ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Радченка Данила Віталійовича

"Багатовимірне формозберігаюче наближення",

поданої до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата

фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Роботу можна умовно розділити на три блоки. Перший з них стосується власне формозберігаючого наближення і є базовим в дисертації. Термін "формозберігаюче наближення" увійшов в математичну літературу разом із постановкою і розв'язанням тих задач теорії апроксимації функцій однієї дійсної змінної, визначеної, наприклад, на відрізку $[a, b]$, в яких як сама функція так і апроксимуючий її агрегат (наприклад, алгебраїчний поліном) мають бути підпорядковані певним умовам поведінки на $[a, b]$, що описують їх "форму". До таких умов відносять, зазвичай, монотонність, опуклість, кускову монотонність (комонотонність) і т.п. Більшість із цих умов характеризується значеннями (знаком) першої чи другої похідних функції на підмножинах відрізка $[a, b]$ чи глобально — на всьому відрізку.

Теорія формозберігаючого наближення започаткована в 60-х роках минулого століття в роботах Г. Лоренца, К. Целлера, Д. Ньюмана, О. Шиша та інших. Для функцій f неперервних і монотонних на відрізку $[a, b]$ було з'ясовано як збереження форми, тобто монотонність наближаючого алгебраїчного полінома, впливає на оцінку наближення функції f і які параметри гладкості функції f є визначальними в цих оцінках в порівнянні з класичним наближенням без обмежень. Наразі цей напрям теорії наближення досить інтенсивно розвивається і поповнюється новими цікавими результатами. Водночас залишались не з'ясованими чимало питань, пов'язаних, зокрема, із так званим комонотонним наближенням. Перші результати тут отримані Д. Ньюманом, а в подальшому доповнені, зокрема, роботами Я. Гілевіча, Г.А. Дзюбенка та І.О. Шевчука і Я. Гілевіча та І.О. Шевчука. Відповіді на деякі із питань містяться серед результатів дисертаційної роботи.

При переході до функцій кількох дійсних змінних чи навіть відображень із $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ коло задач значно розширюється. Природно у випадку $m = n$ до опису "форми" відображення залучити поняття “якобієва матриця” і “якобіан” (по аналогії з поняттям “похідна”) та інші характеристики, які б залишались змістовними і у випадку функцій однієї змінної, тобто для відображень із $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$. Вихідною в цьому випадку є задача про можливість наближення відображень $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданих на компактах в $\mathbb{R}^n$, відображеннями, що мають певну гладкість. Аналіз попередніх досліджень в цьому напрямку показує, що як метод розв'язання подібного типу задач, так і результат, суттєво залежать від структури компакту на якому визначені відображення, від розмірності n і, зрештою, від заданих обмежень на саме відображення f. Вагомі результати отримані в дисертаційній роботі є суттєвим доповненням цих досліджень.

Щодо другого блоку досліджень дисертаційної роботи зазначимо наступне. Задача про оцінку по параметру k величин $W(k)$ (так званих сталих Вітні), які фігурують в добре відомій нерівності Вітні виникла із потреб практичних застосувань цієї нерівності в різноманітних напрямах теорії наближень. Список імен математиків, яким вдалось вказати чи уточнити (звузити) межі для сталих $W(k)$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ чи для окремих значень параметра k досить довгий: Х. Вітні, Ю.А. Брудний, Бл. Сендов, К. Іванов, М. Такєв, П. Бунєв, Ю.В. Крякін, ...

Що стосується функцій, визначених на множинах простору R^d, $d \geq 2$, наприклад, на одиничному кубі, то навіть встановлення формальних аналогів нерівностей типу нерівності Вітні, і не лише для наближень в рівномірній метриці, вимагало певних зусиль. Адже навіть зрозумілі обмеження, що виникають при використанні ключових термінів, таких, наприклад, як модуль гладкості, потребують певного корегування самої форми нерівності Вітні. Відповідні до цього результати можна знайти в роботах Ю.А. Брудного, Х. Йонела, К. Шерера, М. Такєва, Е.О. Стороженко, П. Освальда та інших. А наступним кроком (аналогічно випадку $d = 1$) є власне задача про оцінку сталих в таких нерівностях.

Третій блок досліджень має певний зв'язок з квадратурними формулами для функцій визначених на одиничних сферах $\mathbb{S}^{N-1}$ евклідового простору $\mathbb{R}^N$ (множину вузлових точок на сфері в таких формулах називають сферичними дизайнами). Тут залишаються відкритими багато питань, пов'язаних, в першу чергу, з визначенням структури і “масивності” сферичних дизайнів. Навіть незначний просув в розв'язанні відомих в цьому напрямку задач є успіхом з огляду на важливість квадратурних формул в застосуваннях.

Зважаючи на викладене, тематика дисертаційної роботи поза сумнівом є актуальною.

2. Зміст та наукова новизна результатів. Дисертаційна робота складається зі вступу, 5-ти розділів та висновків.

У вступі, з метою обгрунтування теми, описано коло задач, які розв'язані, вказано на місце одержаних результатів в окремих напрямах теорії наближень, а також достовірно зазначено про особистий внесок здобувача в роботах, що увійшли до дисертації і опубліковані у співавторстві. Наведено список наукових конференцій та семінарів на яких доповідались результати досліджень.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертації, сформульовано основні результати. На мою думку цей огляд є не повним; в ньому лише частково відображена історія питання стосовно розділу "Сталі Вітні наближення на багатовимірному кубі" і зовсім не містить історії питання щодо розділу 5. Щоправда, цей недолік дещо компенсується при викладі матеріалу всередині розділу 5. Водночас тут значна увага приділена висвітленню властивостей такої характеристики як "топологічна степінь", а також теоремам Шенфліса, які є безумовно важливими в роботі, але могли б бути викладені в інших відповідних їм розділах. Для повноти висвітлення історії питання до розділу 4 не зайвим було б, на мій погляд, доповнити список використаних джерел монографією І.О. Шевчука "Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций" (1992 р.), де цілий параграф є дотичним до окреслених в цьому розділі задач.

У другому розділі, який на мій погляд є основним, сформульовано та доведено нові результати щодо якісного наближення неперервних відображень певного типу, заданих на обмежених областях евклідових просторів R^2 та R^3, за допомогою гладких та поліноміальних відображень, що мають невід'ємний якобіан (теореми 2.1–2.4). До характеризації необхідних та достатніх умов такого наближення дисертант залучає одну із топологічних характеристик відображень загального виду — топологічну степінь відображення.

Основний результат третього розділу (теорема 3.2) є в певній мірі несподіваним і незвичним з точки зору виявлення “особливих” значень показника α, але безумовно цікавим для спеціалістів в галузі теорії формозберігаючого наближення.

Однак змушений зауважити, що формулювання результатів (лем та теорем) із цього розділу не є бездоганним. Ймовірно з метою компактного запису формулювань автор означає на с. 67 величину $E_n^{1,s}(f)$, яка допускає неоднозначне трактування. Адже згідно з попередніми означеннями вихідною є саме множина Y_s, а функція f строго пов'язана з нею своїми властивостями (див. означення величини $E_n^{(1)}(f, Y_s)$). Це ускладнює розуміння результатів до моменту повного ознайомлення з їх доведеннями.

У четвертому розділі дисертації для неперервної на $[0,1]^d$ функції f доведено нерівність типу нерівності Вітні, подану у формі Калтона і Брудного зі сталою $\omega_2(d)$, що дорівнює 73 (див. теорему 4.2 в авторефераті). Раніше Н. Калтон і Ю.А. Брудний показали, що $\omega_2(d) \leq 802$. Для встановлення результату автор використовує (певним чином модернізуючи) методи, пов'язані з вивченням так званих коцентраторів, які, як виявилось раніше, знайшли своє застосування, зокрема, і в задачі про наближення майже адитивних функцій множин адитивними.

Стосовно даного розділу є наступні зауваження. Формулювання (за виглядом), а зрештою і результат теореми 4.2 в дисертації на с. 100 і теореми 4.2 в авторефераті не узгоджені. Так в теоремі 4.2 дисертації, виходячи із загального виду нерівності, стверджується, що $\omega_2(d) < 73$, а в теоремі 4.2 автореферату — $\omega_2(d) = 73$. На с. 114 замість “φ задано рівнянням (4.9)”, напевно, слід писати “φ визначено за формулою (4.9)”.

У п'ятому, заключному розділі дисертації, встановлені результати щодо наявності (чи відсутності) локальних максимумів у певних функціоналів, визначених на довільній множині N точок одиничної сфери $\mathbb{S}^d$ простору $\mathbb{R}^{d+1}$. Ці результати подаються у вигляді теорем 5.1 та 5.2.

3. Обгрунтованість та достовірність результатів дисертації. Результати є новими і складають важливе доповнення до теорії наближення функцій. Всі твердження супроводжуються достатньо повними і з належним рівнем математичної строгості доведеннями.

4. Зауваження.

1. Означення в основному тексті дисертації не завжди узгоджені по змісту з тими які винесені в титул "Перелік умовних позначень", наприклад, див. означення $E_n^{(1)}(f)$ (с.15), Δ^1 (с.15), $\Delta^1(Y_s)$ (с.16) і т.д.

2. До кожного розділу наведено висновки, що характеризують основні результати дослідження, але не завжди вказано де ці результати опубліковані (див., наприклад, с. 12).

3. Часто незрозумілим за суттю, з математичної точки зору, є зміст окремих фраз. Наприклад, "наближення існує не завжди", с. 7; "незрівнянно більші", с. 8; "дозволяється наближувати", с. 16; "значно покращується оцінка на сталу Вітні (з 802 до 73)", с. 13; "степінь ... як функція p є постійною", с. 19; "негативні результати", с.51 і далі за текстом; "f лежить у так званому класі Бабенко", с. 71; "підставимо нерівність (3.25) в тотожність (3.18)", с. 75; "це разом з (3.45) гарантує, що L перетинає функцію f", с. 86; "наступне покращення" (с. 100); "...задачі оптимізації, котру ми розв'язали за допомогою комп'ютеру" (с. 100); "оскільки ймовірність існування такого об'єкту буде строго більше за 1" !!!? (с. 101).

4. Деякі із означень базових понять, таких як "якобіан" (с. 23), "поліноміальне відображення" (с. 26), "топологічна степінь" (с. 26–29)..., наведені без достатнього рівня математичної строгості.

5. На с. 21 допущені неточності у визначенні так званих інтерполяційних сталих Вітні $W_I(k)$.

6. Вираз "стала Вітні обмежена числом $(2k)^{2k}$" на мій погляд є не зовсім математично коректним, адже величина (а не число!) $(2k)^{2k}$ залежить від k.

7. На с. 35, в доведенні теореми 2.6, автор пише: "розглядаючи $r = \alpha/2c$ де $\alpha \leq 1$ отримуємо". Як же це узгоджується з тим, що на попередній сторінці стверджується, що "c не залежить від r"?

8. На с. 17 при посиланні на статті перелік імен їх авторів за порядком відрізняється від того що є в самих публікаціях.

9. На с. 15 в доведенні другого зверху співвідношення спочатку необхідно стверджувати, що $P' \geq 0$, а вже потім, що справджується наведена вище нерівність, яка справедлива саме за виконання цієї умови.

10. На с. 16 замість $\omega_k(f, t, [a, b])$ має бути $\omega_k(f, h, [a, b])$; на с. 72 зверху замість y_i має бути u_i. На с. 73 в (3.21) і на початку доведення , а також на с. 74 в формулюванні твердження 3.2 замість r має бути l.

11. На с. 70 є неточності в означенні скінченних різниць та модулів гладкості, зокрема, не вказано межі допустимих значень параметра h; замість Δ_h має бути Δ_h^1.

12. В тексті дисертаційної роботи зустрічаються англомовні слова, а то й цілі фрази (див. с. 51, 95, 102, 106).

5. Публікації та апробація результатів. Всі результати дисертації опубліковані у вигляді 5-ти статей у вітчизняних та закордонних наукових виданнях і пройшли відповідну апробацію на засіданнях фахових семінарів та доповідалися на наукових конференціях. Автореферат достатньо повно і адекватно відображає зміст дисертації.

6. Практичне значення результатів. Дисертаційна робота Радченка Д.В. містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а її результати в значній мірі доповнюють три окремі розділи сучасної теорії функцій. Деякі із результатів не є завершеними в даній постановці задач, а отже пошук нових чи вдосконалення вже відомих методів для їх повного і остаточного розв'язання може стимулювати подальший розвиток певних напрямків теорії наближення.

7. Висновки. Наведені вище зауваження, на думку опонента не впливають, в цілому, на позитивну оцінку одержаних в дисертації результатів. З огляду на обсяг проведених досліджень, їх актуальність, новизну результатів та повноту їх доведень, вважаю, що дисертаційна робота "Багатовимірне формозберігаюче наближення", задовольняє вимоги пп. 9, 11-13 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету міністрів № 567 від 24.07.2014 (зі змінами) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Радченко Данило Віталійович заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Старший науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України
кандидат фіз.-мат. наук В. С. Романюк

Національна академія наук України
Інститут математики
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ

Підпис
ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
« 3 » березня 2017 р.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 3.03.2017р.
секретар ради /Артеменко Ж.Я./

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія