НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПАФИК Сергій Петрович

УДК 517.928

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З ВИРОДЖЕННЯМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Яковець Василь Павлович,
Державний вищий навчальний заклад
«Університет менеджменту освіти» НАПН України,
завідувач кафедри менеджменту освіти, економіки та маркетингу
Центрального інституту післядипломної педагогічної освіти

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Бойчук Олександр Андрійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії крайових задач
теорії диференціальних рівнянь

кандидат фізико-математичних наук
Тарасенко Оксана Володимирівна,
Ніжинський державний педагогічний університет імені Миколи Гоголя,
в. о. завідувача кафедри вищої математики

Захист відбудеться 13 жовтня 2015 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 01601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розіслано 10 вересня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Починаючи з другої половини 1970-х років, увагу дослідників привернули системи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних, у яких при старших похідних міститься тотожно вироджена матриця. Інтерес до вивчення таких систем обумовлений тим, що до них зводяться математичні моделі багатьох технічних, фізичних, біологічних, економічних та інших процесів. Особливо часто на практиці зустрічаються математичні моделі різних фізичних явищ, які описуються так званими гібридними системами, де частина рівнянь – диференціальні, а частина – алгебраїчні. Такі системи також належать до систем даного типу, які найчастіше називають диференціально-алгебраїчними або виродженими.

На даний час кількість наукових робіт, присвячених дослідженню вироджених систем диференціальних рівнянь, є досить великою, і їх кількість продовжує зростати. Найбільш вагомі результати отримано впродовж 1980 – 2010 рр. у роботах вітчизняних математиків А.М. Самойленка, В.П. Яковця, М.І. Шкіля, О.А. Бойчука, В.Г. Самойленка, П.Ф. Самусенка та ряду зарубіжних: S.L. Campbell, R.L. Petzold, C.W. Gear, K.E. Brenan (США), E. Griepentrong, R. Maerz (Німеччина), Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.О. Щеглової (Російська Федерація) та ін.

При цьому основні зусилля були направлені на дослідження лінійних систем

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

де $x(t)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(t)$, $B(t)$ – квадратні матриці n-го порядку. У результаті було встановлено, що загальний розв'язок системи (1) має найпростішу структуру (типу Коші), коли ця система зводиться до так званої центральної канонічної форми (ЦКФ), поняття якої було введено в 1983 р. S.L. Campbell і R.L. Petzold. Пізніше в роботах А.М. Самойленка і В.П. Яковця було знайдено умови, за виконання яких система (1) зводиться до ЦКФ, що дозволило встановити структуру її загального розв'язку та умови однозначної розв'язності відповідної початкової задачі. Деякі умови звідності системи (1) до ЦКФ було встановлено також у роботах Ю.Є. Бояринцева і В.Ф. Чистякова.

Ці результати дали можливість В.П. Яковцю узагальнити класичну теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, започатковану G. Birkhoff і Я.Д. Тамаркіним і розвинуту в працях Х.Л. Территіна, В. Вазова, С.Ф. Фещенка, М.І. Шкіля, Г.С. Жукової, І.І. Старуна та ін. на сингулярно збурені системи вигляду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{2}$$

в яких ε – малий параметр, а матриця $B(t,\varepsilon)$ або тотожно вироджена, або вироджується при $\varepsilon \to 0$.

Проте на практиці досить часто доводиться мати справу з системами диференціальних рівнянь вищих порядків, які у векторно-матричний формі можна подати у вигляді

$$A_m(t)\frac{d^m x}{dt^m} + A_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \cdots + A_1(t)\frac{dx}{dt} + A_0(t)x = f(t). \quad (3)$$

При цьому матриця $A_m(t)$ при старшій похідній буде тотожно виродженою, якщо серед рівнянь, які утворюють систему (3), містяться рівняння різних порядків.

Розглядаючи такі системи, різні автори, як правило, намагаються звести їх до системи вигляду (1) за допомогою відповідної заміни, що призводить до зростання розмірності системи, а це значно ускладнює її дослідження, результати якого всеодно треба виражати в термінах матриць $A_i(t)$, $i = \overline{0,m}$, вихідної системи (3).

У зв'язку з цим доцільним є розроблення загальної теорії системи рівнянь вищих порядків вигляду (3), а також аналогічної сингулярно збуреної системи

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \quad (4)$$

в якій матриця $A_m(t,\varepsilon)$ тотожно вироджена або вироджується при $\varepsilon = 0$.

На даний час системи вигляду (4) детально вивчені лише при $m = 2$. Для довільного m розглядалися лише окремі частинні випадки за умови, що матриця при старших похідних одинична. Тому тема даної дисертації є досить важливою і актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконувалась у Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Фізико-математичного інституту згідно із загальним планом досліджень в рамках наукової теми "Асимптотичне інтегрування вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь"(номер державної реєстрації 0110U001582).

Мета і завдання дослідження.

Основним об'єктом дослідження є лінійна сингулярно збурена система звичайних диференціальних рівнянь вигляду (4).

Предметом дослідження є асимптотичні властивості розв'язків системи рівнянь (4) при $\varepsilon \to 0$.

Мета дисертаційного дослідження полягає в розробці теорії асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь даного типу.

Завдання дослідження:

1. Знайти умови, за виконання яких система рівнянь вищих порядків вигляду (3) має загальний розв'язок типу Коші, і визначити його структуру. Дослідити питання існування і єдиності розв'язку відповідної початкової задачі.

2. Здійснити асимптотичний аналіз загального розв'язку системи рівнянь (4) за умови регулярності граничної в'язки матриць $\sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i(t, 0)$ на заданому проміжку зміни t у різних випадках, пов'язаних з кронекеровою структурою її спектра.

Методи дослідження. Для реалізації завдань дослідження використовується теорія поліноміальних в'язок матриць, техніка узагальненого обернення матриць, метод діаграм Ньютона та асимптотичні методи лінійної теорії сингулярних збурень.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, що відображають наукову новизну, є наступні:

1. Знайдено достатні умови, за виконання яких система рівнянь (3) має загальний розв'язок типу Коші, і визначено його структуру. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку відповідної початкової задачі.

2. Досліджено питання побудови асимптотики при $\varepsilon \to 0$ загального розв'язку однорідної системи

$$\varepsilon^{mh} A_m(t, \varepsilon) \frac{d^m x}{dt^m} + \varepsilon^{(m-1)h} A_{m-1}(t, \varepsilon) \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + \varepsilon^h A_1(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + A_0(t, \varepsilon) x = 0, \quad (5)$$

яка відповідає (4), за умови регулярності граничної в'язки матриць.

Визначено вигляд і розроблено алгоритм побудови відповідних асимптотичних розв'язків даної системи у всіх можливих випадках стабільної поведінки спектра граничної в'язки матриць.

3. У випадку, коли гранична в'язка матриць має по одному кратному скінченному та нескінченному елементарному дільнику, виведено відповідні рівняння розгалуження і здійснено їх аналіз з використанням методу діаграм Ньютона. Використовуючи його результати, проведено повне дослідження структури асимптотичних розв'язків системи (5) залежно від поведінки її коефіцієнтів.

4. Побудовано асимптотику частинного розв'язку неоднорідної системи (4) в нерезонансному та резонансному випадках.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані результати мають теоретичний характер. Вони узагальнюють результати, отримані для вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь першого порядку, на аналогічні системи рівнянь вищих порядків.

Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості їх застосування для розв'язання конкретних прикладних задач, математичні моделі яких зводяться до систем даного типу.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертації одержано здобувачем особисто. У спільних роботах з науковим керівником В.П. Яковцю належить постановка задачі та обговорення результатів, автору дисертації – проведення досліджень та доведення всіх тверджень.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на:

– Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 70-річчю проф. В. В. Маринця (м. Ужгород, вересень 2012 р.);

– Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", присвяченій 80-річчю доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка НАПН Граїни Шкіля Миколи Івановича (м. Київ, грудень 2012 р.);

– XVI International Conference "Dynamical system: modelling and stability investigation"(c. Kyiv, may 2013);

– Міжнародній науковій конференції "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (м. Севастополь, червень 2013 р.);

– "Летней матиматичекой школе В. Плотникова"(м. Одеса, липень 2013 р.);

– Міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (м. Київ, квітень 2014 р.);

– XV міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, травень 2014 р.);

– науковому семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рінянь Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова (науковий керівник доктор фіз.-мат. наук, проф. Торбін Г.М.) (2014–2015 рр.);

– звітних наукових конференціях НПУ імені М. П. Драгоманова (2012–2015 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 11 працях, 5 з яких – статті в провідних наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань, затверджених ДАК України, і 6 – тези доповідей на наукових конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, які об'єднують 18 підрозділів, списку використаних джерел із 125 найменувань та додатку. Повний обсяг дисертації становить 191 сторінку друкованого тексту, основний зміст викладено на 165 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У ***вступі*** обгрунтовується актуальність теми, сформульовано мету і завдання дослідження, розкрито наукову новизну, теоретичне і практичне значення, наведено перелік наукових конференцій, на яких доповідались і обговорювались результати десертаційної роботи.

Перший розділ присвячено огляду наукових праць за темою дисертації.

У ***другому розділі*** наведено допоміжні твердження і результати, які використовуються в наступних розділах.

У ***пункті 2.1*** розміщено необхідні відомості з теорії регулярних поліноміальних в'язок матриць вигляду

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i,$$

в яких $A_i (i = \overline{0, m})$ – квадратні матриці $n-$го і матриця A_m вироджена. Сформульовано означення скінченних і нескінченних елементарних дільників, жорданових ланцюжків векторів та повноти відповідних жорданових наборів. Показано, що кожному скінченному елементарному дільнику даної в'язки матриць відповідає жорданів ланцюжок векторів, довжина якого дорівнює кратності цього елементарного дільника, а при наявності нескінченних елементарних дільників нульовому власному значенню симетричної в'язки матриць $\sum_{i=0}^{m} \xi^{m-i} A_i$ відповідає жорданів ланцюжок, довжина якого збігається з кратністю даного нескінченного елементарного дільника.

У ***пункті 2.2*** розглядається системи рівнянь вигляду (3), де $A_i(t), i = \overline{0, m}$, – квадратні матриці n-го порядку, $f(t)$ – n-вимірний вектор, які можуть мати як дійсні, так і комплекснозначні елементи, $x(t)$ -– шуканий n-вимірний вектор, $t \in [a, b]$, $\det A_m(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.

Доведено таке твердження.

Теорема 2.1. Нехай виконуються умови:

2.1°. $\operatorname{rank} A_m(t) = n - r = \mathrm{const}$;

2.2°. Матриця $A_m(t)$ має на відрізку $[a, b]$ повний жорданів набір векторів відносно операторів $L_i(t) = \sum_{j=0}^{k} C_{m-j}^{i-j} A_{m-j}(t) \frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}, i = \overline{1, m}$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1, r}$;

2.3°. $A_i(t) \in C^{3p-2}[a, b], i = \overline{1, m},\ f(t) \in C^{p-1}[a, b]$, де $p = \max s_i$.

Тоді загальний розв'язок системи рівнянь (3) визначається формулою $x(t) = X_{mn-s}(t)c + \widetilde{x}(t)$, де $X_{mn-s}(t)$ – прямокутна матриця розмірністю $n \times (mn - s)$, складена з $mn - s$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, яка відповідає (3) $s = s_1 + \cdots + s_r$, c – довільний сталий $(mn - s)$-вимірний вектор; $\widetilde{x}(t)$ – частинний розв'язок системи (3).

У цьому ж підрозділі для системи (3) розглянуто задачу Коші з початковими умовами

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t)\Big|_{t=t_0} = x_0^{(k)}, k = \overline{0, m-1}. \qquad (6)$$

Знайдено умови, які мають задовольняти початкові вектори $x_0^{(k)} (k = \overline{0, m-1})$, щоб ця задача мала єдиний розв'язок. Справджується наступна теорема.

Теорема 2.2. Якщо виконуються умови $2.1^\circ - 2.3^\circ$, то для того, щоб задача Коші (3), (6) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб початкові вектори $x_0^{(s)}$, $s = \overline{0, m-1}$, задовольняли умову

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{\alpha=0}^{s-1}\sum_{\beta=0}^{k-i-\alpha-2} C_{\alpha+\beta}^{\alpha}\frac{d^{\beta+i}}{dt^{\beta+i}}\left(A_{s-\alpha-1}(t_0)x_0^{(s)}, \psi_j^{(k-i-\alpha-\beta-1)}(t_0)\right) -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{d^i}{dt^i}\left(A_s(t)x_0^{(s)}, \psi_j^{(k-i)}(t_0)\right) = 0, k = \overline{1, s_j}, j = \overline{1, r},$$

де $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, – n-вимірні вектори, що утворюють жорданів набір матриці $A_m^*(t)$ відносно операторів $L_k^*(t) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_{m-i}^{k-i}\frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}}A_{m-i}^*(t)$, $k = \overline{1, m}$. За виконання цієї умови розв'язок задачі (3),(6) буде єдиним.

Відмітимо, що, як наслідок, з теорем 2.1, 2.2 випливають результати, отримані В.П. Яковцем (Яковець В.П. Про структуру загального розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку / В.П. Яковець // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 2. – С. 292–298) для аналогічних систем диференціальних рівнянь другого порядку.

Результати, отримані в II розділі, стали теоретичною основою для проведення асимптотичного аналізу загального розв'язку сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вигляду (4), де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, – $(n \times n)$-матриці, $f(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, елементами яких є дійсні або комплекснозначні функції; $\alpha(t)$ – скалярна функція, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, h – натуральне число, $t \in [0; T]$.

Припускається, що виконуються наступні умови:

1°. Матриці $A_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon) \sim \sum_{s\geq 0}\varepsilon^s A_i^{(s)}(t), i = \overline{0, m}, f(t,\varepsilon) \sim \sum_{s\geq 0}\varepsilon^s f^{(s)}(t).$$

2°. Коефіцієнти $A_i^{(s)}(t)$, $f^{(s)}(t)$, $i = \overline{0, m}$, $s = 0, 1, \ldots$, даних розвинень і функція $\alpha(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$.

3°. $\det A_m^{(0)}(t) = 0, \forall t \in [0; T]$.

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i A_i^{(0)}(t) \tag{7}$$

регулярна при всіх $t\in[0;T]$, а її скінченні і нескінченні елементарні дільники зберігають на $[0;T]$ постійну кратність.

У ***розділі III*** система (4) досліджується за умови її неповного виродження, коли, незважаючи на виродженість $A_m^{(0)}(t)$, матриця $A_m(t,\varepsilon)$ при старших похідних залишається неособливою при досить малих $\varepsilon>0$, відмінних від нуля. У результаті проведених досліджень встановлено, що, як і у випадку систем першого порядку, базисний набір лінійно незалежних розв'язків однорідної системи (5), яка відповідає (4), поділяються на дві групи: розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, і розв'язки, що відповідають її нескінченним елементарним дільникам. Асимптотику розв'язків першої групи можна побудувати в класичному вигляді Дж. Біркгофа, а розв'язки другої групи – у вигляді, запропонованому в роботах А.М. Самойленка і В.П. Яковця. При цьому умови існування відповідних формальних розвинень, показники степенів малого параметра, за якими їх можна побудувати, алгоритм знаходження коефіцієнтів цих розвинень суттєво залежать від кронекерової структури спектра граничної в'язки матриць даної системи та поведінки збурювальних матриць.

У ***пунктах 3.2.1 – 3.2.4*** даного розділу досліджено всі можливі випадки, пов'язані зі структурою скінченних та нескінченних елементарних дільників граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$. Основні результати відображені в наступних теоремах.

Теорема 3.1. Нехай виконуються умови 1° – 4°, а також наступні:

3.1°. Гранична в'язка матриць (7) має тільки прості елементарні дільники: $mn-1$ скінченних і один – нескінченний;

3.2°. $\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)\neq 0, \forall t\in[0;T]$, де $\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)$ – елементи нуль-просторів матриць $A_m^{(0)}(t)$ та $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$ відповідно.

Тоді система (5) матиме $mn-1$ формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), i=\overline{1,mn-1}, \tag{8}$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (7), і один розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \tag{9}$$

що відповідає нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, які зображаються у вигляді формальних розвинень

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_i^{(s)}(t), v(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s v^{(s)}(t), \tag{10}$$

$$\lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \lambda_i^{(s)}(t), \xi(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \xi^{(s)}(t). \tag{11}$$

Теорема 3.2. Нехай виконуються умови $1^\circ - 4^\circ$, а також наступні:

3.3°. Гранична в'язка матриць (7) має один скінченний елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ кратністю p і один нескінченний – кратністю $q=mn-p$;

3.4°. $\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)\neq 0, \forall t\in[0;T]$;

3.5°. $(K(t)\varphi(t),\psi(t))\neq 0, \forall t\in[0;T]$,

$$K(t){=}{-}\sum_{k=0}^{m}\lambda_0^k(t)A_k^{(1)}(t){-}\delta_{1,h}\sum_{k=1}^{m}C_k^{k-1}\lambda_0^{k-1}(t)A_k^{(0)}(t)\frac{d}{dt}{-}\delta_{1,h}\sum_{k=2}^{m}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_0^{k-1-i}(t)\frac{d\lambda_0^i(t)}{dt}A_k^{(0)}(t),$$

де $\varphi(t)$ – власний вектор в'язки матриць $P(t,\lambda)$, що відповідає її власному значенню $\lambda_0(t)$, $\psi(t)$ – елемент нуль-простору матриці $P^*(t,\lambda_0(t))$.

Тоді система диференціальних рівнянь (5) має на відрізку $[0;T]$ p формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right), i=\overline{1,p}, \tag{12}$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (7), і q розв'язків вигляду

$$x_j(t,\varepsilon)=v_j(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\nu)}\right), j=\overline{1,q}, \tag{13}$$

які відповідають нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\mu)$, $v_j(t,\nu)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\mu)$, $\xi_j(t,\nu)$ – скалярні функції, які зображаються у вигляді формальних розвинень

$$u_i(t,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_i^{(s)}(t), v_j(t,\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k v_j^{(k)}(t), \tag{14}$$

$$\lambda_i(t,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s \lambda_i^{(s)}(t), \xi_j(t,\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k \xi_j^{(k)}(t) \tag{15}$$

за степенями параметрів $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu=\sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно.

Теорема 3.3. Нехай виконуються умови $1^\circ - 4^\circ$, і, крім того:

3.6°. Гранична в'язка матриць (7) має $r > 1$ скінченних елементарних дільників $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю $p > 1$ і $s > 1$ нескінченних елементарних дільників кратністю q $(pr + qs = mn)$;

3.7°. Матриця $R_1(t) = \left\| \left(K(t)\varphi_i(t), \psi_j(t) \right) \right\|_{i,j=\overline{1,r}}$ має на відрізку $[0;T]$ r простих, відмінних від нуля власних значень, де $\varphi_i(t), i = \overline{1,r},$ – власні вектори в'язки матриць $P(t,\lambda)$, що відповідають її власному значенню $\lambda_0(t)$, $\psi_j(t), j = \overline{1,r},$ – базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(t,\lambda_0(t))$;

3.8°. Матриця $R_2(t) = \left\| \left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_i(t), \widetilde{\psi}_j(t) \right) \right\|_{i,j=\overline{1,s}}$, в якій $\widetilde{\varphi}_i(t)$, $\widetilde{\psi}_j(t)$, $i,j = \overline{1,r}$, – базисні елементи нуль-просторів матриць $A_m^{(0)}(t)$ та $\left(A_m^{(0)}(t) \right)^*$ відповідно, має на $[0;T]$ s простих, відмінних від нуля власних значень.

Тоді на відрізку $[0;T]$ система диференціальних рівнянь (5), має pr формальних розв'язків вигляду (12) що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, і qs розв'язків вигляду (13), які відповідають нескінченним елементарним дільникам цієї в'язки, де вектори $u_i(t,\mu)$, $v_j(t,\nu)$ і функції$\lambda_i(t,\mu)$, $\xi_j(t,\nu)$ зображуються у вигляді формальних розвинень (14), (15) за степенями параметрів $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно.

Теорема 3.4. Нехай виконуються умови 1° – 4°, а також наступні:

3.9°. Гранична в'язка матриць (7) має кратне власне значення $\lambda_0(t)$, якому відповідає r_i скінченних елементарних дільників кратністю $p_i (i = \overline{1,\alpha})$ кожний, а також s_j нескінченних елементарних дільників кратністю $q_j (j = \overline{1,\beta})$ кожний, причому: $p_1 > p_2 > \cdots > p_\alpha$; $q_1 > q_2 > \cdots > q_\beta$; $r_1 + r_2 + \cdots + r_\alpha = r$; $s_1 + s_2 + \cdots + s_\beta = s$.

3.10°. Рівняння $\det\left(\|(K(t)\varphi_l(t), \psi_k(t))\|_1^{r_1+\cdots+r_i} - \eta\Lambda_{r_i} \right) = 0, i = \overline{1,\alpha}$, в яких Λ_{r_i} – діагональна матриця, r_i останніх діагональних елементів якої дорівнюють одиниці, а решта – нулі, мають лише прості відмінні від нуля корені;

3.11°. Рівняння $\det\left(\left\| \left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_l(t), \widetilde{\psi}_k(t) \right) \right\|_1^{s_1+\cdots+s_i} - \theta\Lambda_{s_i} \right) = 0, i = \overline{1,\beta}$, мають на $[0;T]$ лише прості відмінні від нуля корені.

Тоді на відрізку $[0;T]$ система диференціальних рівнянь (5) має $r_1p_1 + r_2p_2 + \cdots + r_\alpha p_\alpha$ формальних розв'язків вигляду (12), що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, і $s_1q_1 + s_2q_2 + \cdots + s_\beta q_\beta$ розв'язків вигляду (13), які відповідають нескінченним елементарним дільникам цієї в'язки, де n-вимірні вектори $u_i(t,\mu)$, $v_j(t,\nu)$ та функції $\lambda_i(t,\mu)$, $\xi_j(t,\nu)$ зображуються у вигляді формальних розвинень (14), (15) за степенями параметрів $\mu = \sqrt[p_k]{\varepsilon}$, $k = \overline{1,\alpha}$ та $\nu = \sqrt[q_l]{\varepsilon}$, $l = \overline{1,\beta}$ відповідно.

Умови 3.2°, 3.4°, 3.8°, 3.11° теорем 3.1 – 3.4 забезпечують неособливість матриці $A_m(t,\varepsilon)$ при досить малих ε, відмінних від нуля, що в свою чергу гарантує існування в системи рівнянь (5) nm лінійно незалежних розв'язків, лінійна комбінація яких утворює її загальний розв'язок.

У процесі доведення цих теорем розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів відповідних формальних розвинень, виведено рекурентні формули, якими вони виражаються через коефіцієнти даної системи рівнянь.

Дані теореми узагальнюють результати, отримані іншими авторами для систем рівнянь нижчих порядків (при $m = 1, 2$). Зокрема, як наслідок з теореми 3.4 випливає теорема, сформульована як гіпотеза в дисертаційний роботі В.П. Яковця (Яковець В.П. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Яковець Василь Павлович. – К., 1993. – 318 с.)

Підрозділ 3.3 присвячено побудові частинного формального розв'язку неоднорідної системи (4) в нерезонансному та резонансному випадках.

При цьому розглядається два принципово відмінних випадки: нерезонансний, коли функція $\alpha(t)$ в жодній точці відрізка $[0; T]$ не дорівнює ні одному з власних значень граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, і резонансний, коли ця функція тотожно дорівнює одному з них.

У першому випадку справджується

Теорема 3.5. Якщо виконуються умови $1° – 4°$ і функція $\alpha(t)$ в жодній точці відрізка $[0; T]$ не дорівнює власним значенням в'язки матриць (7), то система рівнянь (4) має на цьому відрізку формальний розв'язок вигляду

$$x(t, \varepsilon) = \omega(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right),$$

де $\omega(t, \varepsilon)$ – n-вимірний вектор, який зображується формальним розвиненням за степенями ε:

$$\omega(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \omega^{(s)}(t). \tag{16}$$

У резонансному випадку має місце

Теорема 3.6. Нехай виконуються умови $1° – 4°$ і в'язка матриць (7) має на відрізку $[0; T]$ власне значення $\lambda_0(t)$ кратністю p, якому відповідає скінченний елементарний дільник такої самої кратності, причому $\alpha(t) = \lambda_0(t)$, $\forall t \in [0; T]$. Тоді, якщо виконуються умова $3.5°$, то система рівнянь (4) має формальний розв'язок вигляду

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \omega(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right),$$

де $\omega(t, \varepsilon)$ – n-вимірний вектор, який зображується формальним розвиненням (16).

У ***підрозділі 3.4*** досліджено асимптотичні властивості побудованих формальних розв'язків в усіх розглянутих випадках, а саме: встановлено умови, за виконання яких побудовані формальні ряди є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon \to 0$ точних розв'язків даних систем, і знайдено відповідні асимптотичні оцінки.

У ***підрозділі 3.5*** розглянуто два конкретних приклади, на яких ілюструється застосування отриманих результатів.

Дослідження, проведені в третьому розділі, не дають відповіді на питання, як будувати асимптотичні розвинення розв'язків системи (5) у тих випадках, коли основні умови теорем 3.1 – 3.4 не виконуються. Крім того, як уже відмічалось, умови цих теорем забезпечують неособливість матриці $A_m(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$. Тому виникає питання щодо структури асимптотики загального розв'язку системи (5) у випадку її повного виродження, коли матриця $A_m(t,\varepsilon)$ при старших похідних тотожно вироджена при всіх $t \in [0;T]$ і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$. Відповіді на ці питання даються в ***четвертому розділі*** дисертації, в якому здійснено детальний асимптотичний аналіз загального розв'язку системи (5) у випадку, коли гранична в'язка матриць (7) має один скінченний елементарний дільник кратністю p і один нескінченний – кратністю q $(p+q = nm)$. З цією метою в цьому розділі виведено відповідні рівняння розгалудження та проведено їх аналіз з використанням методу діаграм Ньютона.

У ***підрозділі 4.1*** виведено рівняння розгалуження для роз'язків першої групи. Доведено таку теорему.

Теорема 4.1. Для того, щоб вектор

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau,\varepsilon))\,d\tau\right), \tag{17}$$

де $u(t,\varepsilon)$, $\lambda(t,\varepsilon)$ – шукані n-вимірний вектор і скалярна функція відповідно, був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (5), необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda(t,\varepsilon)$ задовольняла рівняння розгалуження

$$\lambda^p + \sum_{k=p+1}^{\infty}\lambda^k L_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0. \tag{18}$$

Відповідна вектор-функція $u(t,\varepsilon)$ зображується формальним розвиненням

$$u(t,\varepsilon) = \varphi(t) - \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H(t)\widetilde{L}_{0s}\varphi(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k H(t)\widetilde{L}_{k0}\varphi(t) - \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s H(t)\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]\varphi(t). \tag{19}$$

Коефіцієнти рівняння (18) і розвинення (19) виражаються через коефіцієнти розвинень матричних функцій $A_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,m}$, за формулами, виведеними в дисертації.

У ***підрозділі 4.2*** виведено рівняння розгалуження для роз'язків другої групи. Доведено теорему.

Теорема 4.2. Для того, щоб вектор

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \tag{20}$$

де $v(t,\varepsilon)$ – $n-$вимірний вектор, а $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (5), необхідно і достатньо, щоб функція $\xi(t,\varepsilon)$ була розв'язком рівняння

$$\xi^q + \sum_{k=q+1}^{\infty} \xi^k N_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s N_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s N_{ks}[\xi^k] = 0. \tag{21}$$

Відповідна вектор-функція $v(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням

$$v(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k G(t)\widetilde{N}_{k0}\widetilde{\varphi}(t) - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{0s}\widetilde{\varphi}(t) - \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{ks}[\xi^k]\widetilde{\varphi}(t). \tag{22}$$

Коефіцієнти рівняння (21) і розвинення (22) виражаються через коефіцієнти розвинень матриць $A_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,m}$, за формулами, які виведено в дисертації.

У ***підрозділі 4.3*** проведено аналіз коефіцієнтів обох рівнянь розгалуження на предмет кількості формальних розв'язків та їх зображення у вигляді розвинень за цілими чи дробовими степенями параметра ε.

У результаті аналізу коефіцієнтів рівняння (18) встановлено, що $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k] \neq 0$ при $k = \overline{1,p-1}$, незалежно від поведінки коефіцієнтів даної системи. Тому на діаграмі Ньютона, побудований за коефіцієнтами рівняння (18), завжди будуть присутні точки $(k;(p-k)h)$, $k = \overline{1,p-1}$. Виходячи з цього доведено таке твердження.

Теорема 4.3. Незалежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t), i = \overline{0,m}, s = 0,1,\ldots,$ рівняння розгалуження для розв'язків першої групи має p розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ з урахуванням їх кратності, причому не більше одного нульового.

З цієї теореми випливає, що система рівнянь (5) завжди має p розв'язків першої групи, які відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (7).

Проаналізувавши друге рівняння розгалуження (22), встановлено, що його коефіцієнти подібною властивістю не володіють. Єдиною точкою, яка завжди міститься на відповідний діаграмі Ньютона, буде точка $(q;0)$. Тому, в залежності від структурних особливостей, система (5) може мати $q-k$ розв'язків другої групи, що відповідають нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць $P(t,\lambda)$, де k – кратність нульового розв'язку рівняння розгалуження (22). У дисертації доведено, що за наявності нульового розв'язку рівняння (22) матриця $A_m(t,\varepsilon)$ має жорданів ланцюжок векторів відносно операторів $L_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,m}$, довжина якого збігається з його кратністю. У результаті доведено таку теорему.

Теорема 4.4. Кількість розв'язків другої групи, що відповідають нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць $P(t,\lambda)$ кратністю q, дорівнює $q-k$, де k – довжина жорданового ланцюжка векторів матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $L_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,m}$.

Таким чином, у результаті аналізу рівнянь розгалуження (18), (22) встановлено, що за виконання відповідних умов стабільності кронекерової структури спектра граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$ на заданому проміжку $[0;T]$ система (5) має $nm-k$ лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду (19), (20), де k – довжина жорданового ланцюжка векторів матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $L_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,m}$, що згідно з теоремою 2.2, доведеною у другому розділі, збігається з базисною кількістю її точних лінійно незалежних розв'язків. Виведені нами формули для коефіцієнтів рівнянь розгалуження містять повну інформацію як про кількість обох груп розв'язків, так і про показники степенів малого параметра, за якими необхідно будувати відповідні асимптотичні розвинення, що визначаються за допомогою діаграм Ньютона. Показано, що коефіцієнти розвинень для функцій $\lambda(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ можна знаходити з рівнянь розгалуження, а для вектор-функцій $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ – використовувати вирази (19), (22).

Застосовуючи описаний метод, у ***підрозділі 4.4*** досліджено випадки, коли умови 3.4°, 3.5° теореми 3.2 тотожно не виконується. Показано, що в цьому разі необхідно покладати інші умови: $L_{02}(t)\neq 0$, $L_{11}[\lambda](t)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, і тоді $p-1$ розв'язків першої групи можна будувати у вигляді розвинень за степенями $\sqrt[p-1]{\varepsilon}$, а один – за цілими степенями ε. Розглянуто також ситуація, коли не виконується умова 3.4° цієї теореми.

У ***підрозділі 4.5*** розглянуто конкретний приклад, на якому ілюструється розроблена теорія.

У ***додатку*** до дисертації наведено результати проведеного нами аналізу всіх можливих варіантів структури асимптотичних лінійно незалежних розв'язків однорідної системи двох рівнянь третього порядку ($n=2$, $m=3$). Ці результати представлено у вигляді двох таблиць, одна з яких стосується розв'язків 1-ї групи, а друга – розв'язків 2-ї групи.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У результаті проведених досліджень отримано такі результати:

1. Для виродженої системи звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків (3) знайдено умови, за виконання яких вона має загальний розв'язок

типу Коші. Встановлено залежність між її внутрішньою структурою та кількістю частинних розв'язків, які утворюють її фундаментальну систему розв'язків. Визначено умови, які мають задовольняти початкові вектори, для існування і єдиності розв'язку відповідної задачі Коші.

2. Побудовано асимптотику при $\varepsilon \to 0$ загального розв'язку лінійної однорідної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків вигляду (5) у різних випадках, пов'язаних з кронекеровою структурою спектра граничної в'язки матриць:

– коли ця в'язка має простий спектр;

– коли вона має по одному кратному скінченному і нескінченному елементарному дільнику;

– коли її власному значенню відповідає кілька скінченних елементарних дільників однакової кратності, і вона має також кілька нескінченних елементарних дільників однакової кратності;

– у загальному випадку, коли ця в'язка має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників як однакової, так і різної кратності.

У кожному з цих випадків визначено умови, за виконання яких дана система рівнянь має формальні розв'язки, які зображуються у вигляді розвинень за цілими або дробовими степенями ε, і розроблено алгоритм знаходження їх коефіцієнтів у явному вигляді. Встановлено, що формальні розв'язки даної системи поділяються на дві групи: розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, і розв'язки, які відповідають її нескінченним елементарним дільникам. Перша група розв'язків будується в класичному вигляді Дж. Біркгофа, а друга – в іншому вигляді, встановленому в роботах А.М. Самойленка і В.П. Яковця. Для кожної групи побудованих формальних розв'язків виведено відповідні асимптотичні оцінки.

3. Досліджено питання про побудову частинного асимптотичного розв'язку неоднорідної системи рівнянь (4.4) в резонансному та нерезонансному випадках. Показано, що в резонансному випадку відповідні розвинення розпочинаються з від'ємних степенів параметра.

4. Використовуючи метод діаграм Ньютона, здійснено повний асимптотичний аналіз загального розв'язку однорідної системи (5) у одновимірному випадку, коли гранична в'язка матриць має по одному кратному скінченному і нескінченному елементарному дільнику. Виведено та проаналізовано рівняння розгалуження для розв'язків, що відповідають скінченному елементарному дільнику, і для розв'язків, що відповідають нескінченному елементарному дільнику. Знайдено формули, які виражають коефіцієнти цих рівнянь через матричні коефіцієнти даної системи. Встановлено кількість розв'язків першої групи та

зв'язок між кількістю розв'язків другої і структурними особливостями даної системи.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Пафик С. П.* Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – № 13. – С. 201–217.

2. *Пафик С. П.* Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійник систем диференціальних рівнянь вищих порядків / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Український математичний журнал. – 2013. – Т. 65, № 2. – С. 296–306.

3. *Пафик С. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Нелінійні коливання. – 2014. – Т. 17, № 3. – С. 379–398.

4. *Пафик С. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць / С. П. Пафик // Динамические системы. – 2014. – Т. 3(31), № 3–4. – С. 255–274.

5. *Пафик С. П.* Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 79–101.

6. *Пафик С. П.* Про побудову асимптотики загального розв'язку вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків / С. П. Пафик // Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь"(присвячена 80-річчю докт. фіз.-мат. наук, проф., академіка НАПНУраїни Шкіля Миколи Івановича), 13–14 грудня 2012 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Видавництво НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. – С. 21–22.

7. *Пафик С. П.* Про асимптотику загального розв'язку вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь рівнянь вищих порядків у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць / С. П.

Пафик // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: тези доповідей. – К.: Ін-т математики НАН України, 2013. – С. 154.

8. *Пафик С. П.* Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь / С. П. Пафик, В. П. Яковець // XV Міжнародна наукова конференція ім. Михайла Кравчука. I Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування, 15–17 травня 2014 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Видавництво ТОВ "Спринт-Сервіс" , 2014. – С. 243–244.

9. *Яковець В. П.* Про умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків / В. П. Яковець, С. П. Пафик // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"присвячена 70-річчю проф. В. В. Маринця, 27–29 вересня 2012 р., м. Ужгород, Україна: тези доповідей. – Ужгород, 2012. –

10. *Яковець В. П.* Асимптотичний аналіз лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь методом діаграм Ньютона /В. П. Яковець, С. П. Пафик // Міжнародна наукова конференція ім. Михайла Кравчука. I Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування, 15–17 травня 2014 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Видавництво ТОВ "Спринт-Сервіс 2014. – С. 141.

11. *Pafyc S. P.* Asymptotic of the general solution of linear singularly perturbed systems of differential equations of higher orders with degeneration in case of multiple spectrum of the limit bundle of matrixes /S. P. Pafyc, V. P. Yakovets // XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation 29–31 травня 2013 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – С. 46.

АНОТАЦІЯ

Пафик С. П. Побудова асимптотичних розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями.- Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 -– диференціальні рівняння.– Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Дисертаційна робота присвячена побудові асимптотики загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\ldots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right),$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ – вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,m}$ – квадратні матриці n-го порядку, ε – малий дійсний параметр, h – натуральне число, причому матриця $A_i(t,\varepsilon)$ при старших похідних тотожно вироджена або вироджується з прямуванням малого параметра до нуля.

Передбачається, що гранична поліноміальна в'язка матриць $P(t,\lambda) = A_0(t,0)+\lambda A_1(t,0)+\cdots+\lambda^m A_m(t,0)$ регулярна і має стабільну кронекерову структуру на заданому відрізку $[0;T]$.

Встановлено, що за виконання цих умов дана система рівнянь має загальний розв'язок типу Коші, визначено його структуру та розроблено алгоритм побудови асимптотичних розвинень при $\varepsilon \to 0$ базисних лінійно незалежних розв'язків однорідної системи та частинного розв'язку неоднорідної у різних випадках, пов'язаних з кронекеровою структурою граничної в'язки матриць.

У випадку, коли в'язка $P(t,\lambda)$ має по одному кратному скінченному і нескінченному елементарному дільнику, проведено повний асимптотичний аналіз загального розв'язку відповідної однорідної системи з використанням методу діаграм Ньютона.

З отриманих результатів, як наслідок, випливають результати, отримані раніше іншими авторами для систем рівнянь першого і другого порядків.

Ключові слова: вироджені системи диференціальних рівнянь, сингулярні збурення, поліноміальна в'язка матриць, загальний розв'язок типу Коші, асимптотичні розвинення.

АННОТАЦИЯ

Пафик С. П. Построение асимптотических решений линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений высших порядков с вырождениями.- Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 -– дифференциальные уравнения. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

Диссертационная работа посвящена построению асимптотики общего решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\ldots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right),$$

в которой $x(t,\varepsilon)$ – n-мерный вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,m}$ – квадратные матрицы n-го порядка, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малый параметр, h – натуральное число.

Предполагается, что предельный полиномиальный пучок матриц $P(t,\lambda) = A_0(t,0)+\lambda A_1(t,0)+\cdots+\lambda^m A_m(t,0)$ регулярный и имеет постоянную кронекерову структуру на заданном отрезке $[0;T]$.

Установлено, что при выполнении этих условий данная система уравнений имеет общее решение типа Коши, определена его структура и разработан алгоритм построения асимптотических розложений при базисних линейно независимых решений однородной системы и частного решения неоднородной в различных случаях, связанных с кронекеровой структурой предельного пучка матриц.

В случае, когда предельный пучок $P(t,\lambda)$ имеет по одному кратному конечному и безконечному элементарным делителям, проведен полный асимптотический анализ общего решения соответствующей однородной системы с использованием метода диаграмм Ньютона.

Из полученных результатов, как следствие, вытекают результаты, полученные ранее другими авторами для систем уравнений первого и второго порядков.

Ключевые слова: вырожденные системы дифференциальных уравнений, сингулярные возмущения, полиномиальный пучок матриц, общее решение типа Коши, асимптотические разложения.

ANNOTATION

Pafyc S. P. Construction of the asymptotic solution of linear singularly perturbed systems of higher order differential equations with degenerations.

The dissertation submitted for a Candiedate's degree of physical and mathematical science on speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2015.

The dissertation research is devoted to the construction of asymptotic of the general solution of linear singularly perturbed system of higher order differential equations

$$\varepsilon^{mh} A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\ldots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right),$$

where $x(t,\varepsilon)$ is n-dimensional vector, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,m}$ – n-order square matrixes, ε is a real small parameter, h is a natural number.

Assume that the following conditions are fulfilled:

1) Matrixes $A_i(t,\varepsilon)$ and vector $f(t,\varepsilon)$ allow uniform asymptotic expansions at the interval $[0;T]$:

$$A_i(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}(t),$$

2) The coefficients $A_i^{(k)}(t)$, $f^{(k)}(t)$ of these expansions infinitely differentiable on segment $[0;T]$,

3) Limit polynomial bundle of matrixes

$$P(t,\lambda) = A_0(t,0) + \lambda A_1(t,0) + \dots + \lambda^m A_m(t,0)$$

is regular and has stable Kronecker structure on $[0;T]$.

The case of partial degeneracy of the system, when in spite of the degeneracy of the matrix $A_m^{(0)}(t)$, the matrix $A_m(t,\varepsilon)$ at higher derivatives is nonsingular at a sufficiently small non-zero ε, and case of its complete degeneracy, when $\det A_m(t,\varepsilon) = 0$ at all $t \in [0;T]$ and $\varepsilon \in [0;T]$.

It is established that under conditions 1) – 3) given system has the general solution of Cauchy type, the structure of this solution is found and the algorithms for constructing asymptotic expansions at $\varepsilon \to 0$ for the base linear independent solutions of the homogeneous system and particular solution of inhomogeneous one in different cases connected with a Kronecker structure of the limit bundle of matrixes are worked out.

The asymptotic analysis of the general solution of the corresponding homogeneous system by using the Newton diagrams method is realized in case when the bundle of matrixes $P(t,\lambda)$ has one finite elementary divisor and one infinite elementary divisor.

The results which have established earlier by other authors for systems of the first and second order equations are following from obtained results.

Key words: degenerated systems of differential equations, singular perturbation, polynomial bundle of matrixes, general solution of Cauchy type, asymptotic expansions.