s))+(1-c(\varphi))\omega_4(s)\Big)ds,$$

де $\omega_3(t)=1$ при $t<d/2$, $\omega_3(t)=0$ при $t>d$, $\omega_4(t)=1$ при $t>1-\rho/2$, $\omega_4(t)=0$ при $t<1-\rho$, і $c(\varphi)$ вибрано так, що $\beta(1,\varphi)\equiv 1$. Оскільки також $\alpha(d,\varphi)<1-\rho$, звідси легко вивести, що $c(\varphi)>0$ і $\partial\beta/\partial r>0$. Тоді відображення Ψ_3, визначене рівністю

$$\Psi_3(r,\varphi)=\Psi_2(\beta(r,\varphi),\varphi),$$

є дифеоморфізмом класу C^k проколотого околу 0, що продовжує ψ і задовольняє $\Psi_3^r(r,\varphi)=r$ при $r<d/2$.

Визначимо відображення $\gamma(r,\varphi)$ рівністю

$$\Psi_3^\varphi(r,\gamma(r,\varphi))=\varphi$$

при $r<d/3$ (воно визначено за модулем 2π, але ми можемо виділити якусь неперервну гілку). Продовжимо це відображення на всі дійсні φ за формулою

$$\gamma(r,\varphi+2l\pi)=\gamma(r,\varphi)+2l\pi.$$

Розглянемо

$$\delta(r,\varphi)=\gamma(r,0)+\omega_5(r)(\gamma(r,\varphi)-\gamma(r,0))+(1-\omega_5(r))\varphi,$$

де $\omega_5(t)$ - функція класу C^∞ така, що $\omega_5(t)\in[0,1]$, і $\omega_5(t)=0$ при $t\in[0,d/5]$, а також $\omega_5(t)=1$ при $t\geqslant d/4$. Далі, визначимо Δ як

$$\Delta(r,\varphi)=\gamma(r,0)\omega_6(r)+\varphi,$$

при $r<d/6$ і

$$\Delta(r,\varphi)=\delta(r,\varphi),r\geqslant d/6,$$

де $\omega_6(t) = 0, t < d/8$ та $\omega_6(t) = 1, t > d/7$. Тоді відображення Ψ, визначене рівністю

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi_3(r, \Delta(r, \varphi)),$$

є дифеоморфізмом класу C^k на $B_1(0) \cup O_\rho(C) \setminus 0$ і збігається з тотожнім відображенням при $r < d/8$, отже дає C^k-дифеоморфізм на $B_1(0) \cup O_\rho(C)$ і за побудовою Ψ продовжує ψ. □

Лема 2.2 (Локально унівалентне продовження). *Нехай задана обмежена область з жордановою кусково-гладкою границею Ω і неперервне локально взаємно однозначне відображення $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$. Тоді існує відкрита множина $U \supset \overline{\Omega}$ і локально взаємно однозначне відображення $g : U \to \mathbb{R}^2$ таке, що $g|_{\overline{\Omega}} = f$.*

Доведення. Зрозуміло, що достатньо побудувати продовження через кожну компоненту границі. Отже, внаслідок теореми Шенфліса, можемо вважати, що відображення визначено на кільці $\overline{\Omega} = \{z : 1 - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1\}$, і нам потрібно продовжити його на $\{z : 1 - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1 + \delta\}$.

Збільшуючи при необхідності ε, можемо також вважати, що для деякого достатньо великого $N \in \mathbb{N}$, відобораження f однозначне на кожному секторі $S_k \cap \overline{\Omega}$, де

$$S_k = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in [2\pi k/(3N), 2\pi(k+3)/(3N)]\}.$$

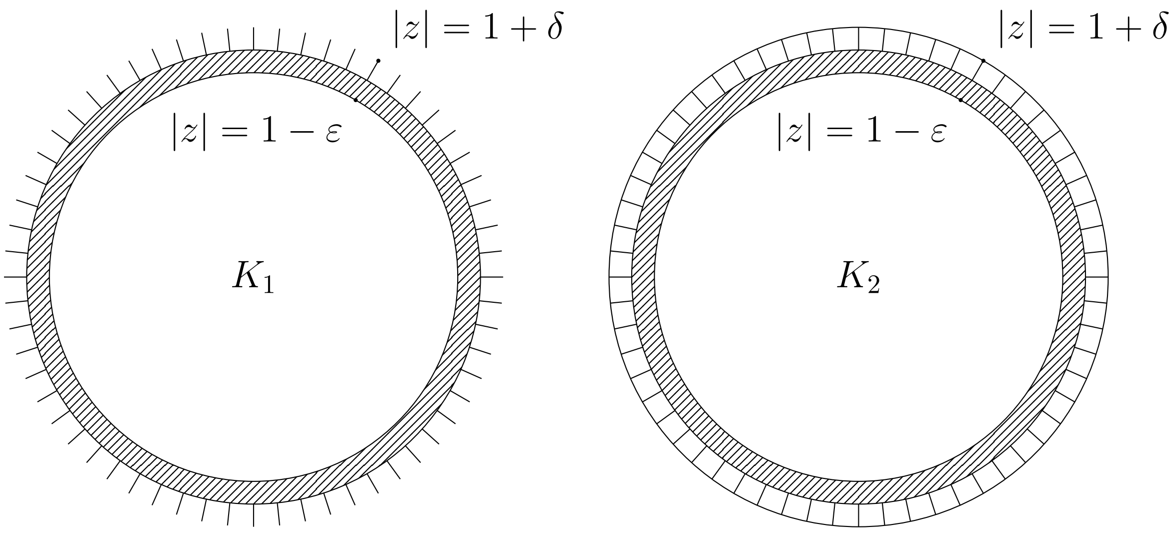

Рис. 1. Множини K_1 і K_2 для $N = 20$.

Нехай

$$K_1 = \overline{\Omega} \cup \{z : |z| \in [1, 1 + \delta], 3N \arg(z)/2\pi \in \mathbb{Z}\}$$

і продовжимо f так, щоб воно залишилось однозначним на кожному новому секторі

$$\{z \in K_1 : \arg(z) \in [2\pi k/(3N), 2\pi(k + 3)/(3N)]\}.$$

Для цього покладемо

$$C_k = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in [2\pi(k - 1)/(3N), 2\pi(k + 1)/(3N)]\}$$

і $z_k = f(e^{2\pi ik/(3N)}), k = 0, \ldots, 3N - 1$ і означимо жорданові криві $\gamma_k : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ таким чином, щоб $\gamma_k(0) = z_k$ і $\gamma_k([0, 1]) \cap f(C_k \cap \overline{\Omega}) = \{z_k\}$. Нехай $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $\gamma_k([0, \varepsilon_1])$ не перетинаються, коли відповідні z_k не збігаються. Далі, розглянемо продовження задане

$$f((1 + t)e^{2\pi ik/(3N)}) = \gamma_k(t\varepsilon_1/\delta).$$

Далі, позначимо $K_2 = K_1 \cup \{z : |z| = 1 + \delta\}$ і продовжимо f на K_2, таким чином, щоб f було взаємно однозначним на $C_k \cap K_2$. Ми побудуємо продовження на

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \arg(z) \in [2\pi k/(3N), 2\pi(k + 1)/(3N)]\}$$

за індукцією по $k = 1, \ldots, 3N$. Позначимо $t_k = f((1 + \delta)e^{2\pi ik/(3N)})$. На множині F_1 побудуємо продовження так, щоб воно було взаємно однозначним на $S_0 \cap K_2$ і множина $f(C_1 \cap K_2)$ лежала в необмеженій компоненті $\mathbb{R}^2 \setminus f(C_1 \cap K_2 \cap \{|z| \geqslant 1\})$. Нехай шукане продовження вже було побудоване для $F_1, \ldots, F_l, l < 3N - 1$. Простір $\mathbb{R}^2 \setminus f(C_{l+1})$ має дві компоненти зв'язності (див., наприклад, Th. 1.2.14 в [7]), і точка t_{l+1} належить необмеженій компоненті, отже існує шлях що з'єднує її з точкою t_l такий, що $f(C_l \cap K_2)$ належить необмженій компоненті $\mathbb{R}^2 \setminus f(C_l \cap K_2 \cap \{|z| \geqslant 1\})$ — це і буде шуканим продовженням на F_{l+1}. На передостанній частині ми також маємо прослідкувати за тим, щоб продовження було однозначним на S_{-1}. На останній частині, ми з'єднаємо t_0 з t_1, вимагаючи щоб продовження було взаємно однозначним на S_{-1}, що завжди можна зробити, оскільки вихідне відображення було взаємно однозначним на S_{-1}.

Нарешті, продовжимо відображення на всю множину

$$\{z : 1 - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1 + \delta\}$$

використовуючи теорему Шенфліса до кожного сектору

$$\{z \in K_2 : |z| \in [1, 1 + \delta], \arg(z) \in [2\pi k/(3N), 2\pi(k + 1)/(3N)]\}.$$

Результатне відображення буде локально взаємно однозначним. Справді, в усіх нових точках, для яких $3N \arg(z)/2\pi \notin \mathbb{Z}$, воно локально взаємно однозначним за теоремою Шенфліса. В усіх інших точках, тобто в точках зі спільної границі двох сусідніх секторів, відображення є локально взаємно однозначним, оскільки внутрішності кривих

$$f(\{z \in K_2 : |z| \in [1, 1 + \delta], \arg(z) \in [2\pi k/(3N), 2\pi(k + 1)/(3N)]\})$$

не перетинаються. □

2.5. Необхідні та достатні умови для існування наближень

2.5.1. Доведення необхідної умови. Нагадаємо формулювання теореми про необхідну умову.

Теорема 2.3. *Якщо неперервне відображення $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ можна як завгодно добре наблизити відображеннями класу C^1 з невід'ємним якобіаном, то для довільної відкритої підмножини $U \subset \Omega$ і довільної точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ виконується нерівність* $\deg(f, U, p) \geqslant 0$.

Доведення. Зафіксуємо відкриту множину $U \subset \Omega$ і довільну точку $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$. Покладемо $\varepsilon = \operatorname{dist}(p, f(\partial U))/2$. Нехай $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ - відображення класу C^1 з невід'ємним якобіаном таке, що $\|f - g\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$. Тоді, згідно властивості (II) має місце рівність $\deg(f, U, p) = \deg(g, U, p)$. Оскільки множина регулярних значень відображення класу C^1 всюди щільне, то існує регулярне значення p' в тій самій компоненті $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial U)$ що й p, звідки в силу (III) виконана рівність $\deg(g, U, p) = \deg(g, U, p')$. Але тоді з означення топологічної степені гладкого відображення слідує, що $\deg(g, U, p') \geqslant 0$. Значить також і $\deg(f, U, p) \geqslant 0$. □

2.5.2. Доведення достатніх умов у двовимірному випадку. Для доведення теореми 2.1, нам знадобиться декілька допоміжних результатів.

Лема 2.5. *Нехай $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – лінійні відображення. Припустимо, що $\det(A) > 0$, $\det(B) > 0$, і існує ненульовий вектор x такий, що $Ax = Bx$. Тоді*

$$\det(\alpha A + \beta B) > 0$$

для довільних $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Доведення. Оскільки всі умови леми не змінюються при заміні $A, B \mapsto CA, CB$, де $\det(C) > 0$, то, вибираючи $C = B^{-1}$, бачимо, що задача зводиться до випадку коли $B = I$, а отже $Ax = x$. Таким чином, для власних значень матриці A маємо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \det(A) > 0$.

$$\det(\alpha A + \beta I) \ = \ (\alpha\lambda_1 + \beta)(\alpha\lambda_2 + \beta) > 0,$$

що й треба було довести. □

Лема 2.6. *Нехай $\mathcal{K}$ – симпліціальний комплекс в $\mathbb{R}^2$, $f : |\mathcal{K}| \to \mathbb{R}^2$ - локально взаємно однозначне відображення кусково лінійне відображення. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує гладке відображення $g : |\mathcal{K}| \to \mathbb{R}^2$ класу C^1 з ненульовим якобіаном таке, що $\|f - g\|_{|\mathcal{K}|} < \varepsilon$.*

Proof: Легко перевірити, що можна продовжити f на деякий комплекс $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$ так, щоб $|\mathcal{K}|$ містився у внутрішності $|\mathcal{K}'|$ і продовження f залишалось локально взаємно однозначним. Нехай $a > 0$ таке, що для кожного $x \in |\mathcal{K}|$ куля $B_a(x)$ міститься в $|\mathcal{K}'|$ (таке число існує внаслідок компактності $|\mathcal{K}|$). Вважатимемо також, що f зберігає орієнтацію.

Нагадаємо, що стандартна гладка функція класу C^∞ з компактним носієм задається як

$$\omega(x) \ = \ \begin{cases} c\exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & \text{якщо } |x| < 1, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

і

$$\omega_\delta(x) \ = \ \delta^{-2}\omega\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Для довільного $0 < \delta < a$, згортка $f * \omega_\delta$, задана формулою

$$f * \omega_\delta(x) = \int\limits_{B_\delta(x)} f(y)\omega_\delta(x-y)dy,$$

є гладким відображенням класу C^∞ що рівномірно збігається до f, при $\delta \to 0$. Оскільки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} x\omega(x,y)dxdy \ = \ \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\omega(x,y)dxdy \ = \ 0,$$

ми маємо, що якщо f лінійна на $B_\delta(x)$, то $f * \omega_\delta(x) = f(x)$. зауважимо також, що якщо $B_\delta(x)$ перетинає лише два трикутники з $\mathcal{K}$, то $D(f * \omega_\delta)(x)$ є опуклою комбінацією двох лінійних відображень, і як легко перевірити, ці лінійні відображення задовільняють умови леми 2.5. Отже, в цьому випадку $J_{f*\omega_\delta}(x) > 0$.

Нехай $\delta_1 > 0$ таке, що для кожної вершини v_i комплексу $\mathcal{K}$ виконується $\operatorname{diam}(f(B_{\delta_1}(v_i))) < \varepsilon$, множини $B_{\delta_1}(v_i)$ попарно не перетинається, і $B_{\delta_1}(v_i)$ перетинає $\mathcal{K}^1$ лише по ребрам, що мають v_i одним із кінців. Нехай

δ таке, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$. Нехай $\delta_2 < \delta$ таке, що для $x \in \mathcal{K} \setminus \bigcup_{v_i \in K^0} B_{\delta_1/2}(v_i)$ множина $B_{\delta_2}(x)$ перетинає $\mathcal{K}$ не більше ніж в двох трикутниках.

Покажемо тепер, що для довільної вершини $v \in \mathcal{K}^0$ функція $g = f * \omega_{\delta_2}$ задовольняє умови леми 2.1 на кільці $B_{\delta_1}(v) \setminus B_{\delta_1/2}(v)$. Для спрощення міркувань, припустимо, що $v = f(v) = 0$. Спочатку покажемо, що відображення g однозначне на $U = B_{\delta_1}(v) \setminus B_{\delta_1/2}(v)$. Справді, припустимо, що $g(x) = g(y)$. Тоді або $B_{\delta_2}(x)$ або $B_{\delta_2}(y)$ має перетинати деяке ребро $\mathcal{K}^1$, оскільки інакше $f(x) = g(x) = g(y) = f(y)$, що суперечить умові що f взаємно однозначне на кожному трикутнику. Помінявши місцями x і y при необхідності, можемо вважати, що $B_{\delta_2}(x)$ перетинає деяке ребро. Змешивши при необхідності значення δ_2, можемо також вважати, що $g(\sigma \cap U) \cap g(\sigma' \cap U) = \varnothing$ для будь-якої пари трикутників σ, σ' для котрих $\sigma \cap \sigma' = \{0\}$. Отже, достатньо розглянути випадок, коли x і y лежать у об'єднанні двох трикутників σ_1 і σ_2 зі спільною вершиною в 0. Знову таки зменшуючи значення δ_2 ми можемо вважати, що виконується умова $g(O_{\delta_2}(e) \cap U) \cap g(\sigma \cap U) = \varnothing$ для кожної пари з ребра e та трикутника σ що задовольняють $\sigma \cap e = \{0\}$. Нехай e - спільне ребро трикутників σ_1 і σ_2, а e' - спільне ребро трикутників $f(\sigma_1)$ і $f(\sigma_2)$. Введемо системи координат (u, w) і (u', w') так, щоб напрямок u збігався з напрямком e а напрямок u' збігався з напрямком e', і запишемо $g(u, v) = (g^{u'}(u, v), g^{v'}(u, v))$. Простий підрахунок показує, що $g^{v'}$ тільки залежить від v, і є монотонною функцією від v, отже v-координати точок x і y мають збігатися. Більше того, при фіксованому v, функція $g^{u'}$ монотонна за u, отже і u-координати точок x і y також збігаються. Аналогічно також перевіряються нерівності $\partial g^r / \partial r > 0$ і $\partial g^\varphi / \partial \varphi > 0$ на відповідному кільці.

Отже, використовуючи лему 2.1 для кожної вершини v ми можемо продовжити $g = f * \omega_{\delta_2}$ з $B_{\delta_1}(v) \setminus B_{\delta_1/2}(v)$ на $B_{\delta_1}(v)$. Оскільки якобіан зберігаючого орієнтацію дифеоморфізма додатній, ми отримуємо, що $J_g(x) > 0$

для всіх x. Крім того, за означенням δ, при $x \in |\mathcal{K}| \setminus \bigcup B_{\delta_1/2}(v_i)$ виконується нерівність $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f * \omega_\delta(x)| < \varepsilon$. Для точки $x \in B_{\delta_1}(v_i)$ з властивості продовження випливає, що $g(x), f(x) \in f(B_{\delta_1}(v_i))$, отже використовуючи $\operatorname{diam}(f(B_{\delta_1}(v_i))) < \varepsilon$, отримуємо, що $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, а отже g дає шукане наближення. □

Тепер ми можемо довести теореми 2.1 і 2.4.

Теорема 2.1. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область, а $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ – неперервне, локально взаємно однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке поліноміальне відображення $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ з додатним якобіаном на $\overline{\Omega}$, що $\|f - p\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $\overline{\Omega}$ збігається з $|\mathcal{K}|$ для деякого симпліціального комплексу $\mathcal{K}$. З лем 2.4 і 2.6 ми бачимо, що існує відображення $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ класу C^1 з ненульовим якобіаном таке, що $\|f - g\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon/2$. Оскільки $\overline{\Omega}$ – компакт, то існує $\delta > 0$ таке, що $|J_g(x)| > \delta$ для всіх $x \in \overline{\Omega}$. Визначимо

$$M = \max\left\{\left\|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right\|_{\overline{\Omega}} : 1 \leqslant i, j \leqslant 2\right\}.$$

Оскільки $\overline{\Omega} = |\mathcal{K}|$ задовольняю умови теореми 2 [2], існує таке поліноміальне відображення $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, що $\|g - p\| < \varepsilon/2$ і

$$\left\|\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right\|_{\overline{\Omega}} < \max(2M, \frac{\delta}{8M}).$$

Тоді легко перевірити, що $\|f - p\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$ і $|J_p(x)| > 0$.

Розглянемо тепер загальний випадок. За лемою 2.2 існує відкрита множина $U \supset \overline{\Omega}$ та локально взаємно однозначне відображення $f' : U \to \mathbb{R}^2$ такі, що $f'|_{\overline{\Omega}} = f$. Тоді ми можемо знайти такий симпліціальний комплекс $\mathcal{K}$, що $U \supset |\mathcal{K}| \supset \overline{\Omega}$ і застосовуючи попередній випадок до f' та $|\mathcal{K}|$ отримаємо потрібне наближення. □

Теорема 2.4. *Нехай Δ - обмежена область і $f : \Delta \to \mathbb{R}^2$ - легке неперервне відображення. Припустимо, що для будь-якої відкритої множини U такої, що $\overline{U} \subset \Delta$ і будь-якої точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ виконується нерівність* $\deg(f, U, p) > 0$.

Тоді для будь-якої області Ω такої, що $\overline{\Omega} \subset \Delta$ і будь-якого $\varepsilon > 0$, існує відображення $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ класу C^∞ з невід'ємним якобіаном таке, що $\|f - g\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$.

При цьому, якщо область Δ – однозв'язна, то існує поліноміальне відображення g з тими самими властивостями.

Доведення. Нагадаємо, що відображення $F : X \to \mathbb{R}^2$ називається *квазі-відкритим* (див. [50, p.110]), якщо для довільного $y \in F(X)$ і довільної відкритої множини V що містить компактну компоненту $F^{-1}(y)$, y належить до внутрішності $F(V)$. Зауважимо, що f квазі-відкрите. Справді, для кожного $x \in \Delta$ і V що містить компактну компоненту $f^{-1}(f(x))$, існує деяка відкрита підмножина $V_0 \subset V$ така, що $\partial V_0 \cap f^{-1}(f(x)) = \varnothing$. Тоді ми маємо, що $\deg(f, V_0, f(x)) > 0$. Отже, за властивостями (III) і (IV) топологічної степені ми отримуємо, що $f(V_0)$ містить деякий окіл $f(x)$. Отже, відображення f - квазі-відкрите. Оскільки f також легке, маємо (див. [50, pp.110-113]) що f відкрите.

Оскільки f відкрите і легке, за теоремою Стоілова, f топологічно еквівалентне до деякого комплексно-аналітичного відображення $h : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^2$. Іншими словами, існують гомеоморфізми $s_1 : \Delta \to U_1$ і $s_2 : U_2 \to s_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2$ такі, що $f = s_2 h s_1$. За теоремою 2.1 існують поліноміальні відображення p_1, p_2 з ненульовим якобіаном такі, що $\|s_2 \circ h \circ s_1 - s_2 \circ h \circ p_1\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon/2$ і $\|s_2 - p_2\|_{h(p_1(\overline{\Omega}))} < \varepsilon/2$. Тоді $\|f - p_2 \circ h \circ p_1\|_{\overline{\Omega}} < \varepsilon$. Оскільки f зберігає орієнтацію, p_1 і p_2 мусять мати якобіани однакового знаку. Отже, $p_2 \circ h \circ p_1$ - відображення класу C^∞ з невід'ємним якобіаном.

У випадку коли область Δ однозв'язна, U_1 також є однозв'язною, а отже за теоремою Рунге (див. [9, p.198]) існує такий поліном $p_3(z)$ від однієї комплексної змінної, що як завгодно добре наближує h на $\overline{\Omega}$. Оскільки $p_3(z)$ як відображення з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ має невід'ємний якобіан, ми отримуємо поліноміальне відображення $p_2 \circ p_3 \circ p_1$ з невід'ємним якобіаном що як завгодно добре наближує f. $\square$

2.5.3. Доведення достатніх умов у тривимірному випадку. Результати цього розділу було опубліковано в [52].

Теорема 2.2. *Нехай $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ - неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке C^∞-гладке відображення $g\colon [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ з додатним якобіаном на $[0,1]^3$ таке, що $\|f - g\| < \varepsilon$.*

З теореми 2.1 і теореми 2.2, а також простих результатів стосовно наближення поліномами функцій багатьох змінних (див., наприклад, [2]) випливає також наступний простий наслідок стосовно наближення поліноміальними відображеннями з тими самими умовами.

Наслідок 2.1. *Нехай $d \in \{2,3\}$ і $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ - неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує поліноміальне відображення $p : [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ з додатнім якобіаном на $[0,1]^d$ таке, що $\|f - p\| < \varepsilon$.*

Доведення. Нехай $g\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ – таке C^∞-гладке відображення з додатнім якобіаном, що $\|f - g\| < \varepsilon/2$. З [2, теор. 1] випливає, що для довільного $\delta > 0$ існує таке поліноміальне відображення p, що $\|g - p\| < \delta$ і $\|\partial_i g_j - \partial_i p_j\| < \delta$, $1 \leqslant i,j \leqslant d$. Нехай $0 < C_1, C_2$ такі, що $\delta < C_2$, $C_1 < J_g(x)$ і $|\partial_i g_j(x)| < C_2$ для всіх $x \in [0,1]^d$, $1 \leqslant i,j \leqslant d$. Тоді, за нерівністю трикутника, маємо

$$J_p(x) > J_g(x) - d!2^d C_2^{d-1}\delta > C_1 - d!2^d C_2^{d-1}\delta,$$

тому $J_p(x) > 0$ за умови $\delta < \frac{C_1}{2^d d! C_2^{d-1}}$. Якщо тепер покласти

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{C_1}{2^d d! C_2^{d-1}}\right),$$

то отримаємо, що відповідне поліноміальне відображення p задовольняє всім необхідним умовам. □

Так само як і в доведенні теореми 2.1, ми доведемо теорему 2.2 у два кроки. Спочатку ми встановимо існування кусково-лінійного наближення до f (лема 2.7), а потім наведемо відповідну процедуру для згладжування цього відображення (лема 2.9).

Лема 2.7. *Нехай $f\colon [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ - неперервне локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує локально взаємно-однозначне кусково-лінійне відображення $h\colon [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ таке, що $\|f - h\| < \varepsilon$.*

Цю лему можна довести адаптуючи доведення теореми про наближення гомеоморфізмів [36, Ch. 33, Th. 1]. Наведемо інше доведення, що спирається на результати роботи [3].

Лема 2.8. *Нехай $\mathcal{C}$ – скінченний 2-комплекс, $g\colon |\mathcal{C}| \to \mathbb{R}^3$ – неперервне відображення, що є гомеоморфізмом при звуженні на будь-який підкомплекс діаметру $\leqslant k$, $k > 3$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує кусково-лінійне відображення $h\colon |\mathcal{C}| \to \mathbb{R}^3$ з тією самою властивістю таке, що $\|g - h\| < \varepsilon$.*

Доведення. З доведення теореми [3, теор. 5] випливає існування відображення $\tilde{g}\colon |\mathcal{C}| \to \mathbb{R}^3$, що є гомеоморфізмом при звуженні на будь-який підкомплекс діаметру $\leqslant k$, задовольняє нерівність $\|g - \tilde{g}\|_{|\mathcal{C}|} < \varepsilon/2$, і має таку властивість: під дією $\tilde{g}$ образ кожного ребра в $\mathcal{C}$ є ламаною лінією, а образ кожного трикутника – кусково-лінійним 2-диском (за означенням це образ в $\mathbb{R}^3$ стандартного трикутника Δ під дією кусково-лінійного ін'єктивного відображення). Залишається знайти кусково-лінійне відображення h, що наближає $\tilde{g}$ і має властивість $h(\sigma) = \tilde{g}(\sigma)$ для кожного симплекса $\sigma \in \mathcal{C}$.

Для цього покладемо $h(v) = \tilde{g}(v)$ для кожної вершини $v \in \mathcal{C}$, і визначимо h на ребрі vw як кусково-лінійну параметризацію ламаної лінії $\tilde{g}(vw)$, за умови $\|h - \tilde{g}\|_{vw} < \varepsilon/4$. Щоб визначити h на трикутниках залишається скористатися наступним фактом: якщо $f\colon \Delta \to \Delta$ - гомеоморфізм, а $l_0\colon \partial\Delta \to \partial\Delta$ – кусково-лінійний гомеоморфізм що задовольняє $\|f - l_0\|_{\partial\Delta} < \delta/2$, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм $l_1\colon \Delta \to \Delta$, що $l_1|_{\partial\Delta} = l_0$ і $\|f - l_1\|_{\Delta} < \delta$. Цей факт випливає з конструкції використаної в доведенні [36, теор. 6.3]. □

Нам також знадобиться наступний результат (див. [36, Th. 17.12]).

Твердження 2.6 (Теорема Шенфліса). *Якщо $Q = [0,1]^3$ і $f\colon \partial Q \to \mathbb{R}^3$ – кусково-лінійний гомеоморфізм, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, що $F|_{\partial Q} = f$.*

Доведення леми 1. Розглянемо таке відкрите покриття $\cup_i U_i \supset [0,1]^3$, що $f|_{U_i}$ є гомеоморфізмом для всіх i. Нехай L – стала Лебега цього покриття. Розіб'ємо $[0,1]^3$ на N^3 однакових маленьких кубів,

$$[0,1]^3 = Q_1 \cup \cdots \cup Q_{N^3},$$

де $\operatorname{int}(Q_i \cap Q_j) = \varnothing$. Виберемо N так, щоб $\operatorname{diam}(f(Q_i)) < \min(\varepsilon/3, L/4)$ і позначимо через $\mathcal{C}$ – симпліціальний 2-комплекс що має геометричну реалізацію

$$|\mathcal{C}| = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 : \{x,y,z\} \cap \{0, 1/N, \ldots, 1\} \neq \varnothing\}$$

(об'єднання $(N+1)^3$ площин). Тоді $f|_{|\mathcal{C}|}$ задовольняє умовам леми 2, а отже існує кусково-лінійне відображення $h_0 : |\mathcal{C}| \to \mathbb{R}^3$ таке, що $\|f - h_0\| < \varepsilon/3$ і що є однозначним на будь-якому підкомплексі $\mathcal{C}$ комбінаторного діаметра $\leqslant 4$. Залишається лише N^3 разів скористуватися теоремою Шенфліса, щоб побудувати кусково-лінійне продовження $h_1\colon [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ з умовою $h_1|_{|\mathcal{C}|} =$

h_0 і переконатися, що воно локально однозначне і виконується нерівність $\|f-h\| < \varepsilon$. $\square$

Основна складність другого кроку полягає в тому, що, при спробі згладити кусково-лінійне відображення наївним чином, наприклад, за допомогою згортки з гладкою фінітною функцією, відображення може втратити локальну однозначність.

Лема 2.9. *Нехай $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ - кусково-лінійне локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує C^∞-гладке відображення $g : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ з додатнім якобіаном таке, що $\|f-g\| < \varepsilon$.*

Доведення. Помітимо одразу, що функція $f_n(x) = f(x_0 + (x-x_0)\cdot(1-1/n))$, де $x_0 = (1/2, 1/2, 1/2)$ має ті самі властивості, що й f, визначена на множині $[-1/n, 1+1/n]^3$ і $f_n \rightrightarrows f$ на $Q = [0,1]^3$. Тому, без обмеження загальності, вважатимемо, що f продовжується на деякий відкритий окіл $U_0 \supset Q$.

Нехай $\omega \colon \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ це деяка функція класу C^∞ з носієм в кулі $\overline{B_1(0)}$ така, що $\int_{\mathbb{R}^3} \omega(x) = 1$ і $\int_{\mathbb{R}^3} \omega(x)\cdot x = 0$. Покладемо $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3}\omega(x/\varepsilon)$.

Нехай $\mathcal{K}$ – симпліціальний комплекс, такий що $|\mathcal{K}| = [-\delta, 1+\delta]^3 \subset U_0$ і відображення f – лінійне на кожному симплексі $\sigma \in \mathcal{K}$. Вважатимемо також, що $\mathcal{K}$ містить такий підкомплекс $\mathcal{K}_0$, що $|\mathcal{K}_0| = Q$. Вибираючи достатньо дрібне підрозбиття, так само як в доведенні леми 1, можемо гарантувати, що звуження f на будь-який підкомплекс комбінаторного діаметру $\leqslant 4$ є однозначним. Ми будемо використовувати стандартне позначення $\mathcal{K}^i$ для i-остову комплексу $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}^0$ – множина усіх вершин, $\mathcal{K}^1$ – множина усіх вершин і ребер, тощо). Позначатимемо також через $N(A,\eta)$ – η-окіл множини A. Побудуємо згладжування $g \colon Q \to \mathbb{R}^3$ у декілька кроків.

1. Задамо $g_1\colon Q \to \mathbb{R}^3$ як згортку

$$g_1(x) = f * \omega_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(y) \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy,$$

де значення $\varepsilon \ll \delta$ і ε набагато менше за довжину $f(e)$ будь-якого з ребер $e \in \mathcal{K}_0$. Відображення g_1 гладке класу C^∞, рівномірно збігається до f при $\varepsilon \to 0$ і збігається з f на множині $Q \setminus N(|\mathcal{K}_0^2|, \varepsilon)$ (що випливає з того, що при згортці з ω_ε лінійне відображення не змінюється).

Нехай Δ – деякий трикутник в $\mathcal{K}_0$, а σ_1, σ_2 – його суміжні 3-симплекси в $\mathcal{K}$. У звуженні на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus N(|\mathcal{K}_0^1|, \varepsilon)$, g_1 переводить площини паралельні до Δ у деяке сімейство паралельних площин, g_1 також є «монотонним» у напрямі ортогональному до Δ. Крім того, g_1 є афінним у напрямі Δ. Отже, звуження g_1 на множину

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus N(|\mathcal{K}_0^1|, \varepsilon)$$

є дифеоморфізмом.

2. Зафіксуємо тепер $\varepsilon_1 > 3\varepsilon$ і змінимо відображення g_1 на множині $N(|\mathcal{K}_0^1|, \varepsilon) \setminus N(|\mathcal{K}_0^0|, \varepsilon_1)$, тобто в малому околі кожного з ребер. Наша побудова буде локальною, тому для зручності будемо розглядати ребро вигляду $I = (0,0) \times [-1,1]$. З точністю до лінійного перетворення у множині значень, можемо вважати, що

$$\begin{cases} f(0,0,1) = (0,0,1) \\ f(0,0,-1) = (0,0,-1). \end{cases}$$

Тоді на множині

$$B = N(I, 2\varepsilon) - N(\{-1,1\}, \varepsilon_1)$$

відображення f задовольняє $f(x,y,z) = f(x,y,0) + (0,0,z)$. З означення g_1 випливає, що g_1 також задовольняє $g_1(x,y,z) = g_1(x,y,0) + (0,0,z)$. Таким чином, щоб продовжити g_1 з

$$A = N(A, 2\varepsilon) \setminus (N(A, \varepsilon) \cup N(\{-1,1\}, \varepsilon_1))$$

до дифеоморфізму на B, достатньо продовжити з множини

$$A_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < |x| < 2\varepsilon\}$$

на множину

$$B_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\varepsilon\}$$

відображення $(x, y) \mapsto (g_{1,1}(x, y, 0), g_{1,2}(x, y, 0))$ із збереженням однозначності. Це гарантує лема 2.1 (а також 2.10). Нехай g_2 - отримане продовження.

3. Побудоване відображення $g_2 \colon Q \setminus N(|\mathcal{K}_0^0|, \varepsilon_1) \to \mathbb{R}^3$ є локальним дифеоморфізмом. При достатньо малому значенні ε_1, воно також буде однозначним на множині $B_{2\varepsilon_1}(v) \setminus B_{\varepsilon_1}(v)$ для кожної вершини $v \in \mathcal{K}_0^0$. Тому, застосовуючи лему 2.10 ми отримаємо продовження $g_3 \colon Q \to \mathbb{R}^3$, що має всі необхідні властивості. $\square$

Існування продовження у кроках 2 і 3 випливає з наступної леми. Будемо позначати кільце з центром в точці x_0 і радіусами r_1, r_2 через

$$A_{r_1,r_2}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 \leqslant |x - x_0| \leqslant r_2\}.$$

Лема 2.10. *Нехай* $d \in \{2, 3\}$, $0 < r_1 < 1 < r_2$, *а відображення* $f \colon A_{r_1,r_2}(0) \to \mathbb{R}^d$ *– дифеоморфізм на свій образ. Тоді існує такий дифеоморфізм* $F \colon \overline{B_{r_2}(0)} \to \mathbb{R}^d$, *що* $F(x) = f(x)$ *для будь-якого* $x \in A_{1,r_2}(0)$ *і* $F(x) = x$ *для* $x \in B_{r_1}(0)$.

Доведення. Нехай $d = 3$, і зафіксуємо $s \in (r_1, 1)$. За теоремою Александера (тривимірний аналог теореми Шенфліса) існує такий дифеоморфізм $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, що $g(f(x)) = x$ при $|x| = s$. Тому будемо вважати, що $f(x) = x$ при $|x| = s$. Визначимо $F_1(x) = x$ $|x| \leqslant s$ і $F_1(x) = f(x)$, $|x| > s$. Тоді F_1 – гомеоморфізм, а звуження F_1 на кожну з множин $\overline{B_s(0)}$, $A_{s,r_2}(0)$ є дифеоморфізмом. Застосовуючи теорему про склеювання дифеоморфізмів [35, теор. 2.8] отримаємо шуканий дифеоморфізм $F \colon B_{r_2}(0) \to \mathbb{R}^3$, що збігається з F_1 усюди поза $N(\{x : |x| = s\}, (1 - s)/2)$.

Випадок $d = 2$ розглядається аналогічно. $\square$

Зауважимо, що цю лему можна використати для дещо простішого (але неконструктивного) доведення леми 2.6 (що є двовимірним аналогом леми 2.9).

2.6. Контрприклади

В цьому розділі ми наведемо приклад відображення з невід'ємним якобіном, яке не можливо наблизити відображеннями з додатним якобіаном. Доведення використовує простий факт з теорії накриттів (див. [19, Ch. 1.3]).

Означення 2.9. *Нехай B – топологічний простір. Накриття над B – це пара (E, π), де E – топологічний простір, а $\pi : E \to B$ – неперервне сюр'єктивне відображення з наступною властивістю. Для будь-якого $b \in B$ існує відкритий окіл U точки b, дискретний простір I, і гомеоморфізм $f : U \times I \to \pi^{-1}(U)$ такий, що $\pi \circ f = \pi_U$, де $\pi_U : U \times I \to U$ - це проекція на першу координату.*

У випадку зв'язного простору B потужність відповідного простору I не залежить від вибору $b \in B$. Будь-яка відкрита множина U що задовільняє вищенаведену властивість називається ***рівно накритою***. Якщо сам простір B є рівно накритим, то накриття (E, π) називається тривіальним, в цьому випадку E гомеоморфне до $B \times I$, а π це звичайна проекція на B.

Лема 2.11. *Якщо Ω – однозв'язна область в $\mathbb{R}^n$, то будь-яке накриття Ω є тривіальним.*

Доведення. [19, теор. 1.38]. $\square$

Теорема 2.5. *Нехай відображення $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^2$ задається рівністю*

$$f(x, y) \;=\; (x^2 - y^2,\, 2xy).$$

Тоді для довільного відображення $g : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^2$ *з класу* C^1 *зі строго додатним якобіаном виконується нерівність*

$$\|f-g\|_{\overline{B_1(0)}} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Доведення. Припустимо, що існує таке відображення g, що $\|f-g\|_{\overline{B_1(0)}} < 1/4$. Розглянемо гомотопію $H_t(x) : [0,1] \times \overline{B_{1/2}(0)} \to \mathbb{R}^2$ задану як $H_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Для $x \in \partial B_1(0)$ маємо

$$\begin{aligned} |H_t(x)| &= |f(x) - t(f(x) - g(x))| \\ &\geqslant |f(x)| - |f(x) - g(x)| \\ &= 1 - |f(x) - g(x)| > 1/2. \end{aligned}$$

Оскільки $H_0 = f$ і $H_1 = g$, використовуючи властивість (I) топологічної степені, отримуємо, що для всіх $x \in \overline{B_{1/2}(0)}$ степені $\deg(g, B_1(0), x)$ і $\deg(f, B_1(0), x)$ мають бути рівними. Оскільки для всіх $x \in \overline{B_{1/2}(0)}$ степінь $\deg(f, B_1(0), x) = 2$, маємо що $\deg(g, B_1(0), x) = 2$ для тих самих значень x. Оскільки якобіан відображення g додатний, з означення топологічної степені для гладких відображень слідує, що існує рівно два різних розв'язки y_1, y_2 рівняння $g(y) = x$, для всіх x з $\overline{B_{1/2}(0)}$.

Розглянемо множину $U = g^{-1}(B_{1/2}(0))$. З попередніх міркувань ми знаємо, що $g : U \to B_{1/2}(0)$ є накриттям, і крім того U є подвійнми накриттям $B_{1/2}(0)$. Оскільки область $B_{1/2}(0)$ однозв'язна, з Леми 2.11 ми маємо, що U - незв'язне об'єднання двох гомеоморфних копій $B_{1/2}(0)$. Тобто $U = U_1 \cup U_2$ та g відображає U_i гомеоморфно на $B_{1/2}(0)$, отже можна визначити два обернених до g відображення y_1, y_2 з $B_{1/2}(0)$ в U.

З $\|f-g\|_{\overline{B_1(0)}} < 1/4$ ми маємо $|y_i^2(z) - z| < 1/4$. Розглянемо відображення $\gamma(\varphi) = e^{i\varphi}/(2+\varepsilon)$, де $\varepsilon < 1/10$. Тоді точки $y_i(\gamma(\varphi))$ містяться в об'єднанні неперетинних дисків

$$B_{1/2}(e^{i\varphi/2}/\sqrt{2+\varepsilon}))$$

та

$$B_{1/2}(e^{i(\varphi/2+\pi)}/\sqrt{2+\varepsilon}).$$

Легко переконатись в тому, що кожний диск містить в собі рівно одну з точок $y_1(\gamma(\varphi)), y_2(\gamma(\varphi))$. З міркувань неперервності можемо вважати, що точка $y_1(\gamma(\varphi))$ завжди лежить в $B_{1/2}(e^{i(\varphi/2)}/\sqrt{2+\varepsilon})$. Тоді при неперервній зміні параметра φ від 0 до 2π, точка $y_1(\gamma(\varphi))$ має потрапити до диску $B_{1/2}(e^{i(\varphi/2+\pi)}/\sqrt{2+\varepsilon})$, звідки $y_1(\gamma(0)) = y_1(\gamma(2\pi)) = y_2(\gamma(0))$. Але це суперечить умові неперетинності дисків, отже маємо суперечність. $\square$

Відображення f - це аналітична функція $h(z) = z^2$ записана як відображення з $\mathbb{R}^2$ до $\mathbb{R}^2$, отже вона дає приклад поліноміального відображення з невід'ємним якобіаном, яке не можна наблизити відображеннями класу C^1 зі строго додатним якобіаном. Використовуючи міркування з доведення теореми 2.5 можна довести, що в загальному випадку комплексно-аналітичну функцію можна наблизити відображеннями з додатним якобіаном тоді і тільки тоді, коли вона задає конформне відображення.

Висновки до розділу 2

В цьому розділі ми дослідили питання про необхідні та достатні умови для існування наближення відображеннями, що мають невід'ємний якобіан. Було отримано загальну необхідну умову для всіх вимірів, а у випадках розмірностей 2 і 3 отримано також деякі достатні умови. Крім того, розглянуто задачу про наближення відображеннями з додатним якобіаном. У цьому випадку виявляється, що будь-яке відображення, що є локально взаємно однозначним (для розмірності 2 та 3) можна наблизити поліноміальними відображеннями з додатним якобіаном.

Ми також навели контрприклад що показує різницю між наближенням гладкими відображеннями з невід'ємним якобіаном та наближенням відображеннями зі строго додатним якобіаном. Це відрізняє багатовимірний випадок від одновимірного, оскільки в останньому клас функцій що можна наблизити неспадними гладкими функціями збігається з класом функцій, що можна наблизити строго зростаючими гладкими функціями. Виявляється, що навіть таку просту функцію як $z \mapsto z^2$ не можна наблизити відображеннями зі строго додатним якобіаном у малому околі точки 0.

РОЗДІЛ 3
КОМОНОТОННЕ НАБЛИЖЕННЯ НА ВІДРІЗКУ

У цьому розділі ми розглядаємо задачу комонотонного наближення функцій на відрізку $[-1,1]$. Під цим розуміється наближення функції f заданої на відрізку $[-1,1]$, що змінює монотонність $s \geqslant 1$ разів поліномами, що змінюють монотонність в тих самих точках, що й f.

Точніше, нехай звичайна величина найкращого наближення, $E_n(f)$, задовільняє нерівність $E_n(f) \leqslant n^{-\alpha}$, $n \geqslant 1$. Ми розглядаємо питання чи обов'язково величина комонотонного наближення задовільняє нерівність $\leqslant c(\alpha, s)n^{-\alpha}$, $n \geqslant 1$, і якщо ні, то що можна сказати в цьому випадку. Виявляється, що для кожного $s \geqslant 1$ існує виняткова множина A_s значень α для яких така оцінка не може виконуватись.

3.1. Постановка задачі

Нехай $\mathbf{P}_n$ це простір алгебраїчних поліномів степені $< n$ і нехай Δ^1 це множина монотонних, скажімо, неспадних функцій $f \in C[-1,1]$. Позначимо $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C[-1,1]}$. Нехай

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n} \|f - P_n\|,$$

позначатиме величину найкращого наближення функції $f \in C[-1,1]$ і, для фукнції $f \in \Delta^1$ нехай

$$E_n^{(1)}(f) = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^1} \|f - P_n\|, \tag{3.1}$$

це величина найкращого монотонного наближення до f. Очевидно,

$$E_n(f) \leqslant E_n^{(1)}(f). \tag{3.2}$$

Обернена нерівність, взагалі кажучи, виконуватись не може, оскільки Лоренц і Зеллер [34] сконструювали таку функцію $f \in \Delta^1$, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = \infty.$$

Наш перший результат полягає в тому, що у деякому сенсу нерівність обернену до (3.2) все ж таки можна отримати, в тому сенсі, що можна отримати оцінку на величину найкращого монотонного наближення зі знання величини найкращого наближення без обмежень. Точніше, виконується наступний результат.

Теорема 3.1. *Нехай $\alpha > 0$. Якщо $f \in C[-1,1]$ це монотонна функція що задовільняє*

$$n^\alpha E_n(f) \leqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.3}$$

то виконується нерівність

$$n^\alpha E_n^{(1)}(f) \leqslant c(\alpha), \quad n \geqslant 1.$$

де $c(\alpha)$ це стала, що залежить тільки від α.

Для $\alpha < 2$, теорема 3.1 слідує з [28], для $\alpha > 2$, вона слідує з [26], а для $\alpha = 2$, результат було доведено в [30].

Ми хочемо узагальнити результат теореми 3.1 на функції, що мають скінченну кількість змін монотонності на інтервалі $[-1,1]$. Виявляється, що якщо α не є цілим числом, то це завжди можна зробити, тоді як для цілих α це твердження не завжди є вірним.

3.2. Означення та формулювання основних результатів

Для $s \geqslant 1$, позначимо через $\mathbf{Y}_s$ множину усіх наборів $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$ точок y_i таких, що $-1 < y_1 < \cdots < y_s < 1$. Припустимо, що $f \in C^1(-1,1)$, і будемо позначати $f \in \Delta^1(Y_s)$, якщо $f \in C[-1,1]$ і

$$f'(x)\prod_{i=1}^{s}(x-y_i) \geqslant 0, \quad x \in (-1,1). \tag{3.4}$$

Для $f \in \Delta^1(Y_s)$, позначимо через

$$E_n^{(1)}(f,Y_s) = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^1(Y_s)} \|f - P_n\|, \tag{3.5}$$

величину найкращого комонотонного наближення до f, відносно до Y_s. У формулюванні деяких з наступних теорем ми не бажаємо явно вказувати Y_s, а лише функції f такі що $f \in \Delta^1(Y_s)$ для деякого $Y_s \in \mathbf{Y}_s$. В цьому випадку казатимемо, що $f \in \Delta_s^1$, і покладемо

$$E_n^{1,s}(f) = \sup_{Y_s \in \mathbf{Y}_s : f \in \Delta^1(Y_s)} E_n^{(1)}(f,Y_s). \tag{3.6}$$

Аналогічно до випадку інтервалу $[-1,1]$, при $s \geqslant 1$, позначимо через $\mathbf{Y}_s[a,b]$, множину всіх наборів $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$, точок y_i що задовільняють $a < y_1 < \dots < y_s < b$. Для набору $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s \in \mathbf{Y}_s[a,b]$ і $f \in C^1[a,b]$, будемо казати, що f належить $\Delta^1(Y_s;[a,b])$, якщо

$$f'(x)\prod_{i=1}^{s}(x-y_i) \geqslant 0, \quad x \in (a,b).$$

Аналогічно, ми будемо писати $f \in \Delta_s^1[a,b]$, якщо $f \in \Delta^1(Y_s;[a,b])$ для деякого Y_s і позначимо

$$E_n^{(1)}(f,Y_s)_{[a,b]} := \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^1(Y_s;[a,b])} \|f - P_n\|_{[a,b]},$$

і

$$E_n^{1,s}(f)_{[a,b]} := \sup_{Y_s \in \mathbf{Y}_s[a,b] : f \in \Delta^1(Y_s;[a,b])} E_n^{(1)}(f,Y_s)_{[a,b]}.$$

Щоб сформулювати основні негативні результати, ми визначимо винятkову множину цілих чисел A_s де $s \geqslant 1$ позначає число змін монотонності функції f.

Покладемо $A_1 := \{2\}$, і для будь-якого $s \geqslant 2$, покладемо

$$A_s := \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant 2\left[\frac{s}{2}\right], \text{ або } j = 2i, 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Наприклад, маємо

$$\begin{aligned} &A_2 = \{1, 2, 4\}, \\ &A_3 = \{1, 2, 4, 6\}, \\ &A_4 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, \\ &A_5 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}, \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Теорема 3.2. *Нехай $s \in \mathbf{N}$, і $\alpha \in A_s$. Тоді для будь-якого $m \in \mathbf{N}$ існує така функція $f \in C^1(-1, 1) \cap \Delta_s^1$, що виконується нерівність (3.3), але*

$$m^\alpha E_m^{1,s}(f) \geqslant c(s) \log m, \tag{3.7}$$

де $c(s) > 0$ це стала що залежить лише від s.

Сформулюємо тепер позитивні результати. Зокрема ми доведемо, що усі виняткові випадки включено в результат теореми 3.2.

Теорема 3.3. *Нехай $s \in \mathbf{N}$, і $\alpha > 0$ такі, що $\alpha \notin A_s$. Тоді якщо $f \in \Delta_s^1$ задовільняє (3.3), то*

$$n^\alpha E_n^{1,s}(f) \leqslant c(\alpha, s), \quad n \geqslant 1, \tag{3.8}$$

де $c(\alpha, s)$ це стала, що залежить лише від α та s.

Зауважимо, що якщо $\alpha > 1$, то з (3.3) випливає, що $f \in C^1(-1, 1)$, а отже $\Delta^1(Y_s)$ і Δ_s^1 визначено коректно. якщо $\alpha < 1$, то теорему 3.3 було доведено в [30, теор. 1]. Отже, в доведенні ми зосередимо увагу на випадку

$\alpha > 1$, а отже означення $\Delta^1(Y_s)$ з 3.4 є коректним. (Випадок $\alpha = s = 1$ буде розглянуто в зауваженні в кінці цього розділу).

Тим не менш, легко поширити визначення $\Delta^1(Y_s)$ на функції $f \in C[-1,1]$, що не обов'язково є неперервно диференційовними на $(-1,1)$.

Для набору $Y_s \in \mathbf{Y}_s$, будемо казати що функція f належить $\Delta^1(Y_s)$, якщо $f \in C[-1,1]$, вона є неспадною на $[y_s, 1]$, функція $-f$ неспадною на $[y_{s-1}, y_s]$, і так далі, нарешті $(-1)^s f$ є неспадною на $[-1, y_1]$. Очевидно, що якщо, додатково, $f \in C^1(-1,1)$, то обидва означення $\Delta^1(Y_s)$ збігаються.

Для повноти викладу ми підкреслимо, що, незважаючи на результати теореми 3.2, у випадку $\alpha \in A_s$ ми все ще можемо оцінити величину найкращого монотонного наближення, оскільки залишається вірною наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай $s \in \mathbf{N}$ і $\alpha \in A_s$. Тоді для кожної функції $f \in \Delta^1(Y_s)$, що задовольняє* (3.3)*,*

$$n^\alpha E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(\alpha, s), \quad n \geqslant N(\alpha, Y_s),$$

де $c(\alpha, s)$ це стала що залежить лише від α і s, а $N(\alpha, Y_s)$ це стала що залежить лише від Y_s і α.

Для $\alpha \neq 2$ теорема 3.4 випливає з [31, Theorem 4], а для $\alpha = 2$ вона випливає з [32, Corollary 2].

Варто зазначити, що схоже дослідження для коопуклого наближення було проведено в [25]. Зауважимо, що у коопуклому наближенні результати аналогічні до теореми 3.3 не можуть виконуватись для $s \geqslant 2$.

В розділі 3 ми введемо допоміжні позначення та нагадаємо відомі результати. Потім ми доведемо теорему 3.2 в підрозділі 4, а в розділі 5 ми доведемо теорему 3.3.

Тут і надалі ми будемо використовувати додатні сталі, що можуть залежати від деяких параметрів (і тільки від цих параметрів). Ми будемо їх позначати літерою c, а залежність від параметрів через $c(\cdot, \ldots, \cdot)$. Такі сталі можуть відрізнятися одна від одної навіть якщо вони виглядають однаково і зустрічаються в одній формулі. Іноді нам буде потрібно виокремити деяку сталу, на яку ми будемо посилатись пізніше. Такі сталі матимуть індекс, наприклад, $c_k(\cdot, \ldots, \cdot)$. Нарешті, деякі сталі будуть залежити також від функції S, яку буде визначено дещо пізніше. Зазвичай ми не будемо позначати цю залежність.

3.3. Допоміжні результати

Для $f \in C[a, b]$ покладемо

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

та

$$E_n(f)_{[a,b]} := \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n} \|f - P_n\|_{[a,b]},$$

зокрема, $\|f\|_{[-1,1]} = \|f\|$ і $E_n(f)_{[-1,1]} = E_n(f)$.

Нагадаємо позначення для скінченних різниць

$$\begin{aligned} \Delta_h(g, x) &:= g\left(x + \frac{h}{2}\right) - g\left(x - \frac{h}{2}\right), \\ \Delta_h^k(g, x) &:= \Delta_h(\Delta_h^{k-1}(g, x)), \quad k > 1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

і позначимо через

$$\omega(g, t, [a, b]) := \sup_{0 < h \leqslant t} \|\Delta_h(g, x)\|_{[a,b]},$$

та

$$\omega_k(g, t, [a, b]) := \sup_{0 < h \leqslant t} \|\Delta_h^k(g, x)\|_{[a,b]}, \quad k \geqslant 1,$$

модуль неперервності та k-й моділь гладкості функції $g \in C[a, b]$ (зауважимо, що $\omega(g, t, [a, b]) \equiv \omega_1(g, t, [a, b])$ та $\omega_k(g, t, [a, b]) \equiv \omega_k(g, (b - a)/k, [a, b])$ при $t \geqslant (b - a)/k$).

Знову, за умови $[a,b]=[-1,1]$, ми не будемо вказувати інтервал, тобто будемо писати $\omega_k(g,t):=\omega_k(g,t,[-1,1])$.

Будемо казати, що f належить до так званого класу Зигмунда $Z[a,b]$, якщо $f\in C[a,b]$ і

$$\omega_2(f,t,[a,b])\leqslant t, \quad t\geqslant 0.$$

Добре відомо, що якщо $f\in C^r[a,b]$, $r\geqslant 0$, і $f^{(r)}\in Z[a,b]$, то

$$E_n(f)_{[a,b]}\leqslant \frac{c(r)(b-a)^{r+1}}{n^{r+1}}, \quad n\geqslant r+1. \tag{3.10}$$

Будемо говорити, що f лежить у так званому класі Бабенко, $B^r[a,b]$, $r\geqslant 1$, якщо $f\in C[a,b]$ має локально абсолютно неперервну $(r-1)$-шу похідну на (a,b) і

$$|((x-a)(b-x))^{r/2}f^{(r)}(x)|\leqslant 1 \text{ майже всюди на } [a,b].$$

Нагадаємо, що якщо $f\in B^r[a,b]$, то $\omega_r^{\varphi}(f,t,[a,b])\leqslant ct^r$, а отже

$$E_n(f)_{[a,b]}\leqslant \frac{c(r)}{n^r}, \quad n\geqslant r. \tag{3.11}$$

Ми будемо використовувати нерівність Дзядика для похідних поліномів, див., наприклад, [13, лема 2.1, ст. 384], див. також [27, лема 5.2] де надано коротке доведення цієї нерівності. Позначимо

$$\rho_n(x):=\frac{b-a}{2n^2}+\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{n}. \tag{3.12}$$

Лема 3.1. *Нехай $x_0\in[a,b]$ і поліном $P_n\in\mathbf{P}_n$ задовільняє*

$$|P_n(x)|\leqslant 1+\left(\frac{|x-x_0|}{\rho_n(x)}\right)^m, \quad x\in[a,b], \tag{3.13}$$

для деякого $m\in\mathbf{N}$. Тоді для кожного $j\in\mathbf{N}$ виконуеться нерівність

$$|P_n^{(j)}(x_0)|\leqslant \frac{c(j,m)}{\rho_n^j(x_0)}. \tag{3.14}$$

Нагадаємо, що $(k-1)$-ша розділена різниця g у вузлах $\{u_1, \ldots, u_k\}$ визначається рівнянням

$$[u_1, u_2, ..., u_k; g] := \sum_{i=1}^{k} \frac{g(y_i)}{\omega'(y_i)},$$

де

$$\omega(x) := \prod_{j=1}^{k} (x - y_j).$$

Якщо $[a, b] := [\min u_j, \max u_j]$ і $g \in C[a, b]$ має $(k-1)$-шу похідну на (a, b), то

$$[u_1, u_2, ..., u_k; g] = \frac{g^{(k-1)}(\zeta)}{(k-1)!}, \tag{3.15}$$

для деякого $\zeta \in (a, b)$.

Поліном Лагранжа, що інтерполює g у точках $\{u_1, \ldots, u_k\}$ визначається рівністю

$$L_k(x) = \sum_{j=1}^{k} g(u_j) l_j(x), \tag{3.16}$$

де

$$l_j(x) := \frac{\prod_{i \neq j}(x - u_i)}{\omega'(u_j)}.$$

Добре відоме наступне представлення інтерполяційного полінома у формі Ньютона

$$\begin{aligned} L_k(x) &:= L_k(g; u_1, \ldots, u_k; x) \\ &:= g(u_1) + [u_1, u_2; g](x - u_1) + \ldots \\ &+ [u_1, \ldots, u_k; g](x - u_1) \cdots (x - u_{k-1}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Також, маємо

$$g(x) - L_k(x) = [x, u_1, \ldots, u_k; g](x - u_1) \cdots (x - u_k). \tag{3.18}$$

Поєднуючи ці результати отримуємо тотожність

$$
\begin{aligned}
g(x) - L_k(x) =& g(x) - L_{k-1}(g; u_1, \dots, u_{k-1}; x) \\
&- [u_1, \dots, u_k; g](x - u_1) \dots (x - u_{k-1}) \\
=& (x - u_1) \dots (x - u_{k-1})\big([x, u_1, \dots, u_{k-1}; g] - [u_1, \dots, u_k; g]\big) \\
=& \frac{g^{(k-1)}(\zeta_1) - g^{(k-1)}(\zeta_2)}{(k-1)!}(x - u_1) \dots (x - u_{k-1}) \\
=:& \frac{\omega}{(k-1)!}(x - u_1) \dots (x - u_{k-1})
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

де $\zeta_1, \zeta_2 \in (a, b)$ і помітимо, що

$$|\omega| = |g^{(k-1)}(\zeta_1) - g^{(k-1)}(\zeta_2)| \leqslant \omega(g^{(k-1)}, b - a, [a, b]) \tag{3.20}$$

у випадку якщо $g \in C^{k-1}[a, b]$.

Нарешті, для доведення теореми 3.3 нам знадобляться два твердження та лема. Обидва твердження випливають з результатів роботи [18, насл. 3.1], однак для зручності ми наведемо їх короткі доведення.

Твердження 3.1. *Нехай задано послідовність* $\{y_i\}_{i=1}^s$ *точок* $y_i \in (a, b)$. *Якщо функція* $g \in C^l[a, b]$ *задовільняє*

$$g(x) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i) \geqslant 0, \quad x \in (a, b),$$

то існує такий поліном $P_{l+1} \in \mathbf{P}_{l+1}$, *що*

$$\|g - P_{l+1}\|_{C[a,b]} \leqslant c(r)(b - a)^l \omega(g^{(l)}, b - a, [a, b]) \tag{3.21}$$

та

$$P_{l+1}(x) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i) \geqslant 0, \quad x \in (a, b).$$

Доведення. При $r < s$, покладемо $P_{l+1}(x) := L_{l+1}(g; y_1, \dots, y_{l+1}; x) \equiv 0$, і твердження випливає з (3.19) та (3.20). Аналогічно, для $l = s$, покладемо

$$P_{l+1}(x) \ := \ L_{l+1}(g; y_1, \dots, y_s, b; x) = g(b) \prod_{i=1}^{s} \frac{x - y_i}{b - y_i}.$$

Залишається випадок $l > s$. Нехай u_j, $j = s+1, \dots, l+1$ це довільні попарно різні точки з інтервалу (a,b), що відрізняються від $y_i, 1 \leqslant i \leqslant s$. Покладемо

$$\begin{aligned} P_{l+1}(x) &:= L_{l+1}(g; y_1, \dots, y_s, u_{s+1}, \dots, u_{l+1}; x) \\ &\quad + \frac{(b-a)^{r-s}}{l!} \omega(g^{(l)}, b-a, [a,b]) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i). \end{aligned}$$

З (3.19) та (3.20) випливає, що

$$P_{r+1}(x) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i) \geqslant g(x) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i) \geqslant 0,$$

а отже виконується (3.21), що й треба було довести. □

З цього твердження одразу випливає наступний результат.

Наслідок 3.1. *Якщо $g \in \Delta_s^1[a,b] \cap C^r[a,b]$, то*

$$E_{r+1}^{1,s}(g)_{[a,b]} \leqslant c(r)(b-a)^r \omega(g^{(r)}, b-a; [a,b]). \tag{3.22}$$

Доведення. Помітимо, що g' задовільняє умовам твердження 3.1 з $l = r-1$. Тому існує такий поліном P_r, що $P_r(x) g'(x) \geqslant 0$ при $x \in (a,b)$ та

$$\|g' - P_r\|_{C[a,b]} \leqslant (b-a)^{r-1} \omega(g^{(r)}, b-a, [a,b]).$$

Тепер якщо ми покладемо $P_{r+1}(x) := \int_a^x P_r(t)dt + g(a)$, то одразу отримаємо (3.22). □

Нам потрібне також наступне твердження.

Твердження 3.2. *Нехай задано набір $\{y_i\}_{i=1}^s$ точок $y_i \in (a,b)$ і $r \geqslant s-1$. Якщо функція $g \in C^l[a,b]$ задовільняє*

$$g(y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

то існує такий поліном $P_{l+2} \in \mathbf{P}_{l+2}$, що

$$\|g - P_{l+2}\|_{C[a,b]} \leqslant c(l)(b-a)^l \omega_2(g^{(l)}, b-a, [a,b])$$

та

$$P_{l+2}(y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Крім того, якщо

$$g(x) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i) \geqslant 0, \quad x \in (a, b), \tag{3.23}$$

то можна вибрати поліном так, щоб виконувалась нерівність

$$P_{l+2}(x) \prod_{i=1}^{s} (x - y_i) \geqslant 0, \quad x \in (a, b). \tag{3.24}$$

Доведення. Спочатку помітимо, що з [13, p. 239, Th. 3.6.4] випливає, що якщо $a \leqslant v_0 < v_1 < \cdots < v_{l+2} \leqslant b$, то

$$|[v_0, \dots, v_{l+2}; g]| \leqslant c(l) \frac{\omega_2(g^{(l)}, b - a, [a, b])}{(v_{l+2} - v_1)(v_{l+1} - v_0)}. \tag{3.25}$$

Для $l = s - 1$, покладемо

$$P_{l+2}(x) := L_{l+2}(g; y_0, y_1, \dots, y_s; x) = g(y_0) \prod_{i=1}^{s} \frac{x - y_i}{y_0 - y_i},$$

де $y_0 = a$ при $y_1 - a > b - y_1$, та $y_0 = b$ в іншому випадку. Щоб отримати бажану оцінку, ми підставимо нерівність (3.25) в тотожність (3.18) (це потребує декілька нескладних обчислень в залежності від положення y_0 and x).

Розглянемо тепер випадок $l \geqslant s$. Нехай u_j, $j = s + 1, \dots, l$ довільні попарно різні точки з інтервалу (a, b), що також відрізняються від $y_i, 1 \leqslant i \leqslant s$. Покладемо

$$L_{l+2}(x) \ := \ L_{l+2}(g; y_1, \dots, y_s, u_{s+1}, \dots, u_l, a, b; x).$$

Знову використовуючи (3.25) і тотожність (3.18) з нескладними обчисленнями отримуємо

$$|g(x) - L_{l+2}(x)| \leqslant c_*(l)(b - a)^{l-s} \omega_2(g^{(l)}, b - a, [a, b]) \prod_{i=1}^{s} |x - y_i|, \quad x \in [a, b].$$

Отже, можна покласти

$$P_{l+2}(x) := L_{l+2}(x) + c_*(l)(b-a)^{l-s}\omega_2(g^{(l)}, b-a, [a,b]) \prod_{i=1}^{s}(x-y_i)$$

і тоді ми отримаємо бажану оцінку з $c(l) = 2c_*(l)$. Крім того, якщо g задовільняє (3.23), то ми також отримуємо (3.24). $\square$

З цього твердження ми отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.2. *Якщо* $g \in \Delta^1_s[a,b] \cap C^r[a,b]$, $r \geqslant s$, *то*

$$E^{1,s}_{r+2}(g)_{[a,b]} \leqslant c(r)(b-a)^r\omega_2(g^{(r)}, b-a; [a,b]). \tag{3.26}$$

Доведення. Аналогічно до попереднього наслідку, функція g' задовільняє всі умови твердження 3.2 з $l = r-1$. Далі доведення повністю повторює доведення наслідку 3.1. $\square$

Нам також знадобиться аналогічний результат для $r = s-1$.

Лема 3.2. *Нехай* $r = \sigma - 1$ *і* $a < y_1 < \cdots < y_\sigma < b$ *і покладемо*

$$\frac{1}{9}(b-a) < a - a_1 < 9(b-a) \quad \textit{та} \quad \frac{1}{9}(b-a) < b_1 - b < 9(b-a). \tag{3.27}$$

Якщо $g \in \Delta^1(Y_\sigma; [a_1,b_1]) \cap C^r[a_1,b_1]$, *то*

$$E^{1,\sigma}_{r+2}(g)_{[a,b]} \leqslant E^{1,\sigma}_{1}(g)_{[a,b]} \leqslant c(r)(b-a)^r\omega_2(g^{(r)}, b-a, [a_1,b_1]). \tag{3.28}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $r > 0$. Оскільки $g'(y_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant \sigma - 1$ і $g' \in C^{r-1}[a_1,b_1]$, з твердження 3.2 випливає існування такого полінома $P_{r+1} \in \mathbb{P}_{r+1} = \mathbb{P}_\sigma$, що

$$\|g' - P_{r+1}\|_{[a_1,b_1]} \leqslant c(r)(b_1-a_1)^{r-1}\omega_2(g^{(r)}, b_1-a_1; [a_1,b_1]),$$

і

$$P_{r+1}(y_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant \sigma - 1.$$

Оскільки P_{r+1} має степінь $\sigma-1$, він дорівнює

$$P_{r+1}(x) = A\prod_{i=1}^{\sigma-1}(x-y_i).$$

Далі, функція g' змінює свій знак ще один раз у інтервалі $[a_1, b_1]$ (в точці y_σ), у той час як P_{r+1} не може більше змінювати знак. Отже, або для $J := [a_1, a]$ або для $J := [b, b_1]$ буде виконуватись

$$g'(x)P_{r+1}(x) \leqslant 0, \quad x \in J.$$

З цього, в свою чергу, випливає (застосовуючи (3.3)),

$$\begin{aligned} \|P_{r+1}\|_J \leqslant \|g' - P_{r+1}\|_J \leqslant \|g' - P_{r+1}\|_{[a_1,b_1]} \\ \leqslant c(r)(b_1-a_1)^{r-1}\omega_2(g^{(r)}, b_1-a_1; [a_1,b_1]). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Далі, з (3.3) отримуємо

$$\begin{aligned} \|g'\|_{[a_1,b_1]} &\leqslant \|g' - P_{r+1}\|_{[a_1,b_1]} + \|P_{r+1}\|_{[a_1,b_1]} \\ &\leqslant c(r)(b_1-a_1)^{r-1}\omega_2(g^{(r)}, b_1-a_1; [a_1,b_1]) + \frac{(b_1-a_1)^{\sigma-1}}{|J|^{\sigma-1}}\|P_{r+1}\|_J \\ &\leqslant c(r)(b-a)^{r-1}\omega_2(g^{(r)}, b-a; [a_1,b_1]), \end{aligned}$$

де ми використали той факт, що $|J| \sim b_1 - a_1 \sim b - a$ (див. (3.27)), і використали (3.29).

Отже,

$$\|g - g(a)\|_{[a,b]} \leqslant \int_a^b |g'(t)|dt \leqslant c(r)(b-a)^r\omega_2(g^{(r)}, b-a; [a_1,b_1]),$$

звідки легко бачити, що $P_1(x) \equiv g(a)$ це шуканий поліном. Це завершує доведення у випадку $r > 0$.

У випадку $r = 0$ маємо $\sigma = 1$. Без обмеження загальності, можемо вважати, що $g(a_1) \leqslant g(b_1)$. Тоді лінійна функція $P_1(x) \equiv g(a_1)$ (що очевидно є комонотонною з g) інтерполює функцію g у двох точках, відстань між якими $\geqslant y_1 - a_1 > a - a_1 \sim b_1 - a_1$ (тут y_1 це точка зміни монотонності для функції g, див. (3.27)). Отже, з теореми Вітні (див., наприклад, [13, (6.2), ст. 230]) випливає

$$\|g - P_1\|_{[a,b]} \leqslant c\omega_2(g, b-a, [a_1, b_1]),$$

оскільки $b - a \sim b_1 - a_1$, де ми знову використали (3.27). □

3.4. Доведення теореми 3.2.

Нехай S це нескінченно диференційовна функція на $\mathbb{R}$, що задовільняє

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \leqslant 1, \\ -1, & \text{якщо} \quad x \geqslant 2, \end{cases}$$

є спадною на $[1, 2]$ та

$$\int_1^2 S(u) \frac{du}{u} = 0.$$

Для кожного $a \in (0, \frac{1}{2}]$, покладемо

$$g_a(x) := \int_{a^2}^{x} S\left(\frac{u}{a}\right) \frac{du}{u}, \quad x > 0.$$

і помітимо, що

$$g_a(x) = \begin{cases} \ln \frac{x}{a^2}, & \text{якщо } x \in (0, a], \\ \ln \frac{2}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 2a. \end{cases} \tag{3.30}$$

Легко бачити що

$$(x - a^2) g_a(x) \geqslant 0, \quad x \in (0, 2], \tag{3.31}$$

та

$$\max_{x \in (0,2]} x|g_a(x)| < 1. \tag{3.32}$$

Також бачимо, що, g_a є нескінченно диференційовною при $x > 0$, і для кожного $j \in \mathbf{N}$,

$$|g_a^{(j)}(x)| \leqslant \frac{c(j)}{x^j}, \quad x > 0. \tag{3.33}$$

Зафіксуємо $m \geqslant 2$ усюди в цьому підрозділі.

При заданому парному $r > 0$, нехай $f_r \in C[0,2]$ це функція визначена рівністю

$$f_r(x) = \int\limits_{1/m^4}^{x} (x-u)^{\frac{r}{2}} S\left(um^2\right) \frac{du}{u}, \quad x \in [0,2]. \tag{3.34}$$

Якщо $r \geqslant 1$ є непарним, то визначимо $f_r \in C[-2,2]$ за рівністю

$$f_r(x) = \int\limits_{0}^{x} u^{r-1} g_{1/m}(|u|) du, \quad x \in [-2,2]. \tag{3.35}$$

Зауважимо, що $g_a(|x|)$ інтегровна на $[-2,2]$, а тому f_1 є коректно визначеною, неперервною в $x = 0$ та задовільняє $f_1(0) = 0$.

Почнемо з двох лем.

Лема 3.3. *Якщо $r > 0$ – парне число, то*

$$E_n(f_r)_{[0,1]} \leqslant \frac{c(r)}{n^r}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.36}$$

Доведення. Покладемо $p = \frac{r}{2}$. За визначенням f_r та (3.33), маємо

$$|f_r^{(r)}(x)| = p!|g_{1/m^2}^{(p)}(x)| \leqslant \frac{p!c(p)}{x^p} =: \frac{c(r)}{x^{r/2}}, \quad x > 0.$$

Отже $\frac{1}{c(r)} f_r \in B^r[0,1]$, де B^r це клас Бабенка. Таким чином, з (3.11) випливає (3.36) при $n \geqslant r$. При $n < r$, (3.36) випливає з оцінки

$$\|f_r\|_{[0,1]} \leqslant p+1.$$

Справді, з $a := \frac{1}{m^2}$, маємо, що при $x \in (0,1]$,

$$|f_r(x)| = \left| x^p g_a(x) + \int\limits_{a^2}^{x} ((x-u)^p - x^p) S\left(\frac{u}{a}\right) \frac{du}{u} \right|$$

$$\leqslant x^{p-1} + \int\limits_{a^2}^{x} (x^p - (x-u)^p) \frac{du}{u}$$
$$\leqslant x^{p-1} + px^p \leqslant p+1,$$

де в першій нерівності ми застосували (3.32). □

Лема 3.4. *Якщо r – непарне, то*

$$E_n(f_r)_{[-1,1]} \leqslant \frac{c(r)}{n^r}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.37}$$

Доведення. З означення f_r випливає, що $f_r^{(r-1)}$ є неперервною на $[0,1]$, а з (3.33) випливає що

$$|f_r^{(r+1)}(x)| \leqslant \frac{c(r)}{x}, \quad x > 0.$$

Це, в свою чергу, означає що $\frac{1}{c(r)} f_r^{(r-1)} \in Z[0,1]$, а оскільки функція $f_r^{(r-1)}$ є непарною, маємо $\frac{1}{c(r)} f_r^{(r-1)} \in Z[-1,1]$. Отже, з (3.10) випливає (3.37) для $n \geqslant r+1$. для $n \leqslant r$, (3.37) слідкує з оцінки

$$\|f_r\|_{[-1,1]} < 1.$$

Доведення завершено. □

Далі ми покажемо, що поліноми з обмеженнями не можуть так добре наближувати f_r. Спочатку розглянемо випадок парного r, де ми маємо наступний результат.

Лема 3.5. *Якщо $r > 0$ – парне число, то існує така стала $c(r) > 0$, що для довільного полінома $P_m \in \mathbf{P}_m$ що для деякого значення $\theta \in [0, \frac{1}{m^2}]$ задовільняє $P_m^{(\frac{r}{2})}(\theta) = 0$, виконується невірність*

$$\|f_r - P_m\|_{[0,1]} \geqslant c(r) \frac{\ln m}{m^r}.$$

Доведення. Нехай $p = \frac{r}{2}$, покладемо

$$L(x) := \int\limits_{1/m^4}^{1/m^2} (x-u)^p \frac{du}{u}$$

та

$$G(x) := f_r(x) - L(x) = \int\limits_{1/m^2}^{x} (x-u)^p S\left(um^2\right) \frac{du}{u}.$$

Для $x \geqslant \frac{1}{m^2}$ маємо

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leqslant x^p \int\limits_{1/m^2}^{x} \frac{du}{u} = x^p \ln(m^2 x) \\ &< x^{p+1} m^2 = \frac{1}{m^{2p}} (xm^2)^{p+1} \\ &\leqslant \frac{c(p)}{m^{2p}} \big(\theta^{p+1} + (x-\theta)^{p+1}\big) m^{2(p+1)} \\ &\leqslant \frac{c(p)}{m^{2p}} \left(1 + \left(\frac{x-\theta}{\rho_m(\theta)}\right)^{p+1}\right), \end{aligned}$$

де

$$\frac{1}{m^2} \leqslant \rho_m(\theta) \ = \ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\sqrt{\theta(1-\theta)} \ < \ \frac{2}{m^2}.$$

Якщо, з іншого боку, $x \in [0, \frac{1}{m^2}]$, то

$$|G(x)| \leqslant |G(0)| = \frac{1}{pm^{2p}}.$$

Нехай

$$A := m^{2p} \|f_r - P_m\|_{[0,1]}.$$

Маємо, що для всіх $x \in [0,1]$ виконується

$$\begin{aligned} |L(x) - P_m(x)| &\leqslant |f_r(x) - P_m(x)| + |L(x) - f_r(x)| \leqslant \frac{A}{m^{2p}} + |G(x)| \\ &\leqslant \frac{c(p)\max\{A, 1\}}{m^{2p}} \left(1 + \left(\frac{|x-\theta|}{\rho_m(\theta)}\right)^{p+1}\right). \end{aligned}$$

З нерівності Дзядика (див. лема 3.1) отримуємо

$$\begin{aligned}2(p!)\ln m = |L^{(p)}(\theta)| &= |L^{(p)}(\theta) - P_m^{(p)}(\theta)| \\ &\leqslant \frac{c(p)\max\{A,1\}}{m^{2p}}\rho_m^{-p}(\theta) \\ &\leqslant c(p)\max\{A,1\},\end{aligned}$$

а отже

$$A > c(r)\ln m.$$

Доведення завершено. □

Далі, розглянемо випадок непарного r.

Лема 3.6. *Якщо r – непарне число, то існує така стала $c(r) > 0$, що для довільного полінома $P_m \in \mathbf{P}_m$, що для деякого значення $\theta \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$ задовільняє $P_m^{(r)}(\theta) = 0$, маємо*

$$\|f_r - P_m\|_{[-1,1]} \geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r}.$$

Доведення. Нехай

$$L(x) := \int\limits_0^x u^{r-1}du \int\limits_{1/m^2}^{1/m} \frac{dt}{t} = \frac{1}{r}x^r \ln m.$$

Використовуючи рівність (3.35), покладемо

$$G(x) := f_r(x) - L(x) = \int\limits_0^x u^{r-1}\left(\int\limits_{1/m}^{|u|} S(tm)\frac{dt}{t}\right)du.$$

Для $|x| \geqslant \frac{1}{m}$ маємо

$$\begin{aligned}|G(x)| &\leqslant |x|^r \ln(m|x|) \\ &< x^{r+1}m = \frac{1}{m^r}(xm)^{r+1}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c(r)}{m^r}\left(1+\left(\frac{x-\theta}{\rho_m(\theta)}\right)^{r+1}\right),$$

де, за означенням (3.12) для $[a,b]=[-1,1]$, виконуються нерівності

$$\frac{1}{m} < \rho_m(\theta) \;=\; \frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\sqrt{1-\theta^2} \;<\; \frac{2}{m}.$$

Якщо ж виконується нерівність $|x|<\frac{1}{m}$, то

$$|G(x)| \leqslant |G(\frac{1}{m})| = \int\limits_0^{1/m} u^{r-1}\ln\frac{1}{mu}du = \frac{1}{r^2m^r}.$$

Далі, нехай

$$A := m^r\|f_r-P_m\|_{[-1,1]}.$$

Тоді для всіх $x\in[-1,1]$,

$$\begin{aligned}|L(x)-P_m(x)| &\leqslant |f_r(x)-P_m(x)|+|L(x)-f_r(x)| \leqslant \frac{A}{m^r}+|G(x)|\\ &\leqslant \frac{c(r)\max\{A,1\}}{m^r}\left(1+\left(\frac{x-\theta}{\rho_m(\theta)}\right)^{r+1}\right).\end{aligned}$$

Застосовуючи нерівність Дзядика ми отримуємо

$$\begin{aligned}(r-1)!\ln m = |L^{(r)}(\theta)| &= |L^{(r)}(\theta)-P_m^{(r)}(\theta)|\\ &\leqslant \frac{c(r)\max\{A,1\}}{m^r}\rho_m^{-r}(\theta)\\ &\leqslant c(r)\max\{A,1\},\end{aligned}$$

а отже

$$A \geqslant c(r)\ln m.$$

Лему доведено. □

Перед наступними лемами, покладемо

$$a := \begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{якщо } r \text{ – непарне},\\ \frac{1}{m^2}, & \text{якщо } r \text{ – парне},\end{cases}$$

і позначимо

$$\mu_r := \min_{x\in[a,1]} f_r'(x).$$

Легко бачити, що $\mu_r > 0$.

У наступних двох лемах ми розглядатимемо випадок парного $r > 0$.

Лема 3.7. *Нехай $r > 0$ – парне число. Тоді існує така функція $f \in \Delta^1_{\frac{r}{2}}[0,1]$, що*

$$n^r E_n(f)_{[0,1]} \leqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.38}$$

та

$$m^r E_m^{1,\frac{r}{2}}(f)_{[0,1]} \geqslant c(r) \ln m, \tag{3.39}$$

де $c(r) > 0$.

Доведення. Нехай $p := \frac{r}{2}$. Оскільки $f_r^{(j)}(a^2) = 0$ для всіх $0 \leqslant j \leqslant p$, маємо що існує таке $\delta > 0$, що $a^2 + \delta < a$ і

$$\|f_r^{(j)}\|_{[a^2,a^2+\delta]} < \frac{1}{e} \min\{\mu_r, \frac{1}{m^r}\}, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{3.40}$$

Розглянемо набір з p різних точок

$$a^2 < y_1 < \cdots < y_p < a^2 + \delta,$$

і позначимо через $L_p(x) := L(f_r'; y_1, \ldots, y_p; x)$ поліном Лагранжа, що інтерполює f_r' в цих точках. Зважаючи на (3.17) і (3.15), з (3.40) випливає

$$\begin{aligned}\|L_p\|_{[0,1]} &\leqslant \|f_r'\|_{[a^2,a^2+\delta]} + \frac{\|f_r''\|_{[a^2,a^2+\delta]}}{1!} + \cdots + \frac{\|f_r^{(p)}\|_{[a^2,a^2+\delta]}}{(p-1)!} \\ &< \min\{\mu_r, \frac{1}{m^r}\}.\end{aligned}$$

Далі, покладемо

$$F' := f_r' - L_p$$

і означимо

$$F(x) := \int\limits_{a^2}^{x} F'(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

З (3.18) та (3.15), отримуємо, що для $x \in (0, a]$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f_r'(x) - L_p(x) = [x, y_1, \ldots, y_p; f_r'](x - y_1) \cdots (x - y_p) \\ &= \frac{f_r^{(p+1)}(\zeta)}{p!}(x - y_1) \cdots (x - y_p) \\ &= \frac{1}{\zeta}(x - y_1) \cdots (x - y_p), \end{aligned}$$

де $\zeta = \zeta(x) \in (0, a)$. Таким чином, функція F належить до класу $\Delta_p^1[0, a]$. Застосовуючи оцінку $\|L_p\|_{[0,1]} < \mu_r$, одержуємо що $F \in \Delta_p^1[0, 1]$, а отже, згідно з лемою 3.3, маємо

$$n^r E_n(F)_{[0,1]} \leqslant c_1(r). \tag{3.41}$$

Нарешті, якщо $P_m'(x)F'(x) \geqslant 0$, $x \in (0, a)$, то $P_m^{(p)}(\theta) = 0$ для деякого значення $\theta \in (0, a)$. Отже, з леми 3.5 випливає що

$$\|f_r - P_m\|_{[0,1]} \geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \|F - P_m\|_{[0,1]} &\geqslant \|f_r - P_m\|_{[0,1]} - \frac{1}{m^r} \\ &\geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r} - \frac{1}{m^r} \geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

де в першій нерівності ми застосували оцінку $\|L_p\|_{[0,1]} < \frac{1}{m^r}$.

Очевидно, з (3.41) маємо, що $f := \frac{F}{c_1(r)}$ задовільняє (3.38), а (3.39) випливає з (3.42). □

Лема 3.8. *Нехай $r > 0$ – парне число, $s > \frac{r}{2}$, і нехай $b := \frac{\pi}{2} + \left(s - \frac{r}{2}\right)\pi$. Тоді існує така функція $\tilde{f} \in \Delta_s^1[0, b]$, що*

$$n^r E_n(\tilde{f})_{[0,b]} \leqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.43}$$

та

$$m^r E_m^{1,s}(\tilde{f})_{[0,b]} \geqslant c(r, s) \ln m, \tag{3.44}$$

де $c(r, s) > 0$.

Доведення. Нехай

$$h_r'(x) := \frac{1}{2}(1 + S(x))f_r'(x) + \frac{1}{2}(1 - S(x))\sin x, \quad x \in [0, b],$$

і покладемо

$$h_r(x) := \int_{a^2}^{x} h_r'(u)du.$$

Зауважимо, що $h_r'(x) = f_r'(x)$ для $x \in [0,1]$, що $h_r'(x) = \sin x$ для $x \geqslant 2$, і що

$$\min_{x\in[1,2]} h_r'(x) =: \nu_r > 0. \tag{3.45}$$

З леми 3.3 слідує, що $c(r,s)h_r \in B^r[0,b]$, а отже

$$n^r E_n(h_r)_{[0,b]} \leqslant c_2(r,s). \tag{3.46}$$

Ми будемо використовувати позначення та міркування з доведення леми 3.7, але доведення буде дещо складнішим і нам треба буде накласти додаткові обмеження на деякі величини в доведені леми 3.7. По-перше, виберемо δ настільки малим, у додачу до (3.40), що поліном L, продовжений до $[0,b]$, задовільняє

$$\|L\|_{[1,2]} < \nu_r, \quad \|L\|_{[1,b]} < \sin 1 \quad \text{and} \quad \|L'\|_{[1,b]} < \cos 1.$$

Це разом з (3.45) гарантує, що L не перетинає функцію h_r' на $[1,2]$ і перетинає її рівно $s - \frac{r}{2}$ разів на $[2,b]$ (точнісінько один раз у кожному з інтервалів $(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}]$, $k = 1, \dots, s - \frac{r}{2}$, де $|\sin x| < \sin 1$). Якщо позначити $\tilde{F}' := h_r' - L$ і визначити

$$\tilde{F}(x) := \int_{a^2}^{x} \tilde{F}'(u)du,$$

то маємо, що функція $\tilde{F}$ належить до класу $\Delta_s^1[0,b]$. Нарешті, позначивши $\tilde{F}$ так само як в доведені леми 3.7 і використовуючи властивість $F(x) =$

$(-1)^{s-r/2}\tilde{F}(x)$ для $x \in [0,1]$, отримуємо

$$\begin{aligned} m^r E_m^{1,s}(\tilde{F})_{[0,b]} &\geqslant m^r E_m^{1,s}(\tilde{F})_{[0,1]} \\ &= m^r E_m^{1,s}(F)_{[0,1]} \\ &\geqslant c(r,s)\ln m, \end{aligned} \tag{3.47}$$

Далі покладемо $\tilde{f} := \frac{\tilde{F}}{c_2(r,s)}$, і нерівність (3.43) випливатиме з (3.46), а (3.44) випливає з (3.47). □

Тепер ми розглянемо випадок непарного r

Лема 3.9. *Нехай $r \geqslant 3$ – непарне число. Тоді існує така функція $f \in \Delta^1_{r+1}[-1,1]$, що*

$$n^r E_n(f) \leqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.48}$$

але

$$m^r E_m^{1,r+1}(f) \geqslant c(r)\ln m, \tag{3.49}$$

де $c(r) > 0$.

Доведення. Нагадаємо, що $a = \frac{1}{m}$ і покладемо $p := \frac{r-1}{2}$. Визначимо функцію F_r рівністю

$$F_r(t) := f_r'(\sqrt{t}) = t^p g_a(\sqrt{t}), \quad t \in [0,1],$$

і помітимо, що

$$F_r(t) := \frac{1}{2}t^p \ln\frac{t}{a^4}, \quad t \in [0,a^2].$$

Для $\delta \in (0, \frac{a^4}{2p})$, позначимо $z_j := j\delta$, $1 \leqslant j \leqslant p$ та $z_{p+1} := a^4$, і нехай (див. (3.16)),

$$L_{p+1}(t) = L_{p+1}(F_r; z_1, \dots, z_{p+1}; t) = \sum_{i=1}^{p+1} F_r(z_i) l_i(t),$$

це поліном Лагранжа, що інтерполює функцію F_r у вузлах z_j. Оскільки $F_r(z_{p+1}) = 0$ і для всіх $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$|F_r(z_i) l_i(t)| < c(p)\frac{\delta^p}{\delta^{p-1}(a^4 - p\delta)}\ln\frac{a^4}{\delta}$$

$$\leqslant c(p)\frac{\delta}{a^4}\ln\frac{a^4}{\delta}, \quad t\in[0,1],$$

то можемо вибрати δ настільки малим, щоб виконувалась нерівність

$$\|L_{p+1}\|_{[0,1]} < \min\{\frac{1}{m^r}, \min_{t\in[a^2,1]} F_r(t)\} < 1. \tag{3.50}$$

Використовуючи нерівності (3.18) і (3.15), отримуємо що для $t\in(0,a^2)$ виконується рівність

$$\begin{aligned} F_r(t) - L_{p+1}(t) &= [t, z_1, \ldots, z_{p+1}; F_r](t-z_1)\cdots(t-z_{p+1}) \\ &= \frac{F_r^{(p+1)}(\zeta)}{(p+1)!}(t-z_1)\cdots(t-z_{p+1}) \\ &= \frac{1}{2(p+1)\zeta}(t-z_1)\cdots(t-z_{p+1}), \end{aligned}$$

де $\zeta=\zeta(t)\in(0,a^2)$. Таким чином, покладемо

$$F'(x) := F_r(x^2) - L_{p+1}(x^2) = f_r'(x) - L_{p+1}(x^2), \quad x\in[-1,1],$$

і визначимо функцію F рівністю

$$F(x) := \int\limits_0^x F'(u)du, \quad x\in[-1,1].$$

Маємо, що

$$F'(x)(x^2-z_1)\ldots(x^2-z_{p+1}) \geqslant 0, \quad x\in[-a,a],$$

тобто функція F належить до класу $\Delta^1_{2p+2}[-a,a] = \Delta^1_{r+1}[-a,a]$. З (3.50) отримуємо, що

$$|L_{p+1}(x^2)| < f_r'(x), \quad |x|\in[a,1],$$

з чого, в свою чергу, випливає

$$F\in\Delta^1_{r+1}[-1,1] = \Delta^1_{r+1}.$$

У той же час, з леми 3.4 та нерівності (3.50) отримуємо

$$n^r E_n(F)_{[-1,1]} \leqslant c_3(r). \tag{3.51}$$

Нарешті, якщо $P'_m(x)F'(x) \geqslant 0$, $x \in (-1,1)$, то існує така точка $\theta \in (-a,a)$, що

$$P_m^{(r)}(\theta) = 0.$$

(Насправді, існує навіть дві такі точки.) З леми 3.6 ми отримуємо нерівність

$$\|f_r - P_m\|_{[-1,1]} \geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r},$$

а отже, використовуючи (3.50) ми отримуємо

$$\begin{aligned} \|F - P_m\|_{[-1,1]} \geqslant \|f_r - P_m\|_{[-1,1]} - \frac{1}{m^r} \geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r} - \frac{1}{m^r} \\ \geqslant c(r)\frac{\ln m}{m^r}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

Так само, як і в попередніх доведеннях, якщо ми покладемо $f := \frac{F}{c_3(r)}$, то нерівність (3.48) буде випливати з (3.51), а нерівність (3.49) випливатиме з (3.52). $\square$

Нам також треба окремо розглянути випадок $r = 1$.

Лема 3.10. *Існує така функція* $f \in \Delta_2^1[-1,1]$, *що*

$$nE_n(f) \leqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.53}$$

та

$$mE_m^{1,2}(f) \geqslant c \ln m, \tag{3.54}$$

де $c > 0$.

Доведення. Нам хотілося б використати у доведенні цієї леми функцію f_1, так само як було зроблено в доведенні леми 3.9 (де було використано функції f_r, для $r \geqslant 3$). Однак функція f_1 не є диференційовною в точці

$x = 0$. Тому нам треба модифікувати цю функцію. Нехай l_1 – це дотична до функції f_1' в точці $x = a^2$ і нехай l_2 – це дотична до функції f_1' в точці $x = -a^2$. Тоді $l_1(0) = l_2(0) = -1$. Покладемо

$$\bar{f}'(x) := \begin{cases} f_1'(x), & \text{якщо } a^2 \leqslant |x| \leqslant 1, \\ l_2(x), & \text{якщо } -a^2 \leqslant x \leqslant 0, \\ l_1(x), & \text{якщо } 1 \leqslant x \leqslant a^2, \end{cases}$$

і визначимо

$$\bar{f}(x) := \int_0^x \bar{f}'(u)du.$$

Тепер $\bar{f}$ є неперервно диференційовною функцією на відрізку $[-1, 1]$ і далі доведення повторює міркування леми 3.3 та леми 3.5 з $\bar{f}$ замість f_1, а також міркувань леми 3.9 з $\bar{f}$ замість f_r, $r \geqslant 3$. □

Тепер ми можемо довести аналог леми 3.8 для непарного r.

Лема 3.11. *Нехай $r > 0$ – непарне число і $s > r + 1$ та $b := \frac{\pi}{2} + (s - r - 1)\pi$. Тоді існує така функція $\tilde{f} \in \Delta_s^1[-b, b]$, що*

$$n^r E_n(\tilde{f})_{[-b,b]} \leqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.55}$$

та

$$m^r E_m^{1,s}(\tilde{f})_{[-b,b]} \geqslant c(r, s) \ln m, \tag{3.56}$$

де $c(r, s) > 0$.

Доведення. Нехай

$$F_r := \begin{cases} f_r, & \text{якщо} \quad r \geqslant 3 \\ \bar{f}, & \text{якщо} \quad r = 1, \end{cases}$$

де $\bar{f}$ це функція победована в лемі 3.10. Продовжимо функцію F_r' на інтервал $[1, b]$ так само як це було зроблено у доведенні леми 3.8, а також продовжимо її на інтервал $[-b,-1]$ за рівністю

$$F_r'(x) \;=\; F_r'(-1), \quad x \in [-b,-1].$$

Далі доведення повторює міркування з доведення леми 3.8. $\square$

Тепер ми готові довести теорему 3.2.

Доведення теореми 3.2. Зафіксуємо $s > 0$.

Якщо $\alpha \in A_s$ є непарним, то з означення A_s випливає, що $\alpha + 1 < s$ у випадку непарного s, і $\alpha + 1 \leqslant s$ у випадку парного s. Отже, теорема 3.2 випливає з лем 3.9, 3.10 і 3.11, де ми покладаємо $r = \alpha$.

Якщо $\alpha \in A_s$ – непарне, то $\alpha = 2\ell \leqslant 2s$. У цьому випадку теорема 3.2 випливає з лем 3.7 та 3.8, де ми покладемо $r = \alpha$, звідки $s \geqslant \frac{r}{2}$. $\square$

3.5. Доведення теореми 3.3

Нехай

$$x_j := \cos(j\pi/n), 0 \leqslant j \leqslant n,$$

це вузли Чебишева, та позначимо $J_{j,n} := [x_{j+1}, x_{j-1}]$ та $|J_{j,n}| = x_{j-1} - x_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Доведення теореми 3.3. Доведення оцінки (3.8) будемо вести так само, як і в статті [25]. Спочатку помітимо, що (3.8) легко виводиться з нерівностей

$$E_{r+1}^{1,\sigma}(f)_{J_{j,n}} \leqslant \frac{c(\alpha,s)}{n^\alpha}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{3.57}$$

де $0 \leqslant \sigma \leqslant s$ таке, що $f \in \Delta_\sigma^1[x_{j+1}, x_{j-1}]$ і

$$r := [\alpha] \geqslant 1.$$

Детальніше це спостереження буде обґрунтовано у наступному підрозділі.

Щоб довести (3.57) ми будемо використовувати той факт, що з тверджень [25, теор. 2.1 та 2.2], нерівності (3.3) та нерівностей [27, (3.4) і (3.5)] випливає, що для кожного n:

(a) функція f належить до класу $C^{r-1}(-1,1)$ і

$$\omega_2(f^{(r-1)}, |J_{j,n}|, J_{j,n}) \leqslant \frac{c(\alpha)}{|J_{j,n}|^{r-1} n^{\alpha}}, \quad 2 \leqslant j \leqslant n-2; \tag{3.58}$$

(b) якщо $\alpha \notin \mathbb{N}$, то $f \in C^r(-1,1)$ і

$$\omega(f^{(r)}, |J_{j,n}|, J_{j,n}) \leqslant \frac{c(\alpha)}{|J_{j,n}|^{r} n^{\alpha}}, \quad 2 \leqslant j \leqslant n-2; \tag{3.59}$$

(c) якщо α не є парним числом, то $f \in C^{[\frac{r}{2}]}[-1,1]$ і

$$\omega(f^{([\frac{r}{2}])}, |J_{j,n}|, J_{j,n}) \leqslant \frac{c(\alpha)}{|J_{j,n}|^{[\frac{r}{2}]} n^{\alpha}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1; \tag{3.60}$$

(d) якщо α є парним числом, то $f \in C^{\frac{r}{2}-1}[-1,1]$ і

$$\omega_2(f^{(\frac{r}{2}-1)}, |J_{j,n}|, J_{j,n}) \leqslant \frac{c(\alpha)}{|J_{j,n}|^{\frac{r}{2}-1} n^{\alpha}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{3.61}$$

Поєднуючи нерівності (3.58)-(3.61) з нерівностями (3.22), (3.26) та (3.28), ми отримуємо (3.57) для кожного $\alpha \notin A_s$. Точніше, для $\alpha \notin \mathbb{N}$ маємо (3.57) для всіх j, що випливає з твердження 2.2 та нерівностей (3.59) та (3.60). Для непарних $\alpha \in \mathbb{N}$ таких, що $\alpha > s$, помітимо, що $\alpha \geqslant s+1$, а тому $r-1 \geqslant s$. Отже, для $2 \leqslant j \leqslant n-2$, ми отримуємо (3.57) з нерівностей (3.58) та (3.61), у той час як для $j = 1, n-1$ ми застосовуємо наслідок 2.1 та нерівність (3.60). Для $2 \leqslant j \leqslant n-2$ ми отримуємо (3.57) з (3.58) та (3.61)(оскільки в цьому випадку $r-1 \geqslant s$). Нарешті, для парних $\alpha \geqslant 2s+2$ маємо $r-1 > r/2-1 \geqslant s$, а тому (3.57) випливає з (3.61) та нерівностей (3.58) і (3.61). Залишається лише випадок коли число $\alpha = s$ непарне. Для $j = 1, n-1$, (3.57) випливає з наслідку 3.1 та нерівності (3.60), а для $2 \leqslant j \leqslant n-2$ і $\sigma < s$, (3.57) випливає з наслідку 3.2 та нерівності (3.58). Отже, залишається довести (3.57) для $3 \leqslant j \leqslant n-3$ і $\sigma = s$. У цьому випадку доведення випливає з леми 3.1 для

$$[a_1, b_1] := J_{j-1,n} \cup J_{j+1,n}$$

і $[a,b] := J_{j,n}$.

Доведення завершено. $\square$

3.6. Доведення переходу від (3.57) до (3.8)

Залишається довести, що з нерівностей (3.57) випливає (3.8).

Нехай $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$ і позначимо $C^0_\varphi := C[-1,1]$, а для $r \geqslant 1$ будемо казати, що $f \in C^r_\varphi$ якщо $f \in C^{(r)}(-1,1)$ та $\lim_{x\to\pm1} \varphi^r(x) f^{(r)}(x) = 0$. Нарешті, для $f \in C^r_\varphi$ позначимо

$$\omega^\varphi_{k,r}(f^{(r)}, t) := \sup_{0\leqslant h\leqslant t} \sup_{x:|x|+\frac{kh}{2}\varphi(x)<1} K^r(x, \frac{kh}{2})|\Delta^k_{h\varphi(x)}(f^{(r)}, x)|,$$

де $K(x,\mu) := \varphi(|x| + \mu\varphi(x))$ та симетричну різницю Δ^k_u було визначено в (3.9).

Зауважимо, що для $r = 0$,

$$\omega^\varphi_{k,0}(f,t) \ = \ \omega^\varphi_k(f,t),$$

це k-й модуль гладкості Діціана-Тотіка.

Нагадаємо позначення для вузлів Чебишева

$$x_j := \cos(j\pi/n), 0 \leqslant j \leqslant n,$$

і позначимо $I_j := [x_j, x_{j-1}]$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Зауважимо, що $J_j = I_j \cup I_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Нехай $\Sigma_{k,n}$ це множина усіх неперервних кусково поліноміальних функцій степені $< k$ на Чебишевому розбитті $\{x_j\}_{j=0}^n$. Також позначимо через $\Sigma_{k,n}(Y_s) \subset \Sigma_{k,n}$ множину усіх кусково поліноміальних функцій S з наступною властивістю. Нехай $j(i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, це такий індекс, що $y_i \in I_{j(i)}$. Тоді $S \in \Sigma_{k,n}(Y_s)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $1 \leqslant i \leqslant s$, звуження S на множину

$$O_i \ := \ (x_{j(i)+1}, \, x_{j(i)-2})$$

є поліномом,де $x_{n+l} := -1$, $x_{-l} := 1$. Нарешті, позначимо $O := \bigcup_{i=1}^s O_i$.

Твердження 3.3 (див. [31]). *Для кожного* $k \geqslant 1$ *і* $s \geqslant 0$ *існують такі сталі* $c = c(k,s)$ *і* $c_* = c_*(k,s)$, *що якщо* $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, *і* $S \in \Sigma_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^1(Y_s)$, *де* $n \geqslant 1$, *то*

$$E^{(1)}_{c_* n}(S, Y_s) \ \leqslant \ c\omega^{\varphi}_k(S, 1/n). \tag{3.62}$$

Теорема 3.5. *Нехай дано* $s \in \mathbf{N}$, *і* $\alpha \geqslant 1$. *Припустимо, що функція* $f \in \Delta^1_s$ *така, що* (3.3) *виконується для* $n \geqslant r+1$, *і припустимо, що* f *задовільняє нерівності* (3.57). *Тоді*

$$n^{\alpha} E^{1,s}_n(f) \leqslant c_1(\alpha, s), \quad n \geqslant c_2(\alpha, s) N_0. \tag{3.63}$$

Доведення. Нехай $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$. Очевидно, достатньо довести (3.62) для $E^{(1)}_n(f, Y_s)$ замість $E^{1,s}_n(f)$. Спочатку, покладемо

$$\sigma^{(1)}_{r+1,n}(f) := \inf\{\|f - S\| : S \in \Sigma_{r+1,n}(Y_s) \cap \Delta^1(Y_s)\},$$

і припустимо, що (аналогічно до (3.63)),

$$\sigma^{(1)}_{r+1,n}(f) \leqslant c_3(\alpha, s), \quad n \geqslant N_1. \tag{3.64}$$

Розглянемо $S \in \Sigma_{r+1,n}(Y_s) \cap \Delta_1(Y_s)$ таке, що

$$\|f - S\| \leqslant 2\sigma^{(1)}_{r+1,n}(f, Y_s).$$

Тоді з твердження 3.3 випливає, що

$$E^{(1)}_n(S, Y_s) \leqslant c\omega^{\varphi}_{r+1}(S, \frac{1}{n}), \quad n \geqslant c_*,$$

звідки, в свою чергу, випливає

$$E^{(1)}_n(f, Y_s) \leqslant E^{(1)}_n(S, Y_s) + 2\sigma^{(1)}_{r+1,n}(f, Y_s) \leqslant c\omega^{\varphi}_{r+1}\left(f, \frac{1}{n}\right) + c\sigma^{(1)}_{r+1,n}(f, Y_s),$$

для усіх $n \geqslant c_*$. Оскільки з (3.3) випливає що

$$\omega^{\varphi}_{r+1}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant cn^{-\alpha},$$

нам треба лише перевірити (3.63) для

$$N_1 \geqslant \max\{c_*, c_3(\alpha, s)N_0\},$$

де сталу $c_3(\alpha, s)$ буде визначено пізніше.

Нехай $n \geqslant c_3(\alpha, s)N_0$, і нехай $O_n = \bigcup_{i=1}^{s'} O'_i$ це розбиття O_n на зв'язні інтервали. Спочатку доведемо, що існує таке $m \geqslant n/c_2$, що

(i) for each $1 \leqslant i \leqslant s'$, $O'_i \subset J_{j(i),m}$,

та

(ii) for $i_1 \neq i_2$ we have that either $j(i_1) = j(i_2)$ або

$$\{j(i_1), j(i_1) + 1\} \cap \{j(i_2), j(i_2) + 1\} = \varnothing.$$

Для цього ми будемо вести індукцію за $s' \leqslant s$. Якщо $s' = 1$, то існує усього один блок O'_1 довжини $\leqslant 2s + 1$, тому ми можемо взяти $m = \lceil \frac{n}{2s+1} \rceil$. Якщо ж $s' > 1$, покладемо $n_1 = \lceil \frac{n}{2s+1} \rceil$ і тоді властивість (i) буде виконуватись для $m = n_1$. Якщо властивість (ii) також виконується, то все добре. В іншому разі,

$$O_n = \bigcup_{i=1}^{s'} O'_i \subset \bigcup_{i=1}^{s'} J_{j(i),m} =: \bigcup_{i=1}^{s''} O''_i,$$

це нове розбиття на зв'язні інтервали, де $s'' < s'$. Застосовуючи індуктивне припущення до s'' ми отримаємо бажане значення m. Неважко перевірити, що для цього достатньо $c_3(\alpha, s) \geqslant (2s + 1)^s$.

З (3.57) для відповідного m, для будь-якого $1 \leqslant i \leqslant s'$ існує такий поліном p_i степені r, комонотонний з f на $J_{j(i),m}$, що задовільняє $p_i(x_{j(i)+1,m}) = f(x_{j(i)+1,m})$ і такий, що

$$\|f - p_i\|_{J_{j(i),m}} \leqslant \frac{c(\alpha, s)}{m^\alpha} \leqslant \frac{c_3(\alpha, s)}{n^\alpha}.$$

При $j \neq j(i), j(i) + 1$, $1 \leqslant i \leqslant s'$, функція f є монотонною на $I_{j,m}$, отже, з (3.57), ми отримаємо поліном $\tilde{q}_j$ степеня r, комонотонний з функцією f

на відрізку $I_{j,m}$ такий, що

$$\|f - \tilde{q}_j\|_{I_{j,m}} \leqslant \frac{c_4(\alpha, s)}{n^\alpha}.$$

Додаючи лінійну функцію

$$\begin{aligned} l(x) \ &:= \ (f(x_{j,m}) - \tilde{q}_j(x_{j,m}))\frac{x - x_{j-1,m}}{x_{j,m} - x_{j-1,m}} \\ &\quad + (f(x_{j-1,m}) - \tilde{q}_j(x_{j-1,m}))\frac{x - x_{j,m}}{x_{j-1,m} - x_{j,m}}, \end{aligned}$$

ми отримаємо q_j що все ще є комонотонним з f на $I_{j,m}$, а також інтерполює f на кінцях інтервалу $I_{j,m}$ і задовільняє

$$\|f - q_j\|_{I_{j,m}} \leqslant \frac{3c_4(\alpha, s)}{n^\alpha}.$$

Розглянемо тепер сплайн s_n визначений як p_i на інтервалі $J_{j(i),m}$ і q_j на $I_{j,m}$ для всіх інших інтервалів. Тоді s_n є комонотонним з f і задовільняє

$$\|f - s_n\| \leqslant \frac{c(\alpha, s)}{n^\alpha}.$$

Він може мати точки розриву в $x_{j(i)-1,m}$, але усього існує не більше за s таких точок, тож ми можемо зробити цей сплайн неперервним рухаючись зліва на право і змінюючи (додаючи сталі) його так, щоб $s_n(x_{j(i)-1,m}+) := s_n(x_{j(i)-1,m}-)$. Легко бачити, що остання оцінка все ще буде виконуватись для нового сплайну зі сталою $c_1(\alpha, s) := sc(\alpha, s)$ замість $c(\alpha, s)$. Теорему доведено. □

Висновки до розділу 3

В цьому розділі доведено, що якщо величина найкращого наближення має степеневий порядок, тобто

$$E_n(f) \leqslant n^{-\alpha}, \quad n \geqslant 1,$$

то за умови $\alpha \notin A_s$ величина найкращого комонотонного наближення має той самий порядок

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(\alpha, s) n^{-\alpha}, \quad n \geqslant 1.$$

Множина A_s це скінченна множина

$$A_s := \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant 2\left[\frac{s}{2}\right], \text{ або } j = 2i, 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Наприклад, для $s = 1, 2, \ldots, 5$ маємо

$$\begin{aligned} &A_1 = \{2\}, \\ &A_2 = \{1, 2, 4\}, \\ &A_3 = \{1, 2, 4, 6\}, \\ &A_4 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, \\ &A_5 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}. \end{aligned}$$

Для $\alpha \in A_s$ було побудовано контрприклади, що показують, що така оцінка не може виконуватись, оскільки для кожного $m \geqslant 1$ існує така функція $f \in \Delta^1(Y_s)$ для деякого набору Y_s, що

$$m^\alpha E_m^{1,s}(f) \geqslant c(s) \log m.$$

При цьому, у побудові контрприкладів ми побудували також приклади до іншого питання – величина найкращого наближення функцій поліномами, що мають нуль порядку s в деякій фіксованій точці може бути набагато більше ніж величина найкращого наближення без обмежень за умови, що $\alpha \in A_s$.

РОЗДІЛ 4
СТАЛІ ВІТНІ НАБЛИЖЕННЯ НА БАГАТОВИМІРНОМУ КУБІ

Калтон і Робертс [24] показали, що для отримання оцінок сталих Вітні наближення функцій багатьох змінних є корисним поняття графів-концентраторів. Вони також використали ці графи для побудови наближень майже адитивних функцій адитивними.

Концентратори це клас дводольних графів що мають властивість розширення – для будь-яких досить малих підмножин входів існує не менша кількість виходів, що з ними поєднані. Кількісно ця властивість виражається значеннями чотирьох параметрів (m, p, q, r), де m – число входів, p – число виходів, а числа q та r кількісно виражають якість властивості "розширення" (детальніше означення концентраторів надано нижче).

Піпенгер [39] довів існування $(6m, 4m, 3m, 6)$-концентраторів для будь-якого додатного m за допомогою ймовірнісного методу. В цьому розділі ми узагальнимо його підхід і доведемо існування $(6m, 4m, 3m, 5.05)$-концентратору (він вже не буде регулярним, але він матиме меншу кількість ребер). Застосовуючи цю конструкцію ми покращимо оцінку сталої апроксимації майже адитивних функцій множин адитивними функціями з 44.5 (що було доведено Калтоном і Робертсом в [24]) до 39. Крім того, ми показуємо більш безпосередній зв'язок цієї задачі з задачею типу Вітні з наближення лінійними функціями неперервної функції на кубі в $\mathbb{R}^d$, і покращуємо оцінку на багатовимірну сталу Вітні з 802 (що було доведено Брудним і Калтоном в [6]) до 73.

4.1. Постановка задачі

Нашою початковою мотивацією слугує наступна нерівність типу Вітні для функцій $f \in C([0,1]^d)$, де $C([0,1]^d)$ – це простір усіх неперервних дійснозначних функцій на одиничному кубі $[0,1]^d$:

$$\min_{L} \max_{x \in [0,1]^d} |f(x) - L(x)| \leqslant w_2(d) \max_{x,y \in [0,1]^d} |f(x) + f(y) - 2f((x+y)/2)|,$$

де мінімум береться по всім поліномам L від d змінних степені $\leqslant 1$ (тобто лінійні поліноми). Брудний і Калтон (див. [6]) показали, що $w_2(d) \leqslant 802$ і сформулювали гіпотезу $w_2(d) \leqslant 2$. Ми доведемо, що $w_2(d) \leqslant 73$, а також отримаємо кращі оцінки для багатьох інших апроксимаційних сталих.

Ці оцінки, однак, отримуються з на перший погляд не повязаної комбінаторної задачі про існування деяких концентраторів. Нагадаємо, що (m,p,q,r)-концентратор це дводольний граф з m входами та p виходами, не більш ніж mr ребрами, такий що для будь-якої множини з $k \leqslant q$ входів, існує k неперетинних ребер, що ведуть до деяких k виходів. Використовуючи ймовірнісні міркування, Піпенгер [39] довів, що $(6m,4m,3m,6)$-концентратори існують для будь-якого $m \geqslant 1$. Зменшення середньої степені входів для великих значень m є задачею першорядної важливості у нашому контексті. Основний результат в цьому напрямі це наступна теорема.

Теорема 4.1. *Для будь-якого достатньо великого натурального числа m існує $(6m,4m,3m,5.05)$-концентратор.*

Для доведення, ми будемо використовувати модифікацію підходу Піпенгера, але цей модифікований підхід вимагає більш технічних оцінок. На жаль, цей метод не дає можливості довести, що $(6m,4m,3m,5)$-концентратори існують для всіх достатньо великих m, але на основі деяких чисельних обчислень ми висуваємо гіпотезу, що це насправді так, див. Зауваження 4.1.

Концентратори Піпенгера було використано Калтоном та Робертсом в [24] для доведення наступного результату. Існує така абсолютна стала $K \leqslant 44.5$, що для будь-якої алгебри скінченних множин $\mathfrak{A}$ і будь-якого відображення $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ що задовольняє $|\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant 1$ якщо $A \cap B = \varnothing$, існує така адитивна функція множин $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ (тобто $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для $A \cap B = \varnothing$), що $|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K$ для усіх $A \in \mathfrak{A}$. Зауважимо, що те саме твердження виконується без умови, що елементи $\mathfrak{A}$ мають бути *скінченними* множинами, див. [24, Доведення теореми 4.1, ст. 809]. З теореми 4.1 ми отримаємо наступне покращення.

Наслідок 4.1. $K < 39$.

Оскільки Брудний і Калтон [6] звели задачу оцінювання сталої $w_2(d)$ до задачі оцінювання сталої K, з наслідку 4.1 одразу випливає незначне покращення оцінки на $w_2(d)$. Ми встановимо більш прямий зв'язок між цими двома питаннями і доведемо наступну теорему.

Теорема 4.2. $w_2(d) < 73$.

Використовуючи наслідок 4.1 та теорему 4.2, ми можемо, слідуючи [6], отримати покращення і інших апроксимаційних сталих, включаючи сталу Вітні для одиничних шарів у скінченновимірних ℓ_p-просторах, однорідних сталих Вітні, тощо.

У розділі 4.2, ми сформулюємо основну технічну лему і використаємо її для доведення теореми 4.1. Ми доведемо цю технічну лему у розділі 4.4 звівши її до нелінійної задачі оптимізації, котру ми розв'язали за допомогою комп'ютеру. Доведення наслідку 4.1 та теореми 4.2 знаходиться у розділі 4.3.

4.2. Концентратори

Нехай $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ це біноміальний коефіцієнт, і покладемо $\binom{n}{m} = 0$ при $m < 0$ або $m > n$. Найбільш технічною частиною доведення є наступна лема, котру ми доведемо у розділі 4.4.

Лема 4.1. *Для будь-якого достатньо великого m, за умови $s = \lceil 5.7m \rceil$, виконується нерівність*

$$\sum_{k=1}^{3m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{k}\binom{s}{l}\binom{6m-s}{k-l}\binom{s-4m}{r}\binom{8m-s}{k-r}\frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}} < 1. \tag{4.1}$$

Ця нерівність означає, що ймовірність деякої події, що буде визначено нижче є меншою за 1. З цього випливає існування об'єкту з деякими властивостями (оскільки ймовірність існування такого об'єкту буде строго більше за 1; в цьому і полягає так званий ймовірнісний метод). Покажемо детальніше, використовуючи ідею з [39], як з леми 4.1 випливає основний результат.

Доведення теореми 4.1. Нехай $s = \lceil 5.7m \rceil$, $N := 36m - s$, і $\mathcal{M} := \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Будь-яка перестановка π на множині $\mathcal{M}$ визначає дводольний граф $G(\pi)$ з входами $\{0, 1, \ldots, 6m-1\}$ та виходами $\{0, 1, \ldots, 4m-1\}$, що має ребра

$$(x \mod 6m) \sim (\pi(x) \mod 4m)$$

для довільного $x \in \mathcal{M}$. Всього є $6m - s$ входів степені 6 і s входів кратності 5; $s - 4m$ виходів степені 7 та $8m - s$ виходів степені 8. Загальний середній степінь входу не перевищує

$$\frac{36m - 5.7m}{6m} = 5.05.$$

Так само як Піпенгер, ми хочемо знайти ймовірність того, що випадкова (з рівномірним розподілом) перестановка π є "поганою", тобто для деякого k, де $1 \leqslant k \leqslant 3m$, існує множина A з k входів і множина B з k виходів в $G(\pi)$ такі, що кожне ребро що виходить з A іде в B. Нехай l, де $0 \leqslant l \leqslant k$, це число вершин в множині A що має степінь 5, і нехай r, де $0 \leqslant r \leqslant k$, це число вершин з множини B що мають степінь 7. Тоді A відповідає множині $\mathcal{A}$ з $6(k-l)+5l = 6k-l$ елементів з $\mathcal{M}$, а B відповідає множині $\mathcal{B}$ з $8(k-r)+7r = 8k-r$ елементів з $\mathcal{M}$. Зауважимо, що $\mathcal{A}$ можна вибрати $\binom{s}{l}\binom{6m-s}{k-l}$ способами, а $\mathcal{B}$ можна вибрати $\binom{s-4m}{r}\binom{8m-s}{k-r}$ способами, що відбивається у перших чотирьох факторах (4.1) (для деяких значень k і r один або більше з цих біноміальних коефіцієнтів може виявитись нульовим). Ймовірність того, що перестановка π посилає кожний елемент $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ дорівнює

$$(8k-r)(8k-r-1)\dots((8k-r)-(6k-l)+1)\frac{(N-(6k-l))!}{N!} = \frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{N}{6k-l}} = \frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}}.$$

Це показує, що ймовірність того, що перестановка "погана" є обмеженою зверху лівою частиною нерівності (4.1), і з леми 4.1 слідує, що вона обмежена одиницею. Отже, існує "гарна" перестановка, а отже ми довели існування відповідного концентратора. □

Зауваження 4.1. З деякої точки зору в роботі [39] розглядається випадок $s = 0$, а тут ми намагаємося знайти найбільше можливе значення s для якого твердження залишається вірним. З доведення теореми 4.1 легко бачити, що якщо нерівність (4.1) виконується з $s = 6m$, то існує $(6m, 4m, 3m, 5)$-концентратор. Нехай $s(m)$ це найбільше значення s таке, що нерівність (4.1) виконується. Для невеликих значень m, відношення $s(m)/m$ здається більшим, і насправді, обчислення показують, що $s(m)/m \geqslant 6$ для усіх $m \leqslant 150$ (але не для $m = 151$). При $m \to \infty$, ми маємо $s(m)/m \to c^* \approx 5.72489$, див. Зауваження 4.2. Отже, наше покращення ймовірнісного підходу Піпенгера allows дозволяє довести асимптотичне існування $(6m, 4m, 3m, 5.05)$-концентраторів, але не доводить існування $(6m, 4m, 3m, 5)$-концентраторів для великих m. Тим не менш, здається можливим, що $(6m, 4m, 3m, 5)$-концентратори все таки існують для достатньо великих значень m, оскільки наші методи показують, що випадковий граф з конфігураційного простору майже задовільняє необхідним умовам. Якщо "середній" об'єкт майже задовільняє деяку умову, то можна очікувати, що деякий "найкращий" об'єкт буде "гарним", але цілком можливо, що це твердження потребує зовсім іншого підходу.

4.3. Сталі наближення

Доведення наслідку 4.1. Так само як і в доведенні [24, теор. 4.1, p. 811], ми бачимо, що якщо $(6m, 4m, 3m, \gamma)$-концентратор існує для достатньо великих m, то

$$K \leqslant \frac{7 + 4\gamma - 4/3}{2/3}.$$

Для $\gamma = 5.05$, ми отримуємо $K \leqslant 38.8 < 39$. $\square$

Наступна лема є нескладним узагальненням [24, теор. 4.1] у поєднанні з новими концентраторами; вона використовує сильніші припущення на функцію, але дає кращі оцінки на наближення.

Лема 4.2. *Для довільної алгебри $\mathfrak{A}$ множин і довільного відображення $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ що задовольняє*

$$|\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) - \nu(A \cup B)| \leqslant 1 \quad \text{для довільних } A, B \in \mathfrak{A}, \tag{4.2}$$

і $\nu(\varnothing) = 0$, існує така адитивна функція множин $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, що задовільняє $|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant \widetilde{K}$ для усіх $A \in \mathfrak{A}$, де $\widetilde{K} < 36$.

Доведення. Помітимо, що якщо $\nu(\varnothing) = 0$, то з оцінки (4.2) випливає що для усіх A, B для яких виконується $A \cap B = \varnothing$

$$|\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cup B)| \leqslant 1.$$

Отже, ми можемо міркувати точно так само як і в доведенні [24, теор. 4.1] лише з невеликими змінами котрі ми зараз опишемо. Далі g, a, A і S це такі самі позначення, як і в [24, теор. 4.1]. Ми можемо замінити нерівність $g(A \cap S) \geqslant a - \frac{5}{2}$ на сторінці [24, теор. 4.1, ст. 810] на сильнішу нерівність $g(A \cap S) \geqslant a - \frac{3}{2}$ використовуючи (4.2) для g наступним чином:

$$g(A \cap S) \geqslant g(A) + g(S) - g(A \cup S) - 1 \geqslant \left(a - \frac{1}{2}\right) + a - a - 1 = a - \frac{3}{2}.$$

Тут ми використали $g(A) \geqslant a - \frac{1}{2}$, $g(S) = a$, і $g(A \cap S) \geqslant -a$. Як наслідок, ми можемо замінити сталу $\frac{9}{2}$ на $\frac{7}{2}$ усюди в доведенні [24, теор. 4.1]. Відповідно, якщо $(6m, 4m, 3m, \gamma)$-концентратор існує для достатньо великих m, то

$$\widetilde{K} \leqslant \frac{5 + 4\gamma - 4/3}{2/3}.$$

Отже, з $\gamma = 5.05$, ми отримаємо $\widetilde{K} \leqslant 35.8 < 36$. □

Доведення теореми 4.2. Будемо вважати що

$$\max_{x,y \in [0,1]^d} \left| f(x) + f(y) - 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \right| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4.3}$$

і доведемо, що для деякого лінійного поліному L виконується

$$|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{73}{2}, \quad x \in [0,1]^d.$$

Нехай $\mathfrak{A}$ це алгебра усіх підмножин $\{1, 2, \ldots, d\}$. З кожним елементом $\mathfrak{A}$ можна пов'язати в точності один елемент $\{0,1\}^d$ (множина усіх вершин куба $[0,1]^d$) наступним чином. Для довільного $A \in \mathfrak{A}$ покладемо $\tau(A) = (x_1, \ldots, x_d)$, де $x_j = 1$ якщо $j \in A$, і $x_j = 0$ в іншому випадку. Для довільної функції $f \in C([0,1]^d, \mathbb{R})$ визначимо відображення $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ за формулою

$$\nu(A) = f(\tau(A)) - f(0), \;\; A \in \mathfrak{A}.$$

За припущення (4.3), ми стверджуємо, що виконується оцінка (4.2). Справді, легко бачити, що

$$\tilde{x} := \frac{\tau(A) + \tau(B)}{2} = \frac{\tau(A \cap B) + \tau(A \cup B)}{2} \in [0,1]^d,$$

отже, з нерівності (4.3) слідує

$$\begin{aligned}
|\nu(A) + \nu(B) - &\nu(A \cap B) - \nu(A \cup B)| \\
&= |f(\tau(A)) + f(\tau(B)) - f(\tau(A \cap B)) - f(\tau(A \cup B))| \\
&\leqslant |f(\tau(A)) + f(\tau(B)) - 2f(\tilde{x})|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+|f(\tau(A\cap B))+f(\tau(A\cup B))-2f(\tilde{x})|\\ &\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

Застосовуючи лему 4.2, ми отримуємо адитивну функцію множин μ, що задовольняє $|\nu(A)-\mu(A)|\leqslant 36$ для усіх $A\in\mathfrak{A}$. Помітимо, що з адитивності μ випливає, що лінійна функція

$$\widetilde{L}(x_1,\ldots,x_d):=\mu(\{1\})x_1+\cdots+\mu(\{d\})x_d$$

задовільняє $\widetilde{L}(\tau(A))=\mu(A)$ для усіх $A\in\mathfrak{A}$. Отже, для лінійного полінома L визначеного як $L(x):=\widetilde{L}(x)+f(0)$, ми маємо наступну оцінку у вершинах куба:

$$|f(x)-L(x)|\leqslant 36,\quad x\in\{0,1\}^d.$$

Тепер ми хочемо показати, що з цієї оцінки випливає оцінка для усіх $x\in[0,1]^d$. Нехай

$$|f(\tilde{x})-L(\tilde{x})|=\max_{x\in[0,1]^d}|f(x)-L(x)|.$$

Без обмеження загальності, можемо вважати, що $\tilde{x}\in[0,\frac{1}{2}]^d$ (в іншому випадку, замінимо 0 на деяку іншу вершину куба і виберемо відповідну систему координат). Оскільки $2\tilde{x}\in[0,1]^d$, використовуючи (4.3) і той факт, що

$$L(0)+L(2\tilde{x})-2L(\tilde{x})\ =\ 0$$

отримуємо, що

$$\begin{aligned}2|f(\tilde{x})-L(\tilde{x})|&\leqslant|f(2\tilde{x})-L(2\tilde{x})|+|f(0)-L(0)|+|f(0)+f(2\tilde{x})-2f(\tilde{x})|\\ &\leqslant|f(\tilde{x})-L(\tilde{x})|+36+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Отже, $|f(\tilde{x})-L(\tilde{x})|\leqslant\frac{73}{2}$, що й треба було довести. $\square$

4.4. Доведення леми 4.1

Нам потрібно довести (4.1), тобто

$$\sum_{k=1}^{3m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{k}\binom{s}{l}\binom{6m-s}{k-l}\binom{s-4m}{r}\binom{8m-s}{k-r}\frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}} < 1. \tag{4.4}$$

Позначимо через $a(m,s,k,l,r)$ вираз

$$\binom{s}{l}\binom{6m-s}{k-l}\binom{s-4m}{r}\binom{8m-s}{k-r}\frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}}$$

Таким чином, ми хочемо довести

$$\sum_{k=1}^{3m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{k} a(m,s,k,l,r) < 1.$$

Основна ідея доведення полягає в тому, щоб показати що $a(m,s,k,l,r) \leqslant e^{-cm}$ for some $c > 0$. Це дозволить довести шукану нерівність для усіх достатньо великих m, оскільки у потрійній сумі є лише Cm^3 членів. Ми почнемо з того, що виразимо біноміальні коефіцієнти через більш зручну функцію $h(n,m)$ в лемі 4.3. Потім, ми розглянемо випадок “малих” значень k, тобто $k \leqslant \lceil 2.6m \rceil$, в лемі 4.4. Цей випадок є простішим, оскільки існує проста оцінка зверху на $\sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{k} a(m,s,k,l,r)$ така, що гранична функцію (як функція від k) досягає свого максимуму на границі області визначення. У більш складному випадку $\lceil 2.6m \rceil < k \leqslant 3m$, ми зведемо нерівність до задачі оптимізації деякої функції φ, що буде пояснено в лемі 4.5. Спочатку, ми покажемо використовуючи аналітичні методи, що φ досягає свого максимуму для найбільшого значення k. Після цього ми покажемо, що максимальне значення функції φ за змінними l та r досягається в єдиній критичній точці множини визначення, що задовільняє системі алгебраїчних рівнянь степені 5. Нарешті, ми використовуємо чисельні методи для того, щоб обчислити наближено найбільше значення функції φ.

Позначимо $g(x) := x \log x$, при $x > 0$, і $g(0) := g(0+) = 0$. Нехай $h(x, y) := g(x) - g(y) - g(x - y)$. Зауважимо, що h визначена і неперервна на множині $\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}$, а також

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda h(x, y), \quad \lambda > 0. \tag{4.5}$$

Наступна лема пов'язує біноміальний коефіцієнт $\binom{n}{m}$ з $h(n, m)$.

Лема 4.3. *Для довільного натурального числа* $n \geqslant 1$ *і* $0 \leqslant m \leqslant n$ *виконується нерівність*

$$\frac{1}{5\sqrt{n}} \exp(h(n, m)) \leqslant \binom{n}{m} \leqslant \exp(h(n, m)).$$

Доведення. З формули Стірлінга випливає, що для $n \geqslant 1$

$$\log(n!) = \log(\sqrt{2\pi}) + n \log n + \frac{1}{2} \log n - n + r(n),$$

де $0 < r(n) < \frac{1}{12n}$. Підставляючи це наближення у

$$\log \binom{n}{m} \ = \ \log(n!) - \log(m!) - \log((n - m)!)$$

отримуємо шукану нерівність. □

Оцінимо суму (4.4) для малих значень k.

Лема 4.4. *Існує таке натуральне число* m_0*, що для будь-яких натуральних чисел* $m \geqslant m_0$ *та* $s \leqslant 6m$ *виконується нерівність*

$$\sum_{k=1}^{\lceil 2.6m \rceil} \sum_{l=0}^{k} \sum_{r=0}^{k} \binom{s}{l} \binom{6m - s}{k - l} \binom{s - 4m}{r} \binom{8m - s}{k - r} \frac{\binom{8k - r}{6k - l}}{\binom{36m - s}{6k - l}} < \frac{1}{2} \, . \tag{4.6}$$

Доведення. Для спрощення, покладемо $q = q(m) := \lceil 2.6m \rceil$. Оскільки

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{s}{l} \binom{6m - s}{k - l} = \binom{6m}{k},$$

і

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{s - 4m}{r} \binom{8m - s}{k - r} = \binom{4m}{k},$$

достатньо довести, що

$$\sum_{k=1}^{q} \binom{6m}{k}\binom{4m}{k}\frac{\binom{8k}{5k}}{\binom{30m}{5k}} \;<\; \frac{1}{2}\,.$$

Використовуючи лему 4.3 для $k \leqslant q < 3m$, отримуємо

$$\binom{6m}{k}\binom{4m}{k}\frac{\binom{8k}{5k}}{\binom{30m}{5k}} \;\leqslant\; 5\sqrt{30m}\exp(f(k,m)), \tag{4.7}$$

де

$$f(k,m) := h(6m,k) + h(4m,k) + h(8k,5k) - h(30m,5k).$$

Маємо

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} f(k,m) = \frac{3}{k} + \frac{4}{6m-k} - \frac{1}{4m-k} > 0, \quad k \in (0,3m].$$

Отже, найбільше значення правої частини рівняння (4.7) досягається при $k = 1$ або $k = q$. Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{q} \binom{6m}{k}\binom{4m}{k}\frac{\binom{8k}{5k}}{\binom{30m}{5k}} \;<\; 15\sqrt{30}m^{3/2}\big(\exp(f(1,m)) + \exp(f(q,m))\big). \tag{4.8}$$

Легко бачити, що $\lim\limits_{m\to\infty} m^3 \exp(f(1,m)) = C$ для деякого $C > 0$, а отже $\lim\limits_{m\to\infty} m^{3/2}\exp(f(1,m)) = 0$. Крім того, з (4.5) і неперервності h випливає що

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\frac{f(a,m)}{m}\\ &= h(6,2.6) + h(4,2.6) + h(8\cdot 2.6, 5\cdot 2.6) - h(30, 5\cdot 2.6) < -0.07,\end{aligned}$$

а тому $\lim\limits_{m\to\infty} m^{3/2}\exp(f(q,m)) = 0$. Отже, границя правої частини рівняння (4.8) при $m \to \infty$ дорівнює нулю, і тому вона менша за $\frac{1}{2}$ для достатньо великих m, що й треба було довести. $\square$

Ми зведемо оцінку решти членів (4.1) до деякої задачі оптимізації, яку ми зараз опишемо. Ідея полягає в тому, щоб використати лему 4.3 і (4.5) для отримання асимптотичної поведінки кожного члена в означеній сумі.

Покладемо

$$\begin{aligned}\varphi(c,k,l,r) \;:=\; & h(c,l)+h(6-c,k-l)+h(c-4,r)+h(8-c,k-r)\\ & + h(8k-r,6k-l)-h(36-c,6k-l). \quad (4.9)\end{aligned}$$

Зрозуміло, що при $c = 5.7$ і $k \in [2.6, 3]$ функція φ визначена за умови

$$k+c-6 \leqslant l \leqslant k \quad \text{та} \quad k+c-8 \leqslant r \leqslant c-4. \quad (4.10)$$

Нашу оптимізаційну задачу описано в наступній лемі

Лема 4.5. *Глобальний максимум значення функції φ для $c = 5.7$ і для довільного $k \in [2.6, 3]$ по всім l і r що задовольняють (4.10) є від'ємним числом.*

Доведення. Ми стверджуємо, що глобальний максимум φ для $c = 5.7$ і $k \in [2.6, 3]$ по всім l та r заданим рівнянням (4.10) досягається при $k = 3$. Для того щоб не нагромаджувати формули, ми будемо спочатки вести підрахунки для загального c, а потім підставимо $c = 5.7$ у самому кінці.

Помітимо, що при заміні змінних

$$x = k - l, \quad y = \frac{c-4-r}{4-k},$$

нерівності (4.10) перепишуться як

$$0 \leqslant x \leqslant 6-c \quad \text{та} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Отже, нам тільки потрібно довести, що для довільних x, y, як зазначено вище, виконується

$$\frac{\partial \varphi(c,k,x,y)}{\partial k} \geqslant 0, \quad k \in [2.6, 3].$$

Легко перевірити, що

$$\frac{\partial \varphi(c,k,x,y)}{\partial k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log(c-k+x) - \log(k-x) \\
&\quad + y(\log((4-k)y) - \log(c-4-(4-k)y)) \\
&\quad + (1-y)(\log(4-4y-k(1-y)) - \log(k(1-y)+4+4y-c)) \\
&\quad + \Big[(8-y)\log((8-y)k+4+4y-c) \\
&\quad - (3-y)\log((3-y)k+4+4y-c-x) - 5\log(36-c-5k-x)\Big] \\
&=: D_1(c,k,x) + D_2(c,k,y) + D_3(c,k,y) + D_4(c,k,x,y).
\end{aligned}
$$

Наступні оцінки випливатимуть з монотонності логарифму та оцінок на відповідні змінні. Маємо

$$
\begin{aligned}
D_2(c,k,y) &= \frac{(c-4)}{(4-k)}\frac{(4-k)y}{(c-4)}\left[\log\left(\frac{(4-k)y}{(c-4)}\right) - \log\left(1-\frac{(4-k)y}{(c-4)}\right)\right] \\
&\geqslant \frac{(c-4)}{(4-k)}\frac{(4-k)y}{(c-4)}\left[\log\left(\frac{(4-k)y}{(c-4)}\right)\right] \geqslant -\frac{(c-4)}{e(4-k)},
\end{aligned}
$$

де ми використали той факт що $\min_{t\in(0,1]} t\log t = -1/e$. Аналогічно, маємо

$$
\begin{aligned}
&D_3(c,k,y) \\
&= \frac{(8-c)}{(4-k)}\frac{(4-k)(1-y)}{(8-c)}\left[\log\left(\frac{(4-k)(1-y)}{(8-c)}\right) - \log\left(1-\frac{(4-k)(1-y)}{(8-c)}\right)\right] \\
&\geqslant \frac{(8-c)}{(4-k)}\frac{(4-k)(1-y)}{(8-c)}\left[\log\left(\frac{(4-k)(1-y)}{(8-c)}\right)\right] \geqslant \frac{-(8-c)}{e(4-k)}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, $D_1(c,k,x) \geqslant D_1(c,3,0)$ і аналогічно виконується $D_4(c,k,x,y) \geqslant D_4(c,k,0,y)$. Для фіксованих c і k, ми стверджуємо, що $D_4(c,k,0,y)$ досягає свого мінімуму при $y=1$. Справді,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D_4(c,k,0,y)}{\partial y} &= \log\left(1-\frac{5k}{8k+4-c+(4-k)y}\right) \\
&\quad + \frac{5(4-k)(4-c+4y)}{(3k+4-c+(4-k)y)(8k+4-c+(4-k)y)} \\
&=: S_1(c,k,y) + \frac{S_2(c,k,y)}{S_3(c,k,y)} \leqslant S_1(5.7,2.6,1) + \frac{S_2(5.7,2.6,1)}{S_3(5.7,2.6,0)} \\
&= \log\frac{15}{41} + \frac{16.1}{116.51} < 0.
\end{aligned}
$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}D_4(c,k,0,y) &\geqslant D_4(c,k,0,1)\\ &= 5\log\left(\frac{7k+8-c}{36-c-5k}\right) + 2\log\left(1+\frac{5k}{2k+8-c}\right)\\ &=: T_1(c,k) + T_2(c,k) \geqslant T_1(5.7,2.6) + T_2(5.7,2.6)\\ &= 5\log\frac{20.5}{17.3} + 2\log\frac{20.5}{7.5} > 2.\end{aligned}$$

Підсумовуючи, отримуємо

$$\frac{\partial\varphi(c,k,x,y)}{\partial k} \geqslant D_1(c,3,0) - \frac{(c-4)}{e(4-k)} - \frac{(8-c)}{e(4-k)} + 2 = \log\frac{2.7}{3} - \frac{4}{e} + 2 > 0,$$

а отже $\varphi(5.7,k,x,y) \leqslant \varphi(5.7,3,x,y)$ і тепер ми можемо зосередитись на випадку $k=3$.

Для $c = 5.7$ і $k = 3$ обмеження (4.10) перетворюються в $l \in [2.7, 3]$ і $r \in [0.7, 1.7]$. Щоб знайти критичні точки функції φ всередині області ми обчислимо часткові похідні φ:

$$\frac{\partial\varphi(c,3,l,r)}{\partial l} = \log\left(\frac{(c-l)(3-l)(18-c-l)}{l(3-c+l)(6-r+l)}\right), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\varphi(c,3,l,r)}{\partial r} = \log\left(\frac{(c-4-r)(3-r)(6-r+l)}{r(5-c+r)(24-r)}\right). \tag{4.12}$$

Систему рівнянь

$$\begin{cases}\partial\varphi/\partial l = 0,\\ \partial\varphi/\partial r = 0\end{cases}$$

можна звести до наступного алгебраїчного рівняння степені 5 для l:

$$\begin{aligned}(2c-18)l^5 + (-2c^2-69c+846)l^4 + (-2c^3+123c^2+189c-11448)l^3&\\ +(2c^4+12c^3-2349c^2+14256c+95256)l^2&\\ +(-48c^4+1089c^3+2916c^2-125388c)l + 126c^4-4536c^3+40824c^2 = 0.&\end{aligned} \tag{4.13}$$

Це зведення і деякі подальші підрахунки було виконано за допомогою комп'ютера. При знайденому значені l, r можна отримати з рівняння $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$, яке є лінійним. Таким чином, ми можемо обчислити всі критичні точки чисельно з будь-якою точністю. Зокрема, для $c = 5.7$, ми отримуємо що існує єдина критична точка $(l^*, r^*) \in (2.7, 3) \times (0.7, 1.7)$, і вона задовольняє

$$|l^* - \bar{l}| < 10^{-7}, \quad |r^* - \bar{r}| < 10^{-7},$$

де $(\bar{l}, \bar{r}) = (2.8959102, 1.078108)$ це чисельне наближення до рішення.

Ми хочемо довести, що значення φ в цій критичній точці є від'ємним, тобто $\varphi(5.7, 3, l^*, r^*) < 0$. У наближенні до цієї точки ми маємо $\varphi(5.7, 3, \bar{l}, \bar{r}) < -0.004$, тому достатньо показати, що φ не може сильно змінюватись в околі цієї точки, точніше, нам треба довести що

$$|\varphi(5.7, 3, \bar{l}, \bar{r}) - \varphi(5.7, 3, l^*, r^*)| < 0.004.$$

Це можна зробити оцінюючи часткові похідні функції φ у прямокутнику що містить обидві точки (l^*, r^*) і $(\bar{l}, \bar{r})$, скажімо в прямокутнику $[2.89, 2.9] \times [1.07, 1.08]$. Переписуючи (4.11) і (4.12) через суми логарифмів, використовуючи монотонність логарифму і обмеження $l \in [2.89, 2.9]$ та $r \in [1.07, 1.08]$, легко показати, що

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right| < 10 \quad \text{and} \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right| < 10.$$

Отже, як і треба було довести,

$$|\varphi(5.7, 3, \bar{l}, \bar{r}) - \varphi(5.7, 3, l^*, r^*)| < 20 \cdot 10^{-7} < 0.004.$$

Ми довели, що значення φ у єдиній критичній точці з множини $[2.7, 3] \times [0.7, 1.7]$ є від'ємним.

Залишається показати, що φ не може досягати свого максимуму на границі області $[2.7, 3] \times [0.7, 1.7]$. Справді, з (4.11) слідує, що для довільного фіксованого $r \in (0.7, 1.7)$ виконується

$$\lim_{l \to 2.7^+} \frac{\partial \varphi(5.7, 3, l, r)}{\partial l} = +\infty, \quad \text{and} \quad \lim_{l \to 3^-} \frac{\partial \varphi(5.7, 3, l, r)}{\partial l} = -\infty.$$

Аналогічні міркування можна застосувати і до $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ для фіксованого $l \in (2.7, 3)$. Це завершує доведення леми. $\square$

Нарешті, ми маємо всі необхідні інгредієнти для доведення необхідної оцінки.

Доведення леми 4.1. Зважаючи на лему 4.4, достатньо показати

$$\sum_{k=\lceil 2.6m \rceil+1}^{3m} \sum_{l=0}^{k} \sum_{r=0}^{k} \binom{s}{l} \binom{6m-s}{k-l} \binom{s-4m}{r} \binom{8m-s}{k-r} \frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}} < \frac{1}{2}.$$

Кожний член цієї суми можна оцінити використовуючи лему 4.3 через:

$$\binom{s}{l} \binom{6m-s}{k-l} \binom{s-4m}{r} \binom{8m-s}{k-r} \frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}} < 30\sqrt{m} \exp(\psi(m, s, k, l, r)),$$

де

$$\begin{aligned} \psi(m, s, k, l, r) :=& h(s, l) + h(6m-s, k-l) + h(s-4m, r) + h(8m-s, k-r) \\ &+ h(8k-r, 6k-l) - h(36m-s, 6k-l). \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що $s = s(m) = \lceil 5.7m \rceil$, h є неперервною і використовуючи (4.5), отримуємо

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\psi(m, s, k, l, r)}{m} = \varphi(5.7, k, l, r).$$

Згідно з лемою 4.5, $\varphi(5.7, k, l, r) \leqslant -\delta$, для деякого $\delta > 0$. Отже, для достатньо великих m і деякого $\delta_1 > 0$ маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lceil 2.6m \rceil+1}^{3m} \sum_{l=0}^{k} \sum_{r=0}^{k} \binom{s}{l} \binom{6m-s}{k-l} \binom{s-4m}{r} \binom{8m-s}{k-r} \frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}} \\ < 0.4 \cdot 3^2 \cdot 30 m^{7/2} e^{-\delta_1 m}, \end{aligned}$$

що прямує до нуля при $m \to \infty$, а отже вся сума обмежена згори сталою $\frac{1}{2}$ для усіх достатньо великих m. $\square$

Зауваження 4.2. Позначимо через c^* супремум усіх значень c для котрих твердження леми 4.5 залишається вірним. Неважко показати, що c^* це єдиний розв'язок рівняння

$$\varphi(c, 3, l(c), r(c)) \;=\; 0, \quad c \in [5.7, 6],$$

де φ задано рівнянням (4.9), $l = l(c) \in [2.7, 3]$ і $r = r(c) \in [0.7, 1.7]$ це розв'язок системи рівнянь $\{\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0\}$, див. (4.11), (4.12). Більш ретельні підрахунки показують, що

$$c^* \in (5.724889, 5.72489).$$

Отже, найбільше значення $s = s(m)$ для котрого виконується (4.1) задовольняє $\lim\limits_{m \to \infty} s(m)/m = c^*$. Для спрощення обчислень, ми довели лему для $c = 5.7$, оскільки оптимальне значення сталої c^* дає лише незначне покращення сталих з розділу 4.3.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі ми отримали нові оцінки сталих Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі за допомогою конструкції графів-концентраторів з параметрами $(6m, 4m, 3m, 5.05)$, існування котрих ми довели для всіх достатньо великих значень m.

Конструкція графів використовує так званий ймовірнісний метод. Цей метод полягає в тому, що для того, щоб довести існування об'єкту або класу об'єктів з деякими властивостями, треба розглянути деякий конфігураційний простір з ймовірнісною мірою, точки якого відповідають об'єктам і довести, що множина усіх «гарних» об'єктів має строго додатну міру. В даному випадку, роль ймовірнісного простору відіграє множина всіх перестановок множини $\{1, 2, \ldots, N\}$, кожній з яких ставиться у відповідність деякий граф, що має частину з властивостей концентраторів. Цю конструкцію вперше розглянув Піпенгер в роботі [39], де він довів існування концентраторів з параметрами $(6m, 4m, 3m, 6)$. На відміну від випадку що розглядав Піпенгер, додатність ймовірності для параметрів $(6m, 4m, 3m, 5.05)$ вимагає більш ретельного аналізу відповідної комбінаторної нерівності, що в цьому випадку має вигляд

$$\sum_{k=1}^{3m} \sum_{l=0}^{k} \sum_{r=0}^{k} \binom{s}{l} \binom{6m-s}{k-l} \binom{s-4m}{r} \binom{8m-s}{k-r} \frac{\binom{8k-r}{6k-l}}{\binom{36m-s}{6k-l}} < 1$$

за умови що $s = \lceil 5.7m \rceil$. Використовуючи цей клас графів-концентраторів ми покращили сталу апроксимації майже адитивних функцій адитивними з 45 до 39.

Також ми отримали більш прямий зв'язок між задачею наближення майже адитивних функцій множин адитивними, та наближенням функцій на багатовимірному кубі лінійними функціями. Використовуючи цей зв'язок ми покращили оцінку d-вимірної сталої Вітні $w_2(d)$ з 802 до 73.

РОЗДІЛ 5
ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ СКІНЧЕННИХ КОНФІГУРАЦІЙ НА СФЕРІ

5.1. Постановка задачі

Задача знаходження квадратурних формул на багатовимірних сферах, що мають назву сферичних дизайнів, є дуже важливим розділом сучасної теорії наближень. Добре відомим є той факт, що сферичні дизайни є локальними (і навіть глобальними) мінімумами деяких природних енергетичних функціоналів.

У цьому розділі розглядається питання про структуру локальних максимумів потенційної енергії скінченних конфігурацій точок на багатовимірних сферах. Основний результат це доведення відсутності локальних максимумів для деякої сім'ї природних функціоналів що узагальнюють електростатичний функціонал на звичайній сфері. Це дає відповідь на питання поставлене професором Е. Сафом на конференції «Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds» в університеті Вандербільду в 2010 році.

Для натурального числа $d \in \mathbb{N}$, позначатимемо через S^d сферу одиничного радіусу в $\mathbb{R}^{d+1}$ (таким чином, S^2 це звичайна сфера). Для $\alpha > 0$ і натурального числа $N \geqslant 2$ розглянемо функціонал енергії

$$E_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^\alpha},$$

визначений для довільних попарно різних точок $x_1, x_2, \ldots, x_N \in S^d$, де через $\|\cdot\|$ ми позначаємо норму в евклідовому просторі $\mathbb{R}^{d+1}$.

Для $d = 2, \alpha = 1$ цей функціонал має фізичну інтерпретацію як електростатична потенціальна енергія системи з N однаково заряджених частинок на сфері.

Задача знаходження конфігурацій на сфері, що мінімізують ці функціонали (з фізичної точки зору це так звані стани стабільної рівноваги) є тісно пов'язаною із задачею знаходження рівномірно розподілених наборів точок на сферах і, зокрема, із задачею побудови сферичних дизайнів (див. [42], [4]), а також з задачею знаходження оптимальних сферичних кодів (див. [8]).

Очевидно, що для будь-якого $d \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, і $\alpha > 0$ існує конфігурація з N точок на сфері S^d у якій E_α досягає локального (і навіть глобального) мінімуму. У своїй доповіді на конференції «Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds,» професор Е. Саф поставив питання про існування нестабільних точок рівноваги, тобто чи може E_α мати локальні максимуми.

Наступна теорема дає повну відповідь на це питання у розмірності 2 і часткову відповідь у більших розмірностях, де локальні максимуми не можуть існувати при умові, що стала α є достатньо великою.

Теорема 5.1. *Для будь-якого додатного числа α, що задовольняє нерівність $\alpha \geqslant d-2$, функціонал енергії $E_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_N)$ на d-вимірній сфері S^d не має локальних максимумів.*

Доведення. Для зручності у підрахунках, ми будемо розглядати потенційну енергію $2^{\alpha/2}E_\alpha$, що відрізняється на мультиплікативну сталу $2^{\alpha/2}$. Нехай $\beta = \alpha/2$ і покладемо

$$g_\beta(t) \;=\; (1-t)^{-\beta}.$$

Тоді

$$\frac{2^\beta}{|x_i - x_j|^\alpha} \;=\; g_\beta(\langle x_i, x_j\rangle),$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – це звичайний скалярний добуток $\mathbb{R}^{d+1}$. Функціонал енергії тоді можна переписати як

$$E_\alpha(x_1,\dots,x_N) = \sum_{i\neq j} g_\beta(\langle x_i, x_j\rangle).$$

Розглянемо довільні вектори $h_1, h_2, \dots, h_N$ ортогональні до відповідних векторів x_i (тобто $\langle x_i, h_i\rangle = 0$) і визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за рівнянням

$$f(t) \;=\; E_\alpha\Big(\frac{x_1 + th_1}{|x_1 + th_1|}, \dots, \frac{x_N + th_N}{|x_N + th_N|}\Big).$$

Якщо E_α досягає локального максимуму в точці $(x_1, \dots, x_N)$, то $f'(0) = 0$ і $f''(0) \leqslant 0$ для будь-якого вибору векторів $h_1, h_2, \dots, h_N$. Легко перевірити, що виконується рівність

$$\begin{aligned} f''(0) \;=\; \sum_{i\neq j} \big[&g''_\beta(\langle x_i, x_j\rangle)(\langle x_i, h_j\rangle + \langle x_j, h_i\rangle)^2 \\ &+ g'_\beta(\langle x_i, x_j\rangle)\big(2\langle h_i, h_j\rangle - (|h_i|^2 + |h_j|^2)\langle x_i, x_j\rangle\big)\big]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Таким чином, для того щоб довести, що функціонал E_α не має локальних максимумів, достатньо знайти такі h_i, що (5.1) є строго додатнім. Для цього покладемо

$$h_1 = h, \quad h_2 = h_3 = \ldots = h_N = 0,$$

де h це деякий вектор ортогональний до x_1 і $\|h\| = 1$. Тоді $f''(0)/2$ дорівнює

$$\sum_{j=2}^{N} \big(g''_\beta(\langle x_1, x_j\rangle)\langle x_j, h\rangle^2 - g'_\beta(\langle x_1, x_j\rangle)\langle x_1, x_j\rangle\big). \tag{5.2}$$

Ми доведемо, що існує багато (множина додатної міри) векторів h ортогональних до x_1 для яких вираз (5.2) є додатним. Для цього ми розглянемо середнє значення $f''(0)/2$ (що дорівнює виразу (5.2)) по усім h ортогональним до x_1. Точніше, покладемо

$$H \;=\; \{h \in S^d : \langle x_1, h\rangle = 0\}.$$

Легко бачити, що множина H є $(d-1)$-вимірною сферою. Нехай $\mu = \mu_{d-1}$ – це нормована міра Лебега на множині H (під нормуванням ми маємо на увазі вимогу $\mu(H) = 1$; інакше кажучи, міра μ має бути ймовірнісною). Тоді

$$\int\limits_H \langle x_j, h\rangle^2 \mathrm{d}\mu(h) = \int\limits_H \langle x_j - x_1\langle x_1, x_j\rangle, h\rangle^2 \mathrm{d}\mu(h) = \frac{1 - \langle x_j, x_1\rangle^2}{d},$$

оскільки $x_j' = x_j - x_1\langle x_1, x_j\rangle$ належить H, а $|x_j'|^2 = 1 - \langle x_j, x_1\rangle^2$. Таким чином, інтегруючи (5.2) по H відносно ймовірнісної міри μ ми отримаємо що середнє значення $f''(0)/2$ дорівнює

$$\sum_{j=2}^{N} \left(g_\beta''(\langle x_1, x_j\rangle) \frac{1 - \langle x_1, x_j\rangle^2}{d} - g_\beta'(\langle x_1, x_j\rangle)\langle x_1, x_j\rangle \right). \tag{5.3}$$

Підставляючи $g_\beta(t) = (1-t)^{-\beta}$ в рівняння (5.3) ми отримаємо

$$\sum_{j=2}^{N} \left(\frac{\beta(\beta+1)(1 + \langle x_1, x_j\rangle)}{d(1 - \langle x_1, x_j\rangle)^{\beta+1}} - \frac{\beta\langle x_1, x_j\rangle}{(1 - \langle x_1, x_j\rangle)^{\beta+1}} \right),$$

що дорівнює

$$\frac{\beta}{d} \cdot \sum_{j=2}^{N} \frac{(\beta+1) + (\beta+1-d)\langle x_1, x_j\rangle}{(1 - \langle x_1, x_j\rangle)^{\beta+1}}. \tag{5.4}$$

Оскільки $\alpha \geqslant d-2$, ми маємо, що

$$|\beta + 1 - d| \leqslant \beta + 1,$$

а отже кожний член у рівнянні (5.4) є невід'ємним. Більш того, оскільки точки $x_1, x_2, \ldots, x_N \in S^d$ є різними, ми маємо що $\langle x_1, x_j\rangle < 1$, а отже усі члени є строго додатними. Таким чином, ми довели, що середнє значення $f''(0)$ по $h \perp x_1$ є додатнім числом. Звідси випливає, що множина

$$\{h \in H : f''(0) > 0\}$$

має строго додатну міру, а отже є непорожньою, звідки випливає, що $(x_1, \ldots, x_N)$ не є локальним максимумом E_α. $\square$

Зауважимо, що у випадку звичайної сфери (тобто коли $d = 2$) з наведеного доведення випливає, що властивість відсутності максимумів виконується для E_α для будь-якого значення $\alpha > 0$. Для $\alpha = 0$ природним узагальненням E_α є так званий логарифмічний потенціал

$$E_0(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; -\sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j|.$$

У цьому випадку повторюючи доведення теореми 5.1 з очевидними змінами ми отримуємо наступний результат.

Теорема 5.2. *Нехай* $d = 2$ *і*

$$E_0(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; -\sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j|.$$

Тоді $E_0(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ *не має локальних максимумів.*

Доведення. Якщо покласти

$$g(t) \;=\; -\log(1 - t),$$

то

$$-\log |x_i - x_j| \;=\; -\frac{\log(2)}{2} + \frac{g(\langle x_i, x_j \rangle)}{2},$$

і далі можна повторити доведення теореми 5.1 замінюючи всюди β на 0, а g_β на g. $\square$

Зауваження 5.1. Зауважимо, що у доведенні теореми 5.1 ми не використовували умову стаціонарності $f'(0) = 0$. Крім того, з доведення також випливає, що функціонал енергії завжди можна збільшити змінюючи положення лише однієї з точок на сфері.

Висновки до розділу 5

У цьому розділі було розглянуто питання існування локальних максимумів потенціальної енергії скінченних конфігурацій точок на багатовимірних сферах. Було доведено відсутність локальних максимумів для функціоналів

$$E_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^\alpha},$$

за умови що $\alpha > d - 2$, де d це розмірність сфери. Це дає відповідь на питання поставлене професором Е. Сафом в 2010 році.

Доведення цього факту використовує необхідну локальну умову другого порядку того, що деяка точка є локальним максимумом. Ми довели, що ця умова порушується в деякому напрямі, але доведення існування такого напряму є неконструктивним. Точніше, ми довели, що ця умова порушується на множині дотичних векторів що має строго додатну міру відносно міри Лебега на дотичному просторі.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном, комонотонного наближення на відрізку та оцінки сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі. У роботі також доведено неіснування локальних максимумів функціоналу енергії точок на сфері.

Питання щодо існування наближення відображеннями з невід'ємним якобіаном (теорема Веєрштраса) виявляється пов'язаним з деякими питаннями геометричної топології, а також з відкритими питаннями теорії многовидів. При цьому потреба у використанні поняття топологічної степені відображень якісно відрізняє цю задачу від одновимірної задачі монотонного наближення.

Комонотонне наближення виявляється складнішим за питання щодо монотонного наближення, а крім того питання про мажоризацію за умови степеневого порядку зросту виявляється також не схожим на аналогічні питання коопуклого наближення, оскільки в комонотонному випадку існує нескінченно багато виключних випадків, а для коопуклого наближення таких виключних випадків лише скінченна кількість.

В дисертаційній роботі отримано такі результати.

1) Знайдено умову, яка є необхідною і достатньою для існування послідовності поліноміальних відображень на площині з невід'ємним якобіаном, збіжної до заданого відображення, у випадку, якщо відображення має тотально незв'язні шари. Аналогічну задачу розв'язано для відображень з додатним якобіаном. Обидві задачі розв'язано у двовимірному випадку, а другу задачу також у тривимірному випадку.

2) Доведено, що якщо величина найкращого наближення без обмежень кусково-монотонної функції має степеневий порядок, то вона мажорує величину найкращого комонотонного наближення, за виключенням скінченного числа показників. В усіх виключних випадках побудовано контрприклади.
3) Для всіх достатньо великих m доведено існування графів-концентраторів з параметрами $(6m, 4m, 3m, 5.05)$. За допомогою цих графів суттєво покращено оцінку сталої Вітні лінійного наближення на багатовимірному кубі (попередньо було відомо, що значення сталої менше за 802, а за новим результатом — 73).
4) Доведено, що у випадку степеневої функції з від'ємним показником, потенціальна енергія системи точок на двовимірній сфері не може мати локальних максимумів. За деяких додаткових умов аналогічний результат доведено також для багатовимірних сфер. Крім того, неіснування локальних максимумів доведено також для логарифмічного потенціалу на двовимірній сфері.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alexander, J. W. On the subdivision of 3-space by a polyhedron / J. W. Alexander // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1924. — Vol. 10. — P. 6–8.
2. Bagby, T. Multivariate simultaneous approximation / T. Bagby, L. Bos, N. Levenberg // Constructive Approximation. — 2002. — Vol. 18, no. 4. — P. 569–577.
3. Bing, R. H. An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated / R. H. Bing // Annals of Mathematics. — 1959. — Vol. 69, no. 1. — P. 37–65.
4. Bondarenko, A. Spherical designs via brouwer fixed point theorem / A. Bondarenko, M. Viazovska // SIAM Journal on Discrete Mathematics. — 2010. — Vol. 24, no. 1. — P. 207–217.
5. Bondarenko, A. V. On concentrators and related approximation constants / A. V. Bondarenko, A. Prymak, D. Radchenko // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 402, no. 1. — P. 234–241.
6. Brudnyi, Y. A. Polynomial approximation on convex subsets of R^n / Y. A. Brudnyi, N. J. Kalton // Constructive Approximation. — 2000. — Vol. 16, no. 2. — P. 161–199.
7. Cho, Y. J. Topological Degree Theory and Applications / Yeol Je Cho, Yu-Qing Chen. — CRC : CRC Press, 2006.
8. Cohn, H. Universally optimal distribution of points on spheres / Henry Cohn, Abhinav Kumar // Journal of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 20, no. 1. — P. 99–148.
9. Conway, J. B. Functions of One Complex Variable I / John B. Conway. — New York, NY : Springer New York, 1978. — Vol. 11.

10. DeVore, R. A. Degree of approximation / R. A. DeVore // Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex. — 1976. — P. 117–161.
11. Ditzian, Z. Moduli of Smoothness / Z. Ditzian, V. Totik. — New York, NY : Springer New York, 1987. — Vol. 9 of Springer Series in Computational Mathematics.
12. Donaldson, S. K. Quasiconformal 4-manifolds / S. K. Donaldson, D. P. Sullivan // Acta Mathematica. — 1989. — Vol. 163, no. 1. — P. 181–252.
13. Dzyadyk, V. K. Theory of uniform approximation of functions by polynomials. / Vladislav K. Dzyadyk, Igor A. Shevchuk. — Berlin : de Gruyter, 2008.
14. Dzyubenko, G. A. Piecewise monotone pointwise approximation / G. A. Dzyubenko, J. Gilewicz, I. A. Shevchuk // Constr. Approx. — 1998. — Vol. 14, no. 3. — P. 311–348.
15. Fonseca, I. Degree Theory in Analysis and Applications / Irene Fonseca, Wilfrid Gangbo. — Oxford : Clarendon Press, 1995.
16. Franklin, P. Analytic approximations to topological transformations / Philip Franklin, Norbert Wiener // Transactions of the American Mathematical Society. — 1926. — Vol. 28, no. 4. — P. 762–785.
17. Gilewicz, J. Boundedness by 3 of the whitney interpolation constant / J. Gilewicz, Yu. V. Kryakin, I. A. Shevchuk // Journal of Approximation Theory. — 2002. — Vol. 119, no. 2. — P. 271–290.
18. Gilewicz, J. Comonotone approximation / J. Gilewicz, I. A. Shevchuk // Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika. — 1996. — Vol. 2, no. 2. — P. 319–363.
19. Hatcher, A. Algebraic Topology / Allen Hatcher. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
20. Hirsch, M. W. Differential Topology / Morris W. Hirsch. — New York, NY : Springer New York, 1976. — Vol. 33 of Graduate Texts in Mathematics.

21. Huebsch, W. An explicit solution of the schoenflies extension problem. / W. Huebsch, M. Morse // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1960. — Vol. 12, no. 3. — P. 271–289.
22. Huebsch, W. Schoenflies extensions without interior differential singularities / W. Huebsch, M. Morse // Annals of Mathematics. — 1962. — Vol. 76, no. 1. — P. 18–54.
23. Jackson, D. On approximation by trigonometric sums and polynomials / D. Jackson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1912. — Vol. 13. — P. 491–515.
24. Kalton, N. J. Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions / N. J. Kalton, James W. Roberts // Transactions of the American Mathematical Society. — 1983. — Vol. 278, no. 2. — P. 803–816.
25. Kopotun, K. Are the degrees of best (co)convex and unconstrained polynomial approximation the same? / K. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk // Acta Mathematica Hungarica. — 2009. — Vol. 123, no. 3. — P. 273–290.
26. Kopotun, K. A. Uniform estimates of monotone and convex approximation of smooth functions / K. A. Kopotun // Journal of Approximation Theory. — 1995. — Vol. 80, no. 1. — P. 76–107.
27. Kopotun, K. A. Convex polynomial approximation in the uniform norm: Conclusion / K. A. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk // Canadian Journal of Mathematics. — 2005. — Vol. 57, no. 6. — P. 1224–1248.
28. Leviatan, D. Pointwise estimates for convex polynomial approximation / D. Leviatan // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1986. — Vol. 98, no. 3. — P. 471–474.
29. Leviatan, D. Positive results and counterexamples in comonotone approximation / D. Leviatan, D. V. Radchenko, I. A. Shevchuk // Constructive Approximation. — 2012. — Vol. 36, no. 2. — P. 243–266.
30. Leviatan, D. Monotone approximation estimates involving the third modulus of smoothness / D. Leviatan, I. A. Shevchuk // Chui, C.K., Schumaker,

L.L. (eds.) Approx. Theory IX, Vanderbilt University Press, Nashville. — 1998. — P. 223–230.

31. Leviatan, D. Some positive results and counterexamples in comonotone approximation, II / D. Leviatan, I. A. Shevchuk // Journal of Approximation Theory. — 1999. — Vol. 100, no. 1. — P. 113–143.
32. Leviatan, D. More on comonotone polynomial approximation / D. Leviatan, I. A. Shevchuk // Constructive Approximation. — 2000. — Vol. 16, no. 4. — P. 475–486.
33. Lorentz, G. G. Degree of approximation by monotone polynomials I / G. G Lorentz, K. L Zeller // Journal of Approximation Theory. — 1968. — Vol. 1, no. 4. — P. 501–504.
34. Lorentz, G. G. Degree of approximation by monotone polynomials II / G. G Lorentz, K. L Zeller // Journal of Approximation Theory. — 1969. — Vol. 2, no. 3. — P. 265–269.
35. Matsumoto, Y. An Introduction to Morse Theory / Yukio Matsumoto. — [S. l.] : American Mathematical Society, 2002.
36. Moise, E. E. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 / Edwin E. Moise ; Ed. by P. R. Halmos. — New York, NY : Springer New York, 1977. — Vol. 47 of Graduate Texts in Mathematics.
37. Nash, J. C1 isometric imbeddings / John Nash // Annals of mathematics. — 1954. — P. 383–396.
38. Newman, D. J. Efficient co-monotone approximation / D. J. Newman // Journal of Approximation Theory. — 1979. — Vol. 25, no. 3. — P. 189–192.
39. Pippenger, N. Superconcentrators / N. Pippenger // SIAM Journal on Computing. — 1977. — Vol. 6, no. 2. — P. 298–304.
40. Radchenko, D. V. Local maxima of the potential energy on spheres / D. V. Radchenko // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 65, no. 10. — P. 1427–1429.

41. Radchenko, D. V. Approximation by maps satisfying first-order differential inequalities / D. V. Radchenko // 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky November 9–11, 2016: Book of abstracts. — Kyiv : 2016. — P. 158.
42. Saff, E. B. Distributing many points on a sphere / E. B. Saff, A. B. J. Kuijlaars // The Mathematical Intelligencer. — 1997. — Vol. 19, no. 1. — P. 5–11.
43. Sendov, B. On the constants of h. whitney / Bl. Sendov // C. R. Acad. Bulgare. Sci. — 1982. — Vol. 35. — P. 431–434.
44. Sendov, B. On the theorem and constants of h. whitney / Bl. Sendov // Constr. Approx. — 1987. — Vol. 3. — P. 1–11.
45. Shisha, O. Monotone approximation. / O. Shisha // Pacific Journal of Mathematics. — 1965. — Vol. 15, no. 2. — P. 667–671.
46. Smale, S. Diffeomorphisms of the 2-sphere / Stephen Smale // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1959. — Vol. 10, no. 4. — P. 621–626.
47. Stoïlow, S. Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques / Simion Stoïlow. — Paris : Gauthier-Villars, 1956.
48. Titus, C. J. The extension of interiority with some applications / C. J. Titus, G. S. Young // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — Vol. 103. — P. 329–340.
49. Whitney, H. On the functions with bounded n-differences / H. Whitney // J. Math. Pures Appl. — 1957. — Vol. 36. — P. 67–95.
50. Whyburn, G. T. Topological Analysis / Gordon Thomas Whyburn. — Princeton : Princeton University Press, 1958.
51. Радченко, Д. В. О приближении отображениями с неотрицательным якобианом / Д. В. Радченко // Математические заметки. — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 263–275.

52. Радченко, Д. В. Наближення відображеннями з додатнім якобіаном у тривимірному просторі / Д. В. Радченко // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2016. — Т. 35, № 1. — С. 6–8.

53. Радченко, Д. В. Про існування наближення відображеннями з додатним якобіаном / Д. В. Радченко // XXIV Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція «Ключові проблеми сучасної науки», 15–30 вересня 2016 р.: Тези допов. — Дніпропетровськ : 2016. — С. 88.

54. Шведов, А. С. Коприближение кусочно-монотонных функций многочленами / А. С. Шведов // Матем. заметки. — 1981. — Т. 30, № 6. — С. 839–846.

55. Шведов, А. С. Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами / А. С. Шведов // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 1. — С. 117–130.