НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

Пафик Сергій Петрович

УДК 517.928

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З ВИРОДЖЕННЯМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Яковець Василь Павлович

Київ – 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$[x]$ – ціла частина дійсного числа x;

δ_{ij} – символ Кронекера;

(x, y) – скалярний добуток векторів x, y в комплексному n-вимірному просторі;

E – одинична матриця;

E_i – одинична матриця i-го порядку;

A^{-1} – обернена матриця до матриці A;

A^+ – напівобернена матриця до матриці A, тобто матриця, що задовольняє умову $AA^+A = A$;

A^* – матриця, спряжена з A;

$\|x\|$ – евклідова норма вектора x;

$C^k[0;T]$ – множина функцій (скалярних, векторних, матричних), k разів диференційовних на відрізку $[0;T]$;

$O(x)$ – символ порядку;

N – множина натуральних чисел;

C – множина комплексних чисел.

ВСТУП

Актуальність теми. Починаючи з другої половини 1970-х років, увагу дослідників привернули системи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних, у яких при старших похідних міститься тотожно вироджена матриця. Інтерес до вивчення таких систем обумовлений тим, що до них зводяться математичні моделі багатьох технічних, фізичних, біологічних, економічних та інших процесів. Особливо часто на практиці зустрічаються математичні моделі різних фізичних явищ, які описуються так званими гібридними системами, де частина рівнянь – диференціальні, а частина – алгебраїчні. Такі системи також належать до систем даного типу, які найчастіше називають диференціально-алгебраїчними або виродженими.

На даний час кількість наукових робіт, присвячених дослідженню вироджених систем диференціальних рівнянь, є досить великою, і їх кількість продовжує зростати. Найбільш вагомі результати отримано впродовж 1980 – 2010 рр. у роботах вітчизняних математиків А.М. Самойленка, В.П. Яковця, М.І. Шкіля, О.А. Бойчука, В.Г. Самойленка, П.Ф. Самусенка та ряду зарубіжних: S.L. Campbell, R.L. Petzold, C.W. Gear, K.E. Brenan (США), E. Griepentrong, R. Maerz (Німеччина), Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.О. Щеглової (Російська Федерація) та ін.

При цьому основні зусилля були направлені на дослідження лінійних систем

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

де $x(t)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(t)$, $B(t)$ – квадратні матриці n-го порядку. У результаті було встановлено, що загальний розв'язок системи (1) має найпростішу структуру (типу Коші), коли ця система зводиться до так званої центральної канонічної форми (ЦКФ), поняття якої було введено в 1983 р. S.L. Campbell і R.L. Petzold. Пізніше в роботах А.М. Самойленка і В.П. Яковця було знайдено умови, за виконання яких система (1) зводиться до ЦКФ, що дозволило встановити структуру її загального розв'язку та умови однозначної розв'язності відповідної початкової задачі. Деякі умови звідності системи (1) до ЦКФ було встановлено також у роботах Ю.Є. Бояринцева і В.Ф. Чистякова.

Ці результати дали можливість В.П. Яковцю узагальнити класичну теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, започатковану G. Birkhoff і Я.Д. Тамаркіним і розвиту в працях Х.Л. Территіна, В. Вазова, С.Ф. Фещенка, М.І. Шкіля, Г.С. Жукової, І.І. Старуна та ін., на сингулярно збурені системи вигляду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{2}$$

в яких ε – малий параметр, а матриця $B(t,\varepsilon)$ або тотожно вироджена, або вироджується при $\varepsilon \to 0$.

Проте на практиці досить часто доводиться мати справу з системами диференціальних рівнянь вищих порядків, які у векторно-матричний формі можна подати у вигляді

$$A_m(t)\frac{d^m x}{dt^m} + A_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \cdots + A_1(t)\frac{dx}{dt} + A_0(t)x = f(t). \tag{3}$$

При цьому матриця $A_m(t)$ при старший похідний буде тотожно виродженою, якщо серед рівнянь, які утворюють систему (3), містяться рівняння різних порядків. До такого вигляду зводяться також системи рівнянь, у яких частина рівнянь є алгебраїчними.

Розглядаючи такі системи, різні автори, як правило, намагаються звести їх до системи вигляду (1) за допомогою відповідної заміни, що призводить до зростання розмірності системи, а це значно ускладнює її дослідження, результати якого всеодно треба виражати в термінах матриць $A_i(t)$, $i = \overline{0,m}$, вихідної системи (3).

У зв'язку з цим доцільним є розроблення загальної теорії системи рівнянь вищих порядків вигляду (3), а також аналогічної сингулярно збуреної системи

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \tag{4}$$

в якій матриця $A_m(t,\varepsilon)$ тотожно вироджена або вироджується при $\varepsilon = 0$.

Незважаючи на намагання різних авторів узагальнити теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь першого порядку на системи вищих порядків (роботи С.Ф. Фещенка, М.А. Сотниченка, М.І. Шкіля і його учнів П.К. Мейлієва, І.М. Конета, В.А. Кушніра та ін.), усі вони розглядали лише окремі частинні випадки, коли матриця при старших похідних одинична, а матриці біля похідних нижчого порядку або нульові, або ж нульовими є їх головні частини.

Більш детально системи вигляду (3), (4) були розглянуті В.П. Яковцем у випадку $m = 2$, який застосовував для їх дослідження теорію квадратичних матричних в'язок. Що ж стосується систем вищих порядків, у яких $m > 2$, то, незважаючи на їх практичне і теоретичне значення, до даного часу вони залишились не дослідженими. Тому тема даної дисертації є досить важливою і актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконувалась у Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Фізико-математичного інституту згідно із загальним планом досліджень в рамках наукової теми "Асимптотичне інтегрування вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь"(номер державної реєстрації 0110U001582).

Мета і завдання дослідження.

Основним об'єктом дослідження є лінійна сингулярно збурена система звичайних диференціальних рівнянь вигляду (4).

Предметом дослідження є асимптотичні властивості розв'язків системи рівнянь (4) при $\varepsilon \to 0$.

Мета дисертаційного дослідження полягає в розробці теорії асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь даного типу.

Завдання дослідження:

1. Знайти умови, за виконання яких система рівнянь вищих порядків вигляду (3) має загальний розв'язок типу Коші, і визначити його структуру. Дослідити питання існування і єдиності розв'язку відповідної початкової задачі.

2. Здійснити асимптотичний аналіз загального розв'язку системи рівнянь (4) за умови регулярності граничної в'язки матриць

$$P(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i(t, 0)$$

на заданому проміжку зміни t у різних випадках, пов'язаних із кронекеровою структурою її спектра.

Методи дослідження. Для реалізації завдань дослідження використовується теорія поліноміальних в'язок матриць, техніка узагальненого обернення матриць, метод діаграм Ньютона та асимптотичні методи лінійної теорії сингулярних збурень.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, що відображають наукову новизну є наступні:

1. Знайдено достатні умови, за виконання яких система рівнянь (3) має загальний розв'язок типу Коші і визначено його структуру. Виходячи з цього, встановлено умови існування і єдиності розв'язку відповідної початкової задачі.

2. Досліджено питання побудови асимптотики при $\varepsilon \to 0$ загального розв'язку однорідної системи

$$\varepsilon^{mh} A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m} + \varepsilon^{(m-1)h} A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = 0, \quad (5)$$

яка відповідає (4), за умови регулярності граничної в'язки матриць.

Визначено вигляд і розроблено алгоритм побудови відповідних асимптотичних розв'язків даної системи у всіх можливих випадках стабільної поведінки спектра граничної в'язки матриць.

3. У випадку, коли гранична в'язка матриць має по одному кратному скінченному та нескінченному елементарному дільнику, виведено відповідні рівняння розгалуження і здійснено їх аналіз з використанням методу діаграм Ньютона. Використовуючи його результати, проведено повне дослідження структури асимптотичних розв'язків системи (5) залежно від поведінки її коефіцієнтів.

4. Побудовано асимптотику частинного розв'язку неоднорідної системи (4) в нерезонансному та резонансному випадках.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані результати мають теоретичний характер. Вони узагальнюють результати, отримані для вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь першого порядку, на аналогічні системи рівнянь вищих порядків.

Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості їх застосування для розв'язання конкретних прикладних задач, математичні моделі яких зводяться до систем даного типу.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертації одержано здобувачем особисто. У спільних роботах з науковим керівником В.П. Яковцю належить постановка задачі та обговорення результатів, автору дисертації – проведення досліджень та доведення всіх тверджень.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на:

– Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 70-річчю проф. В. В. Маринця (м. Ужгород, вересень 2012 р.);

– Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", присвяченій 80-річчю доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка НАПН України Шкіля Миколи Івановича (м. Київ, грудень 2012 р.);

– XVI International Conference "Dynamical system: modelling and stability investigation"(c. Kyiv, may 2013);

– Міжнародній науковій конференції "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (м. Севастополь, червень 2013);

– "Летней матиматичекой школе В. Плотникова"(м. Одеса, липень 2013 р.);

– Міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (м. Київ, квітень 2014);

– XV міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, травень 2014);

– науковому семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рінянь Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова (науковий керівник доктор фіз.-мат. наук, проф. Торбін Г.М.) (2014–2015 рр.);

– звітних наукових конференціях НПУ ім. М.П. Драгоманова (2012–2015 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 11 роботах [44–51,105,106,120], 5 з яких – статті в фахових наукових виданнях, затверджених ДАК України, і 6 – тези доповідей на наукових конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, які об'єднують 18 підрозділів, та списку використаних джерел із 125 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 191 сторінку друкованого тексту, основний зміст викладено на 165 сторінках.

РОЗДІЛ 1.
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Різноманітні практичні задачі приводять до математичних моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь, які залежать від малого параметра та мають різного роду виродження. До них належать системи з наявністю при старших похідних виродженої матриці, малих параметрів або такої матриці, яка вироджується при певних значеннях незалежної змінної чи параметрів.

Асимптотичні методи є одними з найефективніших та найпоширеніших наближених методів дослідження розв'язків таких систем рівнянь. Основна ідея асимптотичних методів полягає в тому, що шуканий розв'язок системи диференціальних рівнянь будують у вигляді формального ряду за степенями незалежної змінної чи параметра так, щоб цей ряд формально задовольняв дану систему. Ці ряди, як правило, розбігаються в звичайному розумінні, але, як виявилося, їх частинні суми за певних умов прямують до точного розв'язку вихідної системи рівнянь з прямуванням параметра чи незалежної змінної до своїх граничних значень. Швидкість асимптотичної збіжності побудованих у такий спосіб рядів може бути настільки великою, що для практичного застосування інколи достатньо вже нульового наближення.

У даний час розроблено багато різних методів асимптотичного інтегрування диференціальних рівнянь, кожний з яких має свої переваги щодо розв'язання певного типу задач. Серед основних асимптотичних методів, які активно розвиваються в наш час, можна виділити наступні: метод Ляпунова-Пуанкаре, метод примежових функцій М.Й. Вишика, Л.А. Люстерника [17,18] та А.М. Тихонова, А.Б. Васильєвої [14,15,16,72], асимптотичні методи нелінійної механіки М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка [3,36,40,41,42,43,55], методи асимптотичного аналізу лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь, розвинуті в працях Дж. Біркгофа, Х.Л. Територіна, В. Вазова, С.Ф. Фещенка, М.І. Шкіля, Г.С. Жукової, В.П. Яковця та інших [12,23,29,30,71,74–77,85–90,94,97–99,101].

Класична теорія асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь була започаткована ще на початку XX ст. в роботах Л. Шлезінгера [122], Дж. Біркгофа [107], Я.Д. Тамаркіна [66].

Розглядаючи лінійне диференціальне рівняння $n-$го порядку

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \rho a_{n-1}(t,\rho)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + \rho^{n-1}a_1(t,\rho)\frac{dx}{dt} + \rho^n a_0(t,\rho)x = 0, \tag{1.1}$$

де $x(t,\rho)$ – невідома скаляра функція, а $a_i(t,\rho), i = \overline{0, n-1},$ – функції, аналітичні відносно великого параметра ρ на нескінченності та нескінченно диференційовні по змінній $t \in [t_0; T]$, американський математик Дж. Біркгоф встановив, що n лінійно незалежних розв'язків рівняння (1.1) виражаються асимптотичними формулами за недодатними степенями параметра ρ:

$$x_i(t,\rho) = \left(\sum_{k=0}^{m} \rho^{-k} x_i^{(k)}(t) + O(\rho^{-m})\right) \exp\left(\rho \int_{t_0}^{t} \lambda_i(\tau)d\tau\right), i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

де $\lambda_i(t), i = \overline{1, n},$ – корені відповідного характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(t)\lambda + a_0(t) = 0.$$

Я.Д. Тамаркін узагальнив результат Дж. Біркгофа на лінійну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \rho^{-h}A(t,\rho)x, \tag{1.3}$$

де $x(t,\rho)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(t,\rho)$ – квадратна матриця n-го порядку, яка залежить від великого параметра ρ аналітично в околі точки $\rho = \infty$, а h – деяке натуральне число. Він встановив, що коли відповідне характеристичне рівняння

$$\det\left(A(t,\infty) - \lambda E\right) = 0 \tag{1.4}$$

має n простих коренів $\lambda_i(t), i = \overline{1, n}$, то фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (1.3) зображується асимптотичними формулами, аналогічним (1.2):

$$x_i(t,\rho) = \left(\sum_{k=0}^{m} \rho^{-k} u_i^{(k)}(t) + O(\rho^{-m})\right) \exp\left(\rho^h \int_{t_0}^{t} \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \rho^{-k}\lambda_i^{(k)}(\tau)\right) d\tau\right), \tag{1.5}$$

$i = \overline{1,n}$, де $u_i^{(k)}(t), k = \overline{0,m}, i = \overline{1,n}$, – n-вимірні вектори, а $\lambda_i^{(k)}(t), k = \overline{1,h-1}$, $i = \overline{1,n}$, – скалярні функції.

Результати, отримані Дж. Біркгофом та Д.Я. Тамаркіним, мають важливе значення, оскільки коефіцієнти відповідних асимптотичних розвинень визначаються в явній формі з алгебраїчних та диференціальних рівнянь першого порядку. Крім того, якщо $Re\lambda_i(t), i = \overline{1,n}$, зберігають сталий знак на відрізку $[t_0; T]$, то отримані m-наближення прямують відповідно до точних розв'язків рівняння (1.1) та системи рівнянь (1.3) при $\rho \to \infty$ з експоненціальною швидкістю. Тому вже нульові наближення можна використовувати як для практичних розрахунків, так і для проведення різного роду теоретичних досліджень.

Зазначимо, що коли в рівнянні (1.1) та системі рівнянь (1.3) покласти $\varepsilon = \rho^{-1}$, то отримаємо сингулярно збурене диференціальне рівняння та відповідну систему рівнянь з малим пареметром при старшій похідній:

$$\varepsilon^n \frac{d^n x}{dt^n} + \varepsilon^{n-1} a_{n-1}(t,\varepsilon) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + \varepsilon a_1(t,\varepsilon) \frac{dx}{dt} + a_0(t,\varepsilon) x = 0,$$

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x. \tag{1.6}$$

Але ці результати Дж. Біркгофом і Д.Я. Тамаркіним стосувались лише випадку, коли всі корені відповідного характеристичного рівняння є простими. Випадок, коли серед цих коренів є кратний, виявився надзвичайно складним. Незважаючи на зусилля багатьох математиків різних країн, цей випадок довгий час залишався недослідженим.

Важливим кроком на шляху розв'язання проблеми кратних коренів характеристичного рівняння стали роботи Й. Сибуйя [123,124] та С.Ф. Фещенка [75,76], опубліковані в 1950-х рр., у яких були доведені теореми про асимптотичне розщеплення лінійних систем диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких сингулярно залежать від параметра, на підсистеми меншої розмірності.

Зокрема, С.Ф. Фещенко, розглянув лінійну систему диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x, \tag{1.7}$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – квадратна матриця n-го порядку, яка зображується у вигляді ряду

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau), \tag{1.8}$$

а $\tau=\varepsilon t$ – т. з. "повільний час", де $t\in[0;T]$. Він встановив, що коли відповідне характеристичне рівняння

$$\det\left(A_0(\tau)-\lambda E\right)=0 \tag{1.9}$$

має кілька ізольованих груп коренів різної кратності, які не перекриваються з коренями інших груп, то за допомогою неособливої підстановки

$$x(t,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t W(s,\varepsilon)ds\right)y(t,\varepsilon) \tag{1.10}$$

цю систему можна асимптотично розщепити на підсистеми меншої розмірності. При цьому характеристичне рівняння кожної з утворених в такий спосіб підсистем матиме тільки ті корені, які утворюють дану ізольовану групу коренів у складі коренів рівняння (1.9). Як наслідок, з теореми С.Ф. Фещенка випливали результати Дж. Біркгофа й Д.Я. Тамаркіна.

Теореми С.Ф. Фещенка та Й. Сибуйя дещо спрощували проблему кратних коренів характеристиного рівняння. Зокрема, за наявності ізольованих кратних коренів вихідну систему можна звести до системи, в якій характеристичне рівняння має тільки один корінь, кратність якого збігається з розмірністю отриманої системи. Але це не вирішувало питання про побудову асимптотики лінійно незалежних розв'язків системи рівнянь (1.7), які відповідають кратному власному значенню головної матриці $A_0(\tau)$.

Ця задача була успішно розв'язана в 1960-х рр. українським математиком М.І. Шкілем [86–90]. Він розглянув систему рівнянь (1.7) з повільно змінними коефіцієнтами у випадку, коли характеристичне рівняння (1.9) має один кратний корінь $\lambda_0(\tau)$ кратності n, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. М.І. Шкіль встановив, що n лінійно незалежних асимптотичних розв'язків цієї системи можна побудувати у вигляді

$$x_i(t,\varepsilon)=u_i(\tau,\mu)\exp\left(\int_0^{\tau}(\lambda_0(s)+\lambda_i(s,\mu))ds\right), i=\overline{1,n}, \tag{1.11}$$

де $u_i(\tau,\mu), i=\overline{1,n}$, – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(\tau,\mu), i=\overline{1,n}$, – скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями

$$u_i(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_i^{(s)}(\tau);\lambda_i(\tau,\mu)=\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau) \tag{1.12}$$

за дробовими степенями $\mu=\sqrt[n]{\varepsilon}$ малого параметра ε, якщо виконується умова

$$c_{n1}(\tau)\neq 0,\forall t\in[0;T], \tag{1.13}$$

в якій $c_{n1}(\tau)$ – елемент матриці

$$C(\tau)=V^{-1}(\tau)A_1(\tau)V(\tau)-V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{dt}, \tag{1.14}$$

де $V(\tau)$ – перетворювальна матриця, що зводить $A_0(\tau)$ до канонічного вигляду.

Цим самим М.І. Шкілем була в цілому розв'язана проблема кратного кореня характеристичного рівняння. Слід зазначити, що він не тільки знайшов вигляд формальних розв'язків лінійних сингулярно збурених систем у випадку кратних коренів характеристичного рівняння, а й розробив ефективний метод знаходження коефіцієнтів відповідних розвинень (1.12) та дослідив їх асимптотичний характер. Ним також було встановлено, що дробові показники степенів малого параметра, за якими необхідно будувати відповідні розвинення, залежать не тільки від кратності кореня $\lambda_0(t)$ характеристичного рівняння та відповідних елементарних дільників, а й у значній мірі – від стуктури збурювальної матриці $A_1(t)$.

Зокрема, М.І. Шкілем було встановлено, що коли умова (1.13) тотожно не виконується, то $n-1$ розв'язків системи (1.7) слід будувати у вигляді формальних розвинень за степенями $\mu=\sqrt[n-1]{\varepsilon}$, а один розв'язок – за цілими степенями ε. При цьому з'являється нова умова

$$c_{n-1,1}(\tau)+c_{n2}(\tau)\neq 0, \tag{1.15}$$

яку необхідно накласти на матрицю (1.14).

Ним був досліджений і більш складний випадок, коли кратному власному значенню $\lambda_0(\tau)$ матриці $A_0(\tau)$ відповідає s елементарних дільників однакової кратності r ($rs=n$). Було доведено, що в цьому випадку для існування n лінійно незалежних асимптотичних розв'язків вигляду (1.11) необхідно і достатньо, щоб усі корені рівняння

$$\det\left(\left\|\left(A^{(1)}(\tau)\varphi_i(\tau) - \frac{d\varphi_i(\tau)}{dt}, \psi_j(\tau)\right)\right\|_{i,j=\overline{1,s}} - \eta E_s\right) = 0 \qquad (1.16)$$

на заданому відрізку $[0;T]$ були простими і відмінними від нуля, де $\varphi_i(\tau), \psi_j(\tau)$, $i,j = \overline{1,s}$, – власні вектори матриць $A_0(\tau)$ та $(A_0(\tau))^*$ відповідно. При цьому відповідні розвинення потрібно будувати вже за степенями $\mu = \sqrt[r]{\varepsilon}$.

Пізніше цей результат був узагальнений М.І. Шкілем та його учнем І.І. Старуном на більш загальний випадок, коли кратному кореню характеристичного рівняння (1.9) відповідає кілька елементарних дільників як однакової, так і різної кратності [65].

Протягом тривалого часу багато математиків намагались встановити залежність між показниками степенів малого параметра ε, за якими потрібно будувати асимптотичні розвинення розв'язків сингулярно збуреної системи (1.6) у випадку кратних коренів характеристичного рівняння (1.4), та структурою збурювальної матриці $A_1(t)$ [23,24,64]. Але всі їх зусилля знайти таку залежність були марними. Було лише встановлено, що коли умови (1.13) та (1.15) не виконуються, то з'являються нові умови, які потрібно накладати не тільки на матрицю $A_1(t)$, а й на збурювальні матриці $A_i(t), i \geq 2$.

Цю проблему у 1980-х рр. розв'язала Г.С. Жукова [28–31], використовуючи деякі ідеї, викладені в монографії [13]. Вивчаючи сингулярно збурену систему (1.6), вона показала, що для визначення дробових показників степенів параметра, за якими необхідно будувати асимптотичні розвинення її розв'язків, можна ефективно використовувати метод діаграм Ньютона. Розглядаючи випадок, коли головна матриця $A_0(t)$ має власне значення $\lambda_0(t)$ кратності p, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності, вона показала, що система рівнянь (1.6) матиме формальний розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(s) + \lambda(s,\varepsilon))\,ds\right), \qquad (1.17)$$

де $u(t, \varepsilon)$ – n-вимірний вектор, а $\lambda(t, \varepsilon)$ – скалярна функція, тоді і тільки тоді, коли невідома функція $\lambda(t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження

$$\lambda^p + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{1.18}$$

в якому $L_{ks}[\lambda^k]$ – операторні функції, які виражаються через збурювальні матриці $A_i(t)$, $i \geq 1$.

Незважаючи на те, що рівняння (1.18) є досить складним нелінійним диференціальним рівнянням нескінченного порядку, Г.С. Жукова показала, що його розв'язки можна побудувати у вигляді формальник рядів Пюізо за дробовими степенями малого параметра ε, показники яких визначаються за допомогою діаграм Ньютона. Для цього на координатну площину необхідно нанести точки $(k; s)$ з цілочисловими координатами, що відповідають відмінним від нуля виразам $L_{ks}[\lambda^k]$, і побудувати відповідну діаграму за цими точками. При цьому було встановлено, що незалежно від структури збурювальних матриць $A_i(t)$, $i \geq 1$, рівняння (1.18) завжди має p розв'язків, серед яких лише один може бути нульовим.

У результаті грунтовного аналізу коефіцієнтів рівняння розгалуження (1.18) Г.С. Жукова також встановила, що за умови, коли структура відповідних діаграм Ньютона залишається стабільною на всьому проміжку зміни аргумента t, завжди можна побудувати p лінійно незалежних розв'язків системи рівнянь (1.6) у вигляді (1.17). При цьому вектор $u(t, \varepsilon)$ та функція $\lambda(t, \varepsilon)$ зображуються у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями параметра ε, показники яких визначаються за відповідними діаграмами Ньютона.

Із результатів Г.С. Жукової, зокрема, випливали результати, отримані М.І. Шкілем та його учнями. Так, умова (1.13), вперше отримана М.І. Шкілем, відповідає найпростішій ситуації, коли $L_{01} \neq 0$, а умова (1.15) – складнішому випадку, коли $L_{01} \equiv 0$, $L_{11}[\lambda] \neq 0$.

Розвиваючи ідеї Г.С. Жукової, В.П. Яковець [101] вивів рівняння розгалуження для визначення функції $\lambda(t, \varepsilon)$ з (1.17) у т. з. багатовимірному випадку, коли кратному власному значенню $\lambda_0(t)$ головної матриці $A_0(t)$ відповідає кілька елементарних дільників однакової кратності. Застосувавши метод внутрішнього проектування, йому вдалось звести багатовимірну задачу про збурення власних значень і власних векторів матриці $A_0(t)$ до одновимірної, що дало можливість побудувати розв'язки системи рівнянь (1.6) і в тому випадку, коли рівняння (1.16) має кратні корені.

Таким чином, на даний час теорія асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вигляду (1.6) набула всестороннього розвитку, а її результати ефективно використовуються для розв'язання різноманітних прикладних задач.

Починаючи з кінця 1970-х років, увагу вчених привернули системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних. Зокрема, розпочалося активне вивчення лінійних систем вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1.19}$$

з тотожно виродженою матрицею $B(t)$ при похідних, які досить часто зустрічаються в задачах оптимального керування, масового обслуговування, теорії електричних кіл та інших прикладних наук.

До перших результатів, присвячених дослідженню цих систем, можна віднести роботи українських математиків В.А. Єременка [25] і Ю.Д. Шлапака [95], учнів А.М. Самойленка, в яких розглядалась система (1.19) з періодичними коефіцієнтами. Слід, однак, зазначити, що системи даного типу із сталими матрицями вивчались значно раніше в роботах М.М. Лузіна [39].

Упродовж 1980 – 2010-х рр. теорія систем вигляду (1.19) з тотожно виродженою матрицею при старших похідних інтенсивно розвивається в роботах математиків багатьох країн. Різні математики називають їх по-різному: виродженими, сингулярними, диференціально-алгебраїчними, алгебро-диференціальними. У даний роботі ми називатимемо їх виродженими. Важливі результати з розвитку теорії вироджених систем отримані російськими математиками Ю.Є. Бояринцевим, В.Ф Чистяковим, В.О. Даниловим, О.О. Логіновим, А.О. Щегловою [8–11;78,79], американськими дослідниками С. Кемпбеллом, Ч. Гієром, Л. Петцольдом [109–113], німецькими науковцями І. Гріппентрог і Р. Мьорц [117,118].

Досліджуючи систему (1.19), більшість математиків намагалися побудувати підстановки, за допомогою яких цю систему можна звести до простішого вигляду або понизити її порядок. Так, у роботі [111] С. Кемпбелл показав, що систему рівнянь (1.19) можна звести до системи зі сталими матрицями, якщо виконується умова:

$$\det\left(B(t)-\lambda A(t)+\frac{dA(t)}{dt}\right)\neq 0$$

при деякому λ, а матриця $A(t)\left(B(t)-\lambda A(t)+\frac{dA(t)}{dt}\right)^{-1}$ – стала при всіх значеннях аргумента із заданого відрізка $[a;b]$.

Ю.Є. Бояринцев [10] встановив, що коли в'язка матриць $A(t)-\lambda B(t)$ регулярна, а індекси матриць $B(t)\left(A(t)-\lambda B(t)\right)^{-1}$ та $\left(A(t)-\lambda B(t)\right)^{-1}B(t)$ дорівнюють нулю або одиниці, то систему (1.19) можна звести до системи вигляду

$$C(t)\frac{dy}{dt}=y+g(t). \tag{1.20}$$

У свою чергу С. Кемпбелл показав, що аналогічний результат можна отримати, якщо ранги матриць $A(t)$, $B(t)$ сталі на відрізку $[a;b]$, а ранг $(2n\times n)$-матриці $[A(t),B(t)]$ дорівнює n.

У зв'язку з цим протягом деякого часу досить активно проводилися дослідження системи вигляду (1.20) та відповідної задачі Коші за різних умов, що накладалися на матрицю $C(t)$ [10;11]. Зокрема, детально було досліджено випадки, коли матрицю $C(t)$ за допомогою сталої невиродженої матриці N можна звести до вигляду $N^{-1}C(t)N=\operatorname{diag}\{I,W(t)\}$, де I – нільпотентна матриця, а $W(t)$ – неособлива. Розглянуто також випадки, коли сталими є матриці $\left(E-C^D(t)C(t)\right)C^k(t)$, $k=\overline{1,3}$, де $C^D(t)$ – узагальнена обернена матриця Дразіна.

Але ці результати мали частковий характер і не створювали цілісної теорії вироджених лінійних систем. Більше того, широке використання в процесі цих досліджень узагальненої оберненої матриці Дразіна призводило до надмірної громіздкості відповідних перетворень, що фактично загальмовувало подальший розвиток цієї теорії [79]. Тому в подальшому більшість авторів відмовилися від використання матриці Дразіна.

Перспективний напрям розвитку загальної теорії вироджених лінійних систем було започатковано в роботі [110] С. Кемпбелла та Л. Петцольда, опублікованій у 1983 р., в якій було введено поняття центральної канонічної форми системи (1.19). Так вони назвали систему вигляду

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + g(t), \tag{1.21}$$

де $x(t), g(t)$ – n-вимірні вектори, $M(t)$ – квадратна матриця $(n-s)$-го порядку, а $N(t)$ – верхньотрикутна $(s \times s)$-матриця з нульовими квадратними блоками на діагоналі.

Оскільки системи рівнянь вигляду (1.21) є загальнішими, ніж системи зі сталими коефіцієнтами, багато математиків спрямували свої зусилля на виділення класів систем, що зводяться до центральної канонічної форми, та побудову відповідних підстановок.

Зокрема, у [11] було доведено, що за умови аналітичності матриць $A(t)$, $B(t)$ звідність системи (1.19) до центральної канонічної форми є необхідною і достатньою умовою існування в неї загального розв'язку типу Коші. Також у роботі [11] було встановлено, що система (1.19) зводиться до центральної канонічної форми і має загальний розв'язок типу Коші, якщо степінь многочлена $\det(A(t) - \lambda B(t))$ по λ дорівнює рангу матриці $B(t)$.

Пошук перетворень, за допомогою яких систему (1.19) можна звести до вигляду (1.21), привів авторів роботи [11] до поняття лівого регуляризуючого оператора. Так вони назвали оператор вигляду

$$\mathfrak{L}(t) = \sum_{i=0}^{k} L_i(t) \frac{d^i}{dt^i}, \tag{1.22}$$

де $L_i(t)$ – неперервні $(n \times n)$-матриці, за допомогою яких оператор $L = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$, що задає систему (1.19), зводиться до вигляду

$$\mathfrak{L}L = \frac{d}{dt} + \mathfrak{L}[B].$$

У [11] також було встановлено, що коли система (1.19) має загальний розв'язок типу Коші, то для неї існує лівий регуляризуючий оператор (1.22), але питання про те, чи достатньо існування оператора (1.22) для того, щоб система (1.19) мала загальний розв'язк типу Коші, залишалось відкритим. Ці результати носили в основному теоретичний характер, їх можна було застосувати до досить вузького класу систем вигляду (1.19), оскільки матриці $A(t)$, $B(t)$ мали при цьому задовольняти досить жорсткі умови. Крім того, система рівнянь, отримана в результаті застосування лівого регуляризатора, не еквівалентна вихідній, що створює проблему вилучення сторонніх розв'язків.

Більш загальний конструктивний результат було отримано в 1993 р. українськими математиками А.М. Самойленком та В.П. Яковцем [56]. Вони встановили, що коли матриці $A(t)$, $B(t)$ достатньо гладкі, $\operatorname{rank} B(t) = n - r = \mathrm{const}$ і матриця $B(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1,r}$, то існують неособливі при всіх $t \in [t_0; T]$ квадратні матриці n-го порядку $P(t), Q(t)$ такі, що множенням на $P(t)$ та заміною $x = Q(t)y$ система рівнянь (1.19) зводиться до центральної канонічної форми (1.21), в якій $s = s_1 + \dots + s_r$, $N(t) = \mathrm{diag}\{I_1, \dots, I_r\}$, де I_j – нільпотентні блоки Жордана порядку s_j $(j = \overline{1,r})$. При цьому в [56] не тільки доведено існування перетворювальних матриць $P(t), Q(t)$, а й вказано конструктивний спосіб їх побудови.

Використовуючи цей результат, В.П. Яковець [101] встановив, що за виконання зазначених умов звідності системи (1.19) до центральної канонічної форми вона має загальний розв'язок типу Коші, який можна подати у вигляді

$$x(t) = X_{n-s}(t)c + \int_{t_0}^{t} X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)d\tau - \Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} N^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)f(t),$$

де $X_{n-s}(t)$ – фундаментальна матриця розмірності $n \times (n-s)$, стовпцями якої є $n - s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1.23}$$

c – сталий $(n-s)$-вимірний вектор, $Y_{n-s}(t)$ – фундаментальна матриця відповідної спряженої системи

$$\frac{d}{dt}\left(B^*(t)y\right) = -A^*(t)y, \tag{1.24}$$

$\Phi(t), \Psi(t)$ – $(n \times s)$-матриці, складені з векторів, що утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ та матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t)$, де $m = \max\{s_1, \ldots, s_r\}$.

Ним також була встановлена умова розв'язності задачі Коші для системи рівнянь (1.19) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$. А саме, було доведено, що коли виконуються умови звідності системи (1.19) до центральної канонічної форми (1.21), то відповідна задача Коші має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли початковий вектор x_0 задовольняє умову

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i} \left(A(t)x_0 + f(t), \psi_j^{(k-i)}(t) \right) \Big|_{t=t_0} = 0, k = \overline{1, s_j}, j = \overline{1, r},$$

де $\psi_i^{(j)}(t), j = \overline{1, s_i}, i = \overline{1, r},$ – вектори, що утворюють жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$.

Важливі результати в цьому напрямку було отримано В.Ф. Чистяковим та А.О. Щегловою в монографії [79], яка була опублікована у 2003 р. Розвиваючи ідеї, викладені в [11], вони встановили, що коли для системи (1.19) існує лівий регуляризуючий оператор (1.22), то для неї існує й правий регуляризуючий оператор

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=0}^{k} R_i(t) \frac{d^i}{dt^i},$$

за допомогою якого, використовуючи заміну $x = \mathfrak{R}y$, система (1.19) зводиться до системи вигляду

$$\frac{dy}{dt} = L[R_0]y + f(t).$$

Також було встановлно, що ця система має загальний розв'язок типу Коші, який знаходиться за формулою

$$x(t) = X_d(t)c + \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)ds + \sum_{i=0}^{k-1} C_i(t) \frac{d^i f(t)}{dt^i},$$

де $K(t,s), C_i(t)$ – $(n \times n)$-матриці, які виражаються через коефіцієнти правого регуляризуючого оператора, якщо матриці $A(t)$, $B(t)$ та вектор $f(t)$ достатньо гладкі на заданому проміжку.

Крім того, ними було доведено, що у випадку аналітичності матриць $A(t)$, $B(t)$, еквівалентними є наступні твердження:

1) існують аналітичні матриці $P(t)$, $Q(t)$, що зводять систему (1.19) до центральної канонічної форми (1.21);

2) ця система має загальний розв'язок типу Коші;

3) на заданому відрізку $[t_0; T]$ існує лівий регуляризуючий оператор;

4) існує правий регуляризуючий оператор на цьому відрізку.

Паралельно з активним розвитком теорії вироджених систем вигляду (1.19), починаючи з 1980-х років, багато математиків спрямували свої зусилля на вивчення лінійних сингулярно збурених систем вигляду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1.26}$$

де $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ – $(n \times n)$-матриці, причому $B(t,0)$ тотожно вироджена на заданому відрізку $[0;T]$, h – ціле невід'ємне число, ε – малий параметр.

Американські математики С. Кемпбелл і Р. О'Меллі [111,119] досліджували автономну систему вигляду

$$(B_0 + \varepsilon B_1)\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1.27}$$

де $x(t)$ – шуканий n-вимірний вектор, а A, B_0, B_1 – $(n \times n)$-матриці зі сталими елементами. Зокрема, Р. О'Меллі в [119] побудував фундаментальну матрицю системи рівнянь (1.27) у вигляді розвинень за степенями параметра ε за умови, що матриця $B_0 + \varepsilon B_1$ невироджена при $\varepsilon > 0$, а в'язка матриць $A - \lambda B_0$ регулярна.

Зазначимо, що під час дослідження систем рівнянь вигляду (1.26) розрізняють два принципово відмінні випадки: випадок неповного виродження, коли матриця $B(t,\varepsilon)$ залишається неособливою при достатньо малих ε, відмінних від нуля, незважаючи на виродженість граничної матриці $B(t,0)$, і випадок повного виродження, коли $\det B(t,\varepsilon) \equiv 0$.

І.І. Старун [65], досліджуючи систему рівнянь (1.26) за умови, коли матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ допускають асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t), B(t,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(t), \tag{1.28}$$

звернув увагу на ефективність використання теорії матричних в'язок [22] для побудови частинних розв'язків цієї системи рівнянь. Розглядаючи випадки, коли гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ регулярна на відрізку $[0; T]$, а відповідне характеристичне рівняння

$$\det\left(A_0(t) - \lambda B_0(t)\right) = 0 \tag{1.29}$$

має прості корені або ж один кратний, якому відповідає скінченний елементарний дільник такої самої кратності, він встановив, що частину лінійно незалежних розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \tag{1.30}$$

яка відповідає (1.26), можна побудувати у вигляді (1.17), де скалярна функція $\lambda(t, \varepsilon)$ та вектор $u(t, \varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями за цілими або дробовими степенями ε.

Однак внаслідок виродженості матриці $B_0(t)$ рівняння (1.29) має менше, ніж n, коренів із врахуванням їх кратності і може навіть зовсім їх не мати. Тому навіть за умови неповного виродження матриці $B(t, \varepsilon)$ знайдені в [65] частинні розв'язки однорідної системи рівнянь (1.30) не дають змоги побудувати її загальний розв'язок. Ситуація ще більш ускладнюється, коли гранична в'язка матриць виявляється сингулярною, тобто коли

$$\det\left(A_0(t) - \lambda B_0(t)\right) \equiv 0, \forall \lambda \in C, t \in [0; T].$$

Проблема побудови загального асимптотичного розв'язку системи рівнянь (1.26) була всебічно досліджена і ефективно розв'язана в перший половині 1990-х рр. В.П. Яковцем [85;97–99;101]. Ним були розглянуті випадки як неповного, так і повного виродження. Теоретичною основою, на якій грунтуються ці дослідження, стала доведена ним спільно з А.М. Самойленком теорема про звідність виродженої лінійної системи до центальної канонічної форми.

В.П. Яковець показав, що за умови стабільної кронекерової структури граничної в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ та виконання певних умов стабільної поведінки збурювальних операторів на заданому відрізку $[t_0; T]$ система (1.26) при досить малих $\varepsilon > 0$ задовольняє умови про звідність до центральної канонічної форми і має загальний розв'язок типу Коші. Також було встановлено, що загальний розв'язок однорідної системи (1.30) є лінійною комбінацією її $n-s$ лінійно незалежних частинних розв'язків, де s – сума довжин жорданових ланцюжків матриці $B(t,\varepsilon)$ відносно оператора $A(t,\varepsilon)-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{d}{dt}$.

Ним також вперше було виявлено, що у випадку виродженості матриці $B_0(t)$ система (1.30), крім класичних розв'язків типу Дж. Біркгофа вигляду (1.17), які, слідуючи [28], називатимемо розв'язками першої групи, може мати ще так звані розв'язки другої групи, які можна побудувати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \tag{1.31}$$

де $v(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, а $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, які зображуються формальними розвиненнями за цілими або дробовими степенями малого параметра ε. У випадку регулярності граничної в'язки матриць розв'язки першої групи відповідають скінченним елементарним дільникам цієї в'язки, а розв'язки другої – нескінченним. Лінійна комбінація всіх цих розв'язків утворює загальний розв'язок даної системи.

В.П. Яковець провів також детальний асимптотичний аналіз систем (1.26), (1.30) у випадку, коли гранична в'язка матриць $A_0(t)-\lambda B_0(t)$ сингулярна. Він показав, що і в цьому випадку система рівнянь (1.26) може бути регулярною, тобто мати загальний розв'язок типу Коші, за рахунок збурювальних операторів, та вивів достатні умови цієї регулярності.

Як у випадку регулярної, так і сингулярної граничних в'язок матриць ним було виведено відповідні рівняння розгалуження та проведено їх детальний аналіз методом діаграм Ньютона.

Фундаментальні результати, отримані В.П. Яковцем в теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диферніціальних рівнянь з виродженнями, упродовж останніх років розвиваються багатьма його учнями та іншими математиками [1,2,19–21,32–35,59–63,67–69,80–82,94,102–104].

Зокрема, в роботах [1,2,102,103] досліджено питання про існування і побудову асимптотики періодичних розв'язків систем рівнянь вигляду (1.26), коефіцієнти яких періодичні по змінній t, а в [32–35] розроблено алгоритм побудови асимптотики розв'язку задачі Коші для систем даного типу. Двоточкові крайові задачі для системи рівнянь (1.26) грунтовно досліджено в роботах [19–21,104]. Запропоновані в цих роботах методи асимптотичного аналізу крайових задач використані в [67–70] для побудови наближених розв'язків лінійних сингулярно збурених задач оптимального керування.

Ідеї і методи, викладені в наукових працях А.М. Самойленка, М.І. Шкіля та В.П. Яковця, використані також в роботах [5,53,54,83,108,121] для дослідження інших типів лінійних і нелінійних систем рівнянь з виродженнями. Зокрема, в [4–7,84] досліджувались нетерові крайові задачі для вироджених систем диференціальних рівнянь, у [53,54,121] розглядались вироджені сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією, а також вивчалась залежність розв'язків вироджених систем від параметра, а у [26,27] результати А.М. Самойленка і В.П. Яковця щодо звідності вироджених лінійних систем до центральної канонічної форми та структури їх розв'язків узагальнено на системи рівнянь із прямокутними матрицями.

Усі проаналізовані вище дослідження стосувались систем диференціальних рівнянь першого порядку. Але на практиці частіше зустрічаються системи рівнянь вищих порядків, які у векторно-матричній формі можна подати у вигляді

$$A_m(t)\frac{d^m x}{dt^m} + A_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \cdots + A_1(t)\frac{dx}{dt} + A_0(t)x = f(t), \tag{1.32}$$

де $x(t)$ – n-вимірний вектор, $A_i(t)$, $i = \overline{0, m}$, – квадратні матриці n-го порядку.

Сингулярно збурені системи рівнянь m-го порядку у найбільш загальній формі можна представити у вигляді

$$\varepsilon^{mh} A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)d\tau\right), \tag{1.33}$$

де h – натуральне число, ε – малий параметр.

Хоча системи (1.32), (1.33) за допомогою заміни $x = y_1, \frac{dx}{dt} = y_2, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} = y_m$ (або $x = y_1, \varepsilon^h \frac{dx}{dt} = y_2, \ldots, \varepsilon^{(m-1)h}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} = y_m$ – для системи (1.33)) можна звести до систем першого порядку вигляду (1.19), (1.26) відповідно, це, по-перше, призводить до значного збільшення розмірності останніх, а, по-друге, до необхідності знаходження не тільки шуканого вектора $x(t)$, а й його похідних до $(m-1)$-го порядку, що не завжди виправдано. Крім того, результати дослідження систем рівнянь (1.32), (1.33) всеодно необхідно виражати в термінах матричних коефіцієнтів цих систем, а не в термінах матриць систем першого порядку, до яких вони зводяться, що інколи досить важко здійснити.

Тому, починаючи з 1970-х років, коли завдяки розв'язності проблеми кратного спектра головного оператора у працях М.І. Шкіля набула подальшого розвитку лінійна теорія сингулярних збурень, з'явились спроби узагальнити цю теорію і на системи рівнянь вищих порядків [27,38,73,59,91–93]. Проте переважна більшість цих робіт стосувалась систем рівнянь другого порядку вигляду

$$\varepsilon^h \frac{d^2x}{dt^2} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^{2h} A(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon^{h+1} B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + C(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon),$$

з характеристичними рівняннями

$$\det(A_0(t) - \lambda^2 E) = 0;$$

$$\det(C_0(t) - \lambda^2 A_0(t)) = 0$$

відповідно, що було обумовлено методом побудови асимптотичних розв'язків, який грунтується на зведенні головної матриці $A_0(t)$ до канонічної форми Жордана або на використанні теорії лінійних матричних в'язок матриць за умови неособливості матриці $A_0(t)$.

З використанням такого підходу вивчались і системи диференціальних рівнянь порядку $m > 2$. Зокрема, в [37] побудовано асимптотику загального розв'язку системи рівнянь вигляду

$$\varepsilon^m \frac{d^m x}{dt^m} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon).$$

Пізніше в роботі [38] розглянута й система рівнянь вигляду (1.33), в якій $A_m(t,\varepsilon) = E$, $h = 1$, за умови, що її характеристичне рівняння

$$\det(A_0(t,0) + \lambda A_1(t,0) + \cdots + \lambda^{m-1} A_{m-1}(t,0) + \lambda^m E) = 0$$

має лише прості корені. При цьому для побудови асимптотичних розв'язків використовується розклад характеристичного полінома на лінійні множники, накладаючи додаткові обмеження на збурювальні матриці системи.

Із розвитком теорії асимптотичного інтегрування систем рівнянь вигляду (1.26) з матрицею $B(t,\varepsilon)$ при похідних, яка вироджується при $\varepsilon \to 0$, актуальність узагальнення цієї теорії на системи рівнянь вищих порядків ще більш посилилась, оскільки до систем вигляду (1.33) зводяться так звані гібридні системи, які містять у своїй структурі диференціальні рівняння різного порядку. Записавши їх у вигляді (1.33), отримаємо систему з тотожно виродженою матрицею $A_m(t,\varepsilon)$ при старших похідних. Це ж саме стосується й системи (1.32).

Таке узагальнення було здійснено у 1990-х роках В.П. Яковцем для однорідних систем диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\varepsilon^{2h}A(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + C(t,\varepsilon)x = 0, \qquad (1.34)$$

що стало можливим завдяки застосуванню теорії квадратичних в'язок матриць $\lambda^2 A + \lambda B + C$, яка була розширена ним і на той випадок, коли матриця A особлива [101].

Розглядаючи систему рівнянь

$$A(t)\frac{d^2x}{dt^2} + B(t)\frac{dx}{dt} + C(t)x = f(t), t \in [a,b], \qquad (1.35)$$

він встановив, що вона має загальний розв'язок типу Коші, якщо виконуються такі умови:

1°. $\operatorname{rank} A(t) = 2n - r = \mathrm{const}$;

2°. Матриця $A(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно операторів

$$L_1(t) = B(t) + 2A(t)\frac{d}{dt}, L_2(t) = C(t) + B(t)\frac{d}{dt} + A(t)\frac{d^2}{dt^2},$$

який складається з r ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1,r}$;

3°. $A(t), B(t), C(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $f(t) \in C^{m-1}[a;b]$, де $m = \max s_i$.

Цей розв'язок має вигляд

$$x(t) = X_{2n-s}(t)c + \widetilde{x}(t),$$

де $s = s_1 + \cdots + s_r$, $X_{2n-s}(t)$ – прямокутна фундаментальна матриця відповідної однорідної системи розмірністю $n \times (2n-s)$, стовпцями якої є лінійно незалежні розв'язки цієї системи, c – довільний сталий $(2n-s)$-вимірний вектор, $\widetilde{x}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідної системи.

В.П. Яковець також встановив, що коли гранична в'язка матриць $C(t, 0) + \lambda B(t, 0) + \lambda^2 A(t, 0)$ сингулярно збуреної системи (1.34) регулярна на заданому відрізку $[t_0; T]$, і має стабільний спектр, а коефіцієнти цієї системи достатньо гладкі і допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε, то вона задовольняє перелічені вище умови 1°–3° і, отже, має загальний розв'язок типу Коші.

Виходячи з цього, йому вдалось частково узагальнити розроблену ним теорію асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь першого порядку і на системи рівнянь другого порядку вигляду (1.34), детально дослідивши випадок, коли гранична в'язка матриць регулярна і має прості скінченні і нескінченні елементарні дільники або по одному кратному.

З проведеного аналізу літератури випливає, що системи рівнянь (1.33), порядок яких вище другого, незважаючи на їх практичне і теоретичне значення, до цього часу залишаються не дослідженими. Це було обумовлено необхідністю застосування поліноміальних матричних в'язок, теорія яких недостатньо розвинена, а також серйозними труднощами технічного характеру, які доводиться долати при дослідженні систем даного типу.

Подоланню цих труднощів і розвитку загальної теорії систем рівнянь вигляду (1.32) та терії асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем вигляду (1.33) і присвячена дана робота.

РОЗДІЛ 2.
ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У даному розділі наводяться допоміжні результати, які використовуються в подальших розділах. Вони стосуються поліноміальних матричних в'язок та структури загального розв'язку вироджених систем диференціальних рівнянь вищих порядків.

Ці результати опубліковано в роботах [44,45].

2.1. Поліноміальні в'язки матриць

Розглянемо над полем комплексних чисел в'язку матриць

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \tag{2.1}$$

де $A_i, i = \overline{0, m}$, – квадратні матриці $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами, λ – довільний параметер. Слідуючи [58,113], цю в'язку називатимемо поліноміальною. При цьому вважатимемо, що матриця A_m вироджена, тобто $\det A_m = 0$.

Означення 2.1. В'язку матриць (2.1) будемо називати регулярною, якщо $\det P(\lambda) \neq 0$ при деякому $\lambda \in C$, і сингулярною, якщо $\det P(\lambda) \equiv 0, \forall \lambda \in C$.

По аналогії з теорією лінійних матричних в'язок [22] введемо поняття скінченних і нескінченних елементарних дільників поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$. Для цього поряд з (2.1) розглянемо в'язку матриць

$$P(\lambda, \xi) = \sum_{i=0}^{m} \xi^{m-i} \lambda^i A_i,$$

яка залежить від двох параметрів λ і ξ. Знайдемо її інваріантні многочлени за формулою

$$i_s(\lambda, \xi) = \frac{D_{n-s+1}(\lambda, \xi)}{D_{n-s}(\lambda, \xi)}, s = \overline{1, n}$$

де $D_k(\lambda, \xi)$ – найбільший спільний дільник усіх мінорів k-го порядку матриці $P(\lambda, \xi)$ [22, с. 314]. Розклавши інваріантні многочлени $i_s(\lambda, \xi), s = \overline{1, n}$, на незвідні множники над полем комплексних чисел, отримаємо дві групи елементарних дільників: $e_i(\lambda, \xi) = (\alpha_i \lambda + \beta_i \xi)^{k_i}$ і $e_j(\lambda, \xi) = \xi^{s_j}$, де $\alpha_i, \beta_i \in C$, $k_i, s_j \in N$. Поклавши в $e_i(\lambda, \xi)$ $\xi = 1$, дістанемо елементарні дільники в'язки (2.1). Що ж стосується другої групи елементарних дільників, то вони є елементарними дільниками в'язки матриць

$$M(\xi) = \sum_{i=0}^{m} \xi^{m-i} A_i, \tag{2.2}$$

симетричної в'язці $P(\lambda)$, що відповідають її нульовому власному значенню. Слідуючи [58, с. 42], елементарні дільники першої групи називатимемо скінченними елементарними дільниками поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$, а елементарні дільники другої групи – нескінченними елементарними дільниками цієї в'язки.

Дотримуючись [113], введемо поняття жорданового ланцюжка векторів для поліноміальної в'язки (2.1).

Означення 2.2. Число λ_0 називатимемо власним значенням в'язки матриць $P(\lambda)$, а ненульові вектори $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(p)}$ – відповідним жордановим ланцюжком власного та приєднаних векторів завдовжки p, якщо виконуються рівності

$$P(\lambda_0)\varphi^{(1)} = 0;$$

$$P(\lambda_0)\varphi^{(i)} + \sum_{k=1}^{\min(i-1,m)} \frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k}\varphi^{(i-k)} = 0, i = \overline{2,p};$$

а рівняння

$$P(\lambda_0)y + \sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k}\varphi^{(p+1-k)} = 0$$

не має розв'язків відносно y.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. Якщо в'язка матриць $P(\lambda)$ регулярна, то:

1) сума кратностей всіх її скінченних та нескінченних елементарних дільників дорівнює mn;

2) кожному скінченному елементарному дільнику кратністю p відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки p;

3) якщо в'язка матриць $P(\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю q, то нульовому власному значенню симетричної в'язки $M(\xi)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки q.

Доведення. Поряд з поліноміальною в'язкою матриць (2.1) розглянемо лінійну в'язку матриць $L(\lambda) = \widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ (розмірності $mn \times mn$), в якій матриці $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$

мають блоковий вигляд:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ (-1)^{m-1}A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{m-2}A_1 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ (-1)^{k}A_{m-k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ (-1)^{2}A_{m-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{1}A_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E & A_{m-1} \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{B} = \operatorname{diag}\{E, \dots, E, A_m\}. \tag{2.3}$$

Покажемо, що визначники в'язок матриць $P(\lambda)$ і $L(\lambda)$ збігаються. З цією метою виконаємо над визначником лінійної в'язки $L(\lambda)$ еквівалентні перетворення. Множимо m-й стовпець визначника

$$\det L(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ (-1)^{m-1}A_0 & \lambda E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{m-2}A_1 & E & \lambda E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ (-1)^{k}A_{m-k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & E & \lambda E & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ (-1)^{2}A_{m-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda E & 0 \\ (-1)^{1}A_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E & A_{m-1} + \lambda A_m \end{vmatrix}$$

на λ-матрицю $-\lambda E$ і додаємо до 1-го стовпця, потім 1-й рядок отриманого визначника множимо на λ-матрицю $-A_{m-1} - \lambda A_m$ і додаємо до m-го рядка. У результаті отримаємо

$$\det L(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ (-1)^{m-1}A_0 & \lambda E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{m-2}A_1 & E & \lambda E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k}A_{m-k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & E & \lambda E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{2}A_{m-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda E & 0 \\ (-1)^{1}\left(A_{m-2}+\lambda A_{m-1}+\lambda^2 A_m\right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{vmatrix}.$$

Після цього i-й рядок ($i=\overline{m,3}$) знайденого визначника множимо на $\lambda-$матрицю $-\lambda E$ і додаємо до $(i-1)$-го, потім $(i-1)$-й стовпець отриманого визначника множимо на $\lambda-$матрицю

$$(-1)^{m-i+2}\sum_{j=0}^{m-i+2}\lambda^{m+2-i-j}A_{m-j}$$

і додаємо до 1-го. У результаті цих перетворень дістанемо

$$\det L(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ (-1)^{m-1}P(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{vmatrix}.$$

Нарешті, помінявши місцями в останньому визначнику 1-й та 2-й рядки, а потім i-й стовпець з m-м ($i=\overline{2,m-1}$), отримаємо $\det L(\lambda)=\det\operatorname{diag}\{P(\lambda),E,\dots,E\}$, звідки випливає, що $\det L(\lambda)=\det P(\lambda)$. Отже, власні значення в'язок $L(\lambda)$ і $P(\lambda)$ збігаються.

Враховуючи проведені вище перетворення визначника в'язки матриць $L(\lambda)$, покажемо, що скінченні та нескінченні елементарні дільники в'язок $L(\lambda)$ і $P(\lambda)$

також збігаються. Для цього, помноживши лінійну в'язку матриць $L(\lambda)$ зліва і справа відповідно на неособливі матриці

$$\begin{bmatrix} (-1)^{m-1}(\lambda^{m-2}A_{m-1}+\lambda^{m-1}A_m) & E & -\lambda E & \lambda^2 E & \dots & (-\lambda)^{m-3}E & (-\lambda)^{m-2}E \\ E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{m-2}(\lambda^{m-3}A_{m-1}+\lambda^{m-2}A_m) & 0 & E & -\lambda E & \dots & (-\lambda)^{m-4}E & (-\lambda)^{m-3}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k}(\lambda^{k-1}A_{m-1}+\lambda^{k}A_m) & 0 & 0 & 0 & \dots & (-\lambda)^{k-2}E & (-\lambda)^{k-1}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{2}(\lambda A_{m-1}+\lambda^{2}A_m) & 0 & 0 & 0 & \dots & E & -\lambda E \\ (-1)^{1}(A_{m-1}+\lambda A_m) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^{m-1}E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{2m-2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda^{m-1-j}A_{m-j} & 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^{2m-3}\sum_{j=0}^{m-2}\lambda^{m-2-j}A_{m-j} & 0 & 0 & E & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{m+k-1}\sum_{j=0}^{k}\lambda^{k-j}A_{m-j} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{m+1}\sum_{j=0}^{2}\lambda^{2-j}A_{m-j} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ (-1)^{m}\lambda E & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

зведемо її до еквівалентної λ-матриці $\operatorname{diag}\{P(\lambda), E, \dots, E\}$, елементарні дільники якої збігаються з елементарними дільниками поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$. Оскільки ж еквівалентні λ-матриці мають одні й ті самі елементарні дільники [22], то звідси випливає, що скінченні елементарні дільники поліноміальної в'язки $P(\lambda)$ збігаються із скінченними елементарними дільниками лінійної в'язки $L(\lambda)$.

Аналогічно встановлюємо, що елементарні дільники поліноміальної в'язки матриць $M(\xi)$ збігаються з елементарними дільниками відповідної лінійної в'язки $N(\xi) = \widetilde{B} + \xi\widetilde{A}$, симетричної в'язці $L(\lambda)$. Для цього лінійну в'язку матриць $N(\xi)$ помножимо зліва і справа відповідно на неособливі матриці

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\xi E & E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\xi E & E & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ \sum_{j=0}^{m-2} \xi^{m-1-j} A_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\xi E & E \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\xi E \\ (-1)^m \xi A_0 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{m-1}\xi^2 A_0 \\ (-1)^{m-1}\sum_{j=0}^{1}\xi^{2-j}A_j & 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{m-2}\sum_{j=0}^{1}\xi^{3-j}A_j \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ (-1)^{m-k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\xi^{k-j}A_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E & \dots & 0 & (-1)^{m-k}\sum_{j=0}^{k-1}\xi^{k+1-j}A_j \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ (-1)^3\sum_{j=0}^{m-3}\xi^{m-2-j}A_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E & (-1)^2\sum_{j=0}^{m-3}\xi^{m-1-j}A_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E \end{bmatrix}.$$

У результаті матрицю $N(\xi)$ зведемо до вигляду $\operatorname{diag}\{E,\dots,E,M(\xi)\}$, звідки випливає, що збігаються також і нескінченні елементарні дільники в'язок $P(\lambda)$ і $L(\lambda)$.

Оскільки сума кратностей всіх скінченних і нескінченних елементарних дільників лінійної регулярної в'язки матриць $L(\lambda)$ дорівнює mn, то такою буде й сума кратностей відповідних елементарних дільників поліноміальної в'язки $P(\lambda)$.

Нехай в'язка матриць $P(\lambda)$ має скінченний елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0)^p$ кратністю p, що відповідає власному значенню λ_0. За доведеним вище такий самий скінченний елементарний дільник матиме також відповідна блокова лінійна в'язка $L(\lambda)$. Згідно теоремою 1.7 із [58, с. 38] цьому елементарному дільнику відповідає жорданів ланцюжок завдовжки p mn-вимірних векторів, що складається з власного вектора $y^{(1)}$ і $p-1$ приєднаних векторів $y^{(i)}$, $i=\overline{2,p}$, які задовольняють співвідношення

$$\left(\widetilde{A}+\lambda_0\widetilde{B}\right)y^{(1)}=0, \tag{2.4}$$

$$\left(\widetilde{A}+\lambda_0\widetilde{B}\right)y^{(i)}+\widetilde{B}y^{(i-1)}=0, i=\overline{2,p}, \tag{2.5}$$

а рівняння

$$\left(\widetilde{A}+\lambda_0\widetilde{B}\right)y+\widetilde{B}y^{(p)}=0 \tag{2.6}$$

не має розв'язку відносно y. Позначимо $y^{(i)} = \operatorname{col}\left[y_1^{(i)},\ldots,y_m^{(i)}\right]$, де $y_k^{(i)}$, $i = \overline{1,p}$, $k=\overline{1,m}$, – n-вимірні вектори, координатами яких є відповідні координати вектора $y^{(i)}$. Взявши до уваги структуру матриць $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, з формул (2.4), (2.5) маємо

$$P(\lambda_0)y_1^{(1)}=0,$$

$$P(\lambda_0)y_1^{(i)}+\sum_{k=1}^{\min(i-1,m)}\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k}y_1^{(i-k)}=0, i=\overline{2,p}.$$

Водночас із несумісності рівняння (2.6) випливає несумісність рівняння

$$P(\lambda_0)y+\sum_{k=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k}y_1^{(p+1-k)}=0.$$

Таким чином, скінченному елементарному дільнику кратністю p поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів, довжина якого збігається з кратністю цього елементарного дільника.

Нехай тепер в'язка матриць $P(\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю q. Тоді за доведеним вище такий самий елементарний дільник матиме лінійна в'язка матриць $L(\lambda)$. Згідно з тією ж теоремою 1.7 із [58, с. 38] нульовому власному значенню в'язки матриць $N(\xi)$, симетричної в'язці $L(\lambda)$, відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки q, що складається з mn-вимірних векторів $z^{(i)}, i=\overline{1,q}$, які задовольняють співвідношення

$$\widetilde{B}z^{(1)}=0, \tag{2.7}$$

$$\widetilde{B}z^{(i)}+\widetilde{A}z^{(i-1)}=0, i=\overline{2,q}, \tag{2.8}$$

а рівняння

$$\widetilde{B}z+\widetilde{A}z^{(p)}=0 \tag{2.9}$$

не має розв'язку.

Позначимо $z^{(i)} = \operatorname{col}\left[z_1^{(i)},\ldots,z_m^{(i)}\right]$, де $z_k^{(i)}$, $i=\overline{1,q}$, $k=\overline{1,m}$, – n-вимірні вектори, координатами яких є відповідні координати вектора $z^{(i)}$. Врахувавши структуру матриць $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$, з формул (2.7), (2.8) маємо

$$A_m z_m^{(1)} = 0,$$

$$A_m z_m^{(i)} + \sum_{k=1}^{\min(i-1,m)} A_{m-k} z_m^{(i-k)} = 0, i = \overline{2, q},$$

а з несумісності рівняння (2.9) випливає несумісність рівняння

$$A_m z + \sum_{k=1}^{\min(i-1,m)} A_{m-k} z_m^{(q+1-k)} = 0.$$

Отже, якщо поліноміальна в'язка матриць $P(\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю q, то нульовому власному значенню в'язки матриць $M(\xi)$ відповідає жорданів ланцюжок завдовжки q. Теорему доведено.

Якщо кратному власному значенню λ_0 в'язки матриць (2.1) відповідає кілька скінченних елементарних дільників, то згідно з теоремою 2.1 кожному такому дільнику відповідає жорданів ланцюжок векторів, довжина якого співпадає з кратністю цього дільника. Сукупність усіх цих ланцюжків будемо називати жордановим набором в'язки матриць $P(\lambda)$, що відповідає її власному значенню λ_0. У випадку, коли в'язка матриць (2.1) має нескінченні елементарні дільники, аналогічним чином вводиться поняття жорданового набору в'язки $M(\xi)$, що відповідає її нульовому власному значенню.

Нехай жорданів набір в'язки матриць $P(\lambda)$ складається з векторів $\varphi_i^{(j)}$, $j = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, r}$, що утворюють r ланцюжків завдовжки p_i, $i = \overline{1, r}$. Згідно з означенням (2.2) ці вектори мають задовольняти наступні співвідношення

$$P(\lambda_0)\varphi_i^{(1)} = 0, i = \overline{1, r};$$

$$P(\lambda_0)\varphi_i^{(j)} + \sum_{k=1}^{\min(j-1,m)} \frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} \varphi_i^{(j-k)} = 0, j = \overline{2, p_i}, i = \overline{1, r}; \tag{2.10}$$

а рівняння

$$P(\lambda_0) y_i + \sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} \varphi_i^{(p+1-k)} = 0, i = \overline{1, r} \tag{2.11}$$

не має розв'язків відносно $y_i, i = \overline{1, r}$.

Позначимо через $\psi_i^{(1)}$, $i = \overline{1,r}$, базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(\lambda_0)$. Тоді завдяки розв'язності рівнянь (2.10) маємо

$$\sum_{k=1}^{\min(s,m)} \left(\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} \varphi_i^{(s+1-k)}, \psi_j^{(1)} \right) = 0, s = \overline{1, p_i - 1}, i, j, = \overline{1,r},$$

а з нерозв'язності рівняння (2.11) випливає, що r-вимірні вектори

$$g_i = \operatorname{col} \left[\sum_{k=1}^{\min(p_i,m)} \left(\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} \varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_1^{(1)} \right), \ldots, \sum_{k=1}^{\min(p_i,m)} \left(\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} \varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_r^{(1)} \right) \right],$$

$i = \overline{1,r}$, не дорівнюють нульовому.

Якщо при цьому

$$\det \left\| \sum_{k=1}^{\min(p_i,m)} \left(\frac{\partial^k P(\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} \varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)} \right) \right\|_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0,$$

то даний жорданів набір будемо називати повним.

Аналогічно означається й поняття повноти жорданового набору в'язки $M(\xi)$.

Справджується наступна теорема.

Теорема 2.2. Якщо регулярна в'язка матриць (2.1) має кратне власне значення λ_0, якому відповідає r_i скінченних елементарних дільників кратності p_i ($i = \overline{1,\alpha}$), а також має s_j нескінченних елементарних дільників кратністю q_j ($j = \overline{1,\beta}$), причому $\sum_{i=1}^{\alpha} r_i p_i + \sum_{j=1}^{\beta} s_j q_j = mn$, то правильні наступні твердження:

1) жорданів набір в'язки матриць $P(\lambda)$, який складається з векторів $\varphi_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}^{(j)}$, $j = \overline{1,p_k}$, $i = \overline{1,r_k}$, $k = \overline{1,\alpha}$, є повним;

2) жорданів набір симетричної в'язки матриць $M(\xi)$, який відповідає її нульовому власному значенню і складається з векторів $\widetilde{\varphi}_{s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+i}^{(j)}$, $j = \overline{1,q_k}$, $i = \overline{1,s_k}$, $k = \overline{1,\beta}$, також є повним.

Доведення. Доведемо перше твердження теореми 2.2, друге доводиться аналогічно.

Поряд з поліноміальною в'язкою матриць (2.1) розглянемо відповідну лінійну в'язку $(mn \times mn)$-матриць $L(\lambda) = \widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$, де матриці A, B визначаються за формулами (2.3).

Згідно з умовою теореми 2.2 та теоремою 2.1 λ_0 буде єдиним власним значенням в'язок матриць $P(\lambda)$, $L(\lambda)$. Ці в'язки мають однакові скінченні та нескінченні елементарні дільники. Оскільки в'язка матриць $L(\lambda)$ має r_i скінченних елементарних дільників кратністю p_i, $i=\overline{1,\alpha}$, відповідно, то власному значенню λ_0 цієї в'язки відповідає r_i жорданових ланцюжків завдовжки p_i, $i=\overline{1,\alpha}$. Вектори цих ланцюжків визначаються з рівностей

$$L(\lambda_0)h_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}=0, i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha}, \tag{2.12}$$

$$L(\lambda_0)h^{(j)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}=-\widetilde{B}h^{(j-1)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}, i=\overline{1,r_k}, j=\overline{2,p_k}, k=\overline{1,\alpha}, \tag{2.13}$$

а рівняння

$$L(\lambda_0)y_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}=-\widetilde{B}h^{(p_k)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}, i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha},$$

нерозв'язні відносно векторів $y_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}$, $i=\overline{1,r_k}$, $k=\overline{1,\alpha}$. Згідно з [58, с. 107–108] ці ланцюжки утворюють повний жорданів набір. Отже,

$$\det\left\|-\left(\widetilde{B}h^{(p_k)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}, d_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}\right)\right\|_{i,j=\overline{1,r_k},k=\overline{1,\alpha}}\neq 0, \tag{2.14}$$

при будь-якому виборі векторів $d_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}$ – базисних елементів нуль-простору матриці $L^*(\lambda_0)$. Враховуючи структуру в'язки матриць $L^*(\lambda_0)$, встановимо, що

$$d_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}=\begin{pmatrix}(-1)^{m-1}\left(\overline{\lambda}_0^{m-2}A^*_{m-1}+\overline{\lambda}_0^{m-1}A^*_m\right)\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}\\ \psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}\\ (-1)^1\overline{\lambda}_0\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}\\ (-1)^2\overline{\lambda}_0^2\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (-1)^{m-2}\overline{\lambda}_0^{m-2}\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}\end{pmatrix},$$

$j=\overline{1,r_k}$, $k=\overline{1,\alpha}$, де вектори $\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}$, $j=\overline{1,r_k}$, $k=\overline{1,\alpha}$, – базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(\lambda_0)$.

Водночас, враховуючи структуру матриць $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, вектори $h^{(p_k)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}$, $i=\overline{1,r_k}$, $k=\overline{1,\alpha}$, визначимо з систем (2.12) та (2.13) за формулою:

$$h^{(p_k)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}=\begin{pmatrix} \varphi^{(p_k)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i} \\ (-1)^{m-1}\sum_{\gamma=0}^{\min(p_k-1,m)}\frac{\partial^\gamma P_1(\lambda_0)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k-\gamma)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i} \\ (-1)^{m-2}\sum_{\gamma=0}^{\min(p_k-1,m)}\frac{\partial^\gamma P_2(\lambda_0)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k-\gamma)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^{2}\sum_{\gamma=0}^{\min(p_k-1,m)}\frac{\partial^\gamma P_{m-2}(\lambda_0)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k-\gamma)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i} \\ -\lambda_0\varphi^{(p_k)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}-\varphi^{(p_k-1)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i} \end{pmatrix}, i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha},$$

де

$$P_k(\lambda_0)=\sum_{i=k}^{m}\lambda_0^{i-k}A_i, k=\overline{1,m}.$$

Підставивши ці вектори в (2.14), дістанемо

$$\det\left\|\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\left(\frac{\partial^\gamma P(\lambda_0)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k+1-\gamma)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i},\psi^{(1)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+j}\right)\right\|_{i,j=\overline{1,r_k},k=\overline{1,\alpha}}\neq 0,$$

що й треба було довести.

Зауваження 2.1. Отримані результати справджуються також для поліноміальної в'язки матриць

$$P(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i A_i(t)$$

зі змінними матрицями, якщо кратності всіх її скінченних та нескінченних елементарних дільнитків залишаються сталими на проміжку зміни аргумента t. При цьому, якщо елементи матриць $A_i(t)$, $i=\overline{0,m}$, мають на відрізку $[0;T]$ неперервні похідні до k-го порядку включно, то всі власні значення поліноміальної в'язки матриць $P(t,\lambda)$ також матимуть на цьому відрізку неперервні похідні до k-го порядку. Власні вектори в'язки матриць $P(t,\lambda)$ та симетричної їй в'язки $M(t,\xi)$ можна визначити так, щоб і вони мали той самий ступінь гладкості [58, с. 46].

2.2. Структура загального розв'язку вироджених лінійних систем диференціальних вищих порядків. Задача Коші

Розглянемо систему рівнянь

$$A_m(t)\frac{d^m x}{dt^m}+A_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+A_1(t)\frac{dx}{dt}+A_0(t)x=f(t), t\in[a,b], \quad (2.15)$$

де $A_i(t), i = \overline{0,m}$, – квадратні матриці n-го порядку, $f(t)$ – n-вимірний вектор, які можуть мати як дійсні, так і комплекснозначні елементи, $x(t)$ -– шуканий n-вимірний вектор.

Вважатимемо, що

$$\det A_m(t) \equiv 0, \forall t \in [a,b], \tag{2.16}$$

тобто матриця $A_m(t)$ при старшій похідній тотожно вироджена на заданому проміжку.

Дослідимо структуру загального розв'язку систем (2.15) за виконання умови (2.16).

Позначимо

$$L_k(t) = \sum_{i=0}^{k} C_{m-i}^{k-i} A_{m-i}(t) \frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}}, k = \overline{1,m}, \tag{2.17}$$

диференціальні оператори, що діють в унітарному просторі U^n n-вимірних вектор-функцій класу $C^k[a,b], k \geq m$.

Означення 2.3. Будемо говорити, що матриця $A_m(t)$ має на відрізку $[a,b]$ жорданів ланцюжок векторів завдовжки s відносно операторів $L_i(t), i = \overline{1,m}$, якщо існують ненульові вектори $\varphi^{(j)}(t) \in U^n, j = \overline{1,s}$, такі, що для всіх $t \in [a,b]$ виконуються співвідношення

$$A_m(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$A_m(t)\varphi^{(j)}(t) + \sum_{k=1}^{\min(j-1,m)} L_k(t)\varphi^{(j-k)}(t) = 0, j = \overline{2,s},$$

а рівняння

$$A_m(t)z + \sum_{k=1}^{\min(s,m)} L_k(t)\varphi^{(s+1-k)}(t) = 0$$

не має розв'язку в жодній точці відрізка $[a,b]$.

Якщо матриця $A_m(t)$ має кілька жорданових ланцюжків відносно операторів $L_i(t), i = \overline{1,m}$, то вектори, які їх утворюють, називатимемо жордановим набором матриці $A_m(t)$ відносно операторів $L_i(t), i = \overline{1,m}$.

Нехай жорданів набір матриці $A_m(t)$ відносно операторів $L_i(t), i = \overline{1,m}$, складається з векторів $\varphi_i^{(j)}(t), j = \overline{1,s_i}, i = \overline{1,r}$, що утворюють r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1,r}$. Згідно з означенням 2.3 ці вектори для всіх $t \in [a,b]$ задовольняють співвідношення

$$A_m(t)\varphi_i^{(1)}(t) = 0, i = \overline{1,r},$$

$$A_m(t)\varphi_i^{(j)}(t) + \sum_{k=1}^{\min(j-1,m)} L_k(t)\varphi_i^{(j-k)}(t) = 0, j = \overline{2,s_i}, i = \overline{1,r}. \qquad (2.18)$$

Позначимо через $\psi_j^{(1)}(t), j = \overline{1,r}$, базисні елементи нуль-простору матриці $A_m^*(t)$, спряженої до матриці $A_m(t)$. Тоді завдяки сумісності рівнянь (2.18) маємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(j,m)} L_k(t)\varphi_i^{(j+1-k)}(t), \psi_l^{(1)}(t) \right) = 0, j = \overline{1, s_i - 1}, i, l = \overline{1,r}, t \in [a,b]. \qquad (2.19)$$

У свою чергу з несумісності рівнянь

$$A_m(t)z + \sum_{k=1}^{\min(s_i,m)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t) = 0, i = \overline{1,r},$$

випливає, що r-вимірні вектори

$$l_i(t) = \mathrm{col}\left[\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_1^{(1)}(t) \right), \ldots, \left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_r^{(1)}(t) \right) \right],$$

$i = \overline{1,r}$, не дорівнюють нульовому в жодний точці відрізка $[a,b]$.

Якщо при цьому

$$\det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_j^{(1)}(t) \right) \right\|_1^r \neq 0, \forall t \in [a,b],$$

то, слідуючи [58, с. 85], даний жорданів набір будемо називати повним.

Припустимо тепер, що виконуються наступні умови:

$2.1^\circ. \operatorname{rank} A_m(t) = n - r = \mathrm{const}$.

2.2°. Матриця $A_m(t)$ має на відрізку $[a,b]$ повний жорданів набір векторів відносно операторів $L_i(t), i = \overline{1,m}$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1,r}$, де $\max s_i = p$.

$2.3^\circ. A_i(t) \in C^{3p-2}[a,b], i = \overline{1,m}$.

$2.4^\circ. f(t) \in C^{p-1}[a,b]$.

Зробивши в системі (2.15) заміну

$$y_i = \frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}, i = \overline{1, m}, \tag{2.20}$$

і ввівши позначення

$$y = \operatorname{col}\left[y_1, y_2, \ldots, y_m\right], \tag{2.21}$$

зведемо її до еквівалентної системи рівнянь першого порядку

$$\widetilde{B}(t)\frac{dy}{dt} = \widetilde{A}(t)y + \widetilde{f}(t), \tag{2.22}$$

в якій

$$\widetilde{B}(t) = \operatorname{diag}\left\{E, \ldots, E, A_m(t)\right\},$$

$$\widetilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ -A_0(t) & -A_1(t) & -A_2(t) & \ldots & -A_{m-2}(t) & -A_{m-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{f}(t) = \operatorname{col}\left[0, \ldots, 0, f(t)\right].$$

Покажемо, що система (2.22) задовольняє умови теореми 2.2 із [58, с. 62], які гарантують наявність у неї загального розв'язку типу Коші.

Дійсно, з умов $2.1^\circ, 2.3^\circ, 2.4^\circ$ одразу випливає, що $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t) \in C^{3p-2}[a, b]$, $\widetilde{f}(t) \in C^{p-1}[a, b]$, $\operatorname{rank} \widetilde{B}(t) = = mn - r = \mathrm{const}$.

Знайдемо жорданів набір матриці $\widetilde{B}(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}(t) = \widetilde{A}(t) - \widetilde{B}(t)\frac{d}{dt}$ у просторі U^{pn} достатньо гладких mn-вимірних вектор-функцій.

Нехай $g_i^{(1)}(t), i = \overline{1, r}$, – власні вектори матриці $\widetilde{B}(t)$, що відповідають її нульовому власному значенню. Подамо їх у вигляді $g_i^{(1)}(t) = \operatorname{col}\left[g_{i1}^{(1)}(t), \ldots, g_{im}^{(1)}(t)\right]$, $i = \overline{1, r}$, де $g_{ik}^{(1)}(t)$, $k = \overline{1, m}$, -– n-вимірні вектор-стовпці. Відповідно до структури матриці $\widetilde{B}(t)$ матимемо

$$g_{ik}^{(1)}(t) = 0, k = \overline{1, m-1},$$

$$g_{im}^{(1)}(t) = \varphi_i^{(1)}(t), i = \overline{1, r},$$

де $\varphi_i^{(1)}(t), i=\overline{1,r},$ – власні вектори матриці $A_m(t)$, що відповідають її нульовому власному значенню. Отже,

$$g_i^{(1)}(t) = \mathrm{col}\left[0,\ldots,0,\varphi_i^{(1)}(t)\right], i=\overline{1,r}.$$

Зафіксуємо один із цих власних векторів і будемо шукати відповідні йому приєднані вектори. Перший з них позначимо $g_i^{(2)}(t)$ та подамо у вигляді

$$g_i^{(2)}(t) = \mathrm{col}\left[g_{i1}^{(2)}(t),\ldots,g_{im}^{(2)}(t)\right], i=\overline{1,r},$$

де $g_{ik}^{(2)}(t), k=\overline{1,m},$ -– n-вимірні вектор-стовпці. За означенням жорданового ланцюжка цей вектор має задовольняти рівняння

$$\widetilde{B}(t)g_i^{(2)}(t) = \widetilde{L}(t)g_i^{(1)}(t).$$

Врахувавши структуру матриць $\widetilde{A}(t), \widetilde{B}(t)$, з нього дістанемо

$$g_{ik}^{(2)}(t) = 0, k=\overline{1,m-2},$$

$$g_{i,m-1}^{(2)}(t) = \varphi_i^{(1)}(t),$$

$$A_m(t)g_{im}^{(2)}(t) + A_{m-1}(t)\varphi_i^{(1)}(t) + A_m(t)\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt} = 0. \tag{2.23}$$

Додавши та віднявши в лівій частині рівняння (2.23) вектор $C_{m-1}^1 A_m(t)\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}$ і взявши до уваги формули (2.17), запишемо його у вигляді

$$A_m(t)\left(g_{im}^{(2)}(t) - C_{m-1}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}\right) + L_1(t)\varphi_i^{(1)}(t) = 0.$$

Згідно з умовою 2.2° та співвідношеннями (2.18) це рівняння розв'язне при всіх $t\in[a,b]$, і з нього знайдемо

$$g_{im}^{(2)}(t) = \varphi_i^{(2)}(t) + C_{m-1}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt},$$

де $\varphi_i^{(2)}(t)$ – перший приєднаний вектор i-го жорданового ланцюжка матриці $A_m(t)$ відносно операторів $L_k(t), k=\overline{1,m}$. Отже,

$$g_i^{(2)}(t) = \mathrm{col}\left[0,\ldots,0,\varphi_i^{(1)}(t),\varphi_i^{(2)}(t) + C_{m-1}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}\right].$$

Аналогічно, позначивши другий приєднаний вектор через $g_i^{(3)}(t)$ і подавши його у вигляді

$$g_i^{(3)}(t) = \mathrm{col}\left[g_{i1}^{(3)}(t), \ldots, g_{im}^{(3)}(t)\right],$$

з рівняння

$$\widetilde{B}(t)g_i^{(3)}(t) = \widetilde{L}(t)g_i^{(2)}(t)$$

дістанемо

$$g_{ik}^{(3)}(t) = 0, k = \overline{1, m-3},$$

$$g_{i,m-2}^{(3)}(t) = \varphi_i^{(1)}(t),$$

$$g_{i,m-1}^{(3)}(t) = \varphi_i^{(2)}(t) + C_{m-2}^1 \frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt},$$

$$A_m(t)g_{im}^{(3)}(t) + A_{m-2}(t)\varphi_i^{(1)}(t) + A_{m-1}(t)\varphi_i^{(2)}(t) + C_{m-1}^1 A_{m-1}(t)\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt} +$$

$$+A_m(t)\frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} + C_{m-1}^1 A_m(t)\frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2} = 0.$$

Додавши і віднявши в лівій частині останнього рівняння вектори $C_{m-1}^2 A_m(t)\frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2}$ та $C_{m-1}^1 A_m(t)\frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt}$, запишемо його у вигляді

$$A_m(t)\left(g_{im}^{(3)}(t) - C_{m-1}^1\frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} - C_{m-1}^2\frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2}\right) + L_1(t)\varphi_i^{(2)}(t) + L_2(t)\varphi_i^{(1)}(t) = 0,$$

звідки згідно з умовою 2.2° та співвідношенням (2.19) випливає, що

$$g_{im}^{(3)}(t) = \varphi_i^{(3)}(t) + C_{m-1}^1\frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} + C_{m-1}^2\frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2},$$

де $\varphi_i^{(3)}(t)$ – другий приєднаний вектор i-го жорданового ланцюжка матриці $A_m(t)$ відносно операторів $L_k(t), k = \overline{1, m}$. Отже,

$$g_i^{(3)}(t) = \mathrm{col}\left[0, \ldots, 0, \varphi_i^{(1)}(t), \varphi_i^{(2)}(t) + C_{m-2}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}, \varphi_i^{(3)}(t) + C_{m-1}^1\frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} + C_{m-1}^2\frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2}\right].$$

Продовжуючи цей процес, методом математичної індукції встановимо, що рівняння

$$\widetilde{B}(t)g_i^{(j)}(t) = \widetilde{L}(t)g_i^{(j-1)}(t), i = \overline{1, r},$$

розв'язні при $j = \overline{1, s_i}$, відносно векторів $g_i^{(j)}(t) = \mathrm{col}\left[g_{i1}^{(j)}(t), \ldots, g_{im}^{(j)}(t)\right]$. При цьому n-вимірні вектори $g_{ik}^{(j)}(t)$ виражаються через вектори $\varphi_i^{(j)}(t), j = \overline{1, s_i}$, i-го жорданового ланцюжка матриці $A_m(t)$ відносно операторів $L_k(t), k = \overline{1, m}$, за формулою

$$g_{ik}^{(j)}(t) = \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l \frac{d^l \varphi_i^{(j+k-m-l)}(t)}{dt^l}, k = \overline{1, m}. \tag{2.24}$$

Водночас переконуємось, що рівняння $\widetilde{B}(t)z = \widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), i = \overline{1, r}$, несумісні. Отже, матриця $\widetilde{B}(t)$ має відносно оператора $\widetilde{L}(t)$ жорданів набір векторів, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1, r}$. Покажемо, що цей жорданів набір є повним. Для цього скористаємось наступним твердженням.

Лема 2.1. При всіх $t \in [a, b]$ виконується рівність

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i, m)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_j^{(1)}(t)\right), i, j = \overline{1, r}, \tag{2.25}$$

де $h_j^{(1)}(t)$, $\psi_j^{(1)}(t), j = \overline{1, r}$, – базисні елементи нуль-просторів матриць $\widetilde{B}^*(t)$ та $A_m^*(t)$ відповідно.

Доведення. Враховуючи структуру матриці $\widetilde{B}^*(t)$, неважко переконатися, що

$$h_j^{(1)}(t) = \mathrm{col}\left[0, \ldots, 0, \psi_j^{(1)}(t)\right], j = \overline{1, r}. \tag{2.26}$$

Взявши до уваги формули (2.26), (2.24) та структуру матриць $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$, маємо

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=0}^{\min(s_i, m-1)}\left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l A_k(t) \frac{d^l \varphi_i^{(s_i+1+k-m-l)}(t)}{dt^l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_{m-1}^k A_m(t) \frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}\right), \psi_j^{(1)}(t)\right).$$

Перегрупувавши доданки в правій частині останньої рівності, дістанемо

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=0}^{\min(s_i, m-1)}\left(\sum_{l=0}^{k} C_{m+l-k-1}^l A_{m+l-k-1}(t) \frac{d^l \varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_{m-1}^k A_m(t) \frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}\right), \psi_j^{(1)}(t)\right).$$

Додавши та віднявши $m-1$ раз від виразу

$$\sum_{k=0}^{\min(s_i,m-1)}\left(\sum_{l=0}^{k}C_{m+l-k-1}^{l}A_{m+l-k-1}(t)\frac{d^l\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^l}+C_{m-1}^{k}A_m(t)\frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}\right)$$

вектор $C_{m-1}^{k+1}A_m(t)\frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}, (k=\overline{0,m-2})$, перегрупувавши доданки в отриманій рівності та змінивши індекс k на $k-1$, отримаємо

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t),h_j^{(1)}(t)\right)=-\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)}L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t),\psi_j^{(1)}(t)\right)-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m-1)}C_{m-1}^{k}A_m(t)\frac{d^k\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^k},\psi_j^{(1)}(t)\right).$$

Оскільки $A_m^*(t)\psi_j^{(1)}(t)=0$, маємо

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t),h_j^{(1)}(t)\right)=-\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)}L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t),\psi_j^{(1)}(t)\right),$$

що й треба було довести. Лему доведено.

З цієї леми та умови 2.2° одразу випливає, що

$$\det\left\|\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t),h_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r=(-1)^r\det\left\|\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)}L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t),\psi_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r\neq 0,$$

$\forall t\in[a,b]$.

Отже, побудований вище жорданів набір векторів матриці $\widetilde{B}(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}(t)$ є повним.

Таким чином, для системи рівнянь (2.22) виконуються всі умови теореми 2.2 із [58, с. 62]. Тоді згідно з цією теоремою загальний розв'язок системи рівнянь (2.22) матиме вигляд

$$y(t)=Y_{mn-s}(t)c+\widetilde{y}(t),$$

де $Y_{mn-s}(t)$ – матриця розмірністю $mn\times(mn-s)$, стовпцями якої є $mn-s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи; c - довільний сталий $(mn-s)$-вимірний вектор; $\widetilde{y}(t)$ – частинний розв'язок системи (2.22); $s=s_1+s_2+\cdots+s_r$ – сума довжин жорданових ланцюжків матриці $\widetilde{B}(t)$

відносно оператора $\widetilde{L}(t)$. Відповідно до заміни (2.20) та позначення (2.21) перші n координат вектора $y(t)$ утворюють розв'язок вихідної системи рівнянь (2.15), а наступні – його похідні до $(m-1)$-го порядку включно. Тому n-вимірні вектори $x_i(t), i = \overline{1, mn-s}$, складені з перших n елементів стовпців матриці $Y_{mn-s}(t)$, є лінійно незалежними розв'язками однорідної системи рівнянь, яка відповідає (2.15). Утворивши з цих векторів $n \times (mn-s)$ матрицю

$$X_{mn-s}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{mn-s}(t)],$$

і позначивши через $\widetilde{x}(t)$ – частинний розв'язок системи рівнянь (2.15), складений з перших n координат вектора $\widetilde{y}(t)$, загальний розв'язок системи рівнянь (2.15) отримаємо у вигляді

$$x(t) = X_{mn-s}(t)c + \widetilde{x}(t), \tag{2.27}$$

де c – довільний сталий $(mn-s)$-вимірний вектор.

Підсумовуючи наведені викладки, приходимо до такої теореми.

Теорема 2.3. Якщо виконуються умови $2.1^\circ - 2.4^\circ$, то загальний розв'язок системи рівнянь (2.15) визначається формулою (2.27), де $X_{mn-s}(t)$ – прямокутна матриця розмірністю $n \times (mn-s)$, складена з $mn-s$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, яка відповідає (2.15) $s = s_1 + \cdots + s_r$, c – довільний сталий $(mn-s)$-вимірний вектор; $\widetilde{x}(t)$ – частинний розв'язок системи (2.15).

Як показано під час доведення теореми 2.1, за виконання її умов матриця $\widetilde{B}(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно оператора $\widetilde{L}(t)$, що складається з r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1, r}$. Тоді згідно з [58, с. 55], матриця $\widetilde{B}^*(t)$ матиме повний жорданів набір векторів відносно оператора $\widetilde{L}^*(t) = \widetilde{A}^*(t) + \frac{d}{dt}\widetilde{B}^*(t)$, що складається з r жорданових ланцюжків такої самої довжини. Це дозволяє довести таке твердження.

Лема 2.3. Якщо виконуються умови 2.1°, 2.2°, то спряжена матриця $A_m^*(t)$ має на відрізку $[a, b]$ повний жорданів набір векторів відносно операторів

$$L_k^*(t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_{m-i}^{k-i} \frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}} A_{m-i}^*(t), k = \overline{1, m}, \tag{2.28}$$

що складається з r жорданових ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1, r}$.

Доведення. Як уже зазначалось, за виконання умов 2.1°, 2.2° матриця $\widetilde{B}^*(t)$ матиме повний жорданів набір векторів відносно оператора $\widetilde{L}^*(t) = \widetilde{A}^*(t) + \frac{d}{dt}\widetilde{B}^*(t)$, що складається з r ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1,r}$. Позначимо через $h_i^{(j)}(t) = \mathrm{col}\left[h_{i1}^{(j)}(t),\ h_{i2}^{(j)}(t), \ldots, h_{im}^{(j)}(t)\right],\ j = \overline{1,s_i},\ i = \overline{1,r}$ відповідні вектори цього набору. Зафіксуємо і. При виконанні умов 2.1°, 2.2° рівняння

$$\widetilde{B}^*(t)h_i^{(2)}(t) = \widetilde{L}^*(t)h_i^{(1)}(t)$$

розв'язне. Із врахуванням структури матриць $\widetilde{A}^*(t)$, $\widetilde{B}^*(t)$ та вектора $h_i^{(1)}(t)$ воно набуває вигляду

$$h_{ik}^{(2)}(t) = -A_{k-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t), k = \overline{1, m-1},$$

$$A_m^*(t)h_{im}^{(2)}(t) + A_{m-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t) - \frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right) = 0. \qquad (2.29)$$

Додавши і віднявши у лівій частині рівняння (2.29) вектор $C_{m-1}^1\frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right)$ і взявши до уваги (2.28), матимемо

$$A_m^*(t)h_{im}^{(2)}(t) + L_1^*(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0.$$

Отже, $h_{im}^{(2)}(t) = \psi_i^{(2)}(t)$, де $\psi_i^{(2)}(t)$ – перший приєднаний вектор i-го жорданового ланцюжка матриці $A_m^*(t)$ відносно операторів $L_k^*(t), k = \overline{1,m}$. Аналогічно визначаємо другий приєднаний вектор $\psi_i^{(3)}(t)$ цього ланцюжка. За виконання умов 2.1°, 2.2° рівняння

$$\widetilde{B}^*(t)h_i^{(3)}(t) = \widetilde{L}^*(t)h_i^{(2)}(t)$$

розв'язне. Враховуючи структуру матриць $\widetilde{A}^*(t)$, $\widetilde{B}^*(t)$ та векторів $h_{ik}^{(2)}(t), k = \overline{1,m}$, запишемо його у вигляді

$$h_{ik}^{(3)}(t) = -A_{k-2}^*(t)\psi_i^{(1)}(t) - A_{k-1}^*(t)\psi_i^{(2)}(t) - \frac{d}{dt}\left(A_{k-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right), k = \overline{1, m-1}$$

$$A_m^*(t)h_{im}^{(3)}(t) + A_{m-2}^*(t)\psi_i^{(1)}(t) + A_{m-1}^*(t)\psi_i^{(2)}(t) - \frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(2)}(t)\right) = 0. \quad (2.30)$$

У рівності (2.30) послідовно виконаємо такі перетворення:

1. Додамо і віднімемо вектор $C_{m-1}^1\frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(2)}(t)\right)$.

2. Використовуючи формулу (2.28), в отриманій рівності виділимо доданок $L_1^*(t)\psi_i^{(2)}(t)$.

3. Підставимо замість вектора $\frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(2)}(t)\right)$ рівний йому вектор

$$-\frac{d}{dt}\left(A_{m-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right).$$

4. Додамо і віднімемо вектор $C_{m-1}^2\frac{d^2}{dt^2}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right)$.

5. Використовуючи (2.28), в отриманій рівності виділимо доданок $L_2^*(t)\psi_i^{(1)}(t)$.

У результаті рівність (2.30) набуде вигляду

$$A_m^*h_{im}^{(3)}(t)+L_1^*(t)\psi_i^{(2)}(t)+L_2^*(t)\psi_i^{(1)}(t)=0,$$

звідки $\psi_i^{(3)}(t)=h_{im}^{(3)}(t)$.

Продовжуючи цей процес, методом математичної індукції встановимо, що матриця $A_m^*(t)$ має на відрізку $[a,b]$ r жорданових ланцюжків завдовжки $s_i, i=\overline{1,r}$, відносно операторів $L_k^*(t), k=\overline{1,m}$, вектори яких $\psi_i^{(j)}(t), j=\overline{1,s_i}, i=\overline{1,r}$, пов'язані з векторами $h_{ik}^{(j)}(t), k=\overline{1,m}, j=\overline{1,s_i}, i=\overline{1,r}$, такими співвідношеннями:

$$h_{ik}^{(j)}(t)=-\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\beta=0}^{j-\alpha-2}C_{\alpha+\beta}^{\alpha}\frac{d^\beta}{dt^\beta}\left(A_{k-\alpha-1}^*(t)\psi_i^{(j-\alpha-\beta-1)}(t)\right), k=\overline{1,m-1}, h_{im}^{(j)}(t)=\psi_i^{(j)}(t).$$

Покажемо, що цей жорданів набір повний. Оскільки за умовою жорданів набір матриці $\widetilde{B}^*(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}^*(t)$ повний, то

$$\det\left\|\left(L^*(t)h_i^{(s_i)}(t),g_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r\neq 0, \forall t\in[a,b],$$

звідки, врахувавши структуру матриць $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$ та векторів $h_{ik}^{(j)}(t), k=\overline{1,m}$, маємо

$$\det\left\|\left(-A_{m-1}^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)-\sum_{\alpha=0}^{m-2}\sum_{\beta=0}^{s_i-\alpha-2}C_{\alpha+\beta}^{\alpha}\frac{d^\beta}{dt^\beta}\left(A_{m-\alpha-2}^*(t)\psi_i^{(s_i-\alpha-\beta-1)}(t)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)\right),\varphi_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r\neq 0, \forall t\in[a,b]. \tag{2.31}$$

Виконаємо над виразом

$$-A_{m-1}^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)-\sum_{\alpha=0}^{m-2}\sum_{\beta=0}^{s_i-\alpha-2}C_{\alpha+\beta}^{\alpha}\frac{d^\beta}{dt^\beta}\left(A_{m-\alpha-2}^*(t)\psi_i^{(s_i-\alpha-\beta-1)}(t)\right)+\frac{d}{dt}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)\right)$$

у формулі (2.31) $m-1$ разів ($k=\overline{1,m-1}$) наступні перетворення:

1. Додамо і віднімемо вектор $C_{m-1}^{k}\frac{d^k}{dt^k}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t)\right)$.

2. Використовуючи формулу (2.28), виділимо доданок $L_k^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t)$.

3. Замінимо в отриманому виразі вектор $\frac{d^k}{dt^k}\left(A_m^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t)\right)$ на рівний йому вектор

$$-\frac{d^k}{dt^k}\Big(A_{m-1}^*(t)\psi_i^{(s_i-k)}(t)\Big)+\sum_{\alpha=0}^{m-2}\sum_{\beta=0}^{s_i-k-\alpha-2}C_{\alpha+\beta}^{\alpha}\frac{d^\beta}{dt^\beta}\Big(A_{m-\alpha-2}^*(t)\psi_i^{(s_i-\alpha-\beta-1)}(t)\Big)-\frac{d}{dt}\Big(A_m^*(t)\psi_i^{(s_i-k)}(t)\Big).$$

У результаті отримаємо

$$\det\left\|\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,m)}L_k^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t),\varphi_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r\neq 0,\forall t\in[a,b],$$

звідки випливає, що жорданів набір матриці $A_m^*(t)$ відносно операторів $L_k^*(t)$, $k=\overline{1,m}$, є повним. Лему доведено.

Розглянемо тепер для системи (2.15) задачу Коші з початковими умовами

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t)\Big|_{t=t_0}=x_0^{(k)},k=\overline{0,m-1}. \tag{2.32}$$

Щоб знайти умови її розв'язності, розглянемо відповідну задачу Коші для еквівалентної системи (2.22) першого порядку з початковою умовою

$$y(t_0)=y_0, \tag{2.33}$$

де $y_0=\operatorname{col}\left[x_0^{(0)},x_0^{(1)},\dots,x_0^{(m-1)}\right]$. Згідно з теоремою 2.4 із [58, с. 67] для існування і єдиності розв'язку задачі (2.22), (2.33) необхідно і достатньо, щоб вектор y_0 задовольняв умову

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{d^i}{dt^i}\left(\widetilde{A}(t)y_0+\widetilde{f}(t),h_j^{(k-i)}(t)\right)\Big|_{t=t_0}=0,k=\overline{1,s_j},j=\overline{1,r}.$$

Виразивши цю умову через коефіцієнти вихідної системи (2.15), вектори $\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$ та початкові вектори $x_0^{(k)},k=\overline{0,m-1}$, дістанемо

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{\alpha=0}^{s-1}\sum_{\beta=0}^{k-i-\alpha-2}C_{\alpha+\beta}^{\alpha}\frac{d^{\beta+i}}{dt^{\beta+i}}\left(A_{s-\alpha-1}(t_0)x_0^{(s)},\psi_j^{(k-i-\alpha-\beta-1)}(t_0)\right)-$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{d^i}{dt^i}\left(A_s(t)x_0^{(s)},\psi_j^{(k-i)}(t_0)\right)=0, k=\overline{1,s_j}, j=\overline{1,r}. \qquad (2.34)$$

У результаті, на підставі еквівалентності початкових задач (2.15), (2.32) та (2.22), (2.33), приходимо до такого твердження.

Теорема 2.4. Якщо виконуються умови $2.1^\circ - 2.4^\circ$, то для того, щоб задача Коші (2.15), (2.32) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб початкові вектори $x_0^{(s)}, s=\overline{0,m-1}$, задовольняли умову (2.34), де $\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, – n-вимірні вектори, що утворюють жорданів набір матриці $A_m^*(t)$ відносно операторів $L_k^*(t)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_{m-i}^{k-i}\frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}}A_{m-i}^*(t)$, $k=\overline{1,m}$. За виконання цієї умови розв'язок задачі (2.15), (2.32) буде єдиним.

Зазначимо, що теореми 2.3, 2.4 узагальнюють теореми 2.9, 2.10, доведені в [58], для вироджених систем диференціальних рівнянь другого порядку. Останні випливають з теорем 2.3, 2.4 як наслідок.

2.3. Висновки до розділу 2

У даному розділі отримано деякі результати, які стосуються поліноміальних в'язок матриць та вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків.

Зокрема, в пункті 2.1 для поліноміальної в'язки матриць (2.1) узагальнено поняття жорданового ланцюжка векторів. Встановлено зв'язок між кратностями скінченних та нескінченних елементарних дільльників цієї в'язки та довжинами відповідних жорданових ланцюжків векторів.

У пункті 2.2 знайдено умови, за виконання яких вироджена лінійна система (2.10) має загальний розв'язок типу Коші. Встановлено залежність між внутрішньою структурою системи (2.10) та кількістю частинних розв'язків, які утворюють фундаментальну систему її розв'язків. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку відповідної початкової задачі.

Отримані теоретичні результати сформульовано у вигляді чотирьох теорем.

РОЗДІЛ 3
ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З ВИРОДЖЕННЯМИ

У даному розділі, використовуючи допоміжні результати, отримані в попередньому розділі, будується асимптотика загального розв'язку для лінійної сингулярно збуреної систем диференціальних рівнянь m-го порядку з виродженнями у різних випадках, пов'язаних зі структурою граничної в'язки матриць, за умови її регулярності на заданому відрізку. Результати цього розділу опубліковано в роботах [44,46,47].

3.1. Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\cdots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x=f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\alpha(\tau)d\tau\right), \quad (3.1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, – $(n\times n)$-матриці, $f(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, елементами яких є дійсні або комплекснозначні функції; $\alpha(t)$ – скалярна функція, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h\in N, t\in[0;T]$.

Припускаємо, що виконуються наступні умови:

3.1°. Матриці $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon)\sim\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s A_i^{(s)}(t), i=\overline{0,m},$$

$$f(t,\varepsilon)\sim\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s f^{(s)}(t). \quad (3.2)$$

3.2°. Коефіцієнти $A_i^{(s)}(t)$, $f^{(s)}(t)$, $i=\overline{0,m}$, $s=0,1,\ldots$, розвинень (3.2) і функція $\alpha(t)$ – нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$.

3.3°. $\det A_m^{(0)}(t)=0$, $\forall t\in[0;T]$.

За цих умов будемо досліджувати питання про побудову загального розв'язку системи (3.1) у вигляді асимптотичних розвинень за степенями малого параметра.

Виродженість граничної матриці $A_m^{(0)}(t)$ при старшій похідній вносить значні труднощі в розв'язанні цієї задачі. Залежно від структури збурювальних матриць $A_m^{(i)}(t), i \geq 1$, можливі два випадки:

а) незважаючи на виродженість матриці $A_m^{(0)}(t)$, матриця $A_m(t, \varepsilon)$ все ж залишається неособливою при досить малих $\varepsilon > 0$;

б) матриця $A_m(t, \varepsilon)$ особлива при всіх $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

Оскільки побудова асимптотичного розвинення матриці, оберненої до $A_m(t, \varepsilon)$, при виродженості матриці $A_m^{(0)}(t)$ є досить складною задачею, то, слідуючи [58], досліджуватимемо систему (3.1), не виділяючи окремо обидва зазначені випадки. Більше того, як буде видно із подальших викладок, отримані результати поширюються й на той випадок, коли матриця $A_m^{(0)}(t)$ неособлива на відрізку $[0; T]$.

Завдяки лінійності системи (3.1) її загальний розв'язок має вигляд суми загального розв'язку відповідної однорідної системи рівнянь

$$\varepsilon^{mh} A_m(t, \varepsilon) \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + \varepsilon^h A_1(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + A_0(t, \varepsilon) x = 0 \tag{3.3}$$

та частинного розв'язку неоднорідної. Тому окремо дослідимо можливість побудови загального розв'язку однорідної системи (3.3) та частинного розв'язку неоднорідної системи (3.1).

Побудова асимптотичних розв'язків систем (3.1), (3.3) залежить від поведінки коренів характеристичного рівняння

$$\det P(t, \lambda) = 0 \tag{3.4}$$

і структури скінченних та нескінченних елементарних дільників поліноміальної в'язки матриць

$$P(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t). \tag{3.5}$$

Тому окремо розглядатимемо різні випадки. Під час побудови частинного розв'язку неоднорідної системи (3.1) будемо розрізняти два суттєво відмінні випадки: нерезонансний, коли функція $\alpha(t)$ не збігається з жодним коренем рівняння (3.4), і резонансний, коли вона тотожно дорівнює одному з них.

3.2. Побудова формальних розв'язків однорідної системи

3.2.1. Випадок простих скінченних та нескінченних елементарних дільників

Припустимо, що крім умов $3.1^\circ - 3.3^\circ$, сформульованих у пункті 3.1, виконуються також наступні:

3.4°. Гранична в'язка матриць $P(t,\lambda)$ системи (3.3) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має тільки прості елементарні дільники: $mn-1$ скінченних $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, mn-1}$, і один – нескінченний.

3.5°. $\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) \neq 0, \forall t \in [0;T]$, де $\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)$ – елементи нуль-просторів матриць $A_m^{(0)}(t)$ та $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$ відповідно.

Як показано в [58, с. 95], за умови 3.5° матриця $A_m(t,\varepsilon)$ буде неособливою при досить малих $\varepsilon > 0, t \in [0;T]$, що згідно з теоремою 2.2 гарантує існування в системі (3.3) mn лінійно незалежних розв'язків, які необхідно побудувати.

Розв'язки системи (3.3), що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{3.6}$$

де $u(t,\varepsilon)$ – n-вимірна вектор-функція, а $\lambda(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, які зображуються у вигляді формальних розвинень за степенями малого параметра:

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u^{(s)}(t), \tag{3.7}$$

$$\lambda(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \lambda^{(s)}(t). \tag{3.8}$$

Покажемо, що вектор (3.6) формально задовольняє систему (3.3). Для цього, продиференціювавши його k ($k = \overline{1,m}$) разів, отримаємо

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{-jh} C_k^i D_{i-j}[\lambda^j] \frac{d^{k-i}u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right), k = \overline{0,m}, \tag{3.9}$$

де $D_{i-j}[\lambda^j]$ – сума всіх можливих добутків $i-j$ операторів диференціювання $D = \frac{d}{dt}$, які діють на вирази, розміщені праворуч від них, та j функцій $\lambda(t,\varepsilon)$; причому останнім множником у всіх доданках має бути $\lambda(t,\varepsilon)$. Зокрема, $D_0[\lambda^0] = 1$.

Наприклад, $D_2[\lambda^2]=\frac{d^2\lambda^2(t,\varepsilon)}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left(\lambda(t,\varepsilon)\frac{d\lambda(t,\varepsilon)}{dt}\right)+\lambda(t,\varepsilon)\frac{d^2\lambda(t,\varepsilon)}{dt^2}$.

Оскільки функція $\lambda(t,\varepsilon)$ зображується у вигляді формального розвинення (3.8), то функції $D_{i-j}[\lambda^j]$, $j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}$, теж можемо подати у вигляді формальних розвинень за степенями ε:

$$D_{i-j}[\lambda^j]=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s D^{(s)}_{i-j}[\lambda^j], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}, \tag{3.10}$$

де $D^{(s)}_{i-j}[\lambda^j]$ – сума всіх можливих добутків $i-j$ операторів диференціювання $D=\frac{d}{dt}$, які діють на вирази, розміщені праворуч від них, та j функцій $\lambda^{(s_k)}(t), k=\overline{1,j}$, сума індексів яких дорівнює s.

Наприклад, $D^{(1)}_2[\lambda^2]=2\frac{d^2}{dt^2}\left(\lambda^{(0)}(t)\lambda^{(1)}(t)\right)+\frac{d}{dt}\left(\lambda^{(1)}(t)\frac{d\lambda^{(0)}(t)}{dt}+\lambda^{(0)}(t)\frac{d\lambda^{(1)}(t)}{dt}\right)+$ $+\lambda^{(1)}(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\lambda^{(0)}(t)\right)+\lambda^{(0)}(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\lambda^{(1)}(t)\right)$.

Підставивши вектори (3.9) в систему (3.3), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h}C^i_k D_{i-j}[\lambda^j]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}}=0.$$

Виділивши доданки, в яких $k=i=j$, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m}D_0[\lambda^k]A_k(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)=-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h}C^i_k D_{i-j}[\lambda^j]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}}-$$
$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-j)h}D_{k-j}[\lambda^j]A_k(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon).$$

Підставивши в останню рівність розвинення (3.2), (3.7), (3.8), (3.10) та згрупувавши коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, матимемо

$$\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s P(t,\lambda^{(0)}(t))u^{(s)}(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left(\sum_{k=1}^{m}D^{(s)}_0[\lambda^k]A^{(0)}_k(t)u^{(0)}(t)\right)+$$

$$+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{s-1}D^{(\alpha)}_0[\lambda^k]A^{(0)}_k(t)u^{(s-\alpha)}(t)\right)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{s-1}\sum_{\beta=1}^{s-\alpha}D^{(\alpha)}_0[\lambda^k]A^{(\beta)}_k(t)u^{(s-\alpha-\beta)}(t)\right)=$$
$$=-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left(\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)h}\sum_{\beta=0}^{s-\alpha-(k-j)h}D^{(\alpha)}_{k-j}[\lambda^j]A^{(\beta)}_k(t)u^{(s-\alpha-\beta-(k-j)h)}(t)\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)h}\sum_{\beta=0}^{s-\alpha-(k-j)h}C_k^iD_{i-j}^{(\alpha)}[\lambda^j]A_k^{(\beta)}(t)\frac{d^{k-i}u^{(s-\alpha-\beta-(k-j)h)}(t)}{dt^{k-i}}\right).$$

Використавши формули

$$D_0^{(s)}[\lambda^k]=\sum_{i=1}^{s}C_k^i\left(\lambda^{(0)}(t)\right)^{k-i}P_i^{(s)}(\lambda), s=1,2,\dots, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^iP(t,\lambda^{(0)}(t))}{i!\partial\lambda^i}=\sum_{k=i}^{m}C_k^i\left(\lambda^{(0)}(t)\right)^{k-i}A_k^{(0)}(t), i=\overline{1,m}, \tag{3.12}$$

де

$$P_i^{(s)}(\lambda)=\sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=s}\lambda^{(j_1)}(t)\lambda^{(j_2)}(t)\dots\lambda^{(j_i)}(t)$$

– сума всеможливих добутків i функцій $\lambda^{(j)}(t)$ з натуральними індексами j_k, сума яких дорівнює s, та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, отримаємо

$$P\left(t,\lambda^{(0)}(t)\right)u^{(0)}(t)=0; \tag{3.13}$$

$$P\left(t,\lambda^{(0)}(t)\right)u^{(s)}(t)=-\lambda^{(s)}(t)\frac{\partial P\left(t,\lambda^{(0)}(t)\right)}{1!\partial\lambda}u^{(0)}(t)+a^{(s)}(t), s=1,2,\dots, \tag{3.14}$$

де

$$a^{(s)}(t)=-\sum_{i=1}^{s-1}P_{i+1}^{(s)}(\lambda)\frac{\partial^{i+1}P(t,\lambda^{(0)}(t))}{(i+1)!\partial\lambda^{i+1}}u^{(0)}(t)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{s-1}D_0^{(\alpha)}[\lambda^k]A_k^{(0)}(t)u^{(s-\alpha)}(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)h}\sum_{\beta=0}^{s-\alpha-(k-j)h}C_k^iD_{i-j}^{(\alpha)}[\lambda^j]A_k^{(\beta)}(t)\frac{d^{k-i}u^{(s-\alpha-\beta-(k-j)h)}(t)}{dt^{k-i}}-$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)h}\sum_{\beta=0}^{s-\alpha-(k-j)h}D_{k-j}^{(\alpha)}[\lambda^j]A_k^{(\beta)}(t)u^{(s-\alpha-\beta-(k-j)h)}(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{s-1}\sum_{\beta=1}^{s-\alpha}D_0^{(\alpha)}[\lambda^k]A_k^{(\beta)}(t)u^{(s-\alpha-\beta)}(t). \tag{3.15}$$

Система (3.13) матиме ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли функція $\lambda^{(0)}(t)$ буде власним значенням поліноміальної в'язки матриць (3.5). Отже, згідно з умовою 3.4° матимемо

$$\lambda^{(0)}(t)=\lambda_i(t), i=\overline{1,mn-1}, \tag{3.16}$$

$$u^{(0)}(t) = \varphi_i(t), i = \overline{1, mn-1}, \tag{3.17}$$

де $\varphi_i(t)$ – власні вектори поліноміальної в'язки матриць (3.5), що відповідають власним значенням $\lambda_i(t)$.

Із врахуванням (3.16) та (3.17) ситема (3.14) набуває вигляу

$$P\left(t, \lambda_i(t)\right) u_i^{(s)}(t) = -\lambda_i^{(s)}(t) \frac{\partial P\left(t, \lambda_i(t)\right)}{1!\partial \lambda} \varphi_i(t) + a_i^{(s)}(t), \tag{3.18}$$

$i = \overline{1, mn-1}$, $s = 1, 2, \ldots$, де вектори $a_i^{(s)}(t)$ містять тільки ті функції $\lambda_i^{(j)}(t)$ та вектори $u_i^{(j)}(t)$, індекси яких $j < s$.

У (3.18) зафіксуємо i. Система рівнянь (3.18) сумісна тоді і тільки тоді, коли її права частина ортогональна до вектора $\psi_i(t)$ – елемента нуль-простору матриці $P^*(t, \lambda_i(t))$, тобто

$$-\lambda_i^{(s)}(t) \left(\frac{\partial P\left(t, \lambda_i(t)\right)}{\partial \lambda} \varphi_i(t), \psi_i(t) \right) + \left(a_i^{(s)}(t), \psi_i(t) \right) = 0, s = 1, 2, \ldots . \tag{3.19}$$

Оскільки згідно з умовою 3.4° скінченні елементарні дільники поліноміальної в'язки матриць (3.5) прості, то за теоремою 2.1 їм відповідають жорданові ланцюжки векторів завдовжки 1 кожний. Тому

$$\left(\frac{\partial P\left(t, \lambda_i(t)\right)}{\partial \lambda} \varphi_i(t), \psi_i(t) \right) \neq 0, \forall t \in [0; T].$$

Завдяки скалярному множнику, з точністю до якого визначається вектор $\psi_i(t)$, останній визначимо так, щоб

$$\left(\frac{\partial P\left(t, \lambda_i(t)\right)}{\partial \lambda} \varphi_i(t), \psi_i(t) \right) = 1, \forall t \in [0; T].$$

Тоді з рівняння (3.19) маємо

$$\lambda_i^{(s)}(t) = \left(a_i^{(s)}(t), \psi_i(t) \right), s = 1, 2, \ldots . \tag{3.20}$$

Підставивши отриману функцію $\lambda_i^{(s)}(t)$ в (3.18), відповідний вектор $u_i^{(s)}(t)$ знайдемо за формулою

$$u_i^{(s)}(t) = P^+(t, \lambda_i(t)) \widetilde{a}_i^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots, \tag{3.21}$$

де $P^+(t, \lambda_i(t))$ – напівобернена матриця до матриці $P\left(t, \lambda_i(t)\right)$, а $\widetilde{a}_i^{(s)}(t)$ – права частина системи рівнянь (3.18).

Отримані формули (3.20), (3.21) рекурентні і дозволяють визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.7), (3.8). Існування похідних, які входять в ці формули, випливає з умови 3.2° та зауваження 2.1. Описаним способом можна знайти $mn-1$ різних розв'язків системи (3.3).

Слідуючи [58], ще один ненульовий розв'язок системи (3.3), який відповідає нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць (3.5), шукатимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \tag{3.22}$$

де n-вимірний вектор $v(t,\varepsilon)$ і скалярна функція $\xi(t,\varepsilon)$ зображуються розвиненнями

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s v^{(s)}(t), \tag{3.23}$$

$$\xi(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \xi^{(s)}(t). \tag{3.24}$$

Покажемо, що вектор (3.22) теж формально задовольняє систему (3.3). Продиференціювавши його k разів, отримаємо формулу

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{-j(h+1)} C_k^i D_{i-j}[\xi^{-j}] \frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} \exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), k=\overline{0,m}.$$

Підставивши вектори $\frac{d^k x}{dt^k}, k=\overline{0,m}$, у систему (3.3), а потім помноживши отриману рівність на ненульову функцію $\varepsilon^m\xi^m(t,\varepsilon)$, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{(k-j)h+m-j} C_k^i \xi^m(t,\varepsilon) D_{i-j}[\xi^{-j}] A_k(t,\varepsilon) \frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} = 0.$$

Виділивши тут доданки, в яких $k=i=j$, та взявши до уваги, що $D_0[\xi^s] = \xi^s(t,\varepsilon)$, матимемо

$$A_m(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) = -\varepsilon\xi(t,\varepsilon)A_{m-1}(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-2}\varepsilon^{m-k}D_0[\xi^{m-k}]A_k(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) -$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-j)h+m-j}D_0[\xi^m]D_{k-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h+m-j}C_k^i D_0[\xi^m]D_{i-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}}. \tag{3.25}$$

Представимо функцію $\frac{1}{\xi(t,\varepsilon)}=\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)$ у вигляді формального ряду за степенями параметра:

$$\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\widetilde{\xi}^{(s)}(t),$$

коефіцієнти якого визначаються за рекурентними формулами

$$\widetilde{\xi}^{(0)}(t)=\frac{1}{\xi^{(0)}(t)},$$

$$\widetilde{\xi}^{(s)}(t)=-\frac{\sum_{j=1}^{s}\xi^{(j)}(t)\widetilde{\xi}^{(s-j)}(t)}{\xi^{(0)}(t)}, s=1,2,\ldots.$$

Тоді функції $D_{i-j}[\widetilde{\xi}^j]$, $j=\overline{1,i}$, $i=\overline{1,m}$, теж можна представити формальними розвиненнями за степенями параметра:

$$D_{i-j}[\widetilde{\xi}^j]=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s D_{i-j}^{(s)}[\widetilde{\xi}^j], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}. \tag{3.26}$$

Підставивши у рівність (3.25) розвинення (3.2), (3.23), (3.24), (3.26) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо

$$A_m^{(0)}(t)v^{(0)}(t)=0, \tag{3.27}$$

$$A_m^{(0)}(t)v^{(s)}(t)=-\xi^{(s-1)}(t)A_{m-1}^{(0)}(t)v^{(0)}(t)+b^{(s)}(t), s=1,2,\ldots, \tag{3.28}$$

де

$$b^{(s)}(t)=-\sum_{i=0}^{s-2}\sum_{j=0}^{s-i-1}\xi^{(i)}(t)A_{m-1}^{(j)}(t)v^{(s-i-j-1)}(t)-\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{i=0}^{s+k-m}\sum_{j=0}^{s+k-m-i}D_0^{(i)}[\xi^{m-k}]A_k^{(j)}(t)\times$$

$$\times v^{(s+k-m-i-j)}(t)-\sum_{i=1}^{s}A_m^{(i)}(t)v^{(s-i)}(t)-$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)h-m+j}\sum_{\beta=0}^{s-\alpha-(k-j)h-m+j}\sum_{\gamma=0}^{s-\alpha-\beta-(k-j)h-m+j}D_0^{(\alpha)}[\xi^m]D_{k-j}^{(\beta)}[\widetilde{\xi}^j]A_k^{(\gamma)}(t)\times$$

$$\times v^{(s-\alpha-\beta-\gamma-(k-j)h-m+j)}(t)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)h-m+j}\sum_{\beta=0}^{s-\alpha-(k-j)h-m+j}\sum_{\gamma=0}^{s-\alpha-\beta-(k-j)h-m+j}C_k^i\times$$

$$\times D_0^{(\alpha)}[\xi^m]D_{i-j}^{(\beta)}[\widetilde{\xi}^j]A_k^{(\gamma)}(t)\frac{d^{k-i}v^{(s-\alpha-\beta-\gamma-(k-j)h-m+j)}(t)}{dt^{k-i}}, s=1,2,\ldots.$$

Покажемо, що з систем рівнянь (3.27), (3.28) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.23), (3.24). Із (3.27) одразу знайдемо

$$v^{(0)}(t)=\widetilde{\varphi}(t), \tag{3.29}$$

де $\widetilde{\varphi}(t)$ – власний вектор в'язки матриць

$$M(t,\xi)=\sum_{i=0}^{m}\xi^i A_{m-i}^{(0)}(t), \tag{3.30}$$

симетричної в'язці (3.5), який відповідає її нульовому власному значенню. Враховуючи (3.29), систему (3.28) запишемо у вигляді

$$A_m^{(0)}(t)v^{(s)}(t)=-\xi^{(s-1)}(t)A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t)+b^{(s)}(t), s=1,2,\ldots. \tag{3.31}$$

Як і під час розв'язування системи рівнянь (3.14), сумісність (3.31) забезпечимо, визначаючи функції $\xi^{(s)}(t), s=0,1,\ldots,$ з умови ортогональності її правої частини до вектора $\widetilde{\psi}(t)$ – елемента нуль-простору матриці $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$. Оскільки за умовою 3.4° нескінченний елементарний дільник в'язки матриць (3.5) простий, то згідно з теоремою 2.1 йому відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1. Тому

$$\left(A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)\neq 0, \forall t\in[0;T].$$

Завдяки скалярному множнику, з точністю до якого визначається вектор $\widetilde{\psi}(t)$, останній визначимо так, щоб

$$\left(A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)=1, \forall t\in[0;T].$$

Тоді з умови розв'язності системи (3.31) маємо

$$\xi^{(s-1)}(t)=\left(b^{(s)}(t),\widetilde{\psi}(t)\right), s=1,2,\ldots. \tag{3.32}$$

Забезпечивши цим самим сумісність рівняння (3.31), вектори $v^{(s)}(t)$, $s=1,2,\ldots,$ визначимо з нього за формулою

$$v^{(s)}(t)=G(t)\widetilde{b}^{(s)}(t), s=1,2,\ldots, \tag{3.33}$$

де $G(t)$ – напівобернена матриця до матриці $A_m^{(0)}(t)$, а $\widetilde{b}^{(s)}(t)$ – права частина системи (3.31).

Згідно з (3.32) та умовою 3.5°

$$\xi^{(0)}(t) = -\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) \neq 0, \forall t \in [0;T],$$

що запезпечує відмінність від нуля функції $\xi(t,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$.

Формули (3.29), (3.32), (3.33) дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.23), (3.24). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 3.2° та відповідною гладкістю вектор-функцій $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ і матриці $G(t)$.

У результаті приходимо до такої теореми.

Теорема 3.1. Якщо виконуються умови 3.1° – 3.5°, то система диференціальних рівнянь (3.3) матиме $mn-1$ формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\varepsilon) = u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), i = \overline{1, mn-1},$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам в'язки матриць (3.5), і один розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right),$$

що відповідає нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень (3.7), (3.8), (3.23), (3.24). Коефіцієнти цих розвинень визначаються за рекурентними формулами (3.16), (3.17), (3.20), (3.21), (3.29), (3.32), (3.33).

Зазначимо, що дана теорема поширюється і на той випадок, коли головна матриця $A_m^{(0)}(t)$ при старшій похідній у системі (3.3) неособлива. У цьому випадку гранична в'язка матриць (3.5) матиме тільки скінченні елементарні дільники, яким відповідають mn розв'язків вигляду (3.6).

Як наслідок, з теореми 3.1 випливає теорема 3.24, доведена в [58, с. 181–183] для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь другого порядку.

Побудовані формальні розв'язки системи рівнянь (3.3) лінійно незалежні при досить малих ε, оскільки такими є вже нульові наближення завдяки лінійній незалежності власних векторів $\widetilde{\varphi}(t)$, $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, mn-1}$.

3.2.2. Випадок кратного скінченного та нескінченного елементарних дільників

Припустимо, що замість умов 3.4° та 3.5°, сформульованих у підпункті 3.2.1, виконуються наступні:

3.6°. Гранична в'язка матриць (3.5) системи (3.3) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю p і один нескінченний – кратністю $q = mn - p$.

3.7°. $\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) \neq 0, \forall t \in [0;T]$, де $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ – елементи нуль-просторів матриць $A_m^{(0)}(t)$ і $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$ відповідно.

На відмінну від попереднього випадку, у даному випадку формальні розв'язки системи (3.3) можна побудувати у вигляді розвинень за дробовими степенями параметра.

Розв'язки, що відповідають скінченному елементарному дільнику в'язки матриць (3.5), будемо шукати у вигляді

$$x(t,\mu) = u(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(\tau,\mu)d\tau\right), \tag{3.34}$$

де $u(t,\mu)$ – n-вимірний вектор, а $\lambda(t,\mu)$ – скалярна функція, які зображаються формальними розвиненнями

$$u(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u^{(s)}(t), \tag{3.35}$$

$$\lambda(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \lambda^{(s)}(t), \tag{3.36}$$

в яких $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$.

Підставивши вектор (3.34) у систему (3.3) і взявши до уваги формулу (3.9), виділимо доданки, в яких $k = i = j$. Отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m} D_0[\lambda^k]A_k(t,\varepsilon)u(t,\mu) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h}C_k^i D_{i-j}[\lambda^j]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}u(t,\mu)}{dt^{k-i}} -$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-j)h}D_{k-j}[\lambda^j]A_k(t,\varepsilon)u(t,\mu). \tag{3.37}$$

Оскільки функція $\lambda(t,\mu)$ зображується у вигляді формального ряду (3.36), то функції $D_{i-j}[\lambda^j]$, $j=\overline{1,i}$, $i=\overline{1,m}$, теж можна подати у вигляді формальних розвинень за степенями μ:

$$D_{i-j}[\lambda^j]=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s D_{i-j}^{(s)}[\lambda^j], j=\overline{1,i}, i=\overline{1,m}. \tag{3.38}$$

Підставивши в (3.37) розвинення (3.2), (3.35), (3.36), (3.38) та прирівнявши доданки при однакових степенях μ, дістанемо

$$P\left(t,\lambda^{(0)}(t)\right)u^{(0)}(t)=0, \tag{3.39}$$

$$P\left(t,\lambda^{(0)}(t)\right)u^{(s)}(t)=a^{(s)}(t), s=1,2,\ldots, \tag{3.40}$$

де

$$a^{(s)}(t)=-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{s}D_0^{(i)}[\lambda^k]A_k^{(0)}(t)u^{(s-i)}(t)+g^{(s)}(t), s=1,2,\ldots, \tag{3.41}$$

$$g^{(s)}(t)=-\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{s-p}\sum_{j=1}^{\left[\frac{s-i}{p}\right]}D_0^{(i)}[\lambda^k]A_k^{(j)}(t)u^{(s-i-jp)}(t)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)ph}\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{s-\alpha-(k-j)ph}{p}\right]}C_k^i\times$$

$$\times D_{i-j}^{(\alpha)}[\lambda^j]A_k^{(\beta)}(t)\frac{d^{k-i}u^{(s-\alpha-\beta p-(k-j)ph)}(t)}{dt^{k-i}}-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{s-(k-j)ph}\sum_{\beta=0}^{\left[\frac{s-\alpha-(k-j)ph}{p}\right]}D_{k-j}^{(\alpha)}[\lambda^j]A_k^{(\beta)}(t)\times$$

$$\times u^{(s-\alpha-\beta p-(k-j)ph)}(t), s=p,p+1,\ldots.$$

Покажемо, що з систем (3.39) та (3.40) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36). Із (3.39) одразу знаходимо

$$\lambda^{(0)}(t)=\lambda_0(t), \tag{3.42}$$

$$u^{(0)}(t)=\varphi(t), \tag{3.43}$$

де $\lambda_0(t)$ – власне значення в'язки матриць (3.5), а $\varphi(t)\in C^{\infty}[0;T]$ – відповідний власний вектор.

Система рівнянь (3.40) сумісна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\Big(a^{(s)}(t), \psi(t)\Big) = 0, s = 1, 2, \ldots, \tag{3.44}$$

де $\psi(t)$ – елемент нуль-простору матриці $P^*\left(t, \lambda_0(t)\right)$. За виконання умови (3.44) вектори $u^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, визначатимемо за формулою

$$u^{(s)}(t) = H(t)a^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots, \tag{3.45}$$

де $H(t)$ – напівобернена матриця до матриці $P\left(t, \lambda_0(t)\right)$, яку визначимо так, щоб $H(t) \in C^{\infty}[0; T]$, що згідно з [58] та умовою 3.2° завжди можливо. Умову ж (3.44) використаємо для визначення функцій $\lambda^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$. З цією метою виразимо через ці функції вектори $a^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$.

Підставлятимемо послідовно (3.43), (3.45) в (3.41) при $s < p$. При $s = 1$ маємо

$$a^{(1)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} D_0^{(1)}[\lambda^k] A_k^{(0)}(t)\varphi(t).$$

Використавши спочатку формулу (3.11), а потім (3.12), цей вираз подамо у вигляді

$$a^{(1)}(t) = -P_1^{(1)}\left(\lambda\right) \frac{\partial P\left(t, \lambda_0(t)\right)}{1!\partial\lambda}\varphi(t).$$

Провівши аналогічні міркування при $s = 2, 3$, дістанемо

$$a^{(2)}(t) = -P_2^{(2)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda} H_1(t) + \frac{\partial^2 P(t, \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\right]\varphi(t) - P_1^{(2)}(\lambda)\,\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t),$$

$$a^{(3)}(t) = -P_3^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\left(H_1^2(t) + H_2(t)\right) + \frac{\partial^2 P(t, \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2} H_1(t)\right]\varphi(t) -$$
$$-P_3^{(3)}(\lambda)\,\frac{\partial^3 P(t, \lambda_0(t))}{3!\partial\lambda^3}\varphi(t) - P_2^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda} H_1(t) + \frac{\partial^2 P(t, \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\right]\varphi(t) -$$
$$-P_1^{(3)}(\lambda)\,\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t),$$

де

$$H_k(t) = -H(t)\frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}, k = \overline{1, m}. \tag{3.46}$$

Скориставшись рекурентними співвідношеннями

$$\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m) = E;$$

$$\sigma^i(H_1,H_2,\ldots,H_m)=\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}H_j(t)\sigma^{i-j}(H_1,H_2,\ldots,H_m), i=2,3,\ldots, \quad (3.47)$$

отримаємо

$$a^{(1)}(t)=-P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^1(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),$$

$$a^{(2)}(t)=-P_2^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^2(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t)-P_2^{(2)}(\lambda)\frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\times$$

$$\times\sigma^1(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t)-P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^1(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),$$

$$a^{(3)}(t)=-P_3^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^3(H_1,H_2,\ldots,H_m)+\frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\times\right.$$

$$\left.\times\sigma^2(H_1,H_2,\ldots,H_m)+\frac{\partial^3 P(t,\lambda_0(t))}{3!\partial\lambda^3}\sigma^1(H_1,H_2,\ldots,H_m)\right]\varphi(t)-$$

$$-P_2^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^2(H_1,H_2,\ldots,H_m)+\frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\sigma^1(H_1,H_2,\ldots,H_m)\right]\varphi(t)-$$

$$-P_1^{(3)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^1(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t). \quad (3.48)$$

Проаналізувавши вектори (3.48) і врахувавши, що $g^{(s)}(t)=0$ при $s<p$, прийдемо до такої формули для векторів $a^{(s)}(t)$:

$$a^{(s)}(t)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}P_i^{(s)}(\lambda)\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t), \quad (3.49)$$

$s=\overline{1,p-1}$.

Переконаємося у її правильності, провівши індукцію по s. Припустимо, що формула (3.49) справджується при $s=\overline{1,k-1}$, $k<p$. Тоді згідно з (3.45) матимемо

$$u^{(k-j)}(t)=\sum_{i=1}^{k-j}P_i^{(k-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t), j=\overline{1,k-1}. \quad (3.50)$$

Поклавши в (3.41) $s=k$, дістанемо

$$a^{(k)}(t)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}D_0^{(j)}[\lambda^i]A_i^{(0)}(t)u^{(k-j)}(t).$$

Використавши спочатку формулу (3.11), а потім (3.12), отримаємо

$$a^{(k)}(t) = -\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\min(j,m)} P_i^{(j)}(\lambda) \frac{\partial^i P(t, \lambda_0(t))}{i! \partial \lambda^i} u^{(k-j)}(t).$$

У останню рівність підставимо (3.50) і в отриманому виразі перегрупуємо доданки: спочатку згрупуємо доданки з однаковою кількістю функцій $\lambda^{(j)}(t)$, а потім у кожній з отриманих груп об'єднаємо доданки з однаковими матрицями $\sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m)$. У результаті дістанемо

$$a^{(k)}(t) = -\sum_{i=1}^{k} P_i^{(k)}(\lambda) \frac{\partial^i P(t, \lambda_0(t))}{i! \partial \lambda^j} \sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t) -$$

$$-\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\gamma=1}^{k+1-i} P_j^{(\gamma+j-1)}(\lambda) P_{i-j}^{(k-\gamma-j+1)}(\lambda) \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j! \partial \lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t).$$

Врахувавши, що

$$\sum_{\gamma=1}^{k+1-i} P_j^{(\gamma+j-1)}(\lambda) P_{i-j}^{(k-\gamma-j+1)}(\lambda) = P_i^{(k)}(\lambda), i = \overline{2, k},$$

остаточно матимемо

$$a^{(k)}(t) = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(k)}(\lambda) \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j! \partial \lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),$$

звідки випливає правильність формули (3.49) і при $s = k$. Тому згідно з принципом математичної індукції ця формула має місце при всіх $s < p$.

При $s \geq p$ у вираз $a^{(s)}(t)$ входять вектори $g^{(s)}(t)$. Позначимо доданки, які містять ці вектори, через $\widetilde{g}^{(s)}(t)$. Якщо продовжувати підстановку (3.43), (3.45) в (3.41), то отримаємо вираз вигляду (3.49) та доданки $\widetilde{g}^{(s)}(t)$, які містять вектори $g^{(s)}(t)$, $s = p, p+1, \ldots$. Для останніх маємо

$$\widetilde{g}^{(p)}(t) = g^{(p)}(t),$$

$$\widetilde{g}^{(p+1)}(t) = -P_1^{(1)}(\lambda) \frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} H(t) g^{(p)}(t) + g^{(p+1)}(t),$$

$$\widetilde{g}^{(p+2)}(t) = P_2^{(2)}(\lambda) \left[\left(\frac{\partial P(t, \lambda_0(t))}{1! \partial \lambda} H(t) \right)^2 - \frac{\partial^2 P(t, \lambda_0(t))}{2! \partial \lambda^2} H(t) \right] g^{(p)}(t) -$$

$$-P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)g^{(p)}(t)-P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)g^{(p+1)}(t)+g^{(p+2)}(t).$$

Ввівши позначення

$$\widetilde{H}_j(t)=-\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}H(t), j=\overline{1,m}, \tag{3.51}$$

та використавши (3.47), вектори $\widetilde{g}^{(p)}(t)$, $\widetilde{g}^{(p+1)}(t)$, $\widetilde{g}^{(p)}(t)$ запишемо у вигляді

$$\widetilde{g}^{(p)}(t)=g^{(p)}(t),$$

$$\widetilde{g}^{(p+1)}(t)=P_1^{(1)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p)}(t)+g^{(p+1)}(t),$$
$$\widetilde{g}^{(p+2)}(t)=\left[P_2^{(2)}(\lambda)\sigma^3(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)+P_1^{(2)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)\right]g^{(p)}(t)+$$
$$+P_1^{(1)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+1)}(t)+g^{(p+2)}(t).$$

Проаналізувавши ці вирази і провівши індукцію по s, дістанемо

$$\widetilde{g}^{(s)}(t)=\sum_{j=0}^{s-p-1}\sum_{i=1}^{s-p-j}P_i^{(s-p-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t)+g^{(s)}(t), \tag{3.52}$$

$s=p,p+1,\ldots.$

Об'єднавши вирази (3.49), (3.52), остаточно маємо

$$a^{(s)}(t)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}P_i^{(s)}(\lambda)\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-p-1}\sum_{i=1}^{s-p-j}P_i^{(s-p-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t)+g^{(s)}(t), s=1,2,\ldots. \tag{3.53}$$

Перейдемо тепер до визначення коефіцієнтів $\lambda^{(s)}(t)$, $s=1,2,\ldots$, розвинення (3.36). Оскільки за умовою 3.6° в'язка матриць (3.5) має скінченний елементарний дільник кратністю p, то, згідно з теоремою 2.1, йому відповідає жорданів ланцюжок завдовжки p, що складається з власного вектора $\varphi(t)$ та приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i=\overline{2,p}$, які задовольняють співвідношення

$$P(t,\lambda_0(t))\varphi(t)=0,$$

$$P(t,\lambda_0(t))\varphi_i(t)+\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{i-j}(t)=0, i=\overline{2,p},$$

а рівняння
$$P(t,\lambda_0(t))y+\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{p+1-j}(t)=0$$
нерозв'язне відносно y. Виразимо приєднані вектори цього ланцюжка через власний вектор $\varphi(t)$. Оскільки
$$\varphi_i(t)=-\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}H(t)\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{i-j}(t),i=\overline{2,p},$$
то, скориставшись (3.46), дістанемо
$$\varphi_i(t)=\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}H_j(t)\varphi_{i-j}(t),i=\overline{2,p},$$
звідки
$$\varphi_i(t)=\sigma^i(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),i=\overline{2,p}. \tag{3.54}$$
За означенням жорданового ланцюжка
$$\sum_{j=1}^{\min(i,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{i-j+1}(t),\psi(t)\right)=0,i=\overline{1,p-1};$$
$$\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{p-j+1}(t),\psi(t)\right)\neq 0,$$
звідки, врахувавши (3.54), отримаємо
$$\sum_{j=1}^{\min(i,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)=0,i=\overline{1,p-1};$$
$$\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{p-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)\neq 0.$$
Оскільки вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до довільного скалярного множника, то його можна вибрати так, щоб $\psi(t)\in C^\infty[0;T]$ і виконувалась рівність
$$\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{p-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)=1.$$

Отже, остаточно матимемо

$$\sum_{j=1}^{\min(i,m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \psi(t) \right) = \delta_{i,p}, i = \overline{1,p}. \quad (3.55)$$

Із (3.53), (3.55) випливає, що при $s < p$ умова (3.44) виконується, а при $s = p$ запишеться у вигляді

$$P_p^{(p)}(\lambda) - \left(g^{(p)}(t), \psi(t) \right) = 0.$$

Оскільки $P_p^{(p)}(\lambda) = (\lambda^{(1)}(t))^p$ і $g^{(p)}(t) = K(t)\varphi(t)$, де

$$K(t) = -\sum_{k=0}^{m} \lambda_0^k(t) A_k^{(1)}(t) - \delta_{1,h} \sum_{k=1}^{m} C_k^{k-1} \lambda_0^{k-1}(t) A_k^{(0)}(t) \frac{d}{dt} - \delta_{1,h} \sum_{k=2}^{m} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_0^{k-1-i}(t) \frac{d\lambda_0^i(t)}{dt} \times$$

$\times A_k^{(0)}(t)$, то звідси маємо

$$(\lambda^{(1)}(t))^p = (K(t)\varphi(t), \psi(t)).$$

Припустимо, що виконується умова

3.8°. $(K(t)\varphi(t), \psi(t)) \neq 0, \forall t \in [0; T]$.

Тоді з останнього рівняння знайдемо p різних, відмінних від нуля функцій $\lambda^{(1)}(t)$:

$$\lambda^{(1)}(t) = \sqrt[p]{|(K(t)\varphi(t), \psi(t))|} \left[\cos \frac{\arg (K(t)\varphi(t), \psi(t)) + 2\pi(j-1)}{p} + \right.$$

$$\left. + i \sin \frac{\arg (K(t)\varphi(t), \psi(t)) + 2\pi(j-1)}{p} \right], j = \overline{1,p}. \quad (3.56)$$

Знайшовши функцію $\lambda^{(1)}(t)$, за формулою (3.45) визначимо вектор $u^{(1)}(t)$, оскільки вектор $a^{(1)}(t)$ вже відомий, а рівняння (3.40) розв'язне при $s = 1$.

Зафіксуємо одну з функцій $\lambda^{(1)}(t)$, що визначається за формулою (3.56), а також відповідний вектор $u^{(1)}(t)$ і знайдемо наступні коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36). Для визначення функції $\lambda^{(2)}(t)$ використаємо умову (3.44) при $s = p+1$. Згідно з (3.53), (3.55) ця умова запишеться у вигляді

$$P_p^{(p+1)}(\lambda) = C_1(t),$$

де

$$C_1(t) = -\sum_{j=1}^{\min(p+1,m)} P_{p+1}^{(p+1)}(\lambda)\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^i}\sigma^{p-j+2}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)+$$

$$+\left(g^{(p+1)}(t),\psi(t)\right)+P_1^{(1)}(\lambda)\left(\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p)}(t),\psi(t)\right).$$

Оскільки $P_p^{(p+1)}(\lambda) = p\lambda^{(2)}(t)\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p-1}$, а $C_1(t)$ – уже відомий вираз, то звідси маємо

$$\lambda^{(2)}(t) = \frac{C_1(t)}{p\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p-1}}.$$

Визначивши функцію $\lambda^{(2)}(t)$, за формулою (3.53) знайдемо вектор $a^{(2)}(t)$, а потім – за формулою (3.45) – і вектор $u^{(2)}(t)$.

Продовжуючи цей ітераційний процес, можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень(3.35), (3.36). Дійсно, нехай $\lambda^{(i)}(t)$, $u^{(i)}(t)$ вже відомі при $i \leqslant k$. Тоді для визначення функції $\lambda^{(k+1)}(t)$ використаємо умову (3.44) при $s = p+k$. Згідно з (3.53), (3.55) ця умова набуває вигляду

$$P_p^{(p+k)}(\lambda) = C_k(t),$$

де

$$C_k(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{\min(k-i,m)} P_j^{(k-i)}(\lambda)\left(\sigma^{j+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+i)}(t),\psi(t)\right)+\left(g^{(p+k)}(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=p+1}^{p+k}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(p+k)}(\lambda)\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)$$

– вже відомий вираз згідно з припущенням індукції. Покладемо

$$P_p^{(p+k)}(\lambda) = p\lambda^{(k+1)}(t)\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p-1} + \widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda),$$

де $\widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)$ – частина виразу $P_p^{(p+k)}(\lambda)$, яка містить тільки ті функції $\lambda^{(i)}(t)$, індекси яких $i \leq k$. Тоді

$$\lambda^{(k+1)}(t) = \frac{C_k(t) - \widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)}{p\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p-1}}. \tag{3.57}$$

Визначивши $\lambda^{(k+1)}(t)$, за формулою (3.45) знайдемо відповідний вектор $u^{(k+1)}(t)$.

Рекурентні формули (3.42), (3.43), (3.45), (3.56), (3.57) дають змогу визначити будь-які коефіцієнти формальних розвинень (3.35), (3.36). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 3.2° та відповідною гладкістю функції $\lambda_0(t)$, вектор-функцій $\varphi(t)$, $\psi(t)$ та матриці $H(t)$. Згідно з (3.56) описаним способом можна знайти p різних формальних розв'язків системи (3.3).

Другу групу розв'язків системи (3.3), які відповідають нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (3.5), шукатимемо у вигляді

$$x(t,\nu) = v(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\nu)}\right), \tag{3.58}$$

де n-вимірний вектор $v(t,\nu)$ і скалярна функція $\xi(t,\nu)$ зображуються у вигляді формальних розвинень

$$v(t,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v^{(k)}(t), \tag{3.59}$$

$$\xi(t,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi^{(k)}(t) \tag{3.60}$$

за степенями $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$.

Покажемо, що вектор (3.58) теж формально задовольняє систему (3.3). Для цього підставимо в (3.3) вектори

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \nu^{-j(qh+1)} C_k^i D_{i-j}[\xi^{-j}] \frac{d^{k-i}v(t,\nu)}{dt^{k-i}} \exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\nu)}\right), k = \overline{0,m}.$$

У результаті отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \nu^{q(k-j)h-j} C_k^i D_{i-j}[\xi^{-j}] A_k(t,\varepsilon) \frac{d^{k-i}v(t,\nu)}{dt^{k-i}} = 0.$$

Помноживши цю рівність на функцію $\nu^m \xi^m(t,\nu)$, а потім, виділивши в отриманій рівності доданки, в яких $k = i = j$, та взявши до уваги, що $D_0[\xi^i] = \xi^i(t,\nu)$, матимемо

$$\sum_{k=0}^{m} \nu^{m-k} D_0[\xi^{m-k}] A_k(t,\varepsilon) v(t,\nu) = -\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \nu^{q(k-j)h+m-j} D_0[\xi^m] D_{k-j}[\xi^{-j}] A_k(t,\varepsilon)\times$$

$$\times v(t,\nu) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} \nu^{q(k-j)h+m-j} C_k^i D_0[\xi^m] D_{i-j}[\xi^{-j}] A_k(t,\varepsilon) \frac{d^{k-i}v(t,\nu)}{dt^{k-i}}. \tag{3.61}$$

Подамо шукану функцію $\frac{1}{\xi(t,\nu)} = \widetilde{\xi}(t,\nu)$ у вигляді формального ряду за степенями параметра ν:

$$\widetilde{\xi}(t,\nu) = \sum_{s=0}^{\infty} \nu^s \widetilde{\xi}^{(k)}(t), \tag{3.62}$$

коефіцієнти якого визначаються за рекурентними формулами

$$\widetilde{\xi}^{(0)}(t) = \frac{1}{\xi^{(0)}(t)},$$

$$\widetilde{\xi}^{(s)}(t) = -\frac{\sum_{j=1}^{s} \xi^{(j)}(t)\widetilde{\xi}^{(s-j)}(t)}{\xi^{(0)}(t)}, s = 1, 2, \ldots .$$

Підставивши в (3.60) розвинення (3.2), (3.58), (3.59), (3.61) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ν, дістанемо

$$A_m^{(0)}(t)v^{(0)}(t) = 0, \tag{3.63}$$

$$A_m^{(0)}(t)v^{(s)}(t) = b^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots, \tag{3.64}$$

де

$$b^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{s-m+k} D_0^{(i)}[\xi^{m-k}] A_k^{(0)}(t) v^{(s-i-m+k)}(t) + h^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots; \tag{3.65}$$

$$h^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{s-q-m+k} \sum_{j=1}^{\left[\frac{s-i-m+k}{q}\right]} D_0^{(i)}[\xi^{m-k}] A_k^{(j)}(t) v^{(s-i-jq+k-m)}(t) -$$

$$-\sum_{k=2}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\alpha=0}^{s-\theta(k,j)} \sum_{\beta=0}^{s-\alpha-\theta(k,j)} \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{s-\alpha-\beta-\theta(k,j)}{q}\right]} D_0^{(\alpha)}[\xi^m] D_{k-j}^{(\beta)}[\widetilde{\xi}_j] A_k^{(\gamma)}(t) v^{(s-\alpha-\beta-\gamma q-\theta(k,j))}(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\alpha=0}^{s-\theta(k,j)} \sum_{\beta=0}^{s-\alpha-\theta(k,j)} \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{s-\alpha-\beta-\theta(k,j)}{q}\right]} C_k^i D_0^{(\alpha)}[\xi^m] D_{i-j}^{(\beta)}[\widetilde{\xi}^j] A_k^{(\gamma)}(t) \times$$

$$\times \frac{d^{k-i} v^{(s-\alpha-\beta-\gamma q-\theta(k,j))}(t)}{dt^{k-i}}; \theta(k,j) = q(k-j)h + m - j, s = q, q+1, \ldots .$$

Покажемо, що з цих рівнянь можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.59), (3.60). З (3.63) маємо

$$v^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}(t). \tag{3.66}$$

Як і під час розв'язування системи рівнянь (3.40), сумісність системи (3.64) забезпечимо, визначаючи функції $\xi^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, з умови ортогональності її правої частини до вектора $\widetilde{\psi}(t)$:

$$\left(b^{(s)}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0, s = 1, 2, \ldots. \tag{3.67}$$

За виконання умови (3.67) вектори $v^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, визначатимемо за формулою

$$v^{(s)}(t) = G(t) b^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots, \tag{3.68}$$

де $G(t)$ – матриця, напівобернена до $A_m^{(0)}(t)$, яку визначимо так, щоб $G(t) \in C^{\infty}[0; T]$.

Виразимо вектори $b^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, через шукані функції $\xi^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$. Підставляючи послідовно (3.66), (3.68) у (3.65) при $s < q$, матимемо

$$b^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1] A_{m-1}^{(0)}(t) \widetilde{\varphi}(t),$$

$$b^{(2)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^2] \left[A_{m-1}^{(0)}(t) G(t) A_{m-1}^{(0)}(t) - A_{m-2}^{(0)}(t)\right] \widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1] A_{m-1}^{(0)}(t) \widetilde{\varphi}(t),$$

$$b^{(3)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^3] \left[A_{m-1}^{(0)}(t)\big((G(t) A_{m-1}^{(0)}(t))^2 - G(t) A_{m-2}^{(0)}(t)\big)\right] \widetilde{\varphi}(t) -$$
$$- D_0^{(0)}[\xi^3] \left[-A_{m-2}^{(0)}(t) G(t) A_{m-1}^{(0)}(t) + A_{m-3}^{(0)}(t)\right] \widetilde{\varphi}(t) +$$
$$+ D_0^{(1)}[\xi^2] \left[A_{m-1}^{(0)}(t) G(t) A_{m-1}^{(0)}(t) - A_{m-2}^{(0)}(t)\right] \widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(2)}[\xi^1] A_{m-1}^{(0)}(t) \widetilde{\varphi}(t).$$

Взявши до уваги, що

$$A_{m-j}^{(0)}(t) = \frac{\partial^j M(t, 0)}{j! \partial \xi^j}, j = \overline{1, m}, \tag{3.69}$$

і ввівши позначення

$$G_j(t) = -G(t) \frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j! \partial \xi^j}, j = \overline{1, m}, \tag{3.70}$$

вектори $b^{(1)}(t)$, $b^{(2)}(t)$, $b^{(3)}(t)$ подамо у вигляді

$$b^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1] \frac{\partial M(t, 0)}{1! \partial \xi} \widetilde{\varphi}(t),$$

$$b^{(2)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^2] \left[\frac{\partial M(t, 0)}{1! \partial \xi} G_1(t) + \frac{\partial^2 M(t, 0)}{2! \partial \xi^2}\right] \widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1] \frac{\partial M(t, 0)}{1! \partial \xi} \widetilde{\varphi}(t),$$

$$b^{(3)}(t)=-D_0^{(0)}[\xi^3]\left[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}(G_1^2(t)+G_2(t))+\frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\xi^2}G_1(t)+\frac{\partial^3 M(t,0)}{3!\partial\xi^3}\right]\widetilde{\varphi}(t)-$$
$$-D_0^{(1)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}G_1(t)+\frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\xi^2}\right]\widetilde{\varphi}(t)-D_0^{(2)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\widetilde{\varphi}(t).$$

Нарешті, скориставшись формулою (3.47), дістанемо

$$b^{(1)}(t)=-D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$b^{(2)}(t)=-D_0^{(0)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\sigma^2(G_1,G_2,\ldots,G_m)+\frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\xi^2}\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m)\right]\times$$
$$\times\widetilde{\varphi}(t)-D_0^{(1)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$b^{(3)}(t)=-D_0^{(0)}[\xi^3]\left[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\sigma^3(G_1,G_2,\ldots,G_m)+\frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\xi^2}\sigma^2(G_1,G_2,\ldots,G_m)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^3 M(t,0)}{3!\partial\xi^3}\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m)\right]\widetilde{\varphi}(t)-D_0^{(1)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\sigma^2(G_1,G_2,\ldots,G_m)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\xi^2}\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m)\right]\widetilde{\varphi}(t)-D_0^{(2)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}\sigma^1(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t).$$
$$(3.71)$$

Проаналізувавши вектори (3.69) і врахувавши, що $h^{(s)}(t)=0$ при $s<q$, для векторів $b^{(s)}(t)$ отримаємо наступну формулу:

$$b^{(s)}(t)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}D_0^{(s-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),\qquad(3.72)$$

$s=\overline{1,q-1}$.

Доведемо її методом математичної індукції. Припустимо, що вона справджується при $s=\overline{1,k-1}$, $k<q$. Тоді відповідно до (3.68), використовуючи (3.70) і (3.47), отримаємо

$$v^{(k-j)}(t)=\sum_{i=1}^{k-j}D_0^{(k-i-j)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),\, j=\overline{1,k-1}.\qquad(3.73)$$

Поклавши в (3.65) $s=k$, маємо

$$b^{(k)}(t)=-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-m+i}D_0^{(j)}[\xi^{m-i}]A_i^{(0)}(t)v^{(k-j-m+i)}(t).$$

Використавши формулу (3.69) та змінивши порядок підсумування, дістанемо

$$b^{(k)}(t) = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} D_0^{(j)}[\xi^i]\frac{\partial^i M(t,0)}{i!\partial\xi^i}v^{(k-i-j)}(t).$$

Підставивши в цей вираз формулу (3.73) і здійснивши перегрупування доданків: спочатку за однаковою кількістю функцій $\xi^{(j)}(t)$, а потім об'єднавши в кожній з отриманих груп доданки з однаковими матрицями $\sigma^i(G_1, G_2, \ldots, G_m)$, у результаті дістанемо

$$b^{(k)}(t) = -\sum_{i=1}^{k} D_0^{(k-i)}[\xi^i]\frac{\partial^i M(t,0)}{i!\partial\xi^i}\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t)-$$

$$-\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{\gamma=0}^{k-i} D_0^{(\gamma)}[\xi^j]D_0^{(k-i-\gamma)}[\xi^{i-j}]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t).$$

Взявши до уваги, що

$$\sum_{\gamma=0}^{k-i} D_0^{(\gamma)}[\xi^j]D_0^{(k-i-\gamma)}[\xi^{i-j}] = D_0^{(k-i)}[\xi^i], i = \overline{2,k},$$

остаточно отримаємо

$$b^{(k)}(t) = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} D_0^{(k-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t),$$

звідки випливає, що формула (3.72) справджується і при $s = k$. Отже, вона правильна при всіх $s < q$.

При $s \geq q$ у складі $b^{(s)}(t)$ з'являються вирази $h^{(s)}(t)$, $s = q, q+1, \ldots$. Тому, продовживши підстановку (3.66), (3.68) у (3.65), дістанемо вирази вигляду (3.68) та вирази, що містять вектори $h^{(s)}(t)$. Позначивши останні через $\widetilde{h}^{(s)}(t)$, $s = q, q+1, \ldots$, виразимо їх через функції $\xi^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$. При $s = q, q+1, q+2$ матимемо

$$\widetilde{h}^{(q)}(t) = h^{(q)}(t),$$

$$\widetilde{h}^{(q+1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}G(t)h^{(q)}(t) + h^{(q+1)}(t),$$

$$\widetilde{h}^{(q+2)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^2]\left[\left(\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}G(t)\right)^2 - \frac{\partial^2 M(t,0)}{2!\partial\xi^2}G(t)\right]h^{(q)}(t)-$$

$$-D_0^{(1)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}G(t)h^{(q)}(t)-D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,0)}{1!\partial\xi}G(t)h^{(q+1)}(t)+h^{(q+2)}(t).$$

Ввівши позначення

$$\widetilde{G}_j(t)=-\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}G(t), j=\overline{1,m},$$

і скориставшись формулою (3.47), дістанемо

$$\widetilde{h}^{(q+1)}(t)=D_0^{(0)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q)}(t)+h^{(q+1)}(t),$$

$$\widetilde{h}^{(q+2)}(t)=\left[D_0^{(0)}[\xi^2]\sigma^3(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)+D_0^{(1)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)\right]h^{(q)}(t)+$$
$$+D_0^{(0)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+1)}(t)+h^{(q+2)}(t).$$

Провівши індукцію по s, встановимо, що в загальному випадку

$$\widetilde{h}^{(s)}(t)=\sum_{j=0}^{s-q-1}\sum_{i=1}^{s-q-j}D_0^{(s-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+j)}(t)+h^{(s)}(t), \tag{3.74}$$

$s=q,q+1,\ldots$.

Об'єднавши формули (3.72), (3.74), остаточно маємо

$$b^{(s)}(t)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}D_0^{(s-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{s-q-1}\sum_{i=1}^{s-q-j}D_0^{(s-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+j)}(t)+h^{(s)}(t), \tag{3.75}$$

$s=1,2,\ldots$.

Перейдемо до визначення коефіцієнтів $\xi^{(s)}(t)$, $s=0,1,\ldots$, розвинень (3.60). Оскільки за умовою 3.6° в'язка матриць (3.5) має нескінченний елементарний дільник кратністю q, то згідно з теоремою 2.1 нульовому власному значенню симетричної в'язки матриць (3.28) відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки q, що складається з власного вектора $\widetilde{\varphi}(t)$ і приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_i(t)$, $i=\overline{2,q}$, які задовольняють співвідношення

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}(t)=0;$$

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}_i(t)+\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\widetilde{\varphi}_{i-j}(t)=0, i=\overline{2,q}.$$

При цьому рівняння

$$M(t,0)\widetilde{y} + \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial \xi^j}\widetilde{\varphi}_{q-j+1}(t) = 0$$

нерозв'язне відносно вектора $\widetilde{y}$. Виходячи з цього, провівши такі самі міркування, як і для жорданового ланцюжка, що відповідає скінченному елементарному дільнику, встановимо, що при відповідному виборі вектора $\widetilde{\psi}(t)$ виконуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\min(i,m)} \left(\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial \xi^j} \sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) = \delta_{i,q}, i = \overline{1,q}. \qquad (3.76)$$

Згідно з (3.75), (3.76) при $s < q$ умова (3.67) виконується, а при $s = q$ запишеться у вигляді

$$D_0^{(0)}[\xi^q] - \left(h^{(q)}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) = 0.$$

Оскільки $D_0^{(0)}[\xi^q] = \left(\xi^{(0)}(t)\right)^q$, $h^{(q)}(t) = -A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t)$, то звідси маємо

$$\left(\xi^{(0)}(t)\right)^q = -\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right).$$

Відповідно до умови 3.7° з останнього рівняння визначимо q різних, відмінних від нуля функцій $\xi^{(0)}(t)$:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt[q]{\left| \left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) \right|} \left[\cos \frac{\arg\left(-\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) \right) + 2\pi(j-1)}{q} + \right.$$

$$\left. + i \sin \frac{\arg\left(-\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \right) \right) + 2\pi(j-1)}{q} \right], j = \overline{1,q}. \qquad (3.77)$$

Таким чином, функцію $\xi^{(0)}(t)$ і вектор $v^{(0)}(t)$ визначено. Інші коефіцієнти розвинень (3.59), (3.60) можна знайти рекурентним способом. Зафіксуємо одну із знайдених функцій $\xi^{(0)}(t)$ і вважатимемо, що відповідні функції $\xi^{(i)}(t)$ та вектори $v^{(i)}(t)$ вже відомі при $i < r$. Тоді для визначення функції $\xi^{(r)}(t)$ скористаємось умовою (3.67) при $s = q + r$. Взявши до уваги рівність (3.76), матимемо

$$D_0^{(r)}[\xi^q] - S_r(t) = 0,$$

де

$$S_r(t) = -\sum_{i=q+1}^{r+q}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} D_0^{(r+q-i)}[\xi^i]\left(\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{r-i} D_0^{(r-i-j)}[\xi^j]\left(\sigma^{j+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)h^{(q+i)}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) + \left(h^{(q+r)}(t), \widetilde{\psi}(t)\right)$$

– вже відомий вираз згідно з припущенням індукції. Оскільки

$$D_0^{(r)}[\xi^q] = q\xi^{(r)}(t)\left(\xi^{(0)}(t)\right)^{q-1} + \widetilde{D}_0^{(r)}[\xi^q],$$

де доданок $\widetilde{D}_0^{(r)}[\xi^q]$ містить лише ті функції $\xi^{(i)}(t)$, індекси яких менші r, то

$$\xi^{(r)}(t) = \frac{S_r(t) - \widetilde{D}_0^{(r)}[\xi^q]}{q(\xi^{(0)}(t))^{q-1}}. \tag{3.78}$$

Знайшовши функцію $\xi^{(r)}(t)$, вектор $v^{(r)}(t)$ знайдемо за формулою (3.68).

Отримані формули дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.59), (3.60). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 3.2° та відповідною гладкістю вектор-функцій $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ і матриці $G(t)$. Згідно з (3.77) таким способом можна побудувати q різних формальних розв'язків системи (3.3).

Підсумовуючи проведені викладки, приходимо до такої теореми.

Теорема 3.2. Якщо виконуються умови $3.1^\circ - 3.3^\circ, 3.6^\circ - 3.8^\circ$, то на відрізку $[0; T]$ система диференціальних рівнянь (3.3) має p формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\mu) = u_i(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right), i = \overline{1,p},$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (3.5), і q розв'язків вигляду

$$x_j(t,\nu) = v_j(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\nu)}\right), j = \overline{1,q},$$

які відповідають нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\mu)$, $v_j(t,\nu)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\mu)$, $\xi_j(t,\nu)$ – скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень (3.35), (3.36), (3.59), (3.60) за степенями параметрів $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно. Коефіцієнти цих розвинень визначаються за рекурентними формулами (3.42), (3.43), (3.45), (3.56), (3.57), (3.66), (3.68), (3.77), (3.78).

Зазначимо, що з цієї теореми, як наслідок, випливає теорема 3.26, доведена в [58, с. 184–187] для сингулярно збурених систем диференціальних другого порядку.

Зауваження 3.1. Як видно з доведення теореми 3.2, побудова розв'язків першої групи, що відповідають власному значенню $\lambda_0(t)$ граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, не залежить від наявності в цієї в'язки матриць інших власних значень, якщо тільки вони не дорівнюють $\lambda_0(t)$ в окремих точках відрізка, на якому розглядається дана система рівнянь. Тому, як у цьому пункті, так і в наступному, для спрощення викладок, передбачається, що матричний поліном $P(t, \lambda)$ має лише одне власне значення $\lambda_0(t)$. За наявності інших ізольованих власних значень розв'язки будуються для кожного з них окремо за розробленим нами алгоритмом.

3.2.3. Випадок кількох скінченних та нескінченних елементарних дільників однакової кратності

Припустимо, що замість умов 3.6° та 3.7°, сформульованих у підпункті 3.2.2, виконуються наступна:

3.9°. Гранична в'язка матриць (3.5) системи (3.3) регулярна при всіх $t \in [0; T]$ і має $r > 1$ скінченних елементарних дільників $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю $p > 1$ і $s > 1$ нескінченних елементарних дільників кратністю q $(pr + qs = mn)$.

Розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (3.5), теж будемо шукати у вигляді (3.34), де вектор $u(t, \mu)$ і функція $\lambda(t, \mu)$ зображуються розвиненнями (3.35), (3.36). Тому коефіцієнти цих розвинень у даному випадку також визначатимемо із нескінченної системи векторних рівнянь (3.39), (3.40), але із врахуванням умови 3.9°.

Покажемо, що з цієї системи рівнянь можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36). З рівняння (3.39) відразу встановимо, що скалярна функція $\lambda^{(0)}(t)$ визначається за формулою (3.42). Рівняння (3.40) розв'язні тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\left(a^{(s)}(t), \psi_j(t)\right) = 0, j = \overline{1,r}, s = 1, 2, \ldots, \tag{3.79}$$

де $\psi_j(t), j = \overline{1,r}$, – базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(t, \lambda_0(t))$. Слідуючи [58], введемо в розгляд оператор проектування Q, який відображає n-вимірний векторний простір E на його r-вимірний підпростір E_0 наступним чином:

$$Qu(t) = \sum_{i=1}^{r} (u(t), \psi_i(t))\, \varphi_i(t), \forall u(t) \in E, t \in [0; T],$$

де $\varphi_i(t), i = \overline{1,r}$, – базисні елементи нуль-простору матриці $P(t, \lambda_0(t))$. Підпростір E_0 є лінійною оболонкою векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,r}$, які визначимо так, щоб виконувались включення $\varphi_i(t) \in C^\infty[0; T]$, $i = \overline{1,r}$. Тоді умова (3.79) буде еквівалентна наступній:

$$Qa^{(s)}(t) = 0, s = 1, 2, \ldots. \tag{3.80}$$

За виконання цієї умови вектори $u^{(s)}(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, визначатимемо за формулами

$$u^{(0)}(t) = y^{(0)}(t), \tag{3.81}$$

$$u^{(s)}(t) = H(t)a^{(s)}(t) + y^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots, \tag{3.82}$$

де $y^{(s)}(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, – вектори з підпростору E_0, які підлягають визначенню.

Умову ж (3.80) використаємо для визначення функцій $\lambda^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, і векторів $y^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$. Для цього спочатку перетворимо вираз для векторів $a^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, підставляючи послідовно (3.81), (3.82) у (3.41). Діючи, як і в попередньому пункті, дістанемо

$$a^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i=1}^{s-k} \sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(s-k)}(\lambda) \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j! \partial \lambda^j} \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y^{(k)}(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-p-1} \sum_{i=1}^{s-p-j} P_i^{(s-p-j)}(\lambda) \sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) g^{(p+j)}(t) + g^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots. \tag{3.83}$$

Оскільки за умовою 3.9° в'язка матриць (3.5) має $r > 1$ скінченних елементарних дільників кратністю $p > 1$, то їм відповідає r жорданових ланцюжків завдовжки p кожний. Ці ланцюжки складаються з власних векторів $\varphi_k(t)$,

$k=\overline{1,r}$, та відповідних їм приєднаних векторів $\varphi_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{1,r}$, $i=\overline{2,p}$, які задовольняють співвідношення

$$P(t,\lambda_0(t))\varphi_k(t)=0, k=\overline{1,r}, \tag{3.84}$$

$$P(t,\lambda_0(t))\varphi_k^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_k^{(i-j)}(t)=0, k=\overline{1,r}, i=\overline{2,p}, \tag{3.85}$$

а рівняння

$$P(t,\lambda_0(t))y_k+\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_k^{(p+1-j)}(t)=0, k=\overline{1,r},$$

нерозв'язні відносно векторів y_k.

Вектори $\psi_j(t)$, $j=\overline{1,r}$, як і власні вектори $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,r}$, визначаються неоднозначно, проте при будь-якому їх виборі згідно з теоремою 2.2 та зауваженням 2.1

$$\det\left\|\left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\varphi_i^{(p+1-k)}(t),\psi_j(t)\right)\right\|_{i,j=\overline{1,r}}\neq 0, \forall t\in[0;T]. \tag{3.86}$$

Це дає змогу визначити вектори $\psi_j(t)$, $j=\overline{1,r}$, так, щоб виконувались співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\varphi_i^{(p+1-k)}(t),\psi_j(t)\right)=\delta_{ij}, i,j=\overline{1,r}. \tag{3.87}$$

Якщо це співвідношення не виконується, то замість векторів $\psi_j(t)$ можна взяти їх лінійні комбінації $\chi_j(t)=\sum_{k=1}^r\alpha_{kj}^{-1}(t)\psi_k(t)$, $j=\overline{1,r}$, де $\alpha_{kj}^{-1}(t)$ – елементи матриці, оберненої до матриці

$$\|\alpha_{ij}(t)\|_1^r=\left\|\left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\varphi_i^{(p+1-k)}(t),\psi_j(t)\right)\right\|_1^r.$$

Тоді, враховуючи (3.54), приєднані вектори $\varphi_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{1,r}$, $i=\overline{2,p}$, визначатимемо за формулою

$$\varphi_k^{(i)}(t)=\sigma^i(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi_k(t), k=\overline{1,r}, i=\overline{2,p}. \tag{3.88}$$

Із врахуванням (3.88) співвідношення (3.87) запишеться у вигляді

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(p,m)}\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\sigma^{p-k+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi_i(t),\psi_j(t)\right)=\delta_{ij}, i,j=\overline{1,r}. \quad (3.89)$$

Виходячи з розв'язності рівнянь (3.84), (3.85) та співвідношень (3.88), (3.89), легко переконатися, що оператор Q володіє такими властивостями: якщо $u(t)\in E_0$, то

$$\sum_{k=1}^{\min(i,m)} Q\ \frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\sigma^{i-k+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)u(t)=0, i=\overline{1,p-1}; \quad (3.90)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(p,m)} Q\frac{\partial^k P(t,\lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}\sigma^{p-k+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)u(t)=u(t). \quad (3.91)$$

Із (3.83), (3.90), (3.91) випливає, що при $s<p$ умова (3.80) виконується, а при $s=p$ запишеться у вигляді

$$P_p^{(p)}(\lambda)y^{(0)}(t)-Qg^{(p)}(t)=0. \quad (3.92)$$

Оскільки $P_p^{(p)}(\lambda)=(\lambda^{(1)}(t))^p$ і $g^{(p)}(t)=-K(t)y^{(0)}(t)$, то з (3.92) дістанемо

$$(\lambda^{(1)}(t))^p y^{(0)}(t)+QKy^{(0)}(t)=0.$$

Оператор QK відображає простір E на r-вимірний підпростір E_0. Позначимо звуження цього оператора на підпростір E_0 через $\mathfrak{R}_1$. Виходячи з означення оператора Q, неважко переконатися, що в базисі $\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, підпростору E_0 оператор $\mathfrak{R}_1$ зображається $(r\times r)$-матрицею

$$R_1(t)=\left\|\big(K(t)\varphi_i(t),\psi_j(t)\big)\right\|_{i,j=\overline{1,r}}.$$

Тоді рівняння (3.92) у базисі підпростору E_0 матиме вигляд

$$\big(R_1(t)+(\lambda^{(1)}(t))^p E_r\big)y^{(0)}(t)=0.$$

Припустимо, що виконується умова:

3.10°. Матриця $R_1(t)$ має на відрізку $[0;T]$ r простих, відмінних від нуля власних значень $\eta_i(t)$, $i=\overline{1,r}$.

Тоді з останнього рівняння знайдемо pr різних відмінних від нуля функцій $\lambda^{(1)}(t)$:

$$\lambda^{(1)}(t)=\sqrt[p]{|\eta_k(t)|}\left[\cos\frac{\arg(-\eta_k(t))+2\pi(j-1)}{p}+i\sin\frac{\arg(-\eta_k(t))+2\pi(j-1)}{p}\right], \quad (3.93)$$

$k=\overline{1,r}, j=\overline{1,p}$, і r відповідних векторів $y^{(0)}(t)$:

$$y^{(0)}(t)=\varphi_k^*(t), k=\overline{1,r}, \quad (3.94)$$

де $\varphi_k^*(t)$, $k=\overline{1,r}$, – власні вектори матриці $R_1(t)$, що відповідають власним значенням $\eta_k(t)$, $k=\overline{1,r}$. Визначивши координати вектора $y^{(0)}(t)$ у підпросторі E_0, перейшовши в базис $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,r}$, цього підпростору, згідно з (3.81) знайдемо і вектор $u^{(0)}(t)$.

Інші коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36) знайдемо рекурентним способом. Зафіксуємо одну з функцій $\lambda^{(1)}(t)$ і відповідну вектор-функцію $y^{(0)}(t)$, які визначаються за формулами (3.93), (3.94) відповідно. Власне значення і власний вектор матриці $R_1(t)$, яким вони відповідають, позначимо через $\eta(t)$ і $\varphi^*(t)$. Нехай відповідні функції $\lambda^{(i+1)}(t)$ і вектор-функції $u^{(i)}(t)$ при $i<k$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\lambda^{(k+1)}(t)$ та вектора $u^{(k)}(t)$ використаємо умову (3.80) при $s=p+k$. Згідно з (3.83), (3.90), (3.91) ця умова запишеться у вигляді

$$P_p^{(p)}(\lambda)y^{(k)}(t)+P_p^{(p+k)}(\lambda)y^{(0)}(t)+\sum_{\gamma=1}^{k-1}P_p^{(p+k-\gamma)}(\lambda)y^{(\gamma)}(t)+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=p+1}^{p+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}P_i^{(p+k-\gamma)}(\lambda)Q\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y^{(\gamma)}(t)-$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}P_i^{(k-j)}(\lambda)Q\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t)-Qg^{(p+k)}(t)=0.$$

Оскільки $P_p^{(p)}(\lambda)=-\eta(t)$, $g^{(p+k)}(t)=-K(t)y^{(k)}(t)+\widetilde{g}^{(p+k)}(t)$, де $\widetilde{g}^{(p+k)}(t)$ – вже відомий вектор, то з останнього рівняння отримаємо

$$QKy^{(k)}(t)-\eta(t)y^{(k)}(t)=-P_p^{(p+k)}(\lambda)y^{(0)}(t)-\sum_{\gamma=1}^{k-1}P_p^{(p+k-\gamma)}(\lambda)y^{(\gamma)}(t)-$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=p+1}^{p+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(p+k-\gamma)}(\lambda)Q\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y^{(\gamma)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j} P_i^{(k-j)}(\lambda)Q\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t)+Q\widetilde{g}^{(p+k)}(t).$$

У базисі підпростору E_0 це рівняння набуває вигляду

$$\left(R_1(t)-\eta(t)E\right)y^{(k)}(t)=-P_p^{(p+k)}(\lambda)\varphi^*(t)+f_k(t), \tag{3.95}$$

де

$$f_k(t)=-\sum_{\gamma=1}^{k-1} P_p^{(p+k-\gamma)}(\lambda)y^{(\gamma)}(t)+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j} P_i^{(k-j)}(\lambda)Q\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g^{(p+j)}(t)-$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=p+1}^{p+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)} P_i^{(p+k-\gamma)}(\lambda)Q\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y^{(\gamma)}(t)+$$

$+Q\widetilde{g}^{(p+k)}(t)$ – вже відомий вектор з підпростору E_0.

Нехай $\psi^*(t)$ – елемент нуль-простору матриці $(R_1(t)-\eta(t)E)^*$, спряженої з матрицею $R_1(t)-\eta(t)E$. Оскільки за умовою 3.10° власне значення $\eta(t)$ матриці $R_1(t)$ просте, то йому відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1, тобто

$$\left(R_1(t)-\eta(t)E\right)\varphi^*(t)=0,$$

а рівняння

$$\left(R_1(t)-\eta(t)E\right)y=\varphi^*(t)$$

нерозв'язне відносно вектора y, звідки

$$(\varphi^*(t),\psi^*(t))\neq 0, \forall t\in[0;T].$$

Вектор $\psi^*(t)$ виберемо так, щоб виконувалось співвідношення

$$(\varphi^*(t),\psi^*(t))=1, \forall t\in[0;T].$$

Тоді, використавши умову розв'язності рівняння (3.95), отримаємо

$$P_p^{(p+k)}(\lambda)=\left(f_k(t),\psi^*(t)\right).$$

Вираз $P_p^{(p+k)}(\lambda)$ запишемо у вигляді $P_p^{(p+k)}(\lambda) = p\lambda^{(k+1)}(t)(\lambda^{(1)}(t))^{p-1} + \widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)$, де доданок $\widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)$ містить лише ті функції $\lambda^{(i)}(t)$, в яких $i \leq k$. Тоді з останнього рівняння дістанемо

$$\lambda^{(k+1)}(t) = \frac{\big(f_k(t), \psi^*(t)\big) - \widetilde{P}_p^{(p+k)}(\lambda)}{p(\lambda^{(1)}(t))^{p-1}}. \tag{3.96}$$

Тепер рівняння (3.95) буде розв'язним, і з нього знайдемо

$$y^{(k)}(t) = \widetilde{H}(t)\widetilde{f}_k(t), \tag{3.97}$$

де $\widetilde{H}(t)$ – матриця, напівобернена до матриці $R_1(t) - \eta(t)E$, а $\widetilde{f}_k(t)$ – вираз у правій частині рівняння (3.95). Визначивши вектор $y^{(k)}(t)$ і виразивши його через базис підпростору E_0, за формулою (3.82) знайдемо вектор $u^{(k)}(t)$.

Рекурентні формули (3.94), (3.81), (3.97), (3.82), (3.42), (3.93), (3.96) дають змогу визначити будь-які коефіцієнти формальних розвинень (3.35), (3.36). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 3.2° та відповідною гладкістю функції $\lambda_0(t)$, вектор-функцій $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,r}$, та матриць $H(t)$, $\widetilde{H}(t)$. Згідно з (3.93) описаним способом можна знайти pr різних формальних розв'язків системи (3.3).

Другу групу розв'язків системи (3.3), які відповідають нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (3.5), шукатимемо у вигляді (3.58), де вектор $v(t,\nu)$ і функція $\xi(t,\nu)$ зображаються формальними розвиненнями (3.59), (3.60) за степенями $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$. Коефіцієнти цих розвинень визначатимемо із системи векторних рівнянь (3.63), (3.64) із врахуванням умови 3.9°.

Рівняння (3.64) розв'язне тоді і тільки тоді, коли коли виконується умова

$$\Big(b^{(s)}(t), \widetilde{\psi}_j(t)\Big) = 0, j = \overline{1,s}, s = 1, 2, \dots,$$

де $\widetilde{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, – базисні елементи нуль-простору матриці $\Big(A_m^{(0)}(t)\Big)^*$, спряженої з матрицею $A_m^{(0)}(t)$.

Як і при побудові першої групи розв'язків, введемо оператор проектування $\widetilde{Q}$, який відображає n-вимірний векторний простір E на його s-вимірний підпростір $\widetilde{E}_0$, лінійну оболонку векторів $\widetilde{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,s}$, наступним чином:

$$\widetilde{Q}v(t) = \sum_{j=1}^{s} \big(v(t), \widetilde{\psi}_j(t)\big)\widetilde{\varphi}_j(t), \forall v(t) \in E, \tag{3.98}$$

де $\widetilde{\varphi}_j(t)$, $j=\overline{1,s}$, – базисні елементи нуль-простору матриці $A_m^{(0)}(t)$, які визначимо так, щоб виконувались включення $\widetilde{\varphi}_j(t)\in C^\infty[0;T]$, $j=\overline{1,s}$. Тоді умова (3.98) буде еквівалентна наступній:

$$\widetilde{Q}b^{(s)}(t)=0, s=1,2,\ldots. \tag{3.99}$$

За виконання цієї умови вектори $v^{(s)}(t)$, $s=0,1,\ldots$, визначатимемо за формулами

$$v^{(0)}(t)=z^{(0)}(t), \tag{3.100}$$

$$v^{(s)}(t)=G(t)b^{(s)}(t)+z^{(s)}(t), s=1,2,\ldots, \tag{3.101}$$

де $z^{(s)}(t)$, $s=0,1,\ldots$, – вектори із підпростору $\widetilde{E}_0$, які, як і функції $\xi^{(i)}(t)$, підлягають визначенню.

Виразимо вектори (3.65) через шукані функції $\xi^{(j)}(t)$ і вектор-функції $z^{(j)}(t)$, $j=0,1,\ldots$. Підставляючи послідовно (3.100), (3.101) у (3.65) і застосувавши метод математичної індукції, отримаємо

$$b^{(s)}(t)=-\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{i=1}^{s-k}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}D_0^{(s-k-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-q-1}\sum_{i=1}^{s-q-j}D_0^{(s-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+j)}(t)+h^{(s)}(t), \tag{3.102}$$

$s=1,2,\ldots$.

Перейдемо тепер до визначення функцій $\xi^{(j)}(t)$, і векторів $z^{(j)}(t)$, $j=0,1,\ldots$. Оскільки за умовою 3.9° в'язка матриць (3.5) має s нескінченних елементарних дільників кратністю q, то згідно з теоремою 2.1 нульовому власному значенню симетричної їй в'язки (3.30) відповідає s жорданових ланцюжоків векторів завдовжки q кожний. Вектори цих ланцюжків складаються з власних векторів $\widetilde{\varphi}_k(t)$, $k=\overline{1,s}$, та відповідних приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{1,s}$, $i=\overline{2,q}$, які задовольняють співвідношення

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}_k(t)=0, k=\overline{1,s}; \tag{3.103}$$

$$M(t,0)\widetilde{\varphi}_k^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{\min(i-1,m)}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\widetilde{\varphi}_k^{(i-j)}(t)=0, k=\overline{1,s}, i=\overline{2,q}. \tag{3.104}$$

При цьому рівняння

$$M(t,0)\widetilde{z}_k + \sum_{j=1}^{\min(q,m)} \frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\widetilde{\varphi}_k^{(q-j+1)}(t) = 0, k = \overline{1,s},$$

нерозв'язні відносно векторів $\widetilde{z}_k$. Враховуючи формулу (3.54), встановимо, що приєднані вектори цих ланцюжків виражаються через власні вектори за формулою

$$\widetilde{\varphi}_k^{(i)}(t) = \sigma^i(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}_k(t), k = \overline{1,s}, i = \overline{2,q}. \tag{3.105}$$

Згідно з теоремою 2.2 та зауваженням 2.1 жорданів набір власних і приєднаних векторів, які відповідають нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць (3.5), також є повним, тобто

$$\det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(q,m)} \frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\xi^k}\widetilde{\varphi}_i^{(q-k+1)}(t), \widetilde{\psi}_j(t) \right) \right\|_{i,j=\overline{1,s}} \neq 0, \forall t \in [0;T].$$

Тому вектори $\widetilde{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1,s}$, визначимо так, щоб виконувались співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(q,m)} \frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\omega^k}\widetilde{\varphi}_i^{(q-k+1)}(t), \widetilde{\psi}_j(t) \right) = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,s},$$

які, з врахуванням (3.105), запишуться у вигляді

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(q,m)} \frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\xi^k}\sigma^{q-k+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}_i(t), \widetilde{\psi}_j(t) \right) = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,s}. \tag{3.106}$$

Враховуючи розв'язність рівнянь (3.103), (3.104) та співвідношення (3.105, (3.106), встановлюємо такі властивості оператора $\widetilde{Q}$: якщо вектор $v(t) \in \widetilde{E}_0$, то

$$\sum_{k=1}^{\min(i,m)} \widetilde{Q}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\xi^k}\sigma^{i-k+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)v(t) = 0, i = \overline{1, q-1}, \tag{3.107}$$

$$\sum_{k=1}^{\min(q,m)} \widetilde{Q}\frac{\partial^k M(t,0)}{k!\partial\xi^k}\sigma^{q-k+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)v(t) = v(t). \tag{3.108}$$

Згідно з (3.103), (3.107), (3.108) при $s < q$ умова (3.99) виконується, а при $s = q$ запишеться у вигляді

$$D_0^{(0)}[\xi^q]z^{(0)}(t) - \widetilde{Q}h^{(q)}(t) = 0.$$

Оскільки $D_0^{(0)}[\xi^q] = (\xi^{(0)}(t))^q$, $h^{(q)}(t) = -A_m^{(1)}(t)z^{(0)}(t)$, то звідси маємо

$$(\xi^{(0)}(t))^q z^{(0)}(t) + \widetilde{Q}A_m^{(1)}(t)z^{(0)}(t) = 0. \qquad (3.109)$$

Оператор $\widetilde{Q}A_m^{(1)}$ відображає простір E на s-вимірний підпростір $\widetilde{E}_0$. Позначимо звуження цього оператора на підпростір $\widetilde{E}_0$ через $\mathfrak{R}_2$. Неважко переконатися, що в базисі $\widetilde{\varphi}_k(t)$, $k = \overline{1,s}$, підпростору $\widetilde{E}_0$ оператор $\mathfrak{R}_2$ зображується $(s \times s)$-матрицею

$$R_2(t) = \left\| \left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_i(t), \widetilde{\psi}_j(t) \right) \right\|_{i,j=\overline{1,s}}.$$

Тоді в базисі підпростору $\widetilde{E}_0$ рівняння (3.109) матиме вигляд

$$\big(R_2(t) + (\xi^{(0)}(t))^q E_s\big) z^{(0)}(t) = 0.$$

Припустимо, що виконується умова:

3.11°. Матриця $R_2(t)$ має на відрізку $[0;T]$ s простих, відмінних від нуля власних значень $\theta_j(t)$, $j = \overline{1,s}$.

Тоді з останнього рівняння визначимо qs різних відмінних від нуля функцій $\xi^{(0)}(t)$:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt[q]{|\theta_k(t)|}\left[\cos\frac{\arg(-\theta_k(t)) + 2\pi(j-1)}{q} + i\sin\frac{\arg(-\theta_k(t)) + 2\pi(j-1)}{q}\right], \qquad (3.110)$$

$k = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,q}$, і s відповідних векторів $z^{(0)}(t)$:

$$z^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}_k^*(t), k = \overline{1,s}, \qquad (3.111)$$

де $\widetilde{\varphi}_k^*(t)$, $k = \overline{1,s}$, – власні вектори матриці $R_2(t)$, що відповідають власним значенням $\theta_k(t)$, $k = \overline{1,s}$. Визначивши вектор $z^{(0)}(t)$, і подавши його через базис підпростору $\widetilde{E}_0$, згідно з (3.100) знайдемо вектор $v^{(0)}(t)$.

Таким чином, функцію $\xi^{(0)}(t)$ і вектор $v^{(0)}(t)$ визначено. Наступні коефіцієнти розвинень (3.59), (3.60) можна знайти рекурентним способом. Зафіксуємо одну з функцій $\xi^{(0)}(t)$ та відповідну вектор-функцію $v^{(0)}(t)$, які визначаються за формулами (3.110), (3.111) відповідно. Власне значення і власний вектор матриці $R_2(t)$, яким вони відповідають, позначимо через $\theta(t)$ і $\widetilde{\varphi}^*(t)$. Нехай відповідні функції $\xi^{(j)}(t)$ і вектор-функції $v^{(j)}(t)$ при $j < k$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\xi^{(k)}(t)$ та вектор-функції $v^{(k)}(t)$ використаємо умову (3.99) при $s=q+k$. Згідно з (3.102), (3.107), (3.108) ця умова запишеться у вигляді

$$D_0^{(0)}[\xi^q]z^{(k)}(t)+D_0^{(k)}[\xi^q]z^{(0)}(t)+\sum_{\gamma=1}^{k-1}D_0^{(k-\gamma)}[\xi^q]z^{(\gamma)}(t)+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=q+1}^{q+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}D_0^{(q+k-\gamma-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z^{(\gamma)}(t)-$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}D_0^{(k-j-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+j)}(t)-\widetilde{Q}h^{(q+k)}(t)=0.$$

Оскільки $D_0^{(0)}[\xi^q]=-\theta(t)$, $h^{(q+k)}(t)=-A_m^{(1)}(t)z^{(k)}(t)+\widetilde{h}^{(q+k)}(t)$, де $\widetilde{h}^{(q+k)}(t)$ – вже відомий вектор згідно з припущенням індукції, то з останньої рівністі отримаємо

$$\widetilde{Q}A_m^{(1)}z^{(k)}(t)-\theta(t)z^{(k)}(t)=-D_0^{(k)}[\xi^q]z^{(0)}(t)-\sum_{\gamma=1}^{k-1}D_0^{(k-\gamma)}[\xi^q]z^{(\gamma)}(t)-$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=q+1}^{q+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}D_0^{(q+k-\gamma-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z^{(\gamma)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}D_0^{(k-j-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+j)}(t)+\widetilde{Q}\widetilde{h}^{(q+k)}(t).$$

У базисі підпростору $\widetilde{E}_0$ це рівняння запишеться у вигляді

$$\left(R_2(t)-\theta(t)E\right)z^{(k)}(t)=-D_0^{(k)}[\xi^q]\widetilde{\varphi}^*(t)+d_k(t), \qquad (3.112)$$

де

$$d_k(t)=-\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{i=q+1}^{q+k-\gamma}\sum_{j=1}^{\min(i,m)}D_0^{(q+k-\gamma-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{i-j+1}(G_1,G_2,\ldots,G_m)z^{(\gamma)}(t)-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{k-1}D_0^{(k-\gamma)}[\xi^q]z^{(\gamma)}(t)+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}D_0^{(k-j-i)}[\xi^i]\widetilde{Q}\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\ldots,\widetilde{G}_m)h^{(q+j)}(t)+$$

$+\widetilde{Q}\widetilde{h}^{(q+k)}(t)$ – вже відомий вектор з підпростору $\widetilde{E}_0$.

Нехай $\widetilde{\psi}^*(t)$ – елемент нуль-простору матриці $(R_2(t)-\theta(t)E)^*$, який виберемо так, щоб виконувалось співвідношення

$$\left(\widetilde{\varphi}^*(t),\widetilde{\psi}^*(t)\right)=1,\forall t\in[0;T].$$

Тоді, записавши умову розв'язності рівняння (3.112), матимемо

$$D_0^{(k)}[\xi^q] = \left(d_k(t), \widetilde{\psi}^*(t)\right).$$

Оскільки $D_0^{(k)}[\xi^q] = q\xi^{(k)}(t)(\xi^{(0)}(t))^{q-1} + \widetilde{D}_0^{(k)}[\xi^q]$, де доданок $\widetilde{D}_0^{(k)}[\xi^q]$ містить лише ті функції $\xi^{(j)}(t)$, індекси яких менші k, то

$$\xi^{(k)}(t) = \frac{\left(d_k(t), \widetilde{\psi}^*(t)\right) - \widetilde{D}_0^{(k)}[\xi^q]}{q(\xi^{(0)}(t))^{q-1}}. \tag{3.113}$$

Тепер вектор $z^{(k)}(t)$ визначимо з рівняння (3.112) за формулою

$$z^{(k)}(t) = \widetilde{G}(t)\widetilde{d}_k(t), \tag{3.114}$$

де $\widetilde{G}(t)$ – матриця, напівобернена до $R_2(t) - \theta(t)E$, а $\widetilde{d}_k(t)$ – вираз у правий частині рівняння (3.112). Визначивши вектор $z^{(k)}(t)$ і виразивши його через через базис підпростору $\widetilde{E}_0$, за формулою (3.101) знайдемо шуканий вектор $v^{(k)}(t)$.

Отримані формули дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.59), (3.60). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 3.2° та відповідною гладкістю вектор-функцій $\widetilde{\varphi}^*(t)$, $\widetilde{\psi}^*(t)$, $\widetilde{\varphi}_j(t)$, $\widetilde{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1,s}$ і матриць $G(t)$, $\widetilde{G}(t)$. Згідно з (3.110) таким способом можна побудувати qs різних формальних розв'язків системи (3.3).

Слід зазначити [58], що відмінність від нуля власних значень матриці $R_2(t)$ забезпечує неособливість матриці $A_m(t,\varepsilon)$ при досить малих ε, а це згідно з теоремою 2.2 забезпечує існування в системи (3.3) mn лінійно незалежних розв'язків.

Отже, доведено наступне твердження.

Теорема 3.3. Якщо виконуються умови $3.1^\circ - 3.3^\circ, 3.9^\circ - 3.11^\circ$, то на відрізку $[0;T]$ система диференціальних рівнянь (3.3) має pr формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\mu) = u_i(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right), i = \overline{1,pr},$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (3.5), і qs розв'язків вигляду

$$x_j(t,\nu) = v_j(t,\nu)\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\nu)}\right), j = \overline{1,qs},$$

які відповідають нескінченним елементарним дільникам цієї в'язки, де $u_i(t,\mu)$, $v_j(t,\nu)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\mu)$, $\xi_j(t,\nu)$ – скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень (3.35), (3.36, (3.59), (3.60) за степенями параметрів $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно. Коефіцієнти цих розвинень визначаються за рекурентними формулами (3.42), (3.93), (3.96), (3.94), (3.81), (3.97), (3.72), (3.110), (3.113), (3.111), (3.100), (3.114), (3.111).

Як наслідок, з цієї теореми випливає теорема, сформульована в [101], для аналогічних систем диференціальних рівнянь другого порядку.

Методами робіт [58,85] можна довести, що формальні розв'язки, які будуються за алгоритмами , описаними в пунктах 3.2.2 та 3.2.3, лінійно незалежні в тому розумінні, що такими будуть l – наближення, утворені шляхом обривання розвинень (3.35), (3.36), (3.59), (3.60) на l -му члені, якщо $l \geq \max(p-1, q-1)$. Тому їх лінійна комбінація буде загальним формальним розв'язком системи (3.3).

3.2.4. Загальний випадок

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли гранична в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має скінченні і нескінченні елементарні дільники як однакової, так і різної кратності.

Припустимо, що виконуються умови $3.1^\circ - 3.3^\circ$, а також наступна:

3.12°. Гранична в'язка матриць (3.5) системи (3.3) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має кратне власне значення $\lambda_0(t)$, якому відповідає r_i скінченних елементарних дільників кратності $p_i (i = \overline{1,\alpha})$ кожний, а також s_j нескінченних елементарних дільників кратності $q_j (j = \overline{1,\beta})$ кожний, причому: $p_1 > p_2 > \dots > p_\alpha$; $q_1 > q_2 > \dots > q_\beta$; $r_1 + r_2 + \dots + r_\alpha = r$; $s_1 + s_2 + \dots + s_\beta = s$; $r_1p_1 + r_2p_2 + \dots + r_\alpha p_\alpha + s_1q_1 + s_2q_2 + \dots + s_\beta q_\beta = mn$.

Розв'язки системи рівнянь (3.3), що відповідають скінченним елементарним дільникам, будемо шукати у вигляді (3.34), де вектор $u(t,\nu)$ і функція $\lambda(t,\nu)$ представляються розвиненнями (3.35), (3.36), але вже за степенями $\mu = \sqrt[p_i]{\varepsilon}, i = \overline{1,\alpha}$.

Вектор (3.34) буде формальним розв'язком системи (3.3), якщо коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36) задовольняють нескінченну систему векторних рівнянь:

$$P\left(t, \lambda^{(0)}(t)\right) u^{(0)}(t) = 0, \tag{3.115}$$

$$P\left(t, \lambda^{(0)}(t)\right) u^{(s)}(t) = a_i^{(s)}(t), i = \overline{1, \alpha}, s = 1, 2, \ldots; \tag{3.116}$$

де

$$a_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{s} D_0^{(\gamma)}[\lambda^k] A_k^{(0)}(t) u^{(s-\gamma)}(t) + g_i^{(s)}(t), i = \overline{1, \alpha}, s = 1, 2, \ldots; \tag{3.117}$$

$$g_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m}\sum_{\gamma=0}^{s-p_i}\sum_{j=1}^{\left[\frac{s-\gamma}{p_i}\right]} D_0^{(\gamma)}[\lambda^k] A_k^{(j)}(t) u^{(s-\gamma-jp_i)}(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{\gamma}\sum_{\delta=0}^{s-(k-j)p_i h}\sum_{l=0}^{\left[\frac{s-\delta-(k-j)p_i h}{p_i}\right]} C_k^{\gamma} D_{\gamma-j}^{(\delta)}[\lambda^j] A_k^{(l)}(t) \frac{d^{k-\gamma} u^{(s-\delta-lp_i-(k-j)p_i h)}(t)}{dt^{k-\gamma}} -$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{\gamma=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{s-(k-\gamma)p_i h}\sum_{\delta=0}^{\left[\frac{s-j-(k-\gamma)p_i h)}{p_i}\right]} D_{k-\gamma}^{(j)}[\lambda^\gamma] A_k^{(\delta)}(t) u^{(s-j-\delta p_i-(k-\gamma)p_i h)}(t), \tag{3.118}$$

$s = p_i, p_i + 1, \ldots, i = \overline{1, \alpha}$.

Покажемо, що з цієї систем можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36).

Із (3.115) одразу дістанемо

$$\lambda^{(0)}(t) = \lambda_0(t).$$

Система (3.116) сумісна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\left(a_i^{(s)}(t), \psi_j(t)\right) = 0, j = \overline{1, r_\gamma}, i, \gamma = \overline{1, \alpha}, s = 1, 2, \ldots, \tag{3.119}$$

де $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r_\gamma}, \gamma = \overline{1, \alpha}$, – базисні елементи нуль-простору матриці $P^*(t, \lambda_0(t))$. Цю умову подамо в зручному для нас вигляді. Для цього зробимо деякі додаткові викладки. Позначимо через E_0 лінійну оболонку власних векторів $\varphi_i(t), i = \overline{1, r}, (r_1 + r_2 + \cdots + r_\alpha = r)$ в'язки матриць $P(t, \lambda_0(t))$. Нехай $E_{0j}, j = \overline{1, \alpha}$, – лінійна оболонка векторів $\varphi_{r_1+r_2+\cdots+r_{j-1}+i}(t), i = \overline{1, r_j}, j = \overline{1, \alpha}$. Тоді підпростір E_0 є прямою сумою підпросторів $E_{0j}, j = \overline{1, \alpha}$: $E_0 = E_{01} \oplus E_{02} \oplus \ldots E_{0\alpha}$. Введемо до розгляду оператори проектування $Q_j, j = \overline{1, \alpha}$, які відображають $n-$вимірний простір E на r_j-вимірний підпростір $E_{0j}, j = \overline{1, \alpha}$, за таким правилом:

$$Q_j u(t) = \sum_{i=1}^{r_j} \left(u(t), \psi_{r_1+r_2+\cdots+r_{j-1}+i}(t)\right) \varphi_{r_1+r_2+\cdots+r_{j-1}+i}(t), j = \overline{1, \alpha}, \forall t \in [0; T].$$

Тоді умова (3.119) буде еквівалентна наступний:

$$Q_j a_i^{(s)}(t) = 0, i, j = \overline{1,\alpha}, s = 1, 2, \ldots. \qquad (3.120)$$

За виконання цієї умови вектори $u^{(s)}(t), s = 0, 1, \ldots,$ визначатимемо за формулами

$$u^{(0)}(t) = y^{(0)}(t), \qquad (3.121)$$

$$u^{(s)}(t) = H(t)a_i^{(s)}(t) + y^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots, \qquad (3.122)$$

де $y^{(s)}(t), s = 0, 1, \ldots,$ – вектори з підпростору E_0, які потрібно визначити.

Як і в попередньому випадку, умову сумісності (3.120) використаємо для визначення функцій $\lambda^{(j)}(t), j = 1, 2, \ldots,$ і векторів $u^{(j)}(t), j = 0, 1, \ldots.$ При цьому скористаємось виразом (3.83) для векторів $a_i^{(s)}(t)$, виведеним під час доведення теореми 3.2:

$$a_i^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(s-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)y^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-p_i-1}\sum_{\gamma=1}^{s-p_i-j} P_\gamma^{(s-p_i-j)}(\lambda)\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)+g_i^{(s)}(t), i=\overline{1,\alpha}, s=1, 2, \ldots. \qquad (3.123)$$

Оскільки за умовою 3.12° в'язка матриць (3.5) має $r_i > 1, i = \overline{1,\alpha}$, скінченних елементарних дільників кратністю $p_i > 1, i = \overline{1,\alpha}$, то згідно з теоремою 2.1 їм відповідає r_i жорданових ланцюжків завдовжки $p_i (i = \overline{1,\alpha})$ кожний. Ці ланцюжки складаються з власних векторів $\varphi^{(1)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}(t), i = \overline{1, r_k}, k = \overline{1,\alpha}$, та відповідних приєднаних векторів $\varphi^{(j)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}(t), i = \overline{1, r_k},\ j = \overline{2, p_k}, k = \overline{1,\alpha}$, які задовольняють співвідношення:

$$P\left(t, \lambda_0(t)\right)\varphi^{(1)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}(t) = 0, i = \overline{1, r_k}, k = \overline{1,\alpha}, \qquad (3.124)$$

$$P(t, \lambda_0(t))\,\varphi^{(j)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}(t)+\sum_{\gamma=1}^{\min(j-1,m)}\frac{\partial^\gamma P\left(t,\lambda_0(t)\right)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(j-\gamma)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}(t) = 0, \qquad (3.125)$$

$i = \overline{1, r_k}, j = \overline{2, p_k}, k = \overline{1,\alpha}$, а рівняння

$$P\left(t, \lambda_0(t)\right) y_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i} + \sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\frac{\partial^\gamma P\left(t,\lambda_0(t)\right)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k+1-\gamma)}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+i}(t) = 0,$$

$i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha}$, нерозв'язні відносно векторів $y_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}, i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha}$. Враховуючи сумісність рівнянь (3.124), (1.125), вектори цих жорданових ланцюжків визначимо за формулами:

$$\varphi^{(1)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t)=\varphi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t), i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha},$$

$$\varphi^{(j)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t)=\sigma^j\left(H_1,H_2,\dots,H_m\right)\varphi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t), i=\overline{1,r_k}, \tag{3.126}$$

$j=\overline{2,p_k}, k=\overline{1,\alpha}$. Вектори $\psi_j(t), j=\overline{1,r}, r=r_1+r_2+\dots+r_\alpha$, як і власні вектори $\varphi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t), i=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha}$, визначаються неоднозначно, але при будь-якому їх виборі, згідно теоремою 2.2 та зауваженням 2.1,

$$\det\left\|\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\frac{\partial^\gamma P\left(t,\lambda_0(t)\right)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k+1-\gamma)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t),\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}(t)\right)\right\|_{i,j=\overline{1,r_k},k=\overline{1,\alpha}}\neq 0,$$

$\forall t\in[0;T]$. Це дає змогу їх визначити так, щоб виконувались співвідношення

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\frac{\partial^\gamma P\left(t,\lambda_0(t)\right)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\varphi^{(p_k+1-\gamma)}_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+i}(t),\psi_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+j}(t)\right)=$$

$$=\delta_{r_1+\dots+r_{k-1}+i,r_1+\dots+r_{k-1}+j}, i,j=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha},$$

що й будемо передбачати в подальших викладках. Враховуючи формулу (3.126), останні рівності запишемо у вигляді

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}\frac{\partial^\gamma P\left(t,\lambda_0(t)\right)}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{p_k-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)\varphi_{r_1+\dots+r_{k-1}+i}(t),\psi_{r_1+\dots+r_{k-1}+j}(t)\right)=$$

$$=\delta_{r_1+\dots+r_{k-1}+i,r_1+\dots+r_{k-1}+j}, i,j=\overline{1,r_k}, k=\overline{1,\alpha}. \tag{3.127}$$

Виходячи з сумісності систем (3.124), (3.125) та рівностей (3.126), (3.127), легко переконатися в наступних властивостях операторів проектування Q_l, $l=\overline{1,\alpha}$: якщо $y^{(1)}_k(t)\in E_{0k}, k=\overline{1,\alpha}$, то

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)}Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)y^{(1)}_k(t)=0, j=\overline{1,p_k-1}, k,l=\overline{1,\alpha}; \tag{3.128}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)}Q_k\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{p_k-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)y^{(1)}_k(t)=y^{(1)}_k(t), k=\overline{1,\alpha}; \tag{3.129}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\min(p_k,m)} Q_l \frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{p_k-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_k^{(1)}(t)=0, k\neq l, k=\overline{1,\alpha}. \quad (3.130)$$

Оскільки $y^{(k)}(t)\in E_0$, а $E_0=E_{01}\oplus E_{02}\oplus\cdots\oplus E_{0\alpha}$, то

$$y^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\alpha} y_n^{(k)}(t),$$

де $y_n^{(k)}(t)\in E_{0n}(n=\overline{1,\alpha})$. Тоді формула (3.123) набуде вигляду

$$a_i^{(s)}(t)=-\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(s-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-p_i-1}\sum_{\gamma=1}^{s-p_i-j} P_\gamma^{(s-p_i-j)}(\lambda)\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)+g_i^{(s)}(t), \qquad (3.131)$$

$i=\overline{1,\alpha}, s=1,2,\ldots$. Звідси, враховуючи властивості (3.128), (3.129), (3.130) операторів проектування $Q_l, l=\overline{1,\alpha}$, приходимо до висновку, що умова сумісності (3.120) при $s=\overline{1,p_\alpha-1}$ виконується.

Зафіксуємо i $(i=\overline{1,\alpha})$. Знайдемо розв'язки, які відповідають r_i скінченним елементарним дільникам в'язки матриць (3.5) кратності p_i кожний. Для цього використаємо вектори $a_i^{(s)}(t), s=1,2,\ldots$. Як було встановлено вище, при $s=\overline{1,p_\alpha-1}$, умова сумісності (3.120) виконується. Розглянемо її при $s=p_\alpha$:

$$Q_l a_i^{(p_\alpha)}(t)=0, l=\overline{1,\alpha},$$

або

$$\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{p_\alpha-1}\sum_{j=1}^{p_\alpha-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_\alpha-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)=0,$$

$l=\overline{1,\alpha}, p_\alpha<p_i$. Із врахуванням (3.128), (3.129), (3.130) остання рівність запишеться у вигляді

$$P_{p_\alpha}^{(p_\alpha)}(\lambda)y_\alpha^{(0)}(t)=0.$$

Оскільки $P_{p_\alpha}^{(p_\alpha)}(\lambda)\neq 0$, то

$$y_\alpha^{(0)}(t)=0.$$

Використовуючи метод математичної індукції, неважко переконатися, що при $s = \overline{p_\alpha, p_{\alpha-1} - p_\alpha - 1}$, де $p_{\alpha-1} < p_i$, умова (3.120) для векторів $a_i^{(s)}(t)$ зводиться до умови

$$y_\alpha^{(k)}(t) = 0, k = \overline{0, p_{\alpha-1} - p_\alpha - 1}. \tag{3.132}$$

При $s = p_{\alpha-1}$ отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\alpha} \sum_{k=0}^{p_{\alpha-1}-1} \sum_{j=1}^{p_{\alpha-1}-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_{\alpha-1}-k)}(\lambda) Q_l \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma! \partial \lambda^\gamma} \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) = 0,$$

$l = \overline{1, \alpha}, p_{\alpha-1} < p_i$. Взявши до уваги (3.132), звідси маємо

$$\sum_{k=p_{\alpha-1}-p_\alpha}^{p_{\alpha-1}-1} \sum_{j=1}^{p_{\alpha-1}-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_{\alpha-1}-k)}(\lambda) Q_l \frac{\partial_\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma! \partial \lambda^\gamma} \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_\alpha^{(k)}(t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{p_{\alpha-1}-1} \sum_{j=1}^{p_{\alpha-1}-k} \sum_{\gamma=1}^{\min(j,m)} P_j^{(p_{\alpha-1}-k)}(\lambda) Q_l \frac{\partial^\gamma P(t, \lambda_0(t))}{\gamma! \partial \lambda^\gamma} \sigma^{j-\gamma+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) y_n^{(k)}(t) = 0,$$

$l = \overline{1, \alpha}, p_{\alpha-1} < p_i$. Враховуючи властивості (3.128), (3.129), (3.130) операторів проектування $Q_l, l = \overline{1, \alpha}$, отримаємо

$$P_{p_{\alpha-1}}^{(p_{\alpha-1})}(\lambda) y_{\alpha-1}^{(0)}(t) = 0,$$

$$P_{p_\alpha}^{(p_\alpha)}(\lambda) y_\alpha^{(p_{\alpha-1}-p_\alpha)}(t) = 0,$$

звідки

$$y_{\alpha-1}^{(0)}(t) = 0,$$

$$y_\alpha^{(p_{\alpha-1}-p_\alpha)}(t) = 0.$$

При $s < p_{\alpha-2} < p_i$, дістанемо

$$y_\alpha^{(k)}(t) = 0, k = \overline{0, p_{\alpha-2} - p_\alpha - 1},$$

$$y_{\alpha-1}^{(k)}(t) = 0, k = \overline{0, p_{\alpha-2} - p_{\alpha-1} - 1}.$$

Продовжуючи цей процес, встановимо, що

$$y_n^{(k)}(t) = 0, n = \overline{i+1, \alpha}, k = \overline{0, p_i - p_n - 1}. \tag{3.133}$$

Розглянемо тепер умову (3.120) для вектора $a_i^{(p_i)}(t)$:

$$\sum_{n=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t) =$$

$= Q_l g_i^{(p_i)}(t), l = \overline{1,\alpha}.$

Із врахуванням (3.133) ці рівності набувають вигляду

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-$$

$$\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t) =$$

$= Q_l g_i^{(p_i)}(t), l = \overline{1,\alpha}.$

Згідно з (3.128), (3.129), (3.130) звідси маємо

$$Q_l g_i^{(p_i)}(t) = 0, l = \overline{1, i-1};$$

$$P_{p_i}^{(p_i)}(\lambda)y_i^{(0)}(t) - Q_i g_i^{(p_i)}(t) = 0;$$

$$P_{p_l}^{(p_l)}(\lambda)y_l^{(p_i-p_l)}(t) - Q_l g_i^{(p_i)}(t) = 0, l = \overline{i+1,\alpha}.$$

Взявши до уваги, що $g_i^{(p_i)}(t) = -K(t)y^{(0)}(t)$, отримаємо

$$Q_l K(t)y^{(0)}(t) = 0, l = \overline{1, i-1};$$

$$P_{p_i}^{(p_i)}(\lambda)y_i^{(0)}(t) + Q_i K(t)y^{(0)}(t) = 0;$$

$$P_{p_l}^{(p_l)}(\lambda)y_l^{(p_i-p_l)}(t) + Q_l K(t)y^{(0)}(t) = 0, l = \overline{i+1,\alpha}.$$

Враховуючи рівності (3.133), вектор $y^{(0)}(t)$ подамо у вигляді

$$y^{(0)}(t) = y_i^{(0)}(t) + \overline{y}^{(0)}(t), \tag{3.134}$$

де

$$\overline{y}^{(0)}(t) = \sum_{n=1}^{i-1} y_n^{(0)}(t).$$

У результаті дістанемо

$$Q_l K\overline{y}^{(0)}(t) + Q_l K y_i^{(0)}(t) = 0, l = \overline{1, i-1}; \tag{3.135}$$

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} y_i^{(0)}(t) + Q_i K y_i^{(0)}(t) + Q_i K\overline{y}^{(0)}(t) = 0; \tag{3.136}$$

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_l} y_l^{(p_i - p_l)}(t) + Q_l K y_i^{(0)}(t) + Q_l K\overline{y}^{(0)}(t) = 0, l = \overline{i+1, \alpha}. \tag{3.137}$$

Рівняння (3.135) еквівалентні одному рівнянню

$$\sum_{l=1}^{i-1} Q_l K\overline{y}^{(0)}(t) + \sum_{l=1}^{i-1} Q_l K y_i^{(0)}(t) = 0. \tag{3.138}$$

Введемо позначення

$$\sum_{l=1}^{i-1} Q_l K = \mathfrak{K}_i,$$

а через $\overline{\mathfrak{K}}_i$ позначимо звуження оператора $\mathfrak{K}_i$ на підпростір $E_{01} \oplus E_{02} \oplus \cdots \oplus E_{0,i-1}$, тобто підпростір розмірності $r_1 + r_2 + \cdots + r_{i-1}$, базис якого складають вектори $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{r_1}(t)$, $\varphi_{r_1+1}(t), \ldots, \varphi_{r_1+r_2+\cdots+r_{i-1}}(t)$. У цьому базисі оператор $\overline{\mathfrak{K}}_i$ представляється у вигляді квадратної матриці $\overline{K}_i(t)$ порядку $r_1+r_2+\cdots+r_{i-1}$, тобто:

$$\overline{K}_i(t) = \left\|(K(t)\varphi_l(t), \psi_k(t))\right\|_{k,l=\overline{1, r_1+\cdots+r_{i-1}}}.$$

Матриця $K_i(t)$ оператора $\mathfrak{K}_i$ в базисі підпростору E_{0i}, представленого векторами $\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(t), \ldots, \varphi_{r_1+\cdots+r_i}(t)$, є прямокутною:

$$K_i(t) = \begin{bmatrix} \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(t), \psi_1(t)\big) & \ldots & (K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_i}(t), \psi_1(t)) \\ \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(t), \psi_2(t)\big) & \ldots & (K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_i}(t), \psi_2(t)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_i}(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}}(t)\big) \end{bmatrix}.$$

У базисах підпросторів $E_{01} \oplus E_{01} \oplus \cdots \oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i} рівняння (3.138) набуває вигляду

$$\overline{K}_i(t)\overline{y}^{(0)}(t) + K_i(t) y_i^{(0)}(t) = 0.$$

Припустимо, що виконується умова:

$$\det \overline{K}_i(t) \neq 0, \forall t \in [0; T]. \tag{3.138'}$$

Тоді

$$\overline{y}^{(0)}(t) = -\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)y_i^{(0)}(t). \tag{3.139}$$

Розглянемо тепер рівняння (3.136). Позначимо $Q_iK = \mathfrak{D}_i$, а звуження оператора $\mathfrak{D}_i$ на підпростір E_{0i} – через $\overline{\mathfrak{D}}_i$. Матриця оператора $\mathfrak{D}_i$ в підпросторі $E_{01} \oplus E_{01} \oplus \cdots \oplus E_{0,i-1}$ має наступну структуру:

$$D_i(t) = \begin{bmatrix} \big(K(t)\varphi_1(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}}(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(t)\big) \\ \big(K(t)\varphi_1(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+2}(t)\big) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}}(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+2}(t)\big) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ (K(t)\varphi_1(t), \psi_{r_1+\cdots+r_i}(t)) & \ldots & \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}}(t), \psi_{r_1+\cdots+r_i}(t)\big) \end{bmatrix}.$$

У свою чергу матриця оператора $\overline{\mathfrak{D}}_i$ в базисі підпростору E_{0i}

$$\overline{D}_i(t) = \left\| \big(K(t)\varphi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+k}(t), \psi_{r_1+\cdots+r_{i-1}+l}(t)\big) \right\|_{k,l=\overline{1,r_i}}.$$

Отже, у базисах підпросторів $E_{01} \oplus E_{01} \oplus \cdots \oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i} рівняння (3.136) набуває вигляду

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} y_i^{(0)}(t) + \overline{D}_i(t)y_i^{(0)}(t) + D_i(t)\overline{y}^{(0)}(t) = 0,$$

звідки, враховуючи формулу (3.139), отримаємо

$$\left(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) + \left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} E_{r_i}\right) y_i^{(0)}(t) = 0. \tag{3.140}$$

Це рівняння має ненульові розв'язки, якщо

$$\det\left(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) + \left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} E_{r_i}\right) = 0. \tag{3.141}$$

Використовуючи формулу Шура [22, с. 55], встановимо, що рівняння (3.141) рівносильне наступному

$$\begin{vmatrix} \overline{K}_i(t) & K_i(t) \\ D_i(t) & \overline{D}_i(t) + \left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} E_{r_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Останнє ж можна подати у вигляді

$$\det\left(\|(K(t)\varphi_l(t), \psi_k(t))\|_1^{r_1+\cdots+r_i} + \left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} \Lambda_{r_i}\right) = 0,$$

де Λ_{r_i} – діагональна матриця $r_1+\dots+r_i$-го порядку, всі діагональні елементи якої дорівнюють нулю, крім r_i останніх, які дорівнюють одиниці, тобто

$$\Lambda_{r_i}=\operatorname{diag}\{0,E_{r_i}\}.$$

Накладемо ще одну умову.

3.13°. Припустимо, що рівняння

$$\det\left(\|(K(t)\varphi_l(t),\psi_k(t))\|_1^{r_1+\dots+r_i}+\eta_i\Lambda_{r_i}\right)=0,$$

має r_i простих відмінних від нуля коренів $\eta_i^{(k)}(t), k=\overline{1,r_i}, \forall t\in[0;T]$.

Тоді дістанемо r_i рівнянь

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i}=-\eta_i^{(k)}(t), k=\overline{1,r_i}.$$

З них визначимо p_ir_i різних відмінних від нуля функцій $\lambda^{(1)}(t)$:

$$\lambda^{(1)}(t)=!\sqrt[p_i]{\left|\eta_i^{(k)}(t)\right|}\left(\cos\frac{\arg(-\eta_i^{(k)}(t))+2\pi(j-1)}{p_i}+i\sin\frac{\arg(-\eta_i^{(k)}(t))+2\pi(j-1)}{p_i}\right), \tag{3.142}$$

$k=\overline{1,r_i}, j=\overline{1,p_i}$, а із рівняння (3.140) знайдемо r_i відповідних векторів $y_i^{(0)}(t)$:

$$y_i^{(0)}(t)=\varphi_k^*(t), k=\overline{1,r_i}, \tag{3.143}$$

де $\varphi_k^*(t)$ – власні вектор матриці $\overline{D}_i(t)-D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)$, які відповідають власним значенням $\varphi_k^*(t), k=\overline{1,r_i}$. Визначивши вектори $y_i^{(0)}(t)$, за формулою (3.139) знайдемо вектори $\overline{y}^{(0)}(t)$, а потім – за формулою (3.134) – вектор $y^{(0)}(t)$. Враховуючи (3.121), дістанемо вектори $u^{(0)}(t)$. Потім за формулою (3.137) визначимо вектори $y_l^{(p_i-p_l)}(t), l=\overline{i+1,\alpha}$:

$$y_l^{(p_i-p_l)}(t)=-\frac{1}{\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_l}}\left(Q_lKy_i^{(0)}(t)+Q_lK\overline{y}^{(0)}(t)\right), l=\overline{i+1,\alpha}. \tag{3.144}$$

Таким чином, функції $\lambda^{(1)}(t)$, вектори $u^{(0)}(t)$ та $y_l^{(p_i-p_l)}(t), l=\overline{i+1,\alpha}$, знайдено.

Інші коефіцієнти розвинень (3.35), (3.36) будемо визначати рекурентно. Зафіксуємо одну з функцій $\lambda^{(1)}(t)$ і відповідний вектор $y_i^{(0)}(t)$, які знаходяться за формулами (3.142), (3.143). Відповідне власне значення та власний вектор матриці $\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)$ позначимо через $\eta_i(t)$ і $\varphi^*(t)$. Припустимо, що функції $\lambda^{(j+1)}(t)$ і вектор-функції $u^{(j)}(t)$ при $j < r$ вже відомі. Тоді для визначення функції $\lambda^{(r+1)}(t)$ та вектора $u^{(r)}(t)$ використаємо умову (3.120) при $s = p_i+r$, тобто:

$$Q_l a_i^{(p_i+r)}(t) = 0, l = \overline{1,\alpha}.$$

Враховуючи (3.131), (3.133), матимемо

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{p_i+r-1}\sum_{j=1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{p_i+r-1}\sum_{j=1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i+r-1}\sum_{j=1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)Q_l\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t) + Q_l g_i^{(p_i+r)}(t) = 0, l = \overline{1,\alpha}.$$

Взявши до уваги властивості (3.128) – (3.131) операторів проектування Q_l, $l = \overline{1,\alpha}$, дістанемо

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\times$$

$$\times y_n^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)Q_l\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)+Q_l g_i^{(p_i+r)}(t)=0, \tag{3.145}$$

$l = \overline{1,i-1}$;

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_i\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_i\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)y_i^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_i\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)\times$$

$$\times y_n^{(k)}(t)-P_{p_i}^{(p_i)}(\lambda)y_i^{(r)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)Q_i\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\dots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)+$$

$$+Q_ig_i^{(p_i+r)}(t)=0; \qquad (3.146)$$

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)y_i^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\dots,H_m)\times$$

$$\times y_n^{(k)}(t)-P_{p_l}^{(p_l)}(\lambda)y_l^{(p_i-p_l+r)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)Q_l\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\dots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)+$$

$$+Q_lg_i^{(p_i+r)}(t)=0, l=\overline{i+1,\alpha}. \qquad (3.147)$$

Дослідимо спочатку рівняння (3.145). Спираючись на попередні викладки, можемо записати

$$g_i^{(p_i+r)}(t)=-K(t)y^{(r)}(t)+\widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t),$$

де $\widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t)$ – вже відомий вектор. Вектор $y^{(r)}(t)$ подамо у вигляді

$$y^{(r)}(t)=\overline{y}^{(r)}(t)+y_i^{(r)}(t)+\sum_{n=i+1}^{\alpha} y_n^{(r)}(t), \qquad (3.148)$$

де

$$\overline{y}^{(r)}(t)=\sum_{n=1}^{i-1} y_n^{(r)}(t),$$

і вектори $y_n^{(r)}(t), n=\overline{i+1,\alpha}$, вже відомі згідно з формулою (3.133). Отже,

$$g_i^{(p_i+r)}(t)=-K(t)\overline{y}^{(r)}(t)-K(t)y_i^{(r)}(t)-\sum_{n=i+1}^{\alpha}K(t)y_n^{(r)}(t)+\widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t).$$

Підставивши цей вираз у (3.145), дістанемо

$$Q_lK\overline{y}^{(r)}(t)+Q_lKy_i^{(r)}(t)=Q_lY^{(r)}(t), l=\overline{1,i-1},$$

де

$$Y^{(r)}(t)=-\sum_{n=1}^{i}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)}P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}K(t)y_n^{(r)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)+\widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t).$$

Ці рівняння еквівалентні одному рівнянню

$$\sum_{l=1}^{i-1}Q_lK\overline{y}^{(r)}(t)+\sum_{l=1}^{i-1}Q_lKy_i^{(r)}(t)=\sum_{l=1}^{i-1}Q_lY^{(r)}(t).$$

Використавши введені вище позначення, запишемо його у вигляді

$$\overline{\mathfrak{K}}_i\overline{y}^{(r)}(t)+\mathfrak{K}_iy_i^{(r)}(t)=\sum_{l=1}^{i-1}Q_lY^{(r)}(t).$$

Перейшовши в базиси підпросторів $E_{01}\oplus E_{02}\oplus\cdots\oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i}, з нього отримаємо

$$\overline{y}^{(r)}(t)=-\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)y_i^{(r)}(t)+\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t), \qquad (3.149)$$

де

$$\widetilde{Y}^{(r)}(t)=\sum_{l=1}^{i-1}Q_lY^{(r)}(t).$$

Розглянемо тепер рівняння (3.146). Враховуючи проороблені вище викладки, запишемо його у вигляді

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i}y_i^{(r)}(t)+\overline{D}_iy_i^{(r)}(t)+D_i\overline{y}^{(r)}(t)=-P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)y_i^{(0)}(t)+Q_iZ^{(r)}(t),$$

де

$$Z^{(r)}(t) = -\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(0)}(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{j=p_i}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_i^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j} P_\gamma^{(r-j)}(\lambda)\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t) - \sum_{n=i+1}^{\alpha} K(t)y_n^{(r)}(t) + \widetilde{g}_i^{(p_i+r)}(t)$$

– вже відомий вектор.

У базисах підпросторів $E_{01}\oplus E_{02}\oplus\cdots\oplus E_{0,i-1}$ та E_{0i}, це рівняння набуває вигляду

$$\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} y_i^{(r)}(t) + \overline{D}_i(t)y_i^{(r)}(t) + D_i(t)\overline{y}^{(r)}(t) = -P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)y_i^{(0)}(t) + \widetilde{Z}^{(r)}(t),$$

де

$$\widetilde{Z}^{(r)}(t) = Q_i Z^{(r)}(t).$$

Врахувавши (3.149) і взявши до уваги, що $-\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i} = \eta_i(t)$, а $y_i^{(0)}(t) = \varphi^*(t)$, звідси дістанемо

$$\left(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) - \eta_i(t)E_{r_i}\right)y_i^{(r)}(t) = -P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)\varphi^*(t) + \widetilde{Z}^{(r)}(t)-$$

$$-D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t). \tag{3.150}$$

Це рівняння розв'язне відносно вектора $y_i^{(r)}(t)$ тоді і тільки тоді, коли його права частина буде ортогональна до вектора $\psi^*(t)$:

$$-P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)\left(\varphi^*(t),\psi^*(t)\right) + \left(\widetilde{Z}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) - \left(D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t),\psi^*(t)\right) = 0,$$

де $\psi^*(t)$ – елемент нуль-простору матриці

$$\left(\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) - \eta_i(t)E_{r_i}\right)^*.$$

Оскільки згідно з умовою 3.13° власне значення $\eta_i(t)$ матриці

$$\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t)$$

просте, то йому відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1. Тому, вектор $\psi^*(t)$ виберемо так, щоб виконувалася рівність

$$(\varphi^*(t), \psi^*(t)) = 1, \forall t \in [0;T].$$

Враховуючи її, в результаті отримаємо

$$P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda) = \left(\widetilde{Z}^{(r)}(t), \psi^*(t)\right) - \left(D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t), \psi^*(t)\right).$$

Оскільки $P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda) = p_i\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i-1}\lambda^{(r+1)}(t) + \widetilde{P}_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)$, де $\widetilde{P}_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)$ – та частина виразу $P_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)$, яка містить лише ті $\lambda^{(i)}(t)$, індекси яких $i \le r$, то з останнього рівняння знайдемо невідому функцію $\lambda^{(r+1)}(t)$:

$$\lambda^{(r+1)}(t) = \frac{\left(\widetilde{Z}^{(r)}(t), \psi^*(t)\right) - \left(D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)\widetilde{Y}^{(r)}(t), \psi^*(t)\right) - \widetilde{P}_{p_i}^{(p_i+r)}(\lambda)}{p_i\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_i-1}}. \quad (3.151)$$

При знайденій функції $\lambda^{(r+1)}(t)$ рівняння (3.150) буде розв'язним, і з нього знайдемо

$$y_i^{(r)}(t) = \left[\overline{D}_i(t) - D_i(t)\overline{K}_i^{-1}(t)K_i(t) - \eta_i(t)E_{r_i}\right]^+ \widetilde{f}_i^{(r)}(t), \quad (3.152)$$

де $\widetilde{f}_i^{(r)}(t)$ – права частина рівняння (3.150). Потім за формулою (3.149) знайдемо вектор $\overline{y}^{(r)}(t)$, а за формулою (3.148) – $y^{(r)}(t)$. Визначивши вектор $y^{(r)}(t)$, за формулою (3.122) знайдемо вектор $u^{(r)}(t)$. Потім із системи рівнянь (3.147) знайдемо вектори $y_l^{(p_i-p_l+r)}(t), l = \overline{i+1, \alpha}$:

$$y_l^{(p_i-p_l+r)}(t) = \frac{-1}{\left(\lambda^{(1)}(t)\right)^{p_l}}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,\ldots,H_m)\times\right.$$

$$\times y_i^{(k)}(t) + \sum_{n=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=p_i+1}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)+$$

$$+\sum_{n=i+1}^{\alpha}\sum_{k=p_i-p_n}^{p_i-p_n+r-1}\sum_{j=p_n}^{p_i+r-k}\sum_{\gamma=1}^{\min(j;m)} P_j^{(p_i+r-k)}(\lambda)Q_l\frac{\partial^\gamma P(t,\lambda_0(t))}{\gamma!\partial\lambda^\gamma}\sigma^{j-\gamma+1}(H_1,H_2,\ldots,H_m)y_n^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\gamma=1}^{r-j}P_{\gamma}^{(r-j)}(\lambda)Q_l\sigma^{\gamma+1}(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\ldots,\widetilde{H}_m)g_i^{(p_i+j)}(t)-Q_lg_i^{(p_i+r)}(t)\Bigg), l=\overline{i+1,\alpha}. \quad (3.153)$$

Отже, ітераційний процес проходить. Згідно з формулою (3.142) подібним чином можна побудувати r_ip_i формальних розв'язків системи (3.3), які відповідають r_i скінченним елементарним дільникам кратності p_i в'язки матриць $P(t,\lambda)$. Змінюючи i від 1 до α, за виконання умови 3.13°, побудуємо $r_1p_1+r_2p_2+\cdots+r_\alpha p_\alpha$ формальних розв'язків системи (3.3). Виконання умови (3.138$'$) тепер випливає з 3.13°.

Аналогічно побудуємо $s_1q_1+\cdots+s_\beta q_\beta$ розв'язків вигляду (3.58), що відповідають нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, поклавши у відповідних розвиненнях (3.59), (3.60) $\nu=\sqrt[q_i]{\varepsilon}$, $i=\overline{1,\beta}$. При цьому накладається умови:

3.14°. Рівняння

$$\det\left(\left\|\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}_l(t),\widetilde{\psi}_k(t)\right)\right\|_1^{s_1+\cdots+s_i}-\theta_i\Lambda_{s_i}\right)=0, i=\overline{1,\beta}$$

мають лише прості відмінні від нуля корені.

Через $\widetilde{\varphi}_l(t)$, $\widetilde{\psi}_k(t)$ в цих умовах позначено базисні елементи нуль-просторів матриць $A_m^{(0)}(t)$ та $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$ відповідно, $\Lambda_{s_i}=\mathrm{diag}\{0,E_{s_i}\}$, $i=\overline{1,\beta}$.

Підсумовуючи викладене, приходимо до такої теореми.

Теорема 3.4. Якщо виконуються умови 3.1° – 3.3°, 3.12° – 3.14°, то на відрізку $[0;T]$ система диференціальних рівнянь (3.3) має $r_1p_1+r_2p_2+\cdots+r_\alpha p_\alpha$ формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\mu)=u_i(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right), i=\overline{1,r_1p_1+\cdots+r_\alpha p_\alpha},$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (3.5), і $s_1q_1+s_2q_2+\cdots+s_\beta q_\beta$ розв'язків вигляду

$$x_j(t,\nu)=v_j(t,\nu)\exp\left(\nu^{-q_sh-1}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\nu)}\right), j=\overline{1,s_1q_1+\cdots+s_\beta q_\beta},$$

які відповідають нескінченним елементарним дільникам цієї в'язки, де $u_i(t,\mu)$ та $v_j(t,\nu)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\mu)$ та $\xi_j(t,\nu)$ – скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень (3.59), (3.60).

Формальні розв'язки, які будуються за вказаним алгоритмом, лінійно незалежні в тому розумінні, що такими будуть l – наближення, утворені шляхом обривання розвинень (3.33), (3.34), (3.56), (3.57) на l -му члені, якщо $l \geq \max(p_1 - 1, q_1 - 1)$. Тому їх лінійна комбінація буде загальним формальним розв'язком системи (3.3).

Зазначимо, що з теореми 3.4, як наслідок, випливає аналогічна теорема, сформульована без доведення в [101], для випадку, коли $m = 2$.

3.3. Побудова частинного формального розв'язку неоднорідної системи

Дослідимо можливість побудови асимптотики частинного розв'язку системи рівнянь (3.1). Розглядатимемо два випадки: нерезонансний і резонансний. У нерезонансному випадку справджується наступна теорема.

Теорема 3.5. Якщо виконуються умови 3.1° – 3.3° і функція $\alpha(t)$ в жодній точці відрізка $[0; T]$ не дорівнює власному значенню в'язки матриць (3.5), то система рівнянь (3.1) має на цьому відрізку формальний розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon) = \omega(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \tag{3.154}$$

де $\omega(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, який зображується формальним розвиненням за степенями ε:

$$\omega(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \omega^{(s)}(t). \tag{3.155}$$

Доведення. Використовуючи формулу (3.9), підставимо вектор (3.154) в систему рівнянь (3.1). У результаті дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{(k-j)h} C_k^i D_{i-j}[\alpha^j] A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}\omega(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} = f(t,\varepsilon).$$

Підставивши в цю рівність (3.2), (3.155) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, матимемо

$$P(t,\alpha(t))\omega^{(0)}(t) = f^{(0)}(t);$$

$$P(t,\alpha(t))\omega^{(s)}(t) = -\sum_{\gamma=1}^{s} \Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(s-\gamma)}(t) + f^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots,$$

де $\Gamma_0^{(\gamma)}(t), \gamma = 1, 2, \ldots,$ – операторні функції, які визначаються виразами

$$\Gamma_0^{(\gamma)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha^k(t) A_k^{(\gamma)}(t) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{m-i+1} C_{i+k-1}^{i+k-j-1} D_{i-j}[\alpha^{k-1}] A_{i+k-1}^{(\gamma-ih)}(t) \frac{d^j}{dt^j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-i} D_i[\alpha^j] A_{i+j}^{(\gamma-ih)}(t), \gamma = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $\det P(t, \alpha(t)) \neq 0, \forall t \in [0; T]$, то звідси дістанемо такі рекурентні формули для визначення коефіцієнтів розвинень (3.155):

$$\omega^{(0)}(t) = P^{-1}(t, \alpha(t)) f^{(0)}(t);$$

$$\omega^{(s)}(t) = -\sum_{\gamma=1}^{s} P^{-1}(t, \alpha(t)) \Gamma_0^{(\gamma)}(t) \omega^{(s-\gamma)}(t) + P^{-1}(t, \alpha(t)) f^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots.$$

Теорему доведено.

У резонансному випадку має місце теорема.

Теорема 3.6. Нехай виконуються умови 3.1° – 3.3° і в'язка матриць (3.5) має на відрізку $[0; T]$ власне значення $\lambda_0(t)$ кратністю p, якому відповідає скінченний елементарний дільник такої самої кратності, причому $\lambda_0(t) = \alpha(t)$, $\forall t \in [0; T]$. Тоді, якщо виконуються умова

$$\left(\Gamma_0^{(1)}(t) \varphi(t), \psi(t) \right) \neq 0, \forall t \in [0; T],$$

де $\varphi(t)$ – відповідний власний вектор в'язки матриць (3.5), а $\psi(t)$ – елемент нуль-простору матриці $P^*(t, \alpha(t))$, то система рівнянь (3.1) має формальний розв'язок вигляду

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \omega(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right), \tag{3.156}$$

де $\omega(t, \varepsilon)$ – n-вимірний вектор, який зображується формальним розвиненням (3.155).

Доведення. Підставивши вектор (3.156), а потім розвинення (3.2), (3.155) в систему рівнянь (3.1) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, матимемо

$$P(t, \alpha(t)) \omega^{(0)}(t) = 0; \tag{3.157}$$

$$P(t, \alpha(t)) \omega^{(s)}(t) = -\sum_{\gamma=1}^{s} \Gamma_0^{(\gamma)}(t) \omega^{(s-\gamma)}(t) + f^{(s-1)}(t), s = 1, 2, \ldots. \tag{3.158}$$

Покажемо, що із систем (3.157), (3.158) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинення (3.155). Оскільки $\det P(t, \alpha(t)) \equiv 0$, то з рівняння (3.157) отримаємо

$$\omega^{(0)}(t) = c_0(t)\varphi(t), \tag{3.159}$$

де $c_0(t)$ – нескінченно диференційовна скалярна функція, яку визначимо далі. Для того, щоб рівняння (3.158) були розв'язними, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$-\sum_{\gamma=1}^{s}\left(\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(s-\gamma)}(t), \psi(t)\right) + \left(f^{(s-1)}(t), \psi(t)\right) = 0, s = 1, 2, \ldots. \tag{3.160}$$

За виконання цієї умови вектори $\omega^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots$, знаходитимемо за формулою

$$\omega^{(s)}(t) = -\sum_{\gamma=1}^{s} H(t)\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(s-\gamma)}(t) + H(t)f^{(s-1)}(t) + c_s(t)\varphi(t), s = 1, 2, \ldots, \tag{3.161}$$

де $H(t)$ – матриця, напівобернена до матриці $P(t, \alpha(t))$, яку визначимо так, щоб виконувались включення $H(t) \in C^\infty[0; T]$, а $c_s(t)$ – нескінченно диференційовні скалярні функції, які необхідно знайти.

Для знаходження останніх використаємо умову (3.160). При $s = 1$ вона запишеться у вигляді

$$\left(\Gamma_0^{(1)}(t)c_0(t)\varphi(t), \psi(t)\right) = \left(f^{(0)}(t), \psi(t)\right).$$

Скориставшись формулою

$$\Gamma_0^{(1)}(t)c_0(t) = c_0(t)\Gamma_0^{(1)}(t) + \delta_{1,h}\frac{dc_0(t)}{dt}\frac{\partial P(t, \alpha(t))}{\partial \lambda}, \tag{3.162}$$

звідси дістанемо

$$c_0(t)\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t), \psi(t)\right) + \delta_{1,h}\frac{dc_0(t)}{dt}\left(\frac{\partial P(t, \alpha(t))}{\partial \lambda}\varphi(t), \psi(t)\right) = \left(f^{(0)}(t), \psi(t)\right).$$

Оскільки $\alpha(t)$ є кратним власним значенням в'язки матриць (3.5), якому відповідає скінченний елементарний дільник такої самої кратності, то

$$\left(\frac{\partial P(t, \alpha(t))}{\partial \lambda}\varphi(t), \psi(t)\right) = 0,$$

тому останнє рівняння набуде вигляду

$$c_0(t)\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)=\left(f^{(0)}(t),\psi(t)\right),$$

звідки

$$c_0(t)=\frac{\left(f^{(0)}(t),\psi(t)\right)}{\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)}.$$

Знайшовши функцію $c_0(t)$ за формулою (3.159) однозначно визначимо і вектор $\omega^{(0)}(t)$.

Інші коефіцієнти розвинень (3.155) визначаються рекурентним чином. Припустимо, що функції $\omega^{(i)}(t)$ при $i<k$ уже відомі. Тоді згідно з (3.161)

$$\omega^{(k)}(t)=-\sum_{\gamma=1}^{k}H(t)\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k-\gamma)}(t)+H(t)f^{(k-1)}(t)+c_k(t)\varphi(t).$$

Підставивши цей вираз у рівність (3.160), поклавши $s=k+1$, маємо

$$\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\omega^{(k)}(t),\psi(t)\right)=\left(f^{(k)}(t),\psi(t)\right)-\sum_{\gamma=2}^{k+1}\left(\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k+1-\gamma)}(t),\psi(t)\right)$$

або

$$\left(\Gamma_0^{(1)}(t)c_k(t)\varphi(t),\psi(t)\right)=\left(f^{(k)}(t),\psi(t)\right)-\sum_{\gamma=2}^{k+1}\left(\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k+1-\gamma)}(t),\psi(t)\right)+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{k}\left(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k-\gamma)}(t),\psi(t)\right)-\left(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)f^{(k-1)}(t),\psi(t)\right).$$

Врахувавши (3.162), дістанемо

$$c_k(t)\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)+\delta_{1,h}\frac{dc_k(t)}{dt}\left(\frac{\partial P(t,\alpha(t))}{\partial\lambda}\varphi(t),\psi(t)\right)=\left(f^{(k)}(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{\gamma=2}^{k+1}\left(\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k+1-\gamma)}(t),\psi(t)\right)+\sum_{\gamma=1}^{k}\left(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k-\gamma)}(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\left(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)f^{(k-1)}(t),\psi(t)\right).$$

Оскільки $\left(\frac{\partial P(t,\alpha(t))}{\partial\lambda}\varphi(t),\psi(t)\right)=0$, а $\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)\neq 0$, то звідси знайдемо

$$c_k(t)=\frac{1}{\left(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)}\Bigg(\left(f^{(k)}(t),\psi(t)\right)-\sum_{\gamma=2}^{k+1}\left(\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k+1-\gamma)}(t),\psi(t)\right)-$$

$$
-\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)f^{(k-1)}(t),\psi(t)\Big)+\sum_{\gamma=1}^{k}\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(\gamma)}(t)\omega^{(k-\gamma)}(t),\psi(t)\Big)\Bigg).
$$

Визначивши функцію $c_k(t)$, за формулою (3.161) знайдемо вектор $\omega^{(k)}(t)$. Ітераційний процес проходить. Користуючись ним, можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (3.155).

Теорему доведено.

Якщо $\lambda_0(t)=\alpha(t)$ – просте власне значення в'язки матриць (3.5) і $h=1$, то частинний формальний розв'язок неоднорідної системи (3.1) знаходиться за алгоритмом, викладеним вище, але невідомі функції $c_s(t)$, $s=0,1,\ldots,$ визначатимуться вже не з алгебраїчних рівнянь, а із лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

3.4. Асимптотичні властивості формальних розв'язків

Покажемо, що побудовані вище формальні розв'язки систем рівнянь (3.1), (3.3) є асимптотичними розвиненнями точних розв'язків цих систем.

Спочатку розглянемо формальні розв'язки системи (3.3), які будуються за теоремою 3.1 у випадку, коли гранична в'язка матриць (3.5) має простий спектр. Згідно з цією теоремою система рівнянь (3.3) має $mn-1$ формальних розв'язоків вигляду

$$
x_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), i=\overline{1,mn-1},
$$

які відповідають скінченним елементарним дільникам в'язки (3.5), і один розв'язок вигляду

$$
x(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right),
$$

що відповідає нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки. Позначимо через

$$
x_i^{(l)}(t,\varepsilon)=u_i^{(l)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\lambda_i^{(l)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), i=\overline{1,mn-1},
$$

$$
x^{(l)}(t,\varepsilon)=v^{(l)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\xi^{(l)}(\tau,\varepsilon)}\right),
$$

l-наближення, які утворюються з формальним розв'язків $x(t,\varepsilon)$, $x_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, завдяки обриванню розвинень (3.7), (3.8), (3.21), (3.22) на l-му члені:

$$\lambda_i^{(l)}(t,\varepsilon)=\lambda_i(t)+\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^s\lambda_i^{(s)}(t), u_i^{(l)}(t,\varepsilon)=\varphi_i(t)+\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^s u_i^{(s)}(t), i=\overline{1,mn-1};$$

$$\xi^{(l)}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{l}\varepsilon^s\xi^{(s)}(t), v^{(l)}(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)+\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^s v^{(s)}(t).$$

Дійсною є така теорема.

Теорема 3.7. Якщо виконуються умови 3.1° – 3.5° і функції

$$Re\left(\lambda_i(t)+\sum_{s=1}^{h-1}\varepsilon^s\lambda_i^{(s)}(t)\right), \sum_{s=0}^{h}\varepsilon^s Re\xi^{(s)}(t), i=\overline{1,mn-1}, \tag{3.163}$$

не змінюють знак на відрізку $[0;T]$, то на цьому відрізку для формальних розв'язків $x_i(t,\varepsilon), x(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, системи (3.3) існують такі точні розв'язки $\widetilde{x}_i(t,\varepsilon), \widetilde{x}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, цієї системи, для яких дані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon\to 0$. Для будь-якого натурального l і достатньо малих ε виконуються наступні нерівності:

$$\left\|x_i^{(l)}(t,\varepsilon)-\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)\right\|\le c\varepsilon^{l-h}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{s=1}^{h-1}\varepsilon^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_i^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\le c\varepsilon^{l-(k+1)h}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{s=1}^{h-1}\varepsilon^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right), \tag{3.164}$$

$i=\overline{1,mn-1}, k=\overline{1,m-1}$, – для розв'язків, які відповідають скінченним елементарним дільникам, і

$$\left\|x^{(l)}(t,\varepsilon)-\widetilde{x}(t,\varepsilon)\right\|\le c\varepsilon^{l-h-1}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{h}\varepsilon^s Re\xi^{(s)}(\tau)}{\left|\xi^{(l)}(\tau,\varepsilon)\right|^2}d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\le c\varepsilon^{l-(k+1)h-1}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{h}\varepsilon^s Re\xi^{(s)}(\tau)}{\left|\xi^{(l)}(\tau,\varepsilon)\right|^2}d\tau\right), \tag{3.165}$$

$k=\overline{1,m-1}$, – для розв'язку, що відповідає нескінченному елементарному дільнику, де c – стала, яка не залежить від ε.

Доведення. Зведемо систему рівнянь (3.3) до еквівалентної системи першого порядку. Для цього зробимо в ній заміну

$$y_i = \varepsilon^{(i-1)h}\frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}, i = \overline{1,m}.$$

У результаті дістанемо

$$\varepsilon^h \widetilde{B}(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)y, \tag{3.166}$$

де

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} 0 & E_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_n \\ -A_0(t,\varepsilon) & -A_1(t,\varepsilon) & -A_2(t,\varepsilon) & \dots & -A_{m-2}(t,\varepsilon) & -A_{m-1}(t,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{E_n, \dots, E_n, A_m(t,\varepsilon)\}, y = \mathrm{col}\left[y_1, y_2, \dots, y_m\right].$$

Покажемо, що умови теореми 3.7 забезпечують виконання умов теореми 4.9 із [85, с. 135] для системи (3.166). Для цього запишемо формули, які пов'язують відповідні l-наближення та точні розв'язки систем (3.3) і (3.166):

$$y_i^{(l)}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[x_i^{(l)}(t,\varepsilon), \varepsilon^h\frac{dx_i^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt}, \dots, \varepsilon^{(m-1)h}\frac{d^{m-1}x_i^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^{m-1}}\right], i = \overline{1,mn-1},$$

$$y^{(l)}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[x^{(l)}(t,\varepsilon), \varepsilon^h\frac{dx^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt}, \dots, \varepsilon^{(m-1)h}\frac{d^{m-1}x^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^{m-1}}\right],$$

$$\widetilde{y}_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[\widetilde{x}_i(t,\varepsilon), \varepsilon^h\frac{d\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)}{dt}, \dots, \varepsilon^{(m-1)h}\frac{d^{m-1}\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)}{dt^{m-1}}\right], i = \overline{1,mn-1},$$

$$\widetilde{y}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[\widetilde{x}(t,\varepsilon), \varepsilon^h\frac{d\widetilde{x}(t,\varepsilon)}{dt}, \dots, \varepsilon^{(m-1)h}\frac{d^{m-1}\widetilde{x}(t,\varepsilon)}{dt^{m-1}}\right],$$

де $y_i^{(l)}(t,\varepsilon), y^{(l)}(t,\varepsilon), i = \overline{1,mn-1},$ – l-наближення розв'язків системи (3.166), а $\widetilde{y}_i(t,\varepsilon)$, $\widetilde{y}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,mn-1},$ – її точні розв'язки. l-наближення розв'язків системи (3.166) можна представити у вигляді

$$y_i^{(l)}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[u_i^{(l)}(t,\varepsilon), \varepsilon^h\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{-jh}C_1^k D_{k-j}\left[\left(\lambda_i^{(l)}\right)^j\right]\frac{d^{1-k}u_i^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^{1-k}}, \dots,\right.$$

$$\varepsilon^{(m-1)h}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{-jh}C_{m-1}^{k}D_{k-j}\left[\left(\lambda_i^{(l)}\right)^j\right]\frac{d^{m-1-k}u_i^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^{m-1-k}}\Bigg]\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_i^{(l)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right),$$

$i=\overline{1,mn-1}$,

$$y^{(l)}(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\Bigg[v^{(l)}(t,\varepsilon),\varepsilon^h\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{-(h+1)j}C_1^kD_{k-j}\left[\left(\xi^{(l)}\right)^{-j}\right]\frac{d^{1-k}v^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^{1-k}},\ldots,$$

$$\varepsilon^{(m-1)h}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{-(h+1)j}C_{m-1}^{k}D_{k-j}\left[\left(\xi^{(l)}\right)^{-j}\right]\frac{d^{m-1-k}v^{(l)}(t,\varepsilon)}{dt^{m-1-k}}\Bigg]\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\xi^{(l)}(\tau,\varepsilon)}\right).$$

Враховуючи структуру матриць $\widetilde{A}(t,\varepsilon)$, $\widetilde{B}(t,\varepsilon)$ та вектора $y(t,\varepsilon)$, з умов 3.1° – 3.3°, 3.5° теореми 3.7 одразу випливає виконання умов 1 – 3 та (4.11) теореми 4.9 з [85, с. 135]. Покажемо, що з умови 3.4°, зазначеної в теоремі 3.7, також випливає, що лінійна в'язка матриць $\widetilde{A}^{(0)}(t)-\lambda\widetilde{B}^{(0)}(t)$ системи (3.166) регулярна при всіх $t\in[0;T]$ і має тільки прості елементарні дільники: $mn-1$ – скінченних, і один – нескінченний. Для цього розглянемо рівняння

$$\det\left(\widetilde{A}^{(0)}(t)-\lambda\widetilde{B}^{(0)}(t)\right)=0.$$

Застосувавши до визначника в лівій частині цього рівняння еквівалентні перетворення (див. доведення теореми 2.1) і врахувавши структуру матриць $\widetilde{A}(t,\varepsilon)$, $\widetilde{B}(t,\varepsilon)$, встановимо, що воно еквівалентне рівнянню

$$\det P(t,\lambda)=0.$$

Оскільки згідно з умовою 3.4° останнє має $mn-1$ простих коренів

$$\lambda=\lambda_i(t), i=\overline{1,mn-1},$$

при всіх $t\in[0;T]$, то в'язка матриць $\widetilde{A}^{(0)}(t)-\lambda\widetilde{B}^{(0)}(t)$ регулярна на відрізку $[0;T]$ і має на $[0;T]$ $mn-1$ простих власних значень. Тому згідно з теоремою 2.1 та умовою 3.3° ця в'язка має $mn-1$ простих скінченних елементарних дільників і один – нескінченний. Крім того, з умови (3.163) теореми 3.7 випливає умова (4.273) теореми 4.9 із [85, с. 135].

Таким чином, система (3.166) задовольняє умови теореми 4.9 із [64, с. 135], Тому, для формальних розв'язків $y_i^{(l)}(t,\varepsilon)$, $y^{(l)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, системи рівнянь (3.166) існують такі точні розв'язки $\widetilde{y}_i(t,\varepsilon)$, $\widetilde{y}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, що при будь-якому натуральному l і досить малих ε виконуються нерівності:

$$\left\|y_i^{(l)}(t,\varepsilon)-\widetilde{y}_i(t,\varepsilon)\right\|\leq c\varepsilon^{l-h}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{s=1}^{h-1}\varepsilon^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right), i=\overline{1,mn-1},$$

$$\left\|y^{(l)}(t,\varepsilon)-\widetilde{y}(t,\varepsilon)\right\|\leq c\varepsilon^{l-h-1}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{h}\varepsilon^s Re\xi^{(s)}(\tau)}{\left|\xi^{(l)}(\tau,\varepsilon)\right|^2}d\tau\right),$$

де c – стала, що не залежить від ε.

Враховуючи зв'язок між точними та формальними розв'язками систем (3.3) та (3.166), можемо зробити висновок: для формальних l-наближень $x_i^{(l)}(t,\varepsilon)$, $x^{(l)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, системи рівнянь (3.3) існують такі точні розв'язки $\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)$, $\widetilde{x}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,mn-1}$, що при будь-якому натуральному l і досить малих ε виконуються нерівності (3.164), (3.165).

Теорему доведено.

Аналогічним чином, використовуючи результати робіт [58,85], можна довести асимптотичний характер формальних розв'язків однорідної системи (3.3), побудованих за теоремами 3.2, 3.3, 3.4 у випадку кратних скінченних і нескінченних елементарних дільників в'язки матриць (3.5). Дійсними є такі теореми.

Теорема 3.8. Якщо виконуються умови теореми 3.2 і функції

$$Re\left(\lambda_0(t)+\sum_{s=1}^{ph-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(t)\right), i=\overline{1,p}, \sum_{s=0}^{qh}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(t), j=\overline{1,q},$$

не змінюють знак на відрізку $[0;T]$, то на цьому відрізку для формальних розв'язків $x_i(t,\mu)$, $i=\overline{1,p}$, $x_j(t,\nu)$, $j=\overline{1,q}$, системи (3.3), які будуються за цією теоремою, існують такі точні розв'язки $\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,p}$, $\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,q}$, цієї системи, для яких дані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon\to 0$. Для будь-якого натурального l і достатньо малих ε виконуються нерівності:

$$\left\|x_i^{(l)}(t,\mu)-\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)\right\|\leq c\mu^{l-ph}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}!exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{ph-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_i^{(l)}(t,\mu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\leq c\mu^{l-(k+p)h}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{ph-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$i=\overline{1,p}, k=\overline{1,m-1}$, – для розв'язків, які відповідають кратному скінченному елементарному дільнику, і

$$\left\|x_j^{(l)}(t,\nu)-\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)\right\|\leq c\nu^{l-qh-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{qh}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_j^{(l)}(t,\nu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\leq c\nu^{l-(k+q)h-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{qh}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$j=\overline{1,q}, k=\overline{1,m-1}$, – для розв'язків, що відповідають нескінченному елементарному дільнику, де $x_i^{(l)}(t,\mu)$, $x_j^{(l)}(t,\nu)$ – відповідні l-наближення, c – стала, яка не залежить від ε, $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu=\sqrt[q]{\varepsilon}$, $\delta=\max(p,q)$.

Теорема 3.9. Якщо виконуються умови теореми 3.3 і функції

$$Re\left(\lambda_0(t)+\sum_{s=1}^{ph-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(t)\right), i=\overline{1,pr}, \sum_{s=0}^{qh}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(t), j=\overline{1,qs},$$

не змінюють знак на відрізку $[0;T]$, то на цьому відрізку для формальних розв'язків $x_i(t,\mu)$, $i=\overline{1,pr}$, $x_j(t,\nu)$, $j=\overline{1,qs}$, системи (3.3), які будуються за вказаною теоремою, існують такі точні розв'язки $\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,pr}$, $\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,qs}$, цієї системи, для яких дані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon\to 0$. Для будь-якого натурального l і достатньо малих ε виконуються наступні нерівності:

$$\left\|x_i^{(l)}(t,\mu)-\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)\right\|\leq c\mu^{l-ph}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{ph-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_i^{(l)}(t,\mu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\leq c\mu^{l-(k+p)h}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{ph-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$i=\overline{1,pr}, k=\overline{1,m-1}$, – для розв'язків, які відповідають кратним скінченним елементарним дільникам, і

$$\left\|x_j^{(l)}(t,\nu)-\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)\right\|\leq c\nu^{l-qh-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{qh}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_j^{(l)}(t,\nu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\leq c\nu^{l-(k+q)h-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-qh-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{qh}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$j=\overline{1,qs}, k=\overline{1,m-1}$, – для розв'язків, що відповідають нескінченним елементарним дільникам, де c – стала, яка не залежить від ε, $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu=\sqrt[q]{\varepsilon}$, $\delta=\max(p,q)$.

Теорема 3.10. Якщо виконуються умови теореми 3.4 і функції

$$Re\left(\lambda_0(t)+\sum_{s=1}^{p_\gamma h-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(t)\right), i=\overline{1,p_\gamma r_\gamma}, \gamma=\overline{1,\alpha}, \sum_{s=0}^{q_\gamma h}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(t), j=\overline{1,q_\gamma s_\gamma}, \gamma=\overline{1,\beta},$$

не змінюють знак на відрізку $[0;T]$, то на цьому відрізку для формальних розв'язків $x_i(t,\mu)$, $i=\overline{1,p_\gamma r_\gamma}, \gamma=\overline{1,\alpha}$, $x_j(t,\nu)$, $j=\overline{1,q_\gamma s_\gamma}, \gamma=\overline{1,\beta}$, системи (3.3) існують такі точні розв'язки $\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,p_\gamma r_\gamma}, \gamma=\overline{1,\alpha}$, $\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,q_\gamma s_\gamma}, \gamma=\overline{1,\beta}$, цієї системи, для яких дані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon\to 0$. Для будь-якого натурального l і достатньо малих ε виконуються наступні нерівності:

$$\left\|x_i^{(l)}(t,\mu)-\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)\right\|\leq c\mu^{l-p_\gamma h}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{p_\gamma h-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_i^{(l)}(t,\mu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_i(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\leq c\mu^{l-(k+p_\gamma)h}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}Re\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{p_\gamma h-1}\mu^s\lambda_i^{(s)}(\tau)\right)d\tau\right),$$

$i=\overline{1,p_\gamma r_\gamma}$, $\gamma=\overline{1,\alpha}, k=\overline{1,m-1}$, для розв'язків, які відповідають кратним скінченним елементарним дільникам, і

$$\left\|x_j^{(l)}(t,\nu)-\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)\right\|\leq c\nu^{l-q_\gamma h-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-q_\gamma h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{q_\gamma h}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_j^{(l)}(t,\nu)}{dt^k}-\frac{d^k\widetilde{x}_j(t,\varepsilon)}{dt^k}\right\|\leq c\nu^{l-(k+q_\gamma)h-1}\varepsilon^{\frac{1-\delta}{\delta}}\sup_{t\in[0;T]}\exp\left(\nu^{-q_\gamma h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\sum_{s=0}^{q_\gamma h}\nu^s Re\xi_j^{(s)}(\tau)}{\left|\xi_j^{(l)}(\tau,\nu)\right|^2}d\tau\right),$$

$j=\overline{1,q_\gamma s_\gamma}, \gamma=\overline{1,\beta}, k=\overline{1,m-1}$, для розв'язків, які відповідають нескінченним елементарним дільникам, де c – деяка стала, яка не залежить від ε, $\mu=\sqrt[p_i]{\varepsilon}, i=\overline{1,\alpha}$, $\nu=\sqrt[q_j]{\varepsilon}, j=\overline{1,\beta}$, $\delta=\max(p_1,q_1)$.

Аналогічні оцінки мають місце і для частинних розв'язків неоднорідної системи (3.1), побудованих згідно з теоремами 3.5, 3.6. Зокрема, у випадку простого спектра характеристичного полінома $P(t, \lambda)$ для розв'язків, які будуються за цими теоремами, справджуються такі твердження:

Теорема 3.11. Якщо виконуються умови теорем 3.1, 3.5, 3.7, то на заданому відрізку для частинного формального розв'язку (3.154) неоднорідної системи рівнянь (3.1), який будується за теоремою 3.5, існує такий точний розв'язок $\widetilde{x}(t, \varepsilon)$ цієї системи, для якого даний формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$. Для будь-якого натурального l і достатньо малих ε виконуються нерівності:

$$\left\| x^{(l)}(t, \varepsilon) - \widetilde{x}(t, \varepsilon) \right\| \leq c\varepsilon^{l-h} \sup_{t \in [0;T]} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} Re\alpha(\tau) d\tau \right),$$

$$\left\| \frac{d^k x^{(l)}(t, \varepsilon)}{dt^k} - \frac{d^k \widetilde{x}(t, \varepsilon)}{dt^k} \right\| \leq c\varepsilon^{l-(k+1)h} \sup_{t \in [0;T]} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} Re\alpha(\tau) d\tau \right),$$

$k = \overline{1, m-1}$, де c – стала, яка не залежить від ε, а $x^{(l)}(t, \varepsilon)$ – відповідне l-наближення, яке утворюється шляхом обриванням формального ряду (3.155) на l-му члені.

Теорема 3.12. Якщо виконуються умови теорем 3.1, 3.6, 3.7, то на заданому відрізку для частинного формального розв'язку (3.156) неоднорідної системи рівнянь (3.1) існує такий точний розв'язок $\widetilde{x}(t, \varepsilon)$ цієї системи, для якого даний формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$. Для будь-якого натурального l і досить малого ε виконуються нерівності:

$$\left\| x^{(l)}(t, \varepsilon) - \widetilde{x}(t, \varepsilon) \right\| \leq c\varepsilon^{l-h-1} \sup_{t \in [0;T]} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} Re\alpha(\tau) d\tau \right),$$

$$\left\| \frac{d^k x^{(l)}(t, \varepsilon)}{dt^k} - \frac{d^k \widetilde{x}(t, \varepsilon)}{dt^k} \right\| \leq c\varepsilon^{l-(k+1)h-1} \sup_{t \in [0;T]} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} Re\alpha(\tau) d\tau \right),$$

$k = \overline{1, m-1}$, де c – деяка стала, яка не залежить від ε, а $x^{(l)}(t, \varepsilon)$ – l-наближення утворене з (3.156) обриванням відповідно формального ряду (3.155) на l-му члені.

Погіршення асимптотичної оцінки частинного розв'язку системи (3.1) в "резонансному" випадку пов'язане з тим, що цей розв'язок будується, починаючи з від'ємного степеня ε.

Зауваження 3.2. У наведених оцінках фігурують експоненціальні множники, які будуть експоненціально малими, якщо відповідним чином вибрати нижню межу інтегрування, що міститься під знаком експоненти: якщо підінтегральний вираз недодатний, то покладаємо $t_0 = 0$, якщо ж цей вираз невід'ємний, беремо $t_0 = T$.

3.5. Приклади

Проілюструємо отримані результати на конкретних прикладах.

Приклад 1.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{d^3x_1}{dt^3} + \varepsilon^4 t \frac{d^3x_2}{dt^3} - 3\varepsilon^2 t \frac{d^2x_1}{dt^2} - 4\varepsilon t^2 \frac{dx_1}{dt} + 12t^3 x_1 = 0, \\ \varepsilon^4 \frac{d^3x_2}{dt^3} + \varepsilon^2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{dx_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dx_2}{dt} - t^2 x_2 = 0, \end{cases}$$

де $x_1(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon)$ – шукані скалярні функції, $t \in [1;2]$.

Запишемо цю систему у векторно-матричний формі:

$$\varepsilon^3 \left(A_3^{(0)}(t) + \varepsilon A_3^{(1)}(t) \right) \frac{d^3x}{dt^3} + \varepsilon^2 A_2^{(0)}(t) \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \left(A_1^{(0)}(t) + \varepsilon A_1^{(1)}(t) \right) \frac{dx}{dt} + A_0^{(0)}(t) x = 0,$$

де

$$A_3^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} -3t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} -4t^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} 12t^3 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix}, x = \mathrm{col}\,[x_1, x_2], 0 = \mathrm{col}\,[0, 0].$$

Розглянемо граничну в'язку матриць (3.5) для даної системи рівнянь

$$P(t,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 3t\lambda^2 - 4t^2\lambda + 12t^3 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - t^2 \end{bmatrix}.$$

Вона регулярна, її власні значення знайдемо з рівняння

$$\left(\lambda^3 - 3t\lambda^2 - 4t^2\lambda + 12t^3\right)\left(\lambda^2 - t^2\right) = 0,$$

розв'язавши яке, дістанемо

$$\lambda_1(t) = 3t, \lambda_2(t) = 2t, \lambda_3(t) = -2t, \lambda_4(t) = t, \lambda_5(t) = -t.$$

Отже, дана в'язка має 5 простих скінченних елементарних дільників $\lambda - 3t$, $\lambda - 2t$, $\lambda + 2t$, $\lambda - t$, $\lambda + t$, і один – простий нескінченний.

Таким чином, дана система задовольняє умови 3.1° – 3.4° теореми 3.1. Перевіримо виконання умови 3.5° цієї теореми. Для цього знайдемо вектори $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ – нулі матриць $A_3^{(0)}(t)$, $\left(A_3^{(0)}(t)\right)^*$ відповідно:

$$\widetilde{\varphi}(t) = \operatorname{col}[0,1], \widetilde{\psi}(t) = \operatorname{col}[0,1].$$

Тоді $\left(A_3^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 1 \neq 0, \forall t \in [0;1]$. Отже, умова 3.5° також виконується.

Оскільки всі умови теореми 3.1 виконуються, ми можемо нею скористатися для побудови наближених розв'язків даної системи. Згідно з цією теоремою дана система має 6 лінійно незалежних розв'язків, які зображуються асимптотичними формулами:

$$x_i(t,\varepsilon) = \left(u_i^{(0)}(t) + \varepsilon u_i^{(1)}(t)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left(\lambda_i(\tau) + \varepsilon\lambda_i^{(1)}(\tau)\right)d\tau\right) + O(\varepsilon^2), i = \overline{1,5};$$

$$x_6(t,\varepsilon) = \left(v^{(0)}(t) + \varepsilon v^{(1)}(t)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\xi^{(0)}(\tau) + \varepsilon\xi^{(1)}(\tau)}\right) + O(\varepsilon),$$

де $t_0 \in \{1,2\}$.

Визначимо складові цих формул. Спочатку з рівняннь $P(t,\lambda_i(t))u_i^{(0)}(t) = 0$ знайдемо вектори $u_i^{(0)}(t)$, $i = \overline{1,5}$:

$$u_1^{(0)}(t)=\operatorname{col}[1,0], u_2^{(0)}(t)=\operatorname{col}[t,0], u_3^{(0)}(t)=\operatorname{col}\left[t^2,0\right], u_4^{(0)}(t)=\operatorname{col}[0,t], u_5^{(0)}(t)=\operatorname{col}\left[0,t^2\right].$$

Далі знаходимо вектори $\psi_i(t)$ – елементи нуль-просторів матриць $P^*(t,\lambda_i(t))$ $(i = \overline{1,5})$:

$$\psi_1(t)=c_1(t)\operatorname{col}[1,0], \psi_2(t)=c_2(t)\operatorname{col}[1,0], \psi_3(t)=c_3(t)\operatorname{col}[1,0],$$

$$\psi_4(t)=c_4(t)\operatorname{col}[0,1], \psi_5(t)=c_5(t)\operatorname{col}[0,1],$$

де $c_i(t)$ – скалярні функції, які визначимо з умови $\left(\frac{\partial P(t,\lambda_i(t))}{1!\partial\lambda}\varphi_i(t), \psi_i(t)\right) = 1$, $i = \overline{1,5}$:

$$c_1(t) = \frac{1}{23t^2 - 18t}, c_2(t) = -\frac{1}{4t^3}, c_3(t) = \frac{1}{20t^4}, c_4(t) = \frac{1}{2t^2}, c_5(t) = -\frac{1}{2t^3}.$$

Отже,

$$\psi_1(t) = \frac{1}{23t^2-18t}\operatorname{col}[1,0], \psi_2(t) = -\frac{1}{4t^3}\operatorname{col}[1,0], \psi_3(t) = \frac{1}{20t^4}\operatorname{col}[1,0],$$

$$\psi_4(t) = \frac{1}{2t^2}\operatorname{col}[0,1], \psi_5(t) = -\frac{1}{2t^3}\operatorname{col}[0,1].$$

Тепер за формулою (3.20) визначимо функції $\lambda_i^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,5}$, та $\xi^{(0)}(t)$. Для цього спочатку знайдемо вектори

$$a_i^{(1)}(t) = -\left(\frac{d\lambda_i(t)}{dt}A_2^{(0)}(t) + \left(\frac{d\lambda_i^2(t)}{dt} + \lambda_i(t)\frac{d\lambda_i(t)}{dt}\right)A_3^{(0)}(t)\right)u_i^{(0)}(t) -$$

$$-\left(A_0^{(0)}(t) + A_0^{(1)}(t)\right)u_i^0(t) - \left(A_1^{(0)}(t) + 2\lambda_i(t)A_2^{(0)}(t) + 3\lambda_i^2(t)A_3^{(0)}(t)\right)\frac{du_i^{(0)}(t)}{dt} -$$

$$-\left(\lambda_i(t)A_1^{(1)}(t) + \lambda_i^2(t)A_2^{(1)}(t) + \lambda_i^3(t)A_3^{(1)}(t)\right)u_i^{(0)}(t), i=\overline{1,5}.$$

Провівши відповідні обчислення, дістанемо

$$a_1^{(1)}(t) = -\operatorname{col}\left[12t^3+18t, 3t\right], a_2^{(1)}(t) = -\operatorname{col}\left[12t^4+2t^2, 2t^2\right],$$

$$a_3^{(1)}(t) = -\operatorname{col}\left[12t^5+58t^3, -2t^3\right], a_4^{(1)}(t) = -\operatorname{col}\left[t^4, t^3-t^2+t+1\right],$$

$$a_5^{(1)}(t) = \operatorname{col}\left[t^5, t^4+t^3+t^2+3t\right].$$

Тоді

$$\lambda_1^{(1)}(t) = \left(a_1^{(1)}(t), \psi_1(t)\right) = -\frac{12t^2+18}{23t-18}, \lambda_2^{(1)}(t) = \left(a_2^{(1)}(t), \psi_2(t)\right) = \frac{6t^2+1}{2t},$$

$$\lambda_3^{(1)}(t) = \left(a_3^{(1)}(t), \psi_3(t)\right) = -\frac{6t^2+29}{10t}, \lambda_4^{(1)}(t) = \left(a_4^{(1)}(t), \psi_4(t)\right) = -\frac{t^3-t^2+t+1}{2t^2},$$

$$\lambda_5^{(1)}(t) = \left(a_5^{(1)}(t), \psi_5(t)\right) = -\frac{t^3+t^2+t+3}{2t^2}.$$

Для знаходження функції $\xi^{(0)}(t)$ обчислюємо $b^{(1)}(t) = -A_3^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t) = -\operatorname{col}[t,1]$, тоді $\xi^{(0)}(t) = \left(b^{(1)}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = -1$.

Тепер за формулою (3.21) знаходимо вектори $u_i^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,5}$:

$$u_1^{(1)}(t) = P^+(t,\lambda_1(t))\left(a_1^{(1)}(t) - \lambda_1^{(1)}(t)\frac{\partial P(t,\lambda_1(t))}{1!\partial\lambda}\varphi_1(t)\right) = \operatorname{col}\left[0, -\frac{3}{8t}\right],$$

$$u_2^{(1)}(t) = P^+(t,\lambda_2(t))\left(a_2^{(1)}(t) - \lambda_2^{(1)}(t)\frac{\partial P(t,\lambda_2(t))}{1!\partial\lambda}\varphi_2(t)\right) = \operatorname{col}\left[0, -\frac{2}{3}\right],$$

$$u_3^{(1)}(t) = P^+(t,\lambda_3(t))\left(a_3^{(1)}(t) - \lambda_3^{(1)}(t)\frac{\partial P(t,\lambda_3(t))}{1!\partial\lambda}\varphi_3(t)\right) = \mathrm{col}\left[0, \frac{2t}{3}\right],$$
$$u_4^{(1)}(t) = P^+(t,\lambda_4(t))\left(a_4^{(1)}(t) - \lambda_4^{(1)}(t)\frac{\partial P(t,\lambda_4(t))}{1!\partial\lambda}\varphi_4(t)\right) = \mathrm{col}\left[-\frac{t}{6}, 0\right],$$
$$u_5^{(1)}(t) = P^+(t,\lambda_5(t))\left(a_5^{(1)}(t) - \lambda_5^{(1)}(t)\frac{\partial P(t,\lambda_5(t))}{1!\partial\lambda}\varphi_5(t)\right) = \mathrm{col}\left[\frac{t^2}{12}, 0\right],$$

а за формулою (3.33) – $v^{(1)}(t)$:

$$v^{(1)}(t) = G(t)\left(b^{(1)}(t) - \xi^{(0)}(t)A_2^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t)\right) = \mathrm{col}\,[-t, 0].$$

Знайдемо ще функцію $\xi^{(1)}(t)$. Для цього спочатку визначимо вектор $b^{(2)}(t)$:

$$b^{(2)}(t) = -A_3^{(1)}(t)v^{(1)}(t) - \xi^{(0)}(t)A_2^{(0)}(t)v^{(1)}(t) - \xi^{(0)}(t)A_2^{(1)}(t)v^{(0)}(t) - A_3^{(2)}(t)v^{(0)}(t) -$$
$$-3\xi^{(0)}(t)A_3^{(0)}(t)\frac{dv^{(0)}(t)}{dt} - \left(\xi^{(0)}(t)\right)^3\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\xi^{(0)}(t)}\right)^2 + \frac{1}{\xi^{(0)}(t)}\frac{d}{dt}\frac{1}{\xi^{(0)}(t)}\right)A_3^{(0)}(t)v^{(0)}(t) =$$
$$= \mathrm{col}\left[3t^2, 0\right].$$

Тоді

$$\xi^{(1)}(t) = \left(b^{(2)}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0.$$

Отже, загальний розв'язок даної системи рівнянь має вигляд

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{6} c_i x_i(t,\varepsilon),$$

де

$$x_1(t,\varepsilon) = \left(\mathrm{col}\,[1,0] + \varepsilon\,\mathrm{col}\left[0, -\frac{3}{8t}\right]\right)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^2\left(3\tau - \varepsilon\frac{12\tau^2+18}{23\tau-18}\right)d\tau\right) + O(\varepsilon^2),$$
$$x_2(t,\varepsilon) = \left(\mathrm{col}\,[t,0] + \varepsilon\,\mathrm{col}\left[0, -\frac{2}{3}\right]\right)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^2\left(2\tau + \varepsilon\frac{6\tau^2+1}{2\tau}\right)d\tau\right) + O(\varepsilon^2),$$
$$x_3(t,\varepsilon) = \left(\mathrm{col}\left[t^2,0\right] + \varepsilon\,\mathrm{col}\left[0, \frac{2t}{3}\right]\right)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left(2\tau + \varepsilon\frac{6\tau^2+29}{10\tau}\right)d\tau\right) + O(\varepsilon^2),$$
$$x_4(t,\varepsilon) = \left(\mathrm{col}\,[0,t] + \varepsilon\,\mathrm{col}\left[-\frac{t}{6}, 0\right]\right)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^2\left(\tau - \varepsilon\frac{\tau^3-\tau^2+\tau+1}{2\tau^2}\right)d\tau\right) + O(\varepsilon^2),$$
$$x_5(t,\varepsilon) = \left(\mathrm{col}\left[0,t^2\right] + \varepsilon\,\mathrm{col}\left[\frac{t^2}{12}, 0\right]\right)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left(\tau + \varepsilon\frac{\tau^3+\tau^2+\tau+3}{2\tau^2}\right)d\tau\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$x_6(t,\varepsilon)=(\mathrm{col}\,[0,1]+\varepsilon\,\mathrm{col}\,[-t,0])\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}(t-1)\right)+O(\varepsilon),$$

c_i, $i=\overline{1,6}$, – довільні сталі.

Приклад 2.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon^3\frac{d^3x_1}{dt^3}+\varepsilon^3\frac{d^3x_2}{dt^3}+3\varepsilon^2t\frac{d^2x_1}{dt^2}+3\varepsilon t^2\frac{dx_1}{dt}+t^3x_1=0,\\ \varepsilon^2\frac{dx_1}{dt}+\varepsilon^2\frac{dx_2}{dt}+x_2=\exp\left(\frac{t^2}{2\varepsilon}\right),\end{cases}$$

де $x_1(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon)$ – шукані скалярні функції, $t\in[0;1]$.

Запишемо цю систему у векторно-матричний формі:

$$\varepsilon^3A_3^{(0)}(t)\frac{d^3x}{dt^3}+\varepsilon^2A_2^{(0)}(t)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\left(A_1^{(0)}(t)+\varepsilon A_1^{(1)}(t)\right)\frac{dx}{dt}+A_0^{(0)}(t)x=f^{(0)}(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\tau d\tau\right),\tag{3.167}$$

де

$$A_3^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},A_2^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}3t&0\\0&0\end{bmatrix},A_1^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}3t^2&0\\0&0\end{bmatrix},A_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},$$

$$A_0^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}t^3&0\\0&1\end{bmatrix},f^{(0)}(t)=\mathrm{col}\,[0,1],x=\mathrm{col}\,[x_1,x_2].$$

Загальний розв'язок цієї системи шукатимемо у вигляді загального розв'язку відповідної однорідної системи

$$\varepsilon^3A_3^{(0)}(t)\frac{d^3x}{dt^3}+\varepsilon^2A_2^{(0)}(t)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\left(A_1^{(0)}(t)+\varepsilon A_1^{(1)}(t)\right)\frac{dx}{dt}+A_0^{(0)}(t)x=0\tag{3.168}$$

і частинного розв'язку неоднорідної системи (3.167).

Знайдемо загальний розв'язок системи (3.168). Гранична в'язка матриць даної системи

$$P(t,\lambda)=\begin{bmatrix}(\lambda+t)^3&\lambda^3\\0&1\end{bmatrix}$$

має одне власне значення $\lambda_0(t)=-t$ кратності 3, якому відповідає скінченний елементарний дільник $(\lambda+t)^3$. Крім того, дана в'язка має нескінченний елементарний дільник кратності 3.

У системі (3.168) при старшій похідній знаходиться вироджена матриця, тому згідно з теоремою 2.2 її фундаментальна система розв'язків складається з меншої кількості частинних розв'язків, ніж $mn = 6$. Застосуємо до цієї системи теорему 2.2. Оскільки умови цієї теореми виконуються, то залишається визначити довжину жорданового ланцюжка матриці $A_3(t,\varepsilon)$ відносно операторів (2.12). Для цього знайдемо вектори цього ланцюжка. Розглянемо систему рівнянь

$$A_3(t,\varepsilon)y_1(t,\varepsilon) = 0,$$

або

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^3 & \varepsilon^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

звідки випливає, що $y_1(t,\varepsilon) = \operatorname{col}[a(t,\varepsilon), -a(t,\varepsilon)]$, де $a(t,\varepsilon) \neq 0$ – довільна скалярна функція. Другий вектор $y_2(t,\varepsilon)$ жорданового ланцюжка визначимо з рівняння

$$A_3(t,\varepsilon)y_2(t,\varepsilon) + 3A_3(t,\varepsilon)\frac{dy_1(t,\varepsilon)}{dt} + A_2(t,\varepsilon)y_1(t,\varepsilon) = 0.$$

Для того, щоб ця система мала розв'язки, необхідно і достатньо, щоб вектор

$$3A_3(t,\varepsilon)\frac{dy_1(t,\varepsilon)}{dt} + A_2(t,\varepsilon)y_1(t,\varepsilon)$$

був ортогональним до довільного розв'язку союзної системи. Знайдемо його з рівняння

$$A_3^*(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) = 0,$$

або

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ \varepsilon^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

звідки $z(t,\varepsilon) = \operatorname{col}[0, b(t,\varepsilon)]$, де $b(t,\varepsilon) \neq 0$ – довільна скалярна функція.

Оскільки умова ортогональності виконується:

$$\left(\operatorname{col}\left[-3t\varepsilon^2 a(t,\varepsilon), 0\right], \operatorname{col}[0, b(t,\varepsilon)]\right) = 0,$$

то вектор $y_2(t,\varepsilon)$ визначимо за формулою

$$y_2(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon^3 & \varepsilon^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} -3t\varepsilon^2 a(t,\varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon^3} & \frac{1}{\varepsilon^3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3t\varepsilon^2 a(t,\varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{col}\left[-3t\varepsilon^{-1} a(t,\varepsilon), 0\right].$$

Вектор $y_3(t,\varepsilon)$ знайдемо з рівняння

$$A_3(t,\varepsilon)y_3(t,\varepsilon)+L_1(t,\varepsilon)y_2(t,\varepsilon)+L_2(t,\varepsilon)y_1(t,\varepsilon)=0,$$

тобто

$$\begin{bmatrix}\varepsilon^3 & \varepsilon^3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\varepsilon t^2a(t,\varepsilon)+9\varepsilon^2\frac{dta(t,\varepsilon)}{dt}-6\varepsilon^2t\frac{da(t,\varepsilon)}{dt}\\ 0\end{bmatrix}.$$

Оскільки $\left(\operatorname{col}\left[6\varepsilon t^2a(t,\varepsilon)+9\varepsilon^2\frac{dta(t,\varepsilon)}{dt}-6\varepsilon^2t\frac{da(t,\varepsilon)}{dt},0\right],\operatorname{col}\left[0,b(t,\varepsilon)\right]\right)=0$, то це рівняння також сумісне, а $y_3(t,\varepsilon)=\operatorname{col}\left[6\varepsilon^{-2}t^2a(t,\varepsilon)+9\varepsilon^{-1}\frac{dta(t,\varepsilon)}{dt}-6\varepsilon^{-1}t\frac{da(t,\varepsilon)}{dt},0\right]$. Нарешті, четвертий вектор шуканого жорданового ланцюжка має задовольняти рівняння

$$A_3(t,\varepsilon)y_4(t,\varepsilon)+L_1(t,\varepsilon)y_3(t,\varepsilon)+L_2(t,\varepsilon)y_2(t,\varepsilon)+L_3(t,\varepsilon)y_1(t,\varepsilon)=0,$$

або

$$\begin{bmatrix}\varepsilon^3 & \varepsilon^3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\varepsilon^{-1}\left(27\frac{d^2ta(t,\varepsilon)}{dt^2}-18\frac{d}{dt}t\frac{da(t,\varepsilon)}{dt}+27t\frac{dta(t,\varepsilon)}{dt}-18t^2\frac{da(t,\varepsilon)}{dt}\right)\\ -3\varepsilon ta(t,\varepsilon)-a(t,\varepsilon)\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}\varepsilon^{-2}\left(18\frac{dt^2a(t,\varepsilon)}{dt}+18t^3a(t,\varepsilon)\right)-t^3a(t,\varepsilon)-18\varepsilon t\frac{dta(t,\varepsilon)}{dt}-9\varepsilon^2\frac{d^2ta(t,\varepsilon)}{dt^2}\\ 0\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}3\varepsilon t^2\frac{da(t,\varepsilon)}{dt}+3\varepsilon^2t\frac{d^2a(t,\varepsilon)}{dt^2}\\ 0\end{bmatrix}.$$

Скалярний добуток правої частини цього рівняння на довільний розв'язок союзної системи $(3\varepsilon t+1)a(t,\varepsilon)b(t,\varepsilon)\neq 0$, тому воно нерозв'язне. Отже, довжина знайденого жорданового ланцюжка дорівнює 3. Тому згідно з теоремою 2.2 фундаментальна система розв'язків однорідної системи (3.168) являє собою лінійну комбінацію 3-х лінійно незалежних розв'язків. Згідно з теоремою 3.2 усі вони відносяться до розв'язків першої групи. Розв'язків другої групи ця система не має.

Перевіримо, чи задовольняє дана система основну умову теореми 3.2 – умову 3.8°. Спочатку з рівнянь $P(t,\lambda_0)\varphi(t)=0$, $P^*(t,\lambda_0)\psi(t)=0$ знайдемо вектори $\varphi(t)$, $\psi(t)$:

$$\varphi(t)=\operatorname{col}\left[1,0\right],\psi(t)=c(t)\operatorname{col}\left[1,t^3\right],$$

де $c(t)$ – нескінченно диференційовна скалярна функція. Її визначимо з умови

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{4-j}(H_1,H_2,H_3)\varphi(t),\psi(t)\right)=1. \tag{3.169}$$

Для цього знайдемо матриці

$$H(t)=P^+(t,\lambda_0(t))=\begin{bmatrix}0 & -t^3\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}=A_1^{(0)}(t)+2\lambda_0(t)A_2^{(0)}(t)+3\lambda_0^2(t)A_3^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}0 & 3t^2\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}=A_2^{(0)}(t)+3\lambda_0(t)A_3^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}0 & -3t\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \frac{\partial^3 P(t,\lambda_0(t))}{3!\partial\lambda^3}=A_3^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\sigma^1(H_1,H_2,H_3)=E=\mathrm{diag}\{1,1\},\sigma^2(H_1,H_2,H_3)=H_1(t)=-H(t)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}=$$

$$=\mathrm{diag}\{0,0\},$$

$$\sigma^3(H_1,H_2,H_3)=H_1^2(t)+H_2(t)=\left(H(t)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\right)^2-H(t)\frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}=$$

$$=\mathrm{diag}\{0,0\}.$$

Тоді з (3.169) дістанемо $c(t)=1$ і, отже, $\psi(t)=\mathrm{col}\left[1,t^3\right]$. Далі маємо

$$K(t)\varphi(t)=-\sum_{k=0}^{3}\lambda_0^k(t)A_k^{(1)}(t)\varphi(t)-\sum_{k=1}^{3}C_k^{k-1}\lambda_0^{k-1}(t)A_k^{(0)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}-$$

$$-\sum_{k=2}^{3}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_0^{k-1-i}(t)\frac{d\lambda_0^i(t)}{dt}A_k^{(0)}(t)\varphi(t)=\mathrm{col}\,[0,t],\,(K(t)\varphi(t),\psi(t))=t^4\neq 0.$$

Отже, умова 3.8° теореми 3.2 виконується. Використовуючи цю теорему, знайдемо розв'язки системи (3.168) до другого наближення:

$$x_i(t,\varepsilon)=\left(u_i^{(0)}(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}u_i^{(1)}(t)+\varepsilon^{\frac{2}{3}}u_i^{(2)}(t)\right)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\left(\lambda_0(\tau)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\lambda_i^{(1)}(\tau)+\varepsilon^{\frac{2}{3}}\lambda_i^{(2)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$

$$+O(\varepsilon),\,i=\overline{1,3}.$$

Згідно з формулою (3.56)

$$\lambda_j^{(1)}(t)=\sqrt[3]{(K(t)\varphi(t),\psi(t))}\left(\cos\frac{\arg\,(K(t)\varphi(t),\psi(t))+2\pi(j-1)}{3}+\right.$$

$$+i\sin\frac{\arg\left(K(t)\varphi(t),\psi(t)\right)+2\pi(j-1)}{3}\Bigg),$$

$j=\overline{1,3}$, звідки

$$\lambda_1^{(1)}(t)=t\sqrt[3]{t},\lambda_2^{(1)}(t)=-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t\sqrt[3]{t},\lambda_3^{(1)}(t)=-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t\sqrt[3]{t}.$$

Використовуючи формули $u_i^{(1)}(t)=-\lambda_i^{(1)}(t)H(t)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t), i=\overline{1,3}$, встановимо, що

$$u_i^{(1)}(t)=0, i=\overline{1,3}.$$

Функції $\lambda_i^{(2)}(t)$ визначаються за формулою

$$\lambda_i^{(2)}(t)=\frac{\lambda_i^{(1)}(t)\left(\widetilde{H}_1(t)g_i^{(3)}(t),\psi(t)\right)+\left(g_i^{(4)}(t),\psi(t)\right)}{3\left(\lambda_i^{(1)}(t)\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\lambda_i^{(1)}(t)\right)^2\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{5-j}(H_1,H_2,H_3)\varphi(t),\psi(t)\right), i=\overline{1,3}.$$

Оскільки

$$\sigma^2(H_1,H_2,H_3)=\sigma^3(H_1,H_2,H_3)=\sigma^4(H_1,H_2,H_3)=\mathrm{diag}\{0,0\}, \widetilde{H}_1(t)=\begin{bmatrix}0 & -3t^2\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

то вона запишеться у вигляді

$$\lambda_i^{(2)}(t)=\frac{\lambda_i^{(1)}(t)\left(\widetilde{H}_1(t)g_i^{(3)}(t),\psi(t)\right)+\left(g_i^{(4)}(t),\psi(t)\right)}{3\left(\lambda_i^{(1)}(t)\right)^2}, i=\overline{1,3}. \tag{3.170}$$

Щоб скористатися цією формулою, знайдемо вектори

$$g_i^{(3)}(t)=-\sum_{k=0}^{3}\lambda_0^k(t)A_k^{(1)}(t)\varphi(t)-\sum_{k=1}^{3}C_k^{k-1}\lambda_0^{k-1}(t)A_k^{(0)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}-\sum_{k=2}^{3}D_1^{(0)}[\lambda^{k-1}]A_k^{(0)}(t)\varphi(t),$$

$i=\overline{1,3}$,

$$g_i^{(4)}(t)=-\sum_{k=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{\gamma=1}^{\left[\frac{4-\beta}{3}\right]}D_0^{(\beta)}\left[\lambda_i^k\right]A_k^{(\gamma)}(t)u_i^{(4-\beta-3\gamma)}(t)-$$

$$-\sum_{k=2}^{3}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\beta=0}^{4-3(k-j)}\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{4-\beta-3(k-j)}{3}\right]}D_{k-j}^{(\beta)}\left[\lambda_i^j\right]A_k^{(\gamma)}(t)u_i^{(4-\beta-3(k+\gamma-j))}(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{s}\sum_{\beta=0}^{4-3(k-j)}\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{4-\beta-3(k-j)}{3}\right]} C_k^s D_{s-j}^{(\beta)}\left[\lambda_i^j\right] A_k^{(\gamma)}(t)\frac{d^{k-s}u_i^{(4-\beta-3(k+\gamma-j))}}{dt^{k-s}}, i=\overline{1,3}.$$

Провівши відповідні обчислення, дістанемо

$$g_1^{(3)}(t)=g_2^{(3)}(t)=g_3^{(3)}(t)=\mathrm{col}\,[0,t],$$

$$g_1^{(4)}(t)=t\sqrt[3]{t}\,\mathrm{col}\,[3,-1]\,, g_2^{(4)}(t)=(1-i\sqrt{3})t\sqrt[3]{t}\,\mathrm{col}\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right],$$

$$g_3^{(4)}(t)=(1+i\sqrt{3})t\sqrt[3]{t}\,\mathrm{col}\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Тоді з (3.170) знайдемо

$$\lambda_1^{(2)}(t)=-\frac{4t^3-3}{3t^2}\sqrt[3]{t^2}, \lambda_2^{(2)}(t)=\frac{(4t^3-3)(1+i\sqrt{3})}{6t^2}\sqrt[3]{t^2}, \lambda_3^{(2)}(t)=\frac{(4t^3-3)(1-i\sqrt{3})}{6t^2}\sqrt[3]{t^2}.$$

Нарешті вектори, $u_i^{(2)}(t), i=\overline{1,3}$, обчислимо за формулою

$$u_i^{(2)}(t)=H(t)a_i^{(2)}(t), i=\overline{1,3},$$

де

$$a_i^{(2)}(t)=-\left(\lambda_i^{(1)}(t)\right)^2\left[\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H_1(t)+\frac{\partial^2 P(t,\lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\right]\varphi(t)-\lambda_i^{(2)}(t)\frac{\partial P(t,\lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t),$$

$i=\overline{1,3}$. Провівши відповідні розрахунки, отримаємо

$$u_1^{(2)}(t)=u_2^{(2)}(t)=u_3^{(2)}(t)=0.$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок системи (3.167). Оскільки $\lambda_0(t)\neq t$, то має місце нерезонансний випадок, тому розв'язок даної системи, згідно з теоремою 3.5, будемо шукати у вигляді

$$\widetilde{x}(t,\varepsilon)=\left(\omega^{(0)}(t)+\varepsilon\omega^{(1)}(t)+\varepsilon^2\omega^{(2)}(t)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\tau d\tau\right)+O(\varepsilon).$$

Використовуючи формули, отримані при доведенні цієї теореми, дістанемо

$$\omega^{(0)}(t)=P^{-1}(t,\alpha(t))f^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{8t^3} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\mathrm{col}\left[-\frac{1}{8},1\right];$$

$$\omega^{(1)}(t)=-P^{-1}(t,\alpha(t))\Gamma_0^{(1)}(t)\omega^{(0)}(t)=-\begin{bmatrix}\frac{1}{8t^3} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6t & 3t\\ t & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{8}\\ 1\end{bmatrix}=\mathrm{col}\left[\frac{7t^3-18}{64t^2},-\frac{7t}{8}\right];$$

$$\omega^{(2)}(t) = -P^{-1}(t,\alpha(t))\Gamma_0^{(1)}(t)\omega^{(1)}(t) - P^{-1}(t,\alpha(t))\Gamma_0^{(2)}(t)\omega^{(0)}(t) =$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{1}{8t^3} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6t & 3t \\ t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7t^3-18}{64t^2} \\ -\frac{7t}{8} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{8t^3} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{col}\left[\frac{108+108t^3-49t^6}{512t^4}, \frac{49t^3+18}{64t}\right].$$

Отже, загальний розв'язок системи (3.167) має вигляд:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j(t,\varepsilon) + \widetilde{x}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon),$$

де

$$x_1(t,\varepsilon) = \mathrm{col}[1,0]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left(-\tau+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\tau\sqrt[3]{\tau}-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{4\tau^3-3}{3\tau^2}\sqrt[3]{\tau^2}\right)d\tau\right),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \mathrm{col}[1,0]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left(-\tau-\varepsilon^{\frac{1}{3}}(1-i\sqrt{3})\frac{\tau\sqrt[3]{\tau}}{2}+\varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{(1+i\sqrt{3})(4\tau^3-3)}{6\tau^2}\sqrt[3]{\tau^2}\right)d\tau\right),$$

$$x_3(t,\varepsilon) = \mathrm{col}[1,0]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left(-\tau-\varepsilon^{\frac{1}{3}}(1+i\sqrt{3})\frac{\tau\sqrt[3]{\tau}}{2}+\varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{(1-i\sqrt{3})(4\tau^3-3)}{6\tau^2}\sqrt[3]{\tau^2}\right)d\tau\right),$$

$$\widetilde{x}(t,\varepsilon) = \left(\mathrm{col}\left[-\frac{1}{8}, 1\right] + \varepsilon\,\mathrm{col}\left[\frac{7t^3-18}{64t^2}, -\frac{7t}{8}\right] + \varepsilon^2\,\mathrm{col}\left[\frac{108+108t^3-49t^6}{512t^4}, \frac{49t^3+18}{64t}\right]\right)\times$$

$\times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_1^2 \tau d\tau\right)$, c_j, $j=\overline{1,3}$, – довільні сталі.

3.6. Висновки до розділу 3

У даному розділі досліджено питання про побудову асимптотики при $\varepsilon \to 0$ розв'язків лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь $m-$го порядку (3.1) з тотожно виродженою головною матрицею $A_m^{(0)}(t)$ при похідних.

У пункті 3.2 досліджено проблему побудови лінійно незалежних формальних розв'язків однорідної системи, яка відповідає (3.1). При цьому розглянуто наступні випадки, пов'язані зі структурою спектра гранично в'язки матриць (3.5):

а) коли всі скінченні та нескінченні елементарні дільники прості;

б) коли спектр в'язки $P(t,\lambda)$ складається з двох кратних елементарних дільників – скінченного та нескінченного;

в) коли в'язка $P(t,\lambda)$ має кілька кратних скінченних елементарних дільників і кілька кратних нескінченних однакової кратності.

г) загальний випадок, коли гранична в'язка матриць має скінченні і нескінченні елементарні дільники як однакової, так і різної кратності.

У кожному з цих випадків визначено умови, за виконання яких дана система рівнянь має формальні розв'язки, які зображуються у вигляді формальних розвинень за степенями параметра ε, і розроблено алгоритм для знаходження коефіцієнтів цих розвинень.

Встановлено, що ці розв'язки поділяються на дві групи: розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам, і розв'язки, які відповідають нескінченним елементарним дільникам. Перша група розв'язків будується в класичній формі Дж. Біркгофа, а друга – в іншому вигляді, запропонованому в роботах А.М. Самойленка і В.П. Яковця. Встановлено, що ці розв'язки лінійно незалежні, а їх сумарна кількість цілком узгоджується з теоремою 2.3, доведеною в розділі 2.

Показано, що у випадку простого спектра граничної в'язки матриць відповідні формальні розвинення ведуться за цілими степенями малого параметра, а у випадку кратного спектра цієї в'язки – за дробовими. Виходячи з відомих результатів М.І. Шкіля, Г.С. Жукової, В.П. Яковця та ін., отриманих для лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь першого порядку, доведено, що формальні розв'язки систем вищих порядків, побудовані за описаним у даному розділі алгоритмом, є асимптотичними розвиненнями точних розв'язків цих систем, і виведено відповідні асимптотичні оцінки.

У пункті 3.3 розроблено алгоритм побудови частинного розв'язку неоднорідної системи (3.1) в нерезонансному і резонансному випадках.

Отримані результати сформульовані у вигляді дванадцяти теорем і проілюстровані на двох прикладах.

РОЗДІЛ 3.
АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ МЕТОДОМ ДІАГРАМ НЬЮТОНА

У випадку кратних скінченних та нескінченних елементарних дільників граничної в'язки матриць (3.5) досить складною є проблема побудови асимптотичних розв'язків системи рівнянь (3.3) тоді, коли основні умови теорем 3.2 – 3.4 не виконуються. Це пов'язане з тим, що при наявності кратних елементарних дільників відповідні розв'язки системи рівнянь (3.3) будуються у вигляді розвинень за дробовими степенями малого параметра, показники яких залежать не тільки від кратності елементарних дільників, а й від структури збурювальних матриць $A_k^{(s)}(t), k = \overline{0,m}, s \geq 1$. Аналогічна проблема для систем першого порядку була розв'язана в роботах [30,58,101] з використанням методу діаграм Ньютона. У даному розділі цей метод застосується й до системи рівнянь (3.3), що дозволило узагальнити результати, отримані в [30,58], на системи рівнянь вищих порядків.

Результати, отримані в цьому розділі, опубліковано в роботі [48].

4.1. Виведення рівняння розгалудження для роз'язків першої групи

Розглянемо систему рівнянь

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\varepsilon^{(m-1)h}A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x=0. \quad (4.1)$$

Припустимо, що виконуються умови 3.1° – 3.3°, а також 3.6°, тобто будемо досліджувати випадок, коли гранична в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має один скінченний елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ кратністю p і один нескінченний – кратністю $q = mn - p$.

Як і в попередньому розділі, першу групу розв'язків системи (4.1), що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(\tau)+\lambda(\tau,\varepsilon))\,d\tau\right), \quad (4.2)$$

де $u(t,\varepsilon)$, $\lambda(t,\varepsilon)$ – шукані n-вимірний вектор і скалярна функція відповідно.

Підставимо вектор (4.2) в систему рівнянь (4.1). При цьому скористаємось формулою

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{-jh} C_k^i D_{i-j}[(\lambda_0 + \lambda)^j] \frac{d^{k-i} u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau,\varepsilon))\, d\tau\right),$$

$k = \overline{0, m}$, яка із врахуванням співвідношення

$$D_{i-j}\left[(\lambda + \lambda_0)^j\right] = \sum_{\gamma=0}^{j} C_j^\gamma D_{i-j}\left[\lambda_0^{j-\gamma} \lambda^\gamma\right], i \geq j, i, j = 1, 2, \ldots,$$

набуває вигляду

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\gamma=0}^{j} \varepsilon^{-jh} C_k^i C_j^\gamma D_{i-j}[\lambda_0^{j-\gamma} \lambda^\gamma] \frac{d^{k-i} u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau,\varepsilon)) d\tau\right),$$

$k = \overline{0, m}$.

У результаті отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\gamma=0}^{j} \varepsilon^{(k-j)h} C_k^i C_j^\gamma D_{i-j}\left[\lambda_0^{j-\gamma} \lambda^\gamma\right] A_k(t,\varepsilon) \frac{d^{k-i} u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} = 0,$$

або

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_0^k(t) A_k(t,\varepsilon) u(t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{k} C_k^\gamma \lambda_0^{k-\gamma}(t) \lambda^\gamma(t,\varepsilon) A_k(t,\varepsilon) u(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\gamma=0}^{j} \varepsilon^{(k-j)h} C_j^\gamma D_{k-j}\left[\lambda_0^{j-\gamma} \lambda^\gamma\right] A_k(t,\varepsilon) u(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\gamma=0}^{j} \varepsilon^{(k-j)h} C_k^i C_j^\gamma D_{i-j}\left[\lambda_0^{j-\gamma} \lambda^\gamma\right] A_k(t,\varepsilon) \frac{d^{k-i} u(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} = 0.$$

З першого доданка в лівій частині цієї рівності виділимо матрицю $P(t, \lambda_0(t))$, а решту доданків перегрупуємо, об'єднавши їх у групи з однаковими показниками степенів шуканої функції $\lambda(t,\varepsilon)$. Ввівши позначення

$$P(t, \lambda, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i(t,\varepsilon),$$

$$\frac{\partial^k P(t,\lambda,\varepsilon)}{k! \partial \lambda^k} = \sum_{i=k}^{m} C_i^k \lambda^{i-k} A_i(t,\varepsilon), k = \overline{1, m},$$

у результаті дістанемо

$$P(t,\lambda_0)u = -F(t,\lambda,\varepsilon)u, \tag{4.3}$$

де

$$F(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon), \tag{4.4}$$

а $\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon), k=\overline{0,m}$, — оператори, які визначаються за формулами:

$$\Gamma_0(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s P^{(s)}(t,\lambda_0) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i} \varepsilon^{ih} D_i[\lambda_0^j] A_{i+j}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-i+1} \varepsilon^{ih} C_{i+\gamma-1}^{i+\gamma-j-1} D_{i-j}[\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}(t,\varepsilon)\frac{d^j}{dt^j};$$

$$\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon) = \lambda^k \frac{\partial^k P(t,\lambda_0,\varepsilon)}{k!\partial\lambda^k} + \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{m-k-i+1} \varepsilon^{ih} C_{j+k-1}^{k} D_i[\lambda^k\lambda_0^{j-1}] A_{i+j+k-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-k-i+1} \varepsilon^{ih} C_{\gamma+k-1}^{k} C_{i+\gamma+k-1}^{i+\gamma+k-j-1} D_{i-j}[\lambda^k\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma+k-1}(t,\varepsilon)\frac{d^j}{dt^j}, k=\overline{1,m-1};$$

$$\Gamma_m(t,\lambda,\varepsilon) = \lambda^m \frac{\partial^m P(t,\lambda_0,\varepsilon)}{m!\partial\lambda^m}.$$

Враховуючи умову 3.1°, оператори $\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon), k=\overline{0,m}$, можна подати у вигляді рівномірних асимптотичних розвинень за степенями малого параметра:

$$\Gamma_0(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s \Gamma_0^{(s)}(t);$$

$$\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{s\geq 0} \varepsilon^s \Gamma_k^{(s)}(t,\lambda), k=\overline{1,m},$$

коефіцієнти яких визначаються за формулами

$$\Gamma_0^{(s)}(t) = P^{(s)}(t,\lambda_0) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-i+1} C_{i+\gamma-1}^{i+\gamma-j-1} D_{i-j}[\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}^{(s-ih)}(t)\frac{d^j}{dt^j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i} D_i[\lambda_0^j] A_{i+j}^{(s-ih)}(t), s=1,2,\ldots;$$

$$\Gamma_k^{(s)}(t,\lambda) = \lambda^k \frac{\partial^k P^{(s)}(t,\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k} + \sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{m-k-i+1} C_{\gamma+k-1}^{k} C_{i+\gamma+k-1}^{i+\gamma+k-j-1} D_{i-j}[\lambda^k\lambda_0^{\gamma-1}]\times$$

$$\times A^{(s-ih)}_{i+\gamma+k-1}(t)\frac{d^j}{dt^j}+\sum_{i=1}^{m-k}\sum_{j=1}^{m-k-i+1}C^k_{j+k-1}D_i[\lambda^k\lambda_0^{j-1}]A^{(s-ih)}_{i+j+k-1}(t), k=\overline{1,m-1}, s=0,1,\ldots;$$

$$\Gamma_m(t,\lambda)=\lambda^m\frac{\partial^m P^{(s)}(t,\lambda_0)}{m!\partial\lambda^m}, s=0,1,\ldots,$$

$$P^{(s)}(t,\lambda_0)=\sum_{k=0}^{m}\lambda_0^k A_k^{(s)}(t), s=1,2,\ldots.$$

Таким чином, задача визначення функції $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектора $u(t,\varepsilon)$ звелась до задачі про збурення власного значення $\lambda_0(t)$ та відповідного власного вектора $\varphi(t)$ поліноміальної в'язки матриць $P(t,\varepsilon)$ під дією збурювальних операторів $\Gamma_k(t,\lambda,\varepsilon), k=\overline{0,m}$.

Вектор $u(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (4.3) тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(F(t,\lambda,\varepsilon)u(t,\varepsilon),\psi(t))=0, \tag{4.5}$$

де $\psi(t)$ – елемент нуль-простору матриці $P^*(t,\lambda_0)$. При її виконанні має місце рівність $u(t,\varepsilon)=-H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)u(t,\varepsilon)+c\varphi(t)$, у якій $H(t)$ – напівобернена матриця до матриці $P(t,\lambda_0)$, c – довільний скалярний множник. Поклавши $c=1$, матимемо $(E+H(t)F(t,\lambda,\varepsilon))\,u(t,\varepsilon)=\varphi(t)$. Ця рівність формально задовольняється, якщо вектор $u(t,\varepsilon)$ подати у вигляді

$$u(t,\varepsilon)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k\varphi(t). \tag{4.6}$$

Підставивши (4.6) у (4.5), отримаємо шукане рівняння розгалуження

$$L(\lambda,\varepsilon)\equiv\left(\sum_{k=0}^{\infty}F(t,\lambda,\varepsilon)\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k\varphi(t),\psi(t)\right)=0.$$

Ввівши позначення

$$\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}F(t,\lambda,\varepsilon)\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k, \tag{4.7}$$

запишемо його у вигляді

$$L(\lambda,\varepsilon)\equiv\left(\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)\varphi(t),\psi(t)\right)=0.$$

Згідно з (4.6), (4.7), за виконання цієї рівності вектор $u(t,\varepsilon)$ визначатимемо за формулою

$$u(t,\varepsilon) = \varphi(t) - H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)\varphi(t). \tag{4.8}$$

Представимо операторні вирази $L(\lambda,\varepsilon)$, $\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon)$ у вигляді формальних розвинень за степенями малого параметра:

$$L(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k+s\geq 0} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k], \widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k+s\geq 0} \varepsilon^s \widetilde{L}_{ks}[\lambda^k], \tag{4.9}$$

де k – сумарний степінь функції $\lambda(t,\varepsilon)$, що входить в операторні вирази $L_{ks}[\lambda^k]$, $\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]$. Згідно з (4.7), (4.4) маємо

$$H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(H(t)F(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\sum_{s=0}^{m} H(t)\Gamma_s(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k.$$

Розглянемо вирази $\left(\sum_{s=0}^{m} H(t)\Gamma_s(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k, k = 1, 2, \ldots$. Неважко переконатися, що

$$\left(\sum_{s=0}^{m} H(t)\Gamma_s(t,\lambda,\varepsilon)\right)^k = \sum_{s=0}^{mk} \widetilde{P}_{k,s}(H\Gamma),$$

де

$$\widetilde{P}_{k,s}(H\Gamma) = \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=s} H\Gamma_{s_1} H\Gamma_{s_2}\ldots H\Gamma_{s_k}$$

– сума всіх можливих добутків k операторів $H\Gamma_{s_i}$, сума індексів s_i яких дорівнює s, а індекси s_i набувають значень з множини $\{0, 1, \ldots, m\}$.

Тоді,

$$H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{mk}(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k,s}(H\Gamma).$$

Згрупувавши в цьому виразі доданки з однаковими степенями ε, після перетворень, пов'язаних із зміною порядку підсумовування та заміною індексів, дістанемо

$$H(t)\widetilde{L}(\lambda,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j] +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j],$$

де $\widetilde{W}^{(s)}_{H\Gamma}[i_m,\ldots,i_2,i_1,i_0]$, – сума всіх можливих добутків i_k операторів $H(t)\times$ $\times\Gamma^{(s_{kj})}_k(t,\lambda)$ $(j=\overline{1,i_k},\ k=\overline{0,m})$, сума верхніх індексів яких s_{kj} дорівнює s, тобто

$$\sum_{j=1}^{i_m} s_{mi}+\sum_{j=1}^{i_{m-1}} s_{m-1,j}+\cdots+\sum_{j=1}^{i_1} s_{1j}+\sum_{j=1}^{i_0} s_{0j}=s,$$

$(s_{kj}\in N\cup\{0\},k=\overline{1,m},s_{0j}\in N)$.

Наприклад,

$$\widetilde{W}^{(1)}_{H\Gamma}[0,\ldots,0,1,1]=H(t)\Gamma^{(0)}_1(t,\lambda)H(t)\Gamma^{(1)}_0(t)H(t)\Gamma^{(1)}_0(t)H(t)\Gamma^{(0)}_1(t,\lambda).$$

Із врахуванням проведених перетворень рівняння розгалуження запишеться у вигляді

$$L(\lambda,\varepsilon)\equiv\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s\left(W^{(s)}_{H\Gamma}[0,\ldots,0,0,j]\varphi(t),\psi(t)\right)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+v\ldots+v2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s\left(W^{(s)}_{H\Gamma}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\varphi(t),\psi(t)\right)=0, \tag{4.10}$$

де вирази $W^{(s)}_{H\Gamma}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ відрізняються від виразів $\widetilde{W}^{(s)}_{H\Gamma}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ лише відсутністю в усіх їхніх доданках першого множника $H(t)$.

Звідси дістанемо такі вирази для коефіцієнтів розвинення (4.9):

$$L_{0s}=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\left(W^{(s)}_{H\Gamma}[0,\ldots,0,0,j]\varphi(t),\psi(t)\right),s=1,2,\ldots; \tag{4.11}$$

$$L_{k0}[\lambda^k]=\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1-1}\left(W^{(0)}_{H\Gamma}[i_m,\ldots,i_2,i_1,0]\varphi(t),\psi(t)\right), \tag{4.12}$$

$k=1,2,\ldots;$

$$L_{ks}[\lambda^k]=\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1+j-1}\left(W^{(s)}_{H\Gamma}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\varphi(t),\psi(t)\right), \tag{4.13}$$

$k=1,2,\ldots,s=1,2,\ldots.$

Використавши формули (3.46), (3.47), вирази (4.12) можна представити у вигляді

$$L_{k0}[\lambda^k]=\lambda^k\sum_{j=1}^{\min(k,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{k+1-j}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right), \tag{4.14}$$

$k = 1, 2, \ldots$.

Оскільки за припущенням в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має скінченний елементарний дільник кратністю p, то, як показано в пункті 3.2.2, за рахунок вибору вектора $\psi(t)$ можна домогтися, щоб виконувались співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \psi(t) \right) = \delta_{k,p}, k = \overline{1,p}.$$

Отже,

$$L_{k0}[\lambda^k] = \lambda^k \delta_{k,p}, k = \overline{1,p}. \tag{4.15}$$

Взявши до уваги (4.15), (4.9), рівняння (4.10) запишемо у вигляді

$$\lambda^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k L_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{4.16}$$

де

$$L_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \psi(t) \right), k = p+1, p+2, \ldots. \tag{4.17}$$

При цьому згідно з (4.8) відповідний вектор $u(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням

$$u(t,\varepsilon) = \varphi(t) - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H(t) \widetilde{L}_{0s} \varphi(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k H(t) \widetilde{L}_{k0} \varphi(t) - \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s H(t) \widetilde{L}_{ks}[\lambda^k] \varphi(t), \tag{4.18}$$

де

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} W_{H\Gamma}^{(s)}[0, \ldots, 0, 0, j], s = 1, 2, \ldots;$$

$$\widetilde{L}_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m), k = 1, 2, \ldots;$$

$$\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k] = \sum_{mi_m + \cdots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_m + \cdots + i_2 + i_1 + j - 1} W_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \ldots, i_2, i_1, j], \tag{4.19}$$

$k = 1, 2, \ldots, s = 1, 2, \ldots$.

У результаті доведено наступну теорему.

Теорема 4.1. Для того, щоб вектор (4.2) був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (4.1), необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda(t,\varepsilon)$ задовольняла рівняння розгалуження (4.16), коефіцієнти якого виражаються формулами (4.11), (4.13), (4.17). Відповідна вектор-функція $u(t,\varepsilon)$ зображується формальним розвиненням (4.18), коефіцієнти якого виражаються формулами (4.19).

4.2. Виведення рівняння розгалудження для роз'язків другої групи

Розв'язки другої групи, що відповідають нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), \tag{4.20}$$

де $v(t,\varepsilon)$ – $n-$вимірний вектор, а $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, які підлягають визначенню.

Підставивши вектор (4.20) у систему рівнянь (4.1) і скориставшись формулою

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{-jh}C_k^i D_{i-j}\left[\frac{1}{\xi^j}\right]\frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\varepsilon)}\right), k=\overline{0,m},$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h}C_k^i D_{i-j}\left[\frac{1}{\xi^j}\right]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}} = 0.$$

Помножимо ліву і праву частини цієї рівності на відмінну від нуля функцію $\xi^m(t,\varepsilon)$, потім виділимо доданок для якого $k=i=j=m$. У результаті дістанемо

$$A_m(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) = -\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon^{(m-j)h}\xi^m(t,\varepsilon)D_{m-j}\left[\frac{1}{\xi^j}\right]A_m(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon)-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(m-j)h}C_m^i\xi^m(t,\varepsilon)D_{i-j}\left[\frac{1}{\xi^j}\right]A_m(t,\varepsilon)\frac{d^{m-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{m-i}}-$$

$$-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{(k-j)h}C_k^i\xi^m(t,\varepsilon)D_{i-j}\left[\frac{1}{\xi^j}\right]A_k(t,\varepsilon)\frac{d^{k-i}v(t,\varepsilon)}{dt^{k-i}}.$$

Згрупувавши в цій рівності доданки з однаковими показниками степенів шуканої функції $\xi(t,\varepsilon)$, отримаємо

$$A_m^{(0)}(t)v = -\Phi(t,\xi,\varepsilon)v, \tag{4.21}$$

де

$$\Phi(t,\xi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} Q_k(t,\xi,\varepsilon), \tag{4.22}$$

а оператори $Q_k(t,\xi,\varepsilon), k=\overline{0,m}$, визначаються за формулами

$$Q_0(t,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s A_m^{(s)}(t);$$

$$Q_k(t,\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{kh}\xi^m \sum_{i=0}^{k} C_m^{m-i} D_{k-i}\left[\frac{1}{\xi^{m-k}}\right] A_m(t,\varepsilon)\frac{d^i}{dt^i} +$$
$$+\xi^m \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{ih} C_{i+m-k}^{j+m-k} D_j\left[\frac{1}{\xi^{m-k}}\right] A_{i+m-k}(t,\varepsilon)\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}, k=\overline{1,m-1};$$

$$Q_m(t,\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{mh}\xi^m A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m}{dt^m} + \xi^m \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon^{ih} A_i(t,\varepsilon)\frac{d^i}{dt^i}.$$

Згідно з умовою 3.1° оператори $Q_k(t,\xi,\varepsilon), k=\overline{0,m}$, можна подати у вигляді розвинень за степенями ε:

$$Q_0(t,\varepsilon) = \sum_{s\geq 1}\varepsilon^s Q_0^{(s)}(t); Q_k(t,\xi,\varepsilon) = \sum_{s\geq 0}\varepsilon^s Q_k^{(s)}(t,\xi), k=\overline{1,m},$$

коефіцієнти яких виражаються формулами:

$$Q_0^{(s)}(t) = A_m^{(s)}(t), s=1,2,\ldots;$$

$$Q_k^{(s)}(t,\xi) = \xi^m \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} C_{i+m-k}^{j+m-k} D_j\left[\frac{1}{\xi^{m-k}}\right] A_{i+m-k}^{(s-ih)}(t)\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}, k=\overline{1,m-1}, s=0,1,\ldots;$$

$$Q_m^{(s)}(t,\xi) = \xi^m \sum_{i=0}^{m} A_i^{(s-ih)}(t)\frac{d^i}{dt^i}, s=0,1,\ldots.$$

Отже, задача пошуку функції $\xi(t,\varepsilon)$ та вектор-функції $v(t,\varepsilon)$ звелася до задачі про збурення нульового власного значення і відповідного власного вектора $\widetilde{\varphi}(t)$ в'язки матриць

$$M(t,\xi) = \sum_{i=0}^{m}\xi^i A_{m-i}(t,\varepsilon)$$

симетричної в'язці матриць $P(t, \lambda)$.

Вектор $v(t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння (4.21) тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\left(\Phi(t, \xi, \varepsilon) v(t, \varepsilon), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0, \tag{4.23}$$

де $\widetilde{\psi}(t)$ – елемент нуль-простору матриці $\left(A_m^{(0)}(t)\right)^*$. За її виконання маємо $v(t, \varepsilon) = -\,G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon)v(t, \varepsilon) + c\widetilde{\varphi}(t)$, де $G(t)$ – напівобернена матриця до матрці $A_m^{(0)}(t)$, c – довільний скалярний множник. Поклавши $c = 1$, дістанемо

$$\left(E + G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon)\right) v(t, \varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t).$$

Це рівність формально задовольняється, якщо вектор $v(t, \varepsilon)$ подати у вигляді формального ряду

$$v(t, \varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon)\right)^k \widetilde{\varphi}(t). \tag{4.24}$$

Підставивши (4.24) у (4.23), отримаємо шукане рівняння розгалуження:

$$N(\xi, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\Phi(t, \xi, \varepsilon) \left(G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon)\right)^k \widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0. \tag{4.25}$$

Позначивши

$$\widetilde{N}(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi(t, \xi, \varepsilon) \left(G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon)\right)^k, \tag{4.26}$$

запишемо його у вигляді

$$N(\xi, \varepsilon) \equiv \left(\widetilde{N}(\xi, \varepsilon)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0. \tag{4.27}$$

У свою чергу з (4.24) отримаємо $v(t, \varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) - G(t)\widetilde{N}(\xi, \varepsilon)\widetilde{\varphi}(t)$.

Подамо (4.25), (4.26) у вигляді формальних розвинень за степенями ε:

$$N(\xi, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 0} \varepsilon^s N_{ks}[\xi^k], \widetilde{N}(\xi, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 0} \varepsilon^s \widetilde{N}_{ks}[\xi^k]. \tag{4.28}$$

Згідно з (4.22), (4.26) маємо

$$G(t)N(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=0}^{m} Q_i(t, \xi, \varepsilon)\right)^k.$$

Міркуючи далі так само, як і в пункті 4.1, дістанемо

$$G(t)N(\xi,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j],$$

де $\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ – сума всіх можливих добутків i_k операторів $G(t)Q_k^{(s_{kj})}(t,\xi)$ ($j=\overline{1,i_k}$, $k=\overline{0,m}$), сума верхніх індексів s_{ki} яких дорівнює s ($s_{ki}\in N\cup\{0\}, k=\overline{1,m}$, $s_{0i}\in N$). Тоді рівняння розгалуження (4.27) набуде вигляду

$$N(\xi,\varepsilon)\equiv\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s\left(W_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\ldots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s\left(W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)=0,\tag{4.29}$$

де вирази $W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ відрізняються від виразів $\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]$ лише відсутністю в усіх їхніх доданках першого множника $G(t)$.

З нього отримаємо такі вирази для коефіцієнтів розвинення (4.28):

$$N_{0s}=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\left(W_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right),s=1,2,\ldots;\tag{4.30}$$

$$N_{k0}[\xi^k]=\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1-1}\left(W_{GQ}^{(0)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,0]\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right),k=1,2,\ldots;$$

$$N_{ks}[\xi^k]=\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1+j-1}\left(W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right),\tag{4.31}$$

$k=1,2,\ldots,s=1,2,\ldots$.

Використавши формули (3.70), (3.47), дістанемо

$$N_{k0}[\xi^k]=\xi^k\sum_{j=1}^{\min(k,m)}\left(\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{k+1-j}(G_1,G_2,\ldots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right),k=1,2,\ldots.$$

Оскільки за умовою в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю q, то, як показано в пункті 3.2.2, за рахунок вибору вектора $\widetilde{\psi}(t)$, можна домогтися, щоб виконувались співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\min(k,m)}\left(\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{k+1-j}(G_1,G_2,\dots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)=\delta_{k,q},k=\overline{1,q},$$

звідки випливає, що

$$N_{k0}[\xi^k]=\xi^k\delta_{k,q},k=\overline{1,q}. \tag{4.32}$$

Тому згідно з (4.28) рівняння розгалуження (4.29) запишеться у вигляді

$$\xi^q+\sum_{k=q+1}^{\infty}\xi^k N_{k0}+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{0s}+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{ks}[\xi^k]=0, \tag{4.33}$$

де

$$N_{k0}=\sum_{j=1}^{\min(k,m)}\left(\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{k+1-j}(G_1,G_2,\dots,G_m)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right),k=q+1,q+2,\dots, \tag{4.34}$$

а вектор $v(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням

$$v(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\xi^k G(t)\widetilde{N}_{k0}\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{0s}\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{ks}[\xi^k]\widetilde{\varphi}(t), \tag{4.35}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$\widetilde{N}_{0s}=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}W_{GQ}^{(s)}[0,\dots,0,0,j],s=1,2,\dots;$$

$$\widetilde{N}_{k0}=\sum_{j=1}^{\min(k,m)}\frac{\partial^j M(t,0)}{j!\partial\xi^j}\sigma^{k+1-j}(G_1,G_2,\dots,G_m),k=1,2,\dots;$$

$$\widetilde{N}_{ks}[\xi^k]=\sum_{mi_m+\dots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\dots+i_2+i_1+j-1}W_{GQ}^{(s)}[i_m,\dots,i_2,i_1,j],k,s=1,2,\dots. \tag{4.36}$$

У результаті приходимо до такої теореми.

Теорема 4.2. Для того, щоб вектор (4.20) був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (4.1), необхідно і достатньо, щоб функція $\xi(t,\varepsilon)$ була розв'язком рівняння розгалуження (4.33), коефіцієнти якого визначаються за формулами (4.30), (4.31), (4.34). Відповідна вектор-функція $v(t,\varepsilon)$ зображується розвиненням (4.35), коефіцієнти якого виражаються формулами (4.36).

4.3. Аналіз рівнянь розгалуження

Використовуючи метод діаграм Ньютона, дослідимо структуру формальних розв'язків системи рівнянь (4.1) залежно від поведінки коефіцієнтів рівнянь розгалуження (4.16), (4.33).

Згідно з цим методом, щоб знайти вигляд розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ рівняння (4.15), кожному відмінному від нуля коефіцієнту $L_{ks}[\lambda^k]$ поставимо у відповідність точку (k,s) у прямокутній системі координат Oks (рис.1). Навколо точки $A_0(0,s_0)$, що знаходиться найближче до осі Ok, проти руху годинникової стрілки обертатимемо пряму, доки вона не зустрінеться з деякою точкою $A_1(k_1,s_1)$. Потім пряму в тому самому напрямку обертатимемо навколо точки A_1, доки вона не зустрінеться з точкою $A_2(k_2,s_2)$, і так далі. З'єднавши отримані точки, дістанемо відповідну діаграму Ньютона.

Зауважимо, що коли на осі Os немає точок, побудову діаграми необхідно починати з подібної точки прямої $k=1$. Якщо ж на і прямих $k=j, j<i$, точки відсутні, то побудову діаграми треба починати з прямої $k=i$.

Нехай $\frac{r}{l}$ – тангенс кута нахилу деякої ланки $A_{i-1}A_i$ до від'ємного напрямку осі Ok. Тоді цій ланці відповідатиме розв'язок рівняння (4.16), який зображується у вигляді розвинення

$$\lambda(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{r}{l}}\lambda_1(t)+\sum_{i\geq 2}\varepsilon^{\frac{r+i-1}{l}}\lambda_i(t), \tag{4.37}$$

якщо визначальне рівняння $\sum' L_{ks}[\lambda_1^k]=0$ має простий ненульовий корінь (символом $\sum'$ позначаємо суму виразів $L_{ks}[\lambda_1^k]$ таких, що $(k,s)\in A_{i-1}A_i$).

Якщо $\lambda_1(t)$ – тотожно кратний корінь визначального рівняння, то в розвиненні (4.36) зберігається тільки перший член, а для знаходження наступних членів потрібно використати нове рівняння розгалуження, зробивши в (4.16) заміну $\lambda(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{r}{l}}\lambda_1(t)+\eta(t,\varepsilon)$. Якщо відповідне визначальне рівняння матиме знову кратний корінь, то процедуру слід повторити, і так далі. При цьому, як показано в [13,29], для кожної ланки діаграми Ньютона можна побудувати стільки розв'язків рівняння (4.16), якою є довжина проекції цієї ланки на вісь абсцис.

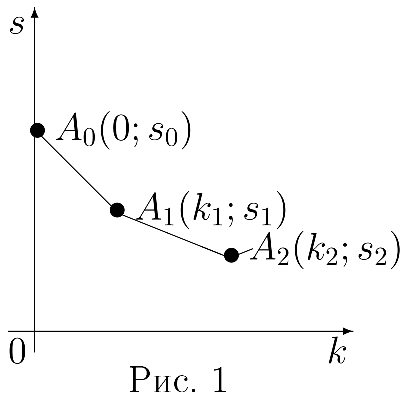


Рис. 1

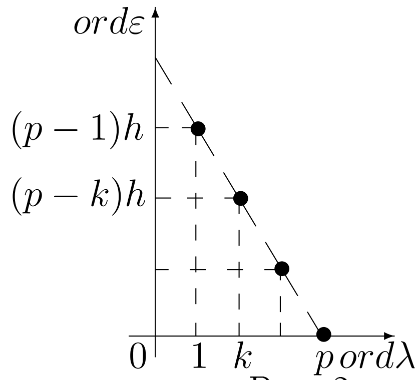


Рис. 2

Аналогічним способом можна знайти й розв'язки рівняння розгалуження (4.33).

Використовуючи цей метод, проаналізуємо рівняння (4.16).

Із формули (4.15) випливає, що на діаграмі немає точок $(k,0), k=\overline{1,p-1}$, але завжди є точка $(p,0)$. Тому довжина проекції всіх ділянок діаграми на вісь абсцис дорівнює p . Це гарантує наявність p малих розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ рівняння (4.16) з урахуванням їх кратності незалено від структури матриць $A_i^{(s)}(t), i=\overline{0,m}, s=0,1,\ldots$.

Незалежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t), i=\overline{0,m}, s=0,1,\ldots$, на діаграмі завжди є точки $(k,(p-k)h), k=\overline{1,p-1}$ (рис.2).

Дійсно, з формули (4.13) маємо

$$L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]=\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=k}\sum_{j=0}^{(p-k)h}(-1)^{i_m+\ldots+i_1+j-1}\Big(W_{H\Gamma}^{((p-k)h)}[i_m,\ldots,i_1,j]\varphi(t),\psi(t)\Big),$$

$k=\overline{1,p-1}$.

Зафіксувавши k, виділимо в цьому виразі доданки, які містять похідну $(p-k)-$го порядку від функції $\lambda^k(t,\varepsilon)$. Для цього виконаємо послідовно наступні дії:

1. З виразу $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]$ виділимо доданки

$$\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=k}(-1)^{i_m+\cdots+i_1+j-1}\left(W_{H\Gamma}^{((p-k)h)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\varphi(t),\psi(t)\right), j=\overline{1,p-k}.$$

2. У виразах $W_{H\Gamma}^{((p-k)h)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j], j=\overline{1,p-k}$ виділимо доданки, які задовольняють такі вимоги:

$a)$ вони містять лише оператори $\Gamma_0^{(kh)}(t), k=\overline{1,m}$, та $\Gamma_j^{(kh)}(t,\xi)$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,m-j}$;

b) оператори $\Gamma_0^{(kh)}(t), k=\overline{1,m}$, в цих доданках знаходяться ліворуч від операторів $\Gamma_j^{(kh)}(t,\xi)$, $j=\overline{1,m}, k=\overline{0,m-j}$.

3. З операторів $\Gamma_0^{(kh)}(t), k=\overline{1,m}$, в зазначених доданках виділимо оператори $\frac{\partial^k P(t,\lambda_0)}{k!\partial\lambda^k}D^k, k=\overline{1,m}$, а з операторів $\Gamma_j^{(kh)}(t,\xi), j=\overline{1,m}, k=\overline{0,m-j}$, — оператори $\left(D^k\lambda^j\right)\frac{\partial^{k+j}P(t,\lambda_0)}{(k+j)!\partial\lambda^{k+j}}, j=\overline{1,m}, k=\overline{0,m-j}$.

Використавши формули (3.46), (3.47), після виконання цих дій отримаємо

$$L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]=\frac{d^{p-k}\lambda^k}{dt^{p-k}}\sum_{j=1}^{\min(p,m)}\left(\frac{\partial^j P(t,\lambda_0)}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{p+1-j}(H_1,H_2,\ldots,H_m)\varphi(t),\psi(t)\right)+$$

$$+\Delta(t,\lambda^k,\varepsilon), k=\overline{1,p-1},$$

або, згідно з (3.55),

$$L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]=\frac{d^{p-k}\lambda^k}{dt^{p-k}}+\Delta(t,\lambda^k,\varepsilon), k=\overline{1,p-1}.$$

де доданок $\Delta(t,\lambda^k,\varepsilon)$ містить похідні від k функцій $\lambda(t,\varepsilon)$, сумарний порядок яких менший, ніж $p-k$, звідки випливає, що $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]\neq 0, k=\overline{1,p-1}$, незалежно від поведінки коефіцієнтів системи рівнянь (4.1).

Звідси випливає таке твердження.

Теорема 4.3. Незалежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t), i=\overline{0,m}, s=0,1,\ldots$, рівняння розгалуження (4.16) має p малих розв'язків $\lambda(t,\varepsilon)$ з урахуванням їх кратності, причому не більше одного нульового.

Проаналізуємо тепер рівняння розгалуження (4.33), що відповідає розв'язкам другої групи. Згідно з (4.32) це рівняння має q малих розв'язків, оскільки на осі абсцис немає точок $(k,0), k=\overline{1,q-1}$, але завжди є точка $(q,0)$ (рис.3). Однак, на відміну від розв'язків першої групи, вираз (4.20) втрачає сенс, якщо $\xi(t,\varepsilon)=0$. Тому, розв'язків другої групи може бути менше, ніж q. Їх кількість дорівнює $q-r$, де r – кратність нульового кореня рівняння розгалуження (4.33). При цьому, в той час як рівняння (4.16) може мати тільки простий нульовий корінь завдяки тому, що $L_{k,(p-k)h}[\lambda^k]\neq 0, k=\overline{1,p-1}$, операторні коефіцієнти $N_{ks}[\xi^k]$ подібною властивістю не володіють. Тому залежно від структури матриць $A_i^{(s)}(t), i=\overline{0,m}, s=0,1,\ldots$, кратність нульового розв'язку рівняння (4.33) може змінюватися від 0 до q.

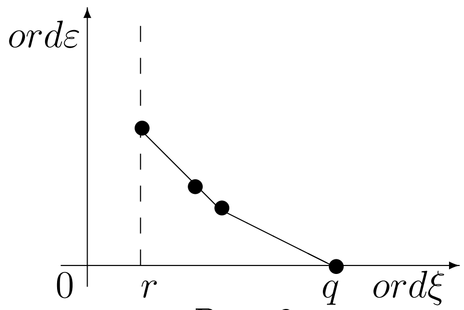


Рис. 3

Як випливає з методу діаграм Ньютона, якщо $N_{ks}[\xi^k] \equiv 0$ при $k < r$; $N_{rs}[\xi^r] \neq 0$ при деякому s, то рівняння (4.33) має нульовий розв'язок кратністю r і $q - r$ ненульових розв'язків (рис. 3).

Покажемо, що остання умова рівносильна наявності в матриці $A_m(t, \varepsilon)$ жорданового ланцюжка векторів завдовжки r відносно операторів $Q_k(t, \xi, \varepsilon), k = \overline{1, m}$, в яких ξ – довільний скалярний множник.

Нехай вектори $y_k(t, \varepsilon), k = \overline{1, r}$, утворюють цей жорданів ланцюжок. Тоді, оскільки

$$A_m(t, \varepsilon) = A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon),$$

виконуються співвідношення

$$\left(A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon)\right) y_1 = 0,$$

$$\left(A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon)\right) y_k + \sum_{j=1}^{\min(k-1,m)} Q_j(t, \xi, \varepsilon) y_{k-j} = 0, k = \overline{2, r},$$

а рівняння

$$\left(A_m^{(0)}(t) + Q_0(t, \varepsilon)\right) y + \sum_{j=1}^{\min(r,m)} Q_j(t, \xi, \varepsilon) y_{r+1-j} = 0$$

нерозв'язне відносно вектора y.

Розглянемо перше з цих рівнянь. Представимо його у вигляді

$$A_m^{(0)}(t) y_1 = -Q_0(t, \varepsilon) y_1.$$

Оскільки воно розв'язне відносно вектора $y_1(t, \varepsilon)$, то

$$y_1(t, \varepsilon) = -G(t) Q_0(t, \varepsilon) y_1(t, \varepsilon) + c\widetilde{\varphi}(t),$$

де c – довільний скалярний множник. Поклавши $c=1$, дістанемо

$$(E+G(t)Q_0(t,\varepsilon))\,y_1(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t).$$

Визначник матриці $E+G(t)Q_0(t,\varepsilon)$ при малих значеннях $\varepsilon>0$ відмінний від нуля. Тому до неї існує обернена $R(t,\varepsilon)=(E+G(t)Q_0(t,\varepsilon))^{-1}$, яку згідно з [58] можна подати у вигляді ряду

$$R(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,(G(t)Q_0(t,\varepsilon))^i\,. \tag{4.38}$$

Тоді $y_1(t,\varepsilon)=R(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t)$. Оскільки рівняння

$$A_m^{(0)}(t)y_k=-\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}-Q_0(t,\varepsilon)y_k,k=\overline{2,r},$$

розв'язні відносно векторів $y_k(t,\varepsilon),k=\overline{2,r}$, то мають місце рівності

$$y_k(t,\varepsilon)=c\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon)-G(t)Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon),k=\overline{2,r}, \tag{4.39}$$

де c – довільний скалярний множник. Поклавши $c=1$ і помноживши отриману рівність зліва на матрицю $R(t,\varepsilon)$ та взявши до уваги (4.38), отримаємо

$$y_k(t,\varepsilon)=R(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}R(t,\varepsilon)G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon),k=\overline{2,r}.$$

З останньої рівності, послідовно виражаючи вектори $y_k(t)$ через власний вектор $\widetilde{\varphi}(t)$, дістанемо

$$y_k(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^j\varepsilon^s\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{mi_m+\ldots+2i_2+i_1=i}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1+j}\varepsilon^s\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t),k=\overline{1,r}. \tag{4.40}$$

Оскільки за припущенням матриця $A_m(t,\varepsilon)$ має жорданів ланцюжок векторів завдовжки r відносно операторів $Q_k(t,\xi,\varepsilon),k=\overline{1,m}$, то мають місце рівності

$$\Big(Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\Big)+\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}\Big(Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\Big)=0,k=\overline{2,r},$$

$$\Big(Q_0(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\Big)+\sum_{j=1}^{\min(r,m)}\Big(Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{r+1-j}(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}(t)\Big)\neq 0. \tag{4.41}$$

Розглянемо вирази

$$G(t)Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon), k=\overline{2,r}.$$

Із (4.39) (при $c=1$) маємо

$$G(t)Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}G(t)Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)-y_k(t,\varepsilon), k=\overline{2,r}.$$

Підставивши сюди (4.40), отримаємо

$$Q_0(t,\varepsilon)y_k(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{\min(k-1,m)}Q_j(t,\xi,\varepsilon)y_{k-j}(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\varepsilon^s W_{GQ}^{(s)}[0,\ldots,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{mi_m+\cdots+2i_2+i_1=i}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i_m+\cdots+i_2+i_1+j-1}\varepsilon^s W_{GQ}^{(s)}[i_m,\ldots,i_2,i_1,j]\widetilde{\varphi}(t), k=\overline{2,r}.$$

Із врахуванням цих формул, а також (4.30), (4.31), (4.34), співвідношення (4.41) набувають вигляду

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{0s}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon^s N_{is}[\xi^i]=0, k=\overline{2,r},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{0s}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\varepsilon^s N_{is}[\xi^i]\neq 0,$$

звідки випливає, що $N_{is}[\xi^i]=0$ при $i=\overline{0,r-1}$, а $N_{rs}[\xi^r]\neq 0$ при деякому s, а це означає, що рівняння розгалуження (4.33) має нульовий корінь кратністю r. Правильним також є і обернене твердження.

Отже, справеджується наступна теорема.

Теорема 4.4. Кількість розв'язків другої групи, що відповідають нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць $P(t,\lambda)$ кратністю q, дорівнює $q-r$, де r – довжина жорданового ланцюжка векторів матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $Q_k(t,\xi,\varepsilon), k=\overline{1,m}$, в яких ξ – довільний скалярний множник.

З теорем 4.3, 4.4 випливає, що система рівнянь (4.1) має $mn - r$ розв'язків: p розв'язків першої групи вигляду (4.2) і $q - r$ розв'язків другої групи вигляду (4.20), де r – довжина жорданового ланцюжка матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $Q_k(t,\varepsilon), k = \overline{1,m}$, (вони утворюються з $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$ при $\xi = 1$). В сукупності вони утворюють лінійно незалежну систему розв'язків, оскільки вектори $u(t,\varepsilon)$ і $v(t,\varepsilon)$, які в них фігурують, є власними (або приєднаними) векторами збурених операторних в'язок, а функції $\lambda(t,\varepsilon)$ і $\xi(t,\varepsilon)$ – власними значеннями, яким вони відповідають.

Цей результат цілком узгоджується з теоремою 2.3, доведеною в розділі 2. Таким чином, кількість формальних розв'язків однорідної системи (4.1), які можна побудувати у вигляді (4.2) або у вигляді (4.20), дорівнює кількості точних лінійно незалежних розв'язків цієї системи, лінійна комбінація яких утворює її загальний розв'язок. І хоча відповідні формальні ряди, як правило, розбігаються, але, як випливає з досліджень, проведених у [12], вони є асимптотичними розвиненнями деяких скалярних чи векторних функцій. Тому за певних умов побудовані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями точних розв'язків даної системи рівнянь.

Таким чином, за відсутності точок повороту і незмінності на заданому відрізку діаграм Ньютона, побудованих за коефіцієнтами відповідних рівнянь розгалуження, описаний метод дозволяє побудувати асимптотику загального розв'язку системи (4.1) у вигляді розвинень за цілими або дробовими степенями малого параметра.

Зазначимо, що теореми 4.1–4.4 узагальнюють результати, отримані в [58] для сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь другого порядку, тобто при $m = 2$. Теореми 3.27–3.30 і формули для обчислення коефіцієнтів відповідних рівнянь розгалужень, наведені в цій роботі, випливають, як наслідок, з теорем 4.1–4.4 та відповідних формул, отриманих у даному розділі.

Виходячи з методу діаграм Ньютона, наведемо деякі конкретні результати, що стосуються побудови розв'язків першої та другої груп системи рівнянь (4.1).

Якщо

$$L_{01}(t)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_0^i(t)\left(A_i^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)+\delta_{1,h}\sum_{i=1}^{m}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_i^{(0)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right)+$$

$$+\delta_{1,h}\sum_{i=2}^{m}D_1[\lambda_0^{i-1}]\left(A_i^{(0)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)\neq 0,\forall t\in[0;T],$$

то діаграма Ньютона для розв'язків першої групи має вигляд відрізка, що з'єднує точки $(0;1)$ та $(p;0)$, нахил якого дорівнює $\frac{1}{p}$ (рис.4), а відповідне визначальне рівняння $\lambda_1^p+L_{01}(t)=0$ матиме p простих відмінних від нуля, коренів. Тому система рівнянь (4.1) має p формальних розв'язків першої групи, де скалярна функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображуються розвиненнями за степенями $\mu=\varepsilon^{\frac{1}{p}}$:

$$\lambda(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\lambda_s(t),u(t,\varepsilon)=\varphi(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s u_s(t).\qquad(4.42)$$

Коефіцієнти цих розвинень можна знайти з рівняння розгалуження (4.16) та виразу (4.17). Використовуючи формулу

$$\lambda^k(t,\mu)=\sum_{s=k}^{\infty}\mu^s P_k^{(s)}(\lambda),k\geq 1,$$

та лінійність операторного виразу $L_{ks}[\lambda^k]$, підставимо (4.42) у (4.16) і прирівняємо вирази при однакових степенях μ. У результаті отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій $\lambda_k(t),k=1,2,\ldots$:

$$P_p^{(p)}(\lambda)+L_{01}(t)=0;$$

$$P_p^{(p+s)}(\lambda)+\sum_{k=p+1}^{p+s}P_k^{(p+s)}(\lambda)L_{k0}+L_{0,s-1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{p+s-1}{p}\right]}\sum_{i=1}^{p+s-kp}L_{ik}\left[P_i^{(p+s-kp)}(\lambda)\right]=0,$$

$s=1,2,\ldots.$

З першого рівняння цієї системи відразу дістанемо

$$\lambda_1(t)=\sqrt[p]{-L_{01}(t)}.$$

Потім, скориставшись формулою

$$P_p^{(p+s)}(\lambda)=p\lambda_{s+1}(t)\lambda_1^{p-1}(t)+\widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda),\qquad(4.43)$$

де $\widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda)$ – та частина виразу $P_p^{(p+s)}(\lambda)$, яка містить тільки ті функції $\lambda_i(t)$, індекси яких $i \le s$, з решти рівнянь отримаємо

$$\lambda_{s+1}(t) = \frac{1}{p\lambda_1^{p-1}(t)}\left[\widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda) + \sum_{k=p+1}^{p+s} P_k^{(p+s)}(\lambda) L_{k0} + L_{0,s+1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p+s-1}{p}\right]} \sum_{i=1}^{p+s-kp} L_{ik}\left[P_i^{(p+s-kp)}(\lambda)\right]\right],$$

$s = 1, 2, \ldots$.

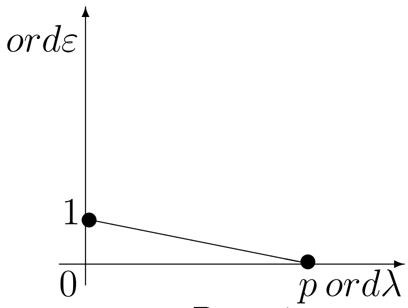


Рис. 4

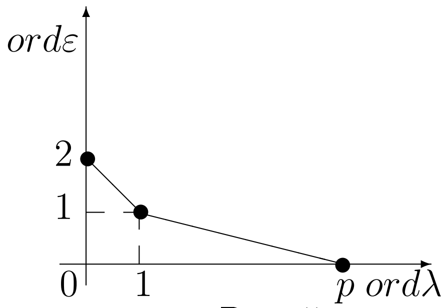


Рис. 5

Підставивши отриманий ряд у (4.18) і згрупувавши доданки зі степенями μ^s, дістанемо відповідні формули для визначення векторів $u_s(t)$:

$$u_s(t) = -\sum_{k=1}^{s} P_k^{(s)}(\lambda) H(t) \widetilde{L}_{k0}\varphi(t) - H(t)\widetilde{L}_{0,s-p+1}\varphi(t) - \sum_{k=1}^{\left[\frac{s-1}{p}\right]} \sum_{i=1}^{s-kp} H(t)\widetilde{L}_{ik}\left[P_i^{(s-kp)}(\lambda)\right]\varphi(t),$$

$s = 1, 2, \ldots$. Цей результат збігається з твердженням теореми 3.2, яке доведено іншим способом.

Якщо $L_{01}(t) \equiv 0, \forall t \in [0; T]$, але

$$L_{02}(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_0^i(t)\left(A_i^{(2)}(t)\varphi(t), \psi(t)\right) + \sum_{i=1}^{m} C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_i^{(2-h)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t)\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m} D_1[\lambda_0^{i-2}]\left(A_i^{(2-2h)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t)\right) + \sum_{i=2}^{m} C_{i-1}^{i-2}\lambda_0^{i-2}\left(A_i^{(2-2h)}(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}, \psi(t)\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m} D_1[\lambda_0^{i-1}]\left(A_i^{(2-h)}(t)\varphi(t), \psi(t)\right) + \sum_{i=3}^{m} D_2[\lambda_0^{i-2}]\left(A_i^{(2-2h)}(t)\varphi(t), \psi(t)\right) -$$

$$-\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{i} \lambda_0^i(t)\left(A_{i-j}^{(1)}(t)H(t)A_j^{(1)}(t)\varphi(t), \psi(t)\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{i} C_j^{j-1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_{i-j}^{(1)}(t)H(t)A_j^{(1-h)}(t)\varphi(t), \psi(t)\right) -$$

$$-\sum_{i=2}^{2m}\sum_{j=2}^{i}\lambda_0^{i-j}(t)D_1[\lambda_0^{j-1}]\left(A_{i-j}^{(1)}(t)H(t)A_j^{(1-h)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-j}^{i-j-1}\lambda_0^{i-j-1}(t)\left(A_{i-j}^{(1-h)}(t)D\lambda_0^{j}(t)H(t)A_j^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=2}^{2m}\sum_{j=1}^{i-1}C_{i-j}^{i-j-1}C_j^{j-1}\lambda_0^{i-j-1}(t)\left(A_{i-j}^{(1-h)}(t)D\lambda_0^{j-1}(t)H(t)A_j^{(1-h)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=3}^{2m}\sum_{j=2}^{i-1}C_{i-j}^{i-j-1}\lambda_0^{i-j-1}(t)\left(A_{i-j}^{(1-h)}(t)DD_1[\lambda_0^{j-1}]H(t)A_j^{(1-h)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=2}^{2m}\sum_{j=0}^{i-2}D_1[\lambda_0^{i-j-1}]\lambda_0^{j}(t)\left(A_{i-j}^{(1-h)}(t)H(t)A_j^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=3}^{2m}\sum_{j=1}^{i-2}C_j^{j-1}D_1[\lambda_0^{i-j-1}]\lambda_0^{j-1}(t)\left(A_{i-j}^{(1-h)}(t)H(t)A_j^{(1-h)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right)-$$

$$-\sum_{i=4}^{2m}\sum_{j=2}^{i-2}D_1[\lambda_0^{i-j-1}]D_1[\lambda_0^{j-1}]\left(A_{i-j}^{(1-h)}(t)H(t)A_j^{(1-h)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)\neq 0,$$

$$L_{11}[\lambda_1](t)=\lambda\sum_{i=1}^{m}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_i^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)+$$

$$+2\lambda\delta_{1,h}\sum_{i=2}^{m}C_i^{i-2}\lambda_0^{i-2}(t)\left(A_i^{(0)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right)+$$

$$+\delta_{1,h}\sum_{i=2}^{m}C_{i-1}^{1}D_1[\lambda\lambda_0^{i-2}]\left(A_i^{(0)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\lambda\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-j}^{1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_{i-j}^{(0)}(t)H(t)A_j^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\lambda\delta_{1,h}\sum_{i=2}^{2m}\sum_{j=1}^{i-1}C_{i-j}^{1}C_j^{1}\lambda_0^{i-2}(t)\left(A_{i-j}^{(0)}(t)H(t)A_j^{(0)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},\psi(t)\right)-$$

$$-\lambda\delta_{1,h}\sum_{i=3}^{2m}\sum_{j=2}^{i-1}C_{i-j}^{1}\lambda_0^{i-j-1}(t)D_1[\lambda_0^{j-1}]\left(A_{i-j}^{(0)}(t)H(t)A_j^{(0)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\lambda\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{i}C_j^{1}\lambda_0^{i-1}(t)\left(A_{i-j}^{(1)}(t)H(t)A_j^{(0)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\delta_{1,h}\sum_{i=2}^{2m}\sum_{j=1}^{i-1}C_{i-j}^{1}C_{j}^{1}\lambda_0^{i-j-1}(t)\left(A_{i-j}^{(0)}(t)D\lambda\lambda_0^{j-1}(t)H(t)A_{j}^{(0)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)-$$

$$-\lambda\delta_{1,h}\sum_{i=3}^{2m}\sum_{j=1}^{i-2}C_{j}^{1}D_1[\lambda_0^{i-j-1}]\lambda_0^{j-1}(t)\left(A_{i-j}^{(0)}(t)H(t)A_{j}^{(0)}(t)\varphi(t),\psi(t)\right)\neq 0,\forall t\in[0;T]$$

то при $p>2$ відповідна діаграма Ньютона має вигляд ламаної, яка з'єднує точки $(0;2),(1;1)$ та $(p;0)$ (рис.5), а відповідне визначальне рівняння $\lambda_1^p+L_{11}[\lambda_1](t)+L_{02}(t)=0$ матиме p простих, відмінних від нуля коренів. Тому $p-1$ розв'язоків першої групи будуються у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$ і один розв'язок – за цілими степенями ε. Якщо ж $p=2$, то обидва розв'язки будуються за цілими степенями ε. При цьому, якщо $h=1,p=2$, коефіцієнти відповідного розвинення функції $\lambda(t,\varepsilon)$ визначаються не з алгебраїчних, а з диференціальних рівнянь, оскільки оператори $L_{11}[\lambda]$ у цьому разі містять операцію диференціювання по t.

Наведемо деякі результати стосовно розв'язків другої групи.

Якщо

$$N_{01}(t)=\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)\neq 0,\forall t\in[0;T],$$

то відповідна діаграма Ньютона має вигляд відрізка, що з'єднує точки $(0;1)$ та $(q;0)$ (рис.6), нахил якого дорівнює $\frac{1}{q}$, а відповідне визначальне рівняння $\xi_1^q+N_{01}(t)=0$ матиме q відмінних від нуля коренів. Тому в цьому випадку система рівнянь (4.1) матиме q розв'язків другої групи, а відповідні розвинення для функцій $\xi(t,\varepsilon)$ і векторів $v(t,\varepsilon)$ будуватимуться за степенями $\nu=\varepsilon^{\frac{1}{q}}$:

$$\xi(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\nu^s\xi_s(t),v(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\nu^s v_s(t). \qquad (4.44)$$

Коефіцієнти цих розвинень можна знайти з рівняння розгалуження (4.33) та виразу (4.35). Використовуючи формулу

$$\xi^k(t,\nu)=\sum_{s=k}^{\infty}\nu^s P_k^{(s)}(\xi),k\geq 1,$$

та лінійність операторного виразу $N_{ks}[\xi^k]$, підставимо (4.44) у (4.33) і прирівняємо вирази при однакових степенях ν. У результаті отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій $\xi_k(t),k=1,2,\ldots$:

$$P_q^{(q)}(\xi)+N_{01}(t)=0;$$

$$P_q^{(q+s)}(\xi)+\sum_{k=q+1}^{q+s}P_k^{(q+s)}(\xi)N_{k0}+N_{0,s-1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{q+s-1}{q}\right]}\sum_{i=1}^{q+s-kq}N_{ik}\left[P_i^{(q+s-kq)}(\xi)\right]=0,$$

$s=1,2,\ldots.$

З першого рівняння цієї системи відразу дістанемо

$$\xi_1(t)=\sqrt[q]{-N_{01}(t)}.$$

Потім, скориставшись формулою (4.43), з наступних рівнянь отримаємо

$$\xi_{s+1}(t)=\frac{-1}{q\xi_1^{q-1}(t)}\left[\widetilde{P}_q^{(q+s)}(\xi)+\sum_{k=q+1}^{q+s}P_k^{(q+s)}(\xi)N_{k0}+M_{0,s+1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{q+s-1}{q}\right]}\sum_{i=1}^{q+s-kq}N_{ik}\left[P_i^{(q+s-kq)}(\xi)\right]\right],$$

$s=1,2,\ldots.$

Підставивши отриманий ряд у (4.35) і згрупувавши доданки з однаковими степенями ν, маємо відповідні формули для визначення векторів $v_s(t)$:

$$v_s(t)=-\sum_{k=1}^{s}P_k^{(s)}(\xi)G(t)\widetilde{N}_{k0}\widetilde{\varphi}(t)-G(t)\widetilde{N}_{0,s-q+1}\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{k=1}^{\left[\frac{s-1}{q}\right]}\sum_{i=1}^{s-kq}G(t)\widetilde{N}_{ik}\left[P_i^{(s-kq)}(\xi)\right]\widetilde{\varphi}(t),$$

$s=1,2,\ldots.$ Цей результат збігається з теоремою 3.2, доведеною іншим способом.

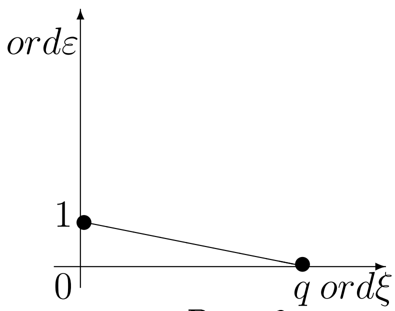


Рис. 6

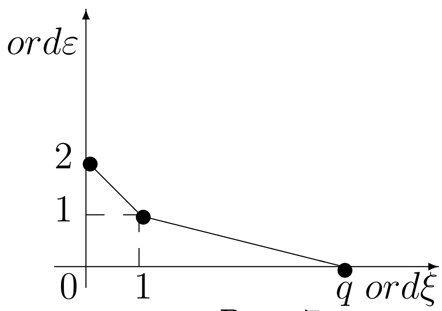


Рис. 7

Якщо ж $N_{01}(t)\equiv 0, \forall t\in[0;T]$, але

$$N_{02}(t)=\left(\left(A_m^{(2)}(t)-A_m^{(1)}(t)G(t)A_m^{(1)}(t)\right)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)\neq 0,$$

$$N_{11}[\xi_0](t)=\xi^m\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}C_{i+m-1}^{j+m-1}D_j\left[\frac{1}{\xi^{m-1}}\right]\left(A_{i+m-1}^{(1-ih)}(t)\frac{d^{i-j}\widetilde{\varphi}(t)}{dt^{i-j}},\widetilde{\psi}(t)\right)-$$

$$-\xi\left(\left(A_{m-1}^{(0)}(t)G(t)A_m^{(1)}(t)+A_m^{(1)}(t)G(t)A_{m-1}^{(0)}(t)\right)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)\neq 0, \forall t\in[0;T],$$

то відповідна діаграма має вигляд ламаної, що з'єднує точки $(0;2),(1;1),(q;0)$ (рис.7), а відповідне визначальне рівняння $\xi_0^q + N_{11}[\xi_0](t) + N_{02}(t) = 0$ матиме q простих відмінних від нуля коренів. Якщо $q > 2$, то $q-1$ розв'язків другої групи будуються у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{q-1}}$ і один розв'язок – за цілими степенями ε. Якщо ж $q = 2$, то обидва розв'язки будуються за цілими степенями ε.

Розглянемо ще один важливий випадок. Вважатимемо, що всі матриці $A_m^{(i)}(t) \equiv 0$ при $i = 1, 2, \dots$, тобто при старшій похідній у системі (4.1) міститься вироджена матриця $A_m^{(0)}(t)$. У цьому разі

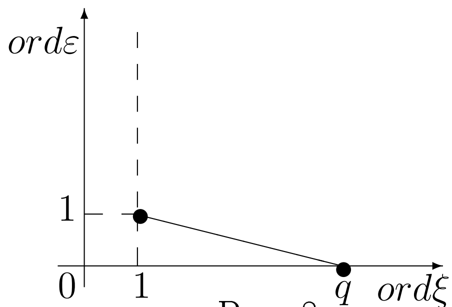


Рис. 8

$$L_{01}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_0^i(t) \left(A_i^{(1)}(t)\varphi(t), \psi(t) \right) + \delta_{1,h} \sum_{i=1}^{m} C_i^{i-1} \lambda_0^{i-1}(t) \left(A_i^{(0)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right) +$$

$$+\delta_{1,h} \sum_{i=2}^{m} D_1[\lambda_0^{i-1}] \left(A_i^{(0)}(t)\varphi(t), \psi(t) \right), N_{0i}(t) = 0, i = 0, 1, \dots .$$

Якщо $L_{01}(t) \neq 0$ і $N_{11}(t) \neq 0, \forall t \in [0;T]$, то діаграма Ньютона, яка відповідає розв'язкам першої групи, являє собою відрізок, що з'єднує точки $(0;1)$ та $(p;0)$ (рис.4), а друга діаграма – відрізок, що з'єднує точки $(1;1)$ та $(q;0)$ (рис.8).

У результаті отримаємо наступну теорему.

Теорема 4.5. Нехай у системі (4.1) матриці $A_m^{(i)}(t) \equiv 0$ при $i \geq 1$, гранична в'язка матриць $P(t, \lambda)$ регулярна і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю $p > 1$ і один нескінченний – кратністю $q > 1$. Тоді, якщо виконуються умови $L_{01}(t) \neq 0, N_{11}(t) \neq 0, \forall t \in [0;T]$, то система диференціальних рівнянь (4.1) матиме p формальних розв'язків вигляду (4.2), і $q-1$ розв'язків – вигляду (4.20), де функції $\lambda(t,\mu), \xi(t,\nu)$ і вектор-функції $u(t,\mu), v(t,\nu)$ зображаються формальними розвиненнями (4.42), (4.44), в яких $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}, \nu = \sqrt[q-1]{\varepsilon}$.

4.4. Приклад

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon^3\frac{d^3x_2}{dt^3}+\varepsilon^2\frac{d^2x_1}{dt^2}+3\varepsilon^2t\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\varepsilon t\frac{dx_1}{dt}+3\varepsilon t^2\frac{dx_2}{dt}+(t^2-\varepsilon)x_1+t^3x_2=0,\\ \varepsilon^5\frac{d^3x_1}{dt^3}+\varepsilon^5\frac{d^3x_2}{dt^3}+\varepsilon^2\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\varepsilon t\frac{dx_2}{dt}+t^2x_2=0,\end{cases}$$

де $x_1(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon)$ – шукані скалярні функції, $t\in[0;1]$.

Запишемо її у векторно-матричний формі:

$$\varepsilon^3\Big(A_3^{(0)}(t)+\varepsilon^2A_3^{(2)}(t)\Big)\frac{d^3x}{dt^3}+\varepsilon^2A_2^{(0)}(t)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon A_1^{(0)}(t)\frac{dx}{dt}+\Big(A_0^{(0)}(t)+\varepsilon A_0^{(1)}(t)\Big)x=0, \tag{4.45}$$

де

$$A_3^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, A_3^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, A_2^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}1&3t\\0&1\end{bmatrix}, A_1^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}2t&3t^2\\0&2t\end{bmatrix}, A_0^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}t^2&t^3\\0&t^2\end{bmatrix},$$

$$A_0^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}, x=\mathrm{col}\,[x_1,x_2]\,.$$

Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda)=\begin{bmatrix}(\lambda+t)^2&(\lambda+t)^3\\0&(\lambda+t)^2\end{bmatrix}$$

має одне власне значення $\lambda_0(t)=-t$ кратності 4. Знайдемо скінченні та нескінченні елементарні дільники цієї в'язки. Оскільки в'язка

$$P(t,\lambda,\xi)=\begin{bmatrix}\xi(\lambda+t\xi)^2&(\lambda+t\xi)^3\\0&\xi(\lambda+t\xi)^2\end{bmatrix}$$

має два інваріантні многочлени $i_1(\lambda,\xi)=\xi^2(\lambda+t\xi)^2, i_2(\lambda,\xi)=(\lambda+t\xi)^2$, то в'язка $P(t,\lambda)$ має два скінченні елементарні дільники $(\lambda+t)^2$, $(\lambda+t)^2$ кратністю 2 кожний і один нескінченний – тієї ж кратності.

При старшій похідній у системі (4.45) знаходиться неособлива матриця, тому згідно з теоремою 2.2 її фундаментальна система складається з 6-и лінійно незалежних частинних розв'язків.

Знайдемо розв'язки, які відповідають скінченним елементарним дільникам. З цією метою перевіримо, чи виконується умова 3.10° теореми 3.3. Оскільки матриця $P(t,\lambda_0(t))$ є нульовою, то $\varphi_1 = \mathrm{col}\,[1,0]$, $\varphi_2 = \mathrm{col}\,[0,1]$, $\psi_1 = \mathrm{col}\,[1,0]$, $\psi_2 = \mathrm{col}\,[0,1]$. При цьому виконується умова (3.87).

Матриця

$$R_1(t) = \begin{bmatrix} (K(t)\varphi_1(t),\psi_1(t)) & (K(t)\varphi_1(t),\psi_2(t)) \\ (K(t)\varphi_2(t),\psi_1(t)) & (K(t)\varphi_2(t),\psi_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

має прості відмінні від нуля власні значення $\eta_1 = -1$, $\eta_2 = -2$. Отже, умова 3.10° теореми 3.3 виконується. Тому розв'язки даної системи, що відповідають скінченним елементарним дільникам, побудуємо у вигляді

$$x_i(t,\varepsilon) = \left(u_i^{(0)}(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_i^{(1)}(t)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{(1)}(\tau)\right) d\tau\right), i = \overline{1,4},$$

обмежившись першими двома членами у відповідних розвиненнях.

Згідно з формулами (3.93) маємо

$$\lambda_j^{(1)}(t) = \cos\frac{\arg 1 + 2\pi(j-1)}{2} + i\sin\frac{\arg 1 + 2\pi(j-1)}{2}, j = 1,2,$$

$$\lambda_j^{(1)}(t) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\arg 2 + 2\pi(j-3)}{2} + i\sin\frac{\arg 2 + 2\pi(j-3)}{2}\right), j = 3,4,$$

звідки

$$\lambda_1^{(1)}(t) = 1, \lambda_2^{(1)}(t) = -1, \lambda_3^{(1)}(t) = \sqrt{2}, \lambda_4^{(1)}(t) = -\sqrt{2}.$$

Далі, користуючись формулами (3.94), (3.81), знаходимо

$$\varphi_1^*(t) = y_1^{(0)}(t) = \mathrm{col}[0,1]\,, \varphi_2^*(t) = y_2^{(0)}(t) = \mathrm{col}[1,0]\,, \psi_1^*(t) = \mathrm{col}[0,1]\,, \psi_2^*(t) = \mathrm{col}\,[1,0]\,,$$

$$u_1^{(0)}(t) = u_2^{(0)}(t) = \mathrm{col}\,[0,1]\,, u_3^{(0)}(t) = u_4^{(0)}(t) = \mathrm{col}\,[1,0]\,.$$

Щоб визначити вектори $u_i^{(1)}(t), i = \overline{1,4}$, знайдемо функції $\lambda_i^{(2)}(t), i = \overline{1,4}$, за формулою

$$\lambda_i^{(2)}(t) = \frac{\left(f_i^{(1)}(t), \psi^*_{\left[\frac{i}{3}\right]+1}(t)\right)}{2\lambda_i^{(1)}(t)}, i = \overline{1,4},$$

де

$$f_i^{(1)}(t) = \lambda_i^{(1)}(t) Q\sigma^2(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3) g_i^{(2)}(t) -$$
$$- \left(\lambda_i^{(1)}(t)\right)^3 \sum_{j=1}^{3} Q\frac{\partial^j P(t,\lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{4-j}(H_1,H_2,H_3) y^{(0)}_{\left[\frac{i}{3}\right]+1}(t) + Q\widetilde{g}_i^{(3)}(t),$$

$i=\overline{1,4}$. Оскільки $\sigma^2(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2,\widetilde{H}_3)=\operatorname{diag}\{0,0\}$, $\sigma^2(H_1,H_2,H_3)=\sigma^3(H_1,H_2,H_3)=$ $=\operatorname{diag}\{0,0\}$, то

$$f_i^{(1)}(t)=-\left(\lambda_i^{(1)}(t)\right)^3 QA_3^{(0)}(t)y^{(0)}_{\left[\frac{i}{3}\right]+1}(t)+Q\widetilde{g}_i^{(3)}(t), i=\overline{1,4}.$$

Враховуючи, що $\frac{du_i^{(0)}(t)}{dt}=\operatorname{col}\left[0,0\right], i=\overline{1,4}$, вектори $\widetilde{g}_i^{(3)}(t), i=\overline{1,4}$, визначимо за формулою

$$\widetilde{g}_i^{(3)}(t)=-A_0^{(1)}(t)u_i^{(0)}(t)-\frac{d\lambda_i^{(1)}(t)}{dt}A_2^{(0)}(t)u_i^{(0)}(t)-$$

$$-\left(2\frac{d\lambda_0(t)\lambda_i^{(1)}(t)}{dt}+\lambda_0(t)\frac{d\lambda_i^{(1)}(t)}{dt}+\lambda_i^{(1)}(t)\frac{d\lambda_0(t)}{dt}\right)A_3^{(0)}(t)u_i^{(0)}(t), i=\overline{1,4}.$$

Провівши відповідні обчислення, отримаємо

$$\widetilde{g}_1^{(3)}(t)=\operatorname{col}\left[3,0\right], f_1^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[2,0\right], \lambda_1^{(2)}(t)=0,$$

$$\widetilde{g}_2^{(3)}(t)=\operatorname{col}\left[-3,0\right], f_2^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[-2,0\right], \lambda_2^{(2)}(t)=0,$$

$$\widetilde{g}_3^{(3)}(t)=\operatorname{col}\left[1,0\right], f_3^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[1,0\right], \lambda_3^{(2)}(t)=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\widetilde{g}_4^{(3)}(t)=\operatorname{col}\left[1,0\right], f_4^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[1,0\right], \lambda_4^{(2)}(t)=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Тоді за формулою

$$y_i^{(1)}(t)=\left(R_1(t)-\eta_{\left[\frac{i}{3}\right]+1}(t)E\right)^+\left(f_i^{(1)}(t)-2\lambda_i^{(1)}(t)\lambda_i^{(2)}(t)\varphi^*_{\left[\frac{i}{3}\right]+1}(t)\right), i=\overline{1,4},$$

знаходимо:

$$y_1^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[-2,0\right], y_2^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[2,0\right], y_3^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[0,0\right], y_4^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[0,0\right].$$

Звідси остаточно маємо:

$$u_1^{(1)}(t)=-2\operatorname{col}[1,0]+0\operatorname{col}[0,1]=\operatorname{col}[-2,0], u_2^{(1)}(t)=2\operatorname{col}[1,0]+0\operatorname{col}[0,1]=\operatorname{col}[2,0],$$

$$u_3^{(1)}(t)=0\operatorname{col}[1,0]+0\operatorname{col}[0,1]=\operatorname{col}\left[0,0\right], u_4^{(1)}(t)=0\operatorname{col}[1,0]+0\operatorname{col}[0,1]=\operatorname{col}[0,0].$$

Отже, розв'язки системи (4.45), які відповідають скінченним елементарним дільникам, мають вигляд

$$x_1(t,\varepsilon)=\operatorname{col}\left[-2\varepsilon^{\frac{1}{2}},1\right]\exp\left(-\varepsilon^{-1}\left(\frac{t^2}{2}-\varepsilon^{\frac{1}{2}}t\right)\right)+O(\varepsilon),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[2\varepsilon^{\frac{1}{2}}, 1\right] \exp\left(-\varepsilon^{-1}\left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t\right)\right) + O(\varepsilon),$$

$$x_3(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,[1,0] \exp\left(-\varepsilon^{-1}\left(\frac{t^2}{2} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{2} t\right)\right) + O(\varepsilon),$$

$$x_4(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,[1,0] \exp\left(-\varepsilon^{-1}\left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{2} t\right)\right) + O(\varepsilon).$$

Перейдемо до побудови розв'язків системи (4.45), які відповідають кратному нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць $P(t,\lambda)$. Оскільки $A_3^{(1)}(t) = \mathrm{diag}\{0,0\}$, то умова 3.7° теореми 3.2 не виконується. У зв'язку з цим для побудови розв'язків другої групи використаємо метод діаграм Ньютона.

Спочатку знайдемо вектори $\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)$:

$$A_3^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t) = 0, \left(A_3^{(0)}(t)\right)^* \widetilde{\psi}(t) = 0,$$

звідки $\widetilde{\varphi}(t) = \mathrm{col}\,[1,0]\,, \widetilde{\psi}(t) = \mathrm{col}\,[0,1]\,.$

Далі знайдемо коефіцієнти рівняння розгалуження (4.33):

$$N_{01}(t) = \left(A_3^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0,$$

$$N_{02}(t) = \left(\left(A_3^{(2)}(t) - A_3^{(1)}(t)G(t)A_3^{(1)}(t)\right)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 1,$$

$$N_{11}[\xi](t) = \xi^3 \textstyle\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i} C_{i+2}^{j+2} D_j\left[\frac{1}{\xi^2}\right]\left(A_{i+2}^{(1-i)}(t)\frac{d^{i-j}\widetilde{\varphi}(t)}{dt^{i-j}}, \widetilde{\psi}(t)\right) -$$

$$-\xi\left(\left(A_2^{(0)}(t)G(t)A_3^{(1)}(t) + A_3^{(1)}(t)G(t)A_2^{(0)}(t)\right)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) = 0.$$

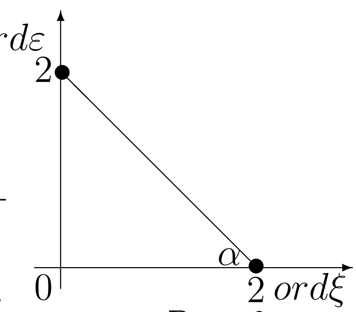


Рис. 9

Відповідна діаграма зображена на рис. 9. Оскільки її нахил $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, то розв'язки другої групи потрібно будувати за цілими степенями параметра ε:

$$\xi(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \xi^{(s)}(t), \tag{4.46}$$

$$v(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s v^{(s)}(t).$$

Довжина проекції діаграми на вісь абсцис дорівнює 2, тому цих розв'язків має бути два.

Щоб визначити невідомі функції $\xi^{(s)}(t), s = 1, 2, \ldots,$ підставимо (4.46) у рівняння розгалуження

$$\xi^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \xi^k N_{k0}(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s N_{0s}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s N_{ks}[\xi^k](t) = 0.$$

Одночасно для визначення векторів $v^{(s)}(t), s=1,2,\ldots,$ підставимо цей ряд у вираз

$$v(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\xi^k G(t)\widetilde{N}_{k0}(t)\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{0s}(t)\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{ks}[\xi^k](t)\widetilde{\varphi}(t).$$

Перегрупувавши доданки, дістанемо

$$\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s P_2^{(s)}(\xi)+\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty}\varepsilon^s P_k^{(s)}(\xi)N_{k0}(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{0s}(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{ks}\left[\sum_{i=k}^{\infty}\varepsilon^i P_k^{(i)}(\xi)\right](t)=0, \tag{4.47}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s v^{(s)}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty}\varepsilon^s P_k^{(s)}(\xi)G(t)\widetilde{N}_{k0}(t)\widetilde{\varphi}(t)-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{0s}(t)\widetilde{\varphi}(t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s G(t)\widetilde{N}_{ks}\left[\sum_{i=k}^{\infty}\varepsilon^s P_k^{(i)}(\xi)\right](t)\widetilde{\varphi}(t). \tag{4.48}$$

У виразах (4.47) та (4.48) прирівняємо коефіцієнти при ε^1 і ε^2. У результаті дістанемо

$$P_2^{(2)}(\xi)+N_{02}(t)=0, \tag{4.49}$$

$$v^{(1)}(t)=-\xi^{(1)}(t)G(t)A_2^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t)-G(t)A_3^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \tag{4.50}$$

$$v^{(2)}(t)=-\left(P_1^{(2)}(\xi)G(t)\widetilde{N}_{10}(t)+P_2^{(2)}(\xi)G(t)\widetilde{N}_{20}(t)\right)\widetilde{\varphi}(t)-G(t)\widetilde{N}_{02}(t)\widetilde{\varphi}(t). \tag{4.51}$$

З рівняння (4.49) знайдемо $\xi_1^{(1)}(t)=i, \xi_2^{(1)}(t)=-i$. Тоді з (4.50), (4.51) маємо

$$v_1^{(1)}(t)=-\xi_1^{(1)}(t)G(t)A_2^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t)-G(t)A_3^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t)=\mathrm{col}\,[0,-i]\,,$$

$$v_2^{(1)}(t)=-\xi_2^{(1)}(t)G(t)A_2^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t)-G(t)A_3^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t)=\mathrm{col}\,[0,i]\,.$$

Далі прирівняємо у виразі (4.47) коефіцієнти при ε^3. Для цього обчислимо $N_{12}[\xi^1](t)$ і $N_{21}[\xi^2](t)$. Враховуючи (4.31), отримаємо

$$N_{12}[\xi^1](t)=\left(Q_1^{(2)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)-\left(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(2)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)-$$
$$-\left(\left(Q_1^{(1)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)+Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(1)}(t,\xi)\right)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)-$$
$$-\left(Q_0^{(2)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)+\left(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right)+$$
$$+\left(\left(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)+Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\right)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right),$$

$$N_{21}[\xi^2](t) = \Big(Q_2^{(1)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\Big) - \Big(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(1)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\Big) -$$
$$- \Big(\Big(Q_2^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t) + Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_2^{(0)}(t,\xi)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\Big) -$$
$$- \Big(Q_1^{(1)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\Big) + \Big(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\Big) +$$
$$+ \Big(\Big(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi) + Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)\Big)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\Big).$$

Враховуючи структуру операторів $Q_0^{(s)}(t)$, $Q_k^{(s)}(t,\xi), k = \overline{1,3}, s \geq 0$, неважко переконатися, що $N_{12}[\xi^1](t) = \xi(t)$, $N_{21}[\xi^2](t) = 0$. Тоді функції $\xi_1^{(2)}(t)$, $\xi_2^{(2)}(t)$ визначатимуться з рівняння

$$P_2^{(3)}(\xi) + P_3^{(3)}(\xi)N_{30}(t) + N_{03}(t) + \xi^{(1)}(t) = 0$$

або

$$2\xi^{(2)}(t)\xi^{(1)}(t) + \Big(\xi^{(1)}(t)\Big)^3 N_{30}(t) + N_{03}(t) + \xi^{(1)}(t) = 0.$$

Оскільки $N_{30}(t) = -t$, $N_{03}(t) = 0$, то звідси маємо

$$\xi^{(2)}(t) = \frac{t\left(\xi^{(1)}(t)\right)^2 - 1}{2}.$$

Враховуючи отримані значення $\xi_1^{(1)}(t)$, $\xi_2^{(1)}(t)$, дістанемо

$$\xi_1^{(2)}(t) = -\frac{t+1}{2}, \xi_2^{(2)}(t) = -\frac{t+1}{2}.$$

Тепер знайдемо вектори $v_1^{(2)}(t)$, $v_2^{(2)}(t)$:

$$v_1^{(2)}(t) = -\Big(\xi_1^{(2)}(t)G(t)\widetilde{N}_{10}(t) + \Big(\xi_1^{(1)}(t)\Big)^2 G(t)\widetilde{N}_{20}(t)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t) - G(t)\widetilde{N}_{02}(t)\widetilde{\varphi}(t) =$$

$$= \operatorname{col}\big[0, \tfrac{1-t}{2}\big],$$

$$v_2^{(2)}(t) = -\Big(\xi_2^{(2)}(t)G(t)\widetilde{N}_{10}(t) + \Big(\xi_2^{(1)}(t)\Big)^2 G(t)\widetilde{N}_{20}(t)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t) - G(t)\widetilde{N}_{02}(t)\widetilde{\varphi}(t) =$$

$$= \operatorname{col}\big[0, \tfrac{1-t}{2}\big].$$

У результаті маємо такі два розв'язки, які відповідають нескінченному елементарному дільнику:

$$x_5(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left[1, -i\varepsilon + \varepsilon^2\frac{1-t}{2}\right]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{d\tau}{i - \varepsilon\frac{\tau+1}{2}}\right) + O(\varepsilon),$$

$$x_6(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left[1, i\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{1-t}{2}\right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{d\tau}{-i-\varepsilon^{\frac{\tau+1}{2}}}\right) + O(\varepsilon).$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (4.45) зображується у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{6} c_j x_j(t,\varepsilon),$$

де $c_j, j = \overline{1,6}$, – довільні сталі.

4.5. Висновки до розділу 4

У даному розділі здійснено асимптотичний аналіз структури загального розв'язку однорідної системи (4.1) за допомогою методу діаграм Ньютона. При цьому розглянуто випадок, коли гранична в'язка матриць має скінченний елементарний дільник кратністю p і нескінченний – кратністю $q = mn - p$. У результаті проведених досліджень отримано такі результати:

1. Виведено рівняння розгалуження для розв'язків, що відповідають скінченному елементарному дільнику, і для розв'язків, які відповідають нескінченному елементарному дільнику, знайдено формули, які виражають коефіцієнти цих рівнянь через матричні коефіцієнти даної системи.

2. Здійснено аналіз отриманих рівнянь розгалуження, в результаті якого встановлено, що:

а) за відсутності точок повороту і стабільної структури відповідних діаграм Ньютона система рівнянь (4.1) завжди має p розв'язків першої групи (типу Дж. Біркгофа), один з яких може мати вигляд

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^t \lambda_0(\tau)d\tau\right),$$

де $\lambda_0(t)$ – власне значення граничної в'язки матриць $P(t,\lambda)$, а $u(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, що зображується розвиненням за цілими степенями ε, інші $p-1$ розв'язків мають вигляд

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau,\varepsilon))\, d\tau\right),$$

де функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображуються розвиненнями за дробовими степенями параметра, показники яких можна визначити за допомогою відповідних діаграм Ньютона;

б) кількість розв'язків другої групи дорівнює $q-r$, де r – кратність нульового кореня відповідного рівняння розгалуження, яка в свою чергу збігається з довжиною жорданового ланцюжка матриці $A_m(t,\varepsilon)$ відносно операторів $Q_k(t,\xi,\varepsilon)$, $k=\overline{1,m}$.

Цим самим доведено, що загальна кількість формальних розв'язків першої й другої груп, які будуються за алгоритмом, розробленим у даний роботі, збігається з кількістю точних лінійно незалежних розв'язків цієї системи, які утворюють її загальний розв'язок згідно з теоремою 2.3, доведеною в розділі 2.

3. Розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів відповідних розвинень для функцій $\lambda(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ та вектор-функцій $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$, з яких формуються шукані розв'язки системи (4.1).

4. Проведено повне дослідження структури асимптотичних розв'язків даної системи при $n=2$ і $m=3$, результати якого наведено в додатку.

Отримані результати сформульовано у вигляді 5-и теорем та проілюстровано на конкретному прикладі.

ВИСНОВКИ

У результаті проведених досліджень отримано такі результати:

1. Для виродженої системи звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків (2.15) знайдено умови, за виконання яких вона має загальний розв'язок типу Коші. Встановлено залежність між її внутрішньою структурою та кількістю частинних розв'язків, які утворюють її фундаментальну систему розв'язків. Визначено умови, які мають задовольняти початкові вектори, для існування і єдиності розв'язку відповідної задачі Коші.

2. Побудовано асимптотику при $\varepsilon \to 0$ загального розв'язку лінійної однорідної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків вигляду (3.3) у різних випадках, пов'язаних з кронекеровою структурою спектра граничної в'язки матриць:

– коли ця в'язка має простий спектр;

– коли вона має по одному кратному скінченному і нескінченному елементарному дільнику;

– коли її власному значенню відповідає кілька скінченних елементарних дільників однакової кратності, і вона має також кілька нескінченних елементарних дільників однакової кратності;

– загальний випадок, коли ця в'язка має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників як однакової, так і різної кратності.

У кожному з цих випадків визначено умови, за виконання яких дана система рівнянь має формальні розв'язки, які зображуються у вигляді формальних розвинень за цілими або дробовими степенями ε, і розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів цих розвинень. Встановлено, що формальні розв'язки даної системи поділяються на дві групи: розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, і розв'язки, які відповідають її нескінченним елементарним дільникам. Перша група розв'язків будується в класичному вигляді Дж. Біркгофа, а друга – в іншому вигляді, запропонованому в [58]. Для кожної групи побудованих формальних розв'язків виведено відповідні асимптотичні оцінки.

3. Досліджено питання про побудову частинного асимптотичного розв'язку неоднорідної системи рівнянь (3.1) в резонансному та нерезонансному випадках. Показано, що в резонансному випадку відповідні розвинення розпочинаються з від'ємних степенів параметра.

4. Використовуючи метод діаграм Ньютона, здійснено повний асимптотичний аналіз загального розв'язку однорідної системи (4.1) у одновимірному випадку, коли гранична в'язка матриць має по одному кратному скінченному і нескінченному елементарному дільнику. Виведено та проаналізовано рівняння розгалуження для розв'язків, що відповідають скінченному елементарному дільнику, і для розв'язків, що відповідають нескінченному елементарному дільнику. Знайдено формули, які виражають коефіцієнти цих рівнянь через матричні коефіцієнти даної системи. Встановлено кількість розв'язкі першої групи та зв'язок між кількістю розв'язків другої групи і структурними особливостями даної системи.

Отримані результати проілюстровано на конкретних прикладах

Дисертаційна робота має теоретичний характер. ЇЇ результати є узагальненням теорії вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь першого порядку на відповідні системи вищих порядків. Достовірність отриманих результатів підтверджується їх строгим математичним обгрунтуванням, а також тим, що з них, як наслідок, випливають деякі часткові результати, отримані раніше іншими авторами. Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості їх застосування до розв'язання конкретних прикладних задач, математичні моделі яких зводяться до систем даного типу.

ДОДАТОК

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

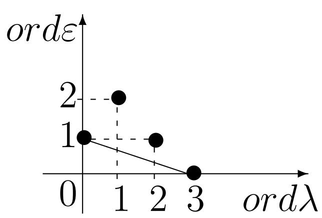
$$\varepsilon^3 A_3(t,\varepsilon)\frac{d^3x}{dt^3} + \varepsilon^2 A_2(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = 0, \qquad (5.1)$$

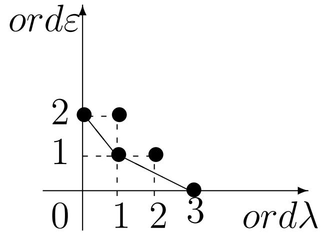
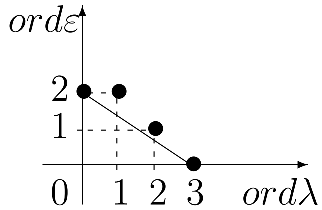
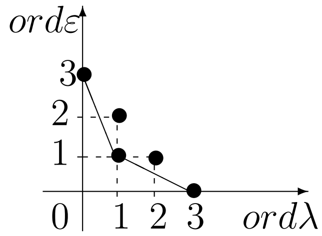
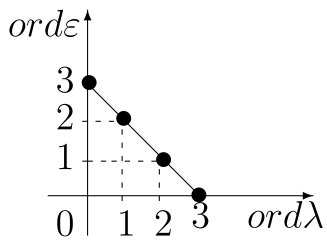
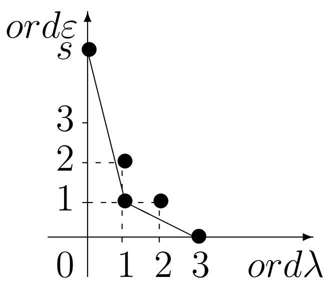
де $x(t,\varepsilon)$ – 2-вимірний вектор, а $A_i(t,\varepsilon), i = \overline{0,3}$, – квадратні матриці другого порядку, які задовольняють умови 3.1° – 3.3°, 3.6°. Припустимо, що гранична в'язка матриць цієї системи $P(t,\lambda) = A_0^{(0)}(t) + \lambda A_1^{(0)}(t) + \lambda^2 A_2^{(0)}(t) + \lambda^3 A_3^{(0)}(t)$ має скінченний елементарний дільник кратністю $p = 3$ і нескінченний – кратністю $q = 3$.

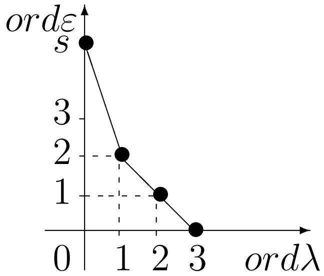
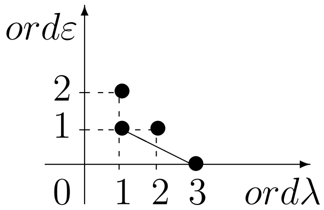
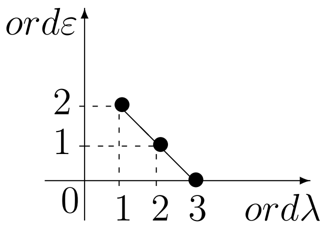
Користуючись виведеними в даному розділі рівняннями розгалуження і застосовуючи метод діаграм Ньютона, нами досліджено всі можливі випадки, які стосуються структури фундаментальної системи розв'язків системи рівнянь (5.1) та їх асимптотики. Результати цих досліджень зведено в таблицях 1 і 2, які наводяться нижче.

Таблиця 1

Структура асимптотичних розв'язків першої групи системи рівнянь (5.1)

№ п/п	Умови на коефіцієнти рівняння розгалуження	Діаграма Ньютона	Кількість розв'язків	Степені параметра ε	Визначальні рівняння
1	$L_{01}(t) \neq 0$		3	$\varepsilon^{\frac{1}{3}}$	$\lambda_1^3 + L_{01}(t) = 0$

2	$L_{01}(t) \equiv 0$, $L_{02}(t) \neq 0$, $L_{11}[\lambda^1](t) \neq 0$		1 2	ε^1 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$L_{02}(t)+L_{11}[\lambda_1^1](t)=0$ $\lambda_1^3 + L_{11}[\lambda_1^1](t) = 0$
3	$L_{01}(t) \equiv 0$, $L_{11}[\lambda^1](t) \equiv 0$, $L_{02}(t) \neq 0$		3	$\varepsilon^{\frac{2}{3}}$	$\lambda_1^3 + L_{02}(t) = 0$
4	$L_{01}(t) \equiv 0$, $L_{02}(t) \equiv 0$, $L_{03}(t) \neq 0$, $L_{11}[\lambda^1](t) \neq 0$		1 2	ε^2 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$L_{03}(t)+L_{11}[\lambda_1^1](t)=0$ $\lambda_1^3 + L_{11}[\lambda_1^1](t) = 0$
5	$L_{01}(t) \equiv 0$, $L_{02}(t) \equiv 0$, $L_{03}(t) \neq 0$, $L_{11}[\lambda^1](t) \equiv 0$		3	ε^1	$\lambda_1^3 + L_{03}(t) +$ $L_{21}[\lambda_1^2](t)+$ $+L_{12}[\lambda_1^1](t) = 0$
6	$L_{0i}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, s-1}$, $L_{0s}(t) \neq 0$, $s \geq 4$, $L_{11}[\lambda^1](t) \neq 0$		1 2	ε^{s-1} $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$L_{0s}(t)+L_{11}[\lambda_1^1](t)=0$ $\lambda_1^3 + L_{11}[\lambda_1^1](t) = 0$

7	$L_{0i}(t)\equiv 0$, $i=\overline{1,s-1}$, $L_{0s}(t)\neq 0$, $s\geq 4$, $L_{11}[\lambda^1](t)\equiv 0$,		1 2	ε^{s-2} ε^{1}	$L_{0s}(t)+L_{12}[\lambda_1^1](t)=0$ $\lambda_1^3+L_{12}[\lambda_1^1](t)+$ $+L_{21}[\lambda_1^2](t)=0$
8	$L_{0i}(t)\equiv 0$, $i=1,2,\ldots$, $L_{11}[\lambda^1](t)\neq 0$		2	$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$\lambda_1^3+L_{11}[\lambda_1^1](t)=0$
9	$L_{0i}(t)\equiv 0$, $i=1,2,\ldots$, $L_{11}[\lambda^1](t)\equiv 0$,		2	ε^{1}	$\lambda_1^3+L_{12}[\lambda_1^1](t)+$ $+L_{21}[\lambda_1^2](t)=0$

Вирази $L_{0j}(t)$, $L_{ij}[\lambda^i](t), i=\overline{1,2}, j\geq 1$, обчислюються за формулами:

$$L_{01}(t)=\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\Big),\, L_{02}(t)=\Big(\Gamma_0^{(2)}(t)\varphi(t),\psi(t)\Big)-\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\Big),$$

$$L_{03}(t)=\Big(\Gamma_0^{(3)}(t)\varphi(t),\psi(t)\Big)-\bigg(\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(2)}(t)+\Gamma_0^{(2)}(t)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)\Big)\varphi(t),\psi(t)\bigg)+$$
$$+\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\Big),$$

$$L_{0s}(t)=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\Big(W_{H\Gamma}^{(s)}[0,0,0,j]\varphi(t),\psi(t)\Big);\, L_{11}[\lambda^1](t)=\Big(\Gamma_1^{(1)}(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t)\Big)-$$
$$-\bigg(\Big(\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)+\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)\Big)\varphi(t),\psi(t)\bigg),$$

$$L_{12}[\lambda^1](t)=-\bigg(\Big(\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(2)}(t)+\Gamma_1^{(1)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)\Big)\varphi(t),\psi(t)\bigg)+$$
$$+\Big(\Gamma_1^{(2)}(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t)\Big)-\bigg(\Big(\Gamma_0^{(2)}(t)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)+\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_1^{(1)}(t,\lambda)\Big)\varphi(t),\psi(t)\bigg)+$$
$$+\bigg(\Big(\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)+\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)\Big)\varphi(t),\psi(t)\bigg)+$$

$$+\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t)\Big),$$

$$L_{21}[\lambda^2](t)=-\Big(\Big(\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_1^{(1)}(t,\lambda)+\Gamma_1^{(1)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)\Big)\varphi(t),\psi(t)\Big)+$$

$$+\Big(\Big(\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)+\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)\Big)\varphi(t),\psi(t)\Big)+$$

$$+\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t)\Big)-\Big(\Gamma_2^{(0)}(t,\lambda)H(t)\Gamma_0^{(1)}(t)\varphi(t),\psi(t)\Big)-$$

$$-\Big(\Gamma_0^{(1)}(t)H(t)\Gamma_2^{(0)}(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t)\Big)+\Big(\Gamma_2^{(1)}(t,\lambda)\varphi(t),\psi(t)\Big),$$

Оператори $\Gamma_0^{(i)}(t), i\geq 1,\ \Gamma_k^{(j)}(t,\lambda),\ k=1,2, j\geq 0$, обчислюються за формулами:

$$\Gamma_0^{(1)}(t)=\sum_{i=0}^{3}\lambda_0^i(t)A_i^{(1)}(t)+\sum_{i=1}^{3}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)A_i^{(0)}(t)\frac{d}{dt}+\left(\frac{d\lambda_0^2(t)}{dt}+\lambda_0(t)\frac{d\lambda_0(t)}{dt}\right)A_3^{(0)}(t)+$$

$$+\tfrac{d\lambda_0(t)}{dt}A_2^{(0)}(t),$$

$$\Gamma_0^{(2)}(t)=\sum_{i=0}^{3}\lambda_0^i(t)A_i^{(2)}(t)+\sum_{i=1}^{3}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)A_i^{(1)}(t)\frac{d}{dt}+\sum_{i=2}^{3}C_i^{i-2}\lambda_0^{i-2}(t)A_i^{(0)}(t)\frac{d^2}{dt^2}+$$

$$+\frac{d\lambda_0(t)}{dt}A_2^{(1)}(t)+3\frac{d\lambda_0(t)}{dt}A_3^{(0)}(t)\frac{d}{dt}+\left(\frac{d\lambda_0^2(t)}{dt}+\lambda_0(t)\frac{d\lambda_0(t)}{dt}\right)A_3^{(1)}(t)+\frac{d^2\lambda_0(t)}{dt^2}A_3^{(0)}(t),$$

$$\Gamma_0^{(3)}(t)=\sum_{i=0}^{3}\lambda_0^i(t)A_i^{(3)}(t)+\sum_{i=1}^{3}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)A_i^{(2)}(t)\frac{d}{dt}+\sum_{i=2}^{3}C_i^{i-2}\lambda_0^{i-2}(t)A_i^{(1)}(t)\frac{d^2}{dt^2}+$$

$$+\frac{d\lambda_0(t)}{dt}A_2^{(2)}(t)+A_3^{(0)}(t)\frac{d^3}{dt^3}+3\frac{d\lambda_0(t)}{dt}A_3^{(1)}(t)\frac{d}{dt}+\left(\frac{d\lambda_0^2(t)}{dt}+\lambda_0(t)\frac{d\lambda_0(t)}{dt}\right)A_3^{(2)}(t)+$$

$$+\tfrac{d^2\lambda_0(t)}{dt^2}A_3^{(1)}(t),$$

$$\Gamma_0^{(s)}(t)=\sum_{i=0}^{3}\lambda_0^i(t)A_i^{(s)}(t)+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=1}^{4-i}C_{i+\gamma-1}^{i+\gamma-j-1}D_{i-j}[\lambda_0^{\gamma-1}]A_{i+\gamma-1}^{(s-i)}(t)\frac{d^j}{dt^j}+$$

$$+\textstyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3-i}D_i[\lambda_0^j]A_{i+j}^{(s-i)}(t);$$

$$\Gamma_1^{(0)}(t,\lambda)=\lambda\sum_{i=1}^{3}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)A_i^{(0)}(t),$$

$$\Gamma_1^{(1)}(t,\lambda)=\lambda\sum_{i=1}^{3}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)A_i^{(1)}(t)+\lambda\sum_{i=2}^{3}2C_i^{i-2}\lambda_0^{i-2}(t)A_i^{(0)}(t)\frac{d}{dt}+$$

$$+2\left(\lambda_0(t)\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{d\lambda_0(t)}{dt}\right)A_3^{(0)}(t)+\frac{d\lambda}{dt}A_2^{(0)}(t),$$

$$\Gamma_1^{(2)}(t,\lambda)=\lambda\sum_{i=1}^{3}C_i^{i-1}\lambda_0^{i-1}(t)A_i^{(2)}(t)+\lambda\sum_{i=2}^{3}2C_i^{i-2}\lambda_0^{i-2}(t)A_i^{(1)}(t)\frac{d}{dt}+$$

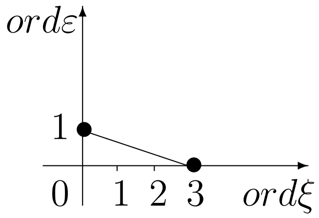
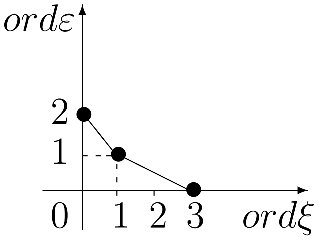
$$+\sum_{i=1}^{3}C_3^i\frac{d^{2-i}\lambda}{dt^{2-i}}A_3^{(0)}(t)\frac{d^i}{dt^i}+\frac{d\lambda}{dt}A_2^{(1)}(t)+4\left(\lambda_0(t)\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{d\lambda_0(t)}{dt}\right)A_3^{(1)}(t)+\frac{d^2\lambda}{dt^2}A_3^{(0)}(t),$$

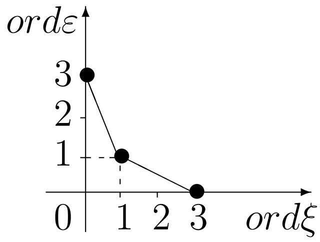
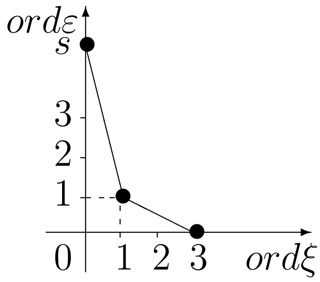
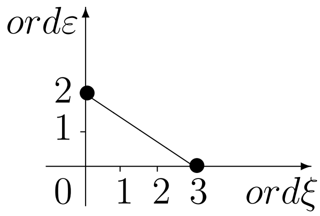
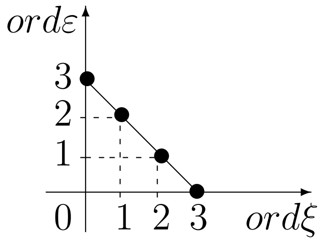
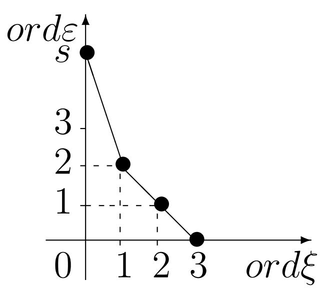
$$\Gamma_2^{(0)}(t,\lambda)=\lambda^2\left(A_2^{(0)}(t)+3\lambda_0(t)A_3^{(0)}(t)\right),$$

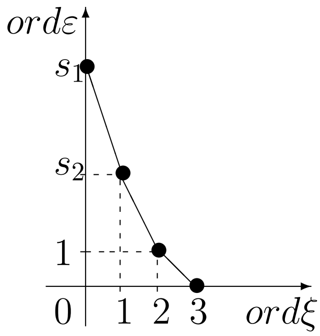
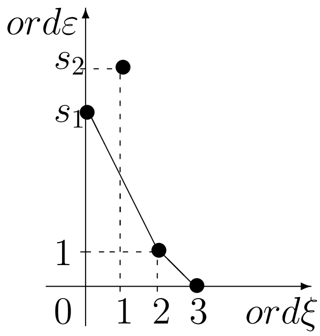
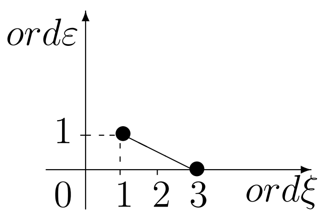
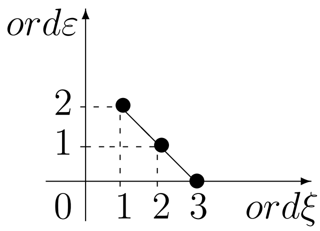
$$\Gamma_2^{(1)}(t,\lambda)=\lambda^2\left(A_2^{(1)}(t)+3\lambda_0(t)A_3^{(1)}(t)\right)+3\lambda^2A_3^{(0)}(t)\frac{d}{dt}+2\lambda\frac{d\lambda}{dt}A_3^{(0)}(t).$$

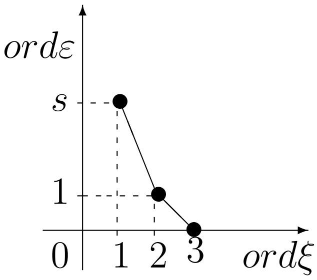
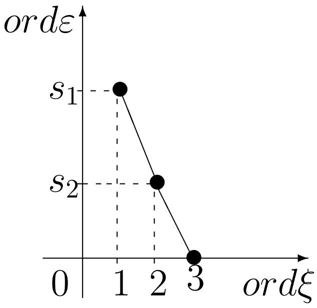
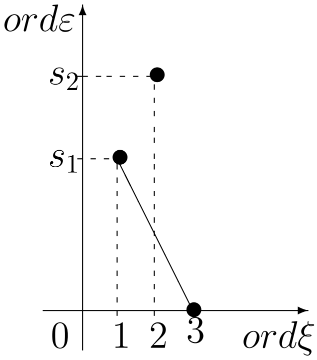
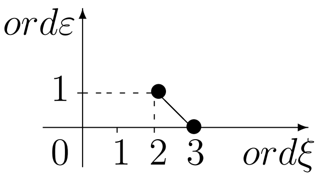
Таблиця 2

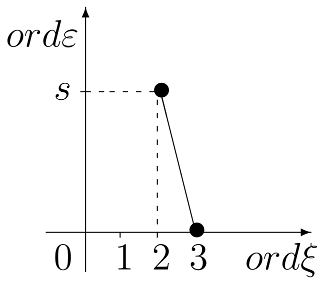
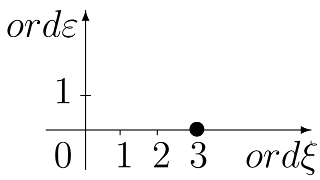
Структура асимптотичних розв'язків другої групи системи рівнянь (5.1)

№ п/п	Умова на коефіцієнти рівняння розгалуження	Діаграма Ньютона	Кількість розв'язків	Степені параметра ε	Визначальні рівняння
1	$N_{01}(t)\neq 0$		3	$\varepsilon^{\frac{1}{3}}$	$\xi_1^3+N_{01}(t)=0$
2	$N_{01}(t)\equiv 0$, $N_{02}(t)\neq 0$, $N_{11}[\xi^1](t)\neq 0$		1 2	ε^1 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$N_{02}(t)+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$ $\xi_1^3+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$

3	$N_{01}(t)\equiv 0,$ $N_{02}(t)\equiv 0,$ $N_{03}(t)\neq 0,$ $N_{11}[\xi^1](t)\neq 0$		1 2	ε^2 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$N_{03}(t)+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$ $\xi_1^3+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$
4	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $i=\overline{1,s-1},$ $N_{0s}(t)\neq 0,$ $s\geq 4,$ $N_{11}[\xi^1](t)\neq 0$		1 2	ε^{s-1} $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$N_{0s}(t)+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$ $\xi_1^3+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$
5	$N_{01}(t)\equiv 0,$ $N_{11}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $N_{02}(t)\neq 0$		3	$\varepsilon^{\frac{2}{3}}$	$\xi_1^3+N_{02}(t)=0$
6	$N_{01}(t)\equiv 0,$ $N_{02}(t)\equiv 0,$ $N_{03}(t)\neq 0,$ $N_{11}[\xi^1](t)\equiv 0$		3	ε^1	$\xi_1^3+N_{03}(t)+$ $N_{21}[\xi_1^2](t)+$ $+N_{12}[\xi_1^1](t)=0$
7	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $i=\overline{1,s-1},$ $N_{0s}(t)\neq 0,$ $s\geq 4,$ $N_{11}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $N_{12}[\xi^1](t)\neq 0$		1 2	ε^{s-2} ε^1	$N_{0s}(t)+N_{12}[\xi_1^1](t)=0$ $\xi_1^3+N_{12}[\xi_1^1](t)+$ $+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$

8	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $i=\overline{1,s_1-1},$ $N_{0s_1}(t)\neq 0,$ $s_1>4, s_1\geq s_2,$ $N_{1j}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $i=\overline{1,s_2-1},$ $N_{1s_2}[\xi^1](t)\neq 0,$ $N_{21}[\xi^2](t)\neq 0$		1 1 1	$\varepsilon^{s_1-s_2}$ ε^{s_2-1} ε^1	$N_{0s_1}(t)+N_{1s_2}[\xi_1^1](t)=0$ $N_{1s_2}[\xi_1^1](t)+$ $N_{21}[\xi_1^2](t)=0$ $\xi_1^3+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$
9	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $i=\overline{1,s_1-1},$ $N_{0s_1}(t)\neq 0,$ $s_1>4, s_1<s_2,$ $N_{1j}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $i=\overline{1,s_2-1},$ $N_{1s_2}[\xi^1](t)\neq 0,$ $N_{21}[\xi^2](t)\neq 0$		2 1	$\varepsilon^{\frac{s_1-1}{2}}$ ε^1	$N_{0s_1}(t)+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$ $\xi_1^3+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$
10	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $i=1,2,\dots,$ $N_{11}[\xi^1](t)\neq 0$		2	$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$\xi_1^3+N_{11}[\xi_1^1](t)=0$
11	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $i=1,2,\dots,$ $N_{11}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $N_{12}[\xi^1](t)\neq 0$		2	ε^1	$\xi_1^3+N_{12}[\xi_1^1](t)+$ $+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$

12	$N_{0i}(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $N_{1j}[\xi^1](t) \equiv 0$, $j = \overline{1, s-1}$, $N_{1s}[\xi^1](t) \neq 0$ $N_{21}[\xi^2](t) \neq 0$		1 1	ε^{s-1} ε^1	$N_{1s}(t)+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$ $\xi_1^3+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$
13	$N_{0i}(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $N_{1j}[\xi^1](t) \equiv 0$, $j = \overline{1, s_1-1}$, $N_{1s_1}[\xi^1](t) \neq 0$ $N_{2j}[\xi^2](t) \equiv 0$ $j = \overline{1, s_2-1}$, $N_{2s_2}[\xi^2](t) \neq 0$ $s_1 \geq s_2$		1 1	$\varepsilon^{s_1-s_2}$ ε^{s_2}	$N_{1s_2}(t)+N_{2s_1}[\xi_1^2](t)=0$ $\xi_1^3+N_{2s_1}[\xi_1^2](t)=0$
14	$N_{0i}(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $N_{1j}[\xi^1](t) \equiv 0$, $j = \overline{1, s_1-1}$, $N_{1s_1}[\xi^1](t) \neq 0$ $N_{2j}[\xi^2](t) \equiv 0$ $j = \overline{1, s_2-1}$, $N_{2s_2}[\xi^2](t) \neq 0$ $s_1 < s_2$		2	$\varepsilon^{\frac{s_1}{2}}$	$\xi_1^3 + N_{1s_1}[\xi_1^1](t) = 0$
15	$N_{0i}(t) \equiv 0$, $N_{1i}[\xi^1](t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $N_{21}[\xi^2](t) \neq 0$		1	ε^1	$\xi_1^3+N_{21}[\xi_1^2](t)=0$

16	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $N_{1i}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $i=1,2,\dots,$ $N_{2j}[\xi^2](t)\neq 0,$ $j=\overline{1,s-1},$ $N_{2s}[\xi^2](t)\neq 0$		1	ε^s	$\xi_1^3+N_{2s}[\xi_1^2](t)=0$
17	$N_{0i}(t)\equiv 0,$ $N_{1i}[\xi^1](t)\equiv 0,$ $N_{2i}[\xi^2](t)\equiv 0$ $i=1,2,\dots$		–	–	–

Вирази $N_{0j}(t)$, $N_{ij}[\xi^i](t), i=\overline{1,2}, j\geq 1$, обчислюватимемо за формулами:

$$N_{01}(t)=\Big(Q_0^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big), N_{02}(t)=\Big(Q_0^{(2)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)-$$

$$-\Big(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big),$$

$$N_{03}(t)=\Big(Q_0^{(3)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)-\Big(\Big(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(2)}(t)+Q_0^{(2)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)+$$

$$+\Big(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big),$$

$$N_{0s}(t)=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\left(W_{GQ}^{(s)}[0,0,0,j]\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\right);$$

$$N_{11}[\xi^1](t)=-\Big(\Big(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)+Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)+$$

$$+\Big(Q_1^{(1)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big),$$

$$N_{12}[\xi^1](t)=-\Big(\Big(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(2)}(t)+Q_1^{(1)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)-$$

$$-\Big(\Big(Q_0^{(2)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)+Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(1)}(t,\xi)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)+\Big(Q_1^{(2)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)+$$

$$+\Big(\Big(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)+Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)\Big)\,\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)+$$

$$+\Big(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t)\Big)\,,$$

$$N_{21}[\xi^2](t) = -\left(\left(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(1)}(t,\xi) + Q_1^{(1)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\right)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) +$$

$$+\left(\left(Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t) + Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\right)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) +$$

$$+\left(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_1^{(0)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) - \left(Q_2^{(0)}(t,\xi)G(t)Q_0^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) -$$

$$-\left(Q_0^{(1)}(t)G(t)Q_2^{(0)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right),$$

$$N_{ks}[\xi^k](t) = \sum_{3i_3+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i_3+i_2+i_1+j-1} \left(W_{GQ}^{(s)}[i_3, i_2, i_1, j]\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right) +$$

$$+\left(Q_2^{(1)}(t,\xi)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)\right), k = 1, 2.$$

Оператори $Q_0^{(i)}(t), i \geq 1$, $Q_k^{(j)}(t,\xi)$, $k = 1, 2, j \geq 0$, обчислюватимемо за формулами:

$$Q_0^{(s)}(t) = A_3^{(s)}(t), s \geq 1;$$

$$Q_1^{(0)}(t,\xi) = \xi A_2^{(0)}(t), Q_1^{(1)}(t,\xi) = \xi A_2^{(1)}(t) + 3\xi A_3^{(0)}(t)\frac{d}{dt} - 3\frac{d\xi}{dt}A_3^{(0)}(t),$$

$$Q_1^{(2)}(t,\xi) = \xi A_2^{(2)}(t) + 3\xi A_3^{(1)}(t)\frac{d}{dt} - 3\frac{d\xi}{dt}A_3^{(1)}(t), Q_2^{(0)}(t,\xi) = \xi^2 A_1^{(0)}(t),$$

$$Q_2^{(1)}(t,\xi) = \xi^2 A_1^{(1)}(t) + 2\xi^2 A_2^{(0)}(t)\frac{d}{dt} - \xi\frac{d\xi}{dt}A_2^{(0)}(t),$$

$$Q_k^{(s)}(t,\xi) = \xi^3 \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} C_{i+3-k}^{j+3-k} D_j \left[\frac{1}{\xi^{3-k}}\right] A_{i+3-k}^{(s-ih)}(t)\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}, k = 1, 2.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Акименко А. М.* Періодичні розв'язки сингулярно збуреної виродженої системи системи диференціальних рівнянь. Автореф. дис.… канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / А. М. Акименко. – К., 2008. – 14 с.

2. *Акименко А. М.* Стійкість розв'язків виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь / А. М. Акименко // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 430–438.

3. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.

4. *Бойчук О. А.* Вироджені нетерові крайові задачі / О. А. Бойчук, Л. М. Шегда // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 303–312.

5. *Бойчук О. А.* Умови біфуркації розв'язків вироджених крайових задач / О. А. Бойчук, Л. М. Шегда // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 2. – С. 147–154.

6. *Бойчук О. А.* Вироджені нелінійні крайові задачі / О. А. Бойчук, Л. М. Шегда // Український математичний журнал. – 2009. – Т. 61, № 9. – С. 1174–1188.

7. *Бойчук А. А.* Бифуркация решений вырожденных нетеровых краевых задач / А. А. Бойчук, Л. М. Шегда // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 459–467.

8. *Бояринцев Ю. Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 2000. – 223 с.

9. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1996. – 262 с.

10. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 222 с.

11. *Бояринцев Ю. Е.* Численные методы решения сингулярных систем / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 223 с.

12. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М.: Мир, 1969. – 528 с.

13. *Вайнберг М. М.* Теория ветвлений решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М.: Наука, 1968. – 464 с.

14. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.

15. *Васильева А. Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.

16. *Васильева А. Б.* Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 106 с.

17. *Вишик М. Й.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. Й. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1957. – 12, № 5. – С. 3–122.

18. *Вишик М. Й.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М. Й. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1960. – 15, № 3. – С. 3–81.

19. *Віра М. Б.* Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи / М. Б. Віра // Динамические системы: межведомственный научный сборник. – 2009. – Вып. 26. – С. 13–24.

20. *Віра М. Б.* Двоточкова крайова задача для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра голоного оператора / М. Б. Віра // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 19–28.

21. *Віра М. Б.* Асимптотичне розв'язання крайових задач для лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / М. Б. Віра. – К., 2011. – 18 с.

22. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

23. *Грачёва Г. С.* Асимптотическое решение линейных дифференциальных уравнений с большим параметром в банаховом пространстве. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Г. С. Грачёва. – К., 1979. – 14 с.

24. *Григоренко В. К.* Об асимптотическом разложении решений систем дифференциальных уравнений. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. К. Григоренко. – К., 1972. – 12 с.

25. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденой матрицей при производных / В. А. Еременко // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 2. – С. 168–174.

26. *Єлішевич М. А.* Задача Коші для систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями / М. А. Єлішевич // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 173–190.

27. *Єлішевич М. А.* Періодичні розв'язки систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними періодичними

матрицями / М. А. Єлішевич // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 29–37.

28. *Жукова Г. С.* Асимптотика решений одного класа линейних систем с вырожденой матрицей при производной / Г. С. Жукова. – К. Ин-т математики, 1990. – 24 с. – (Препринт / АН УРСР, Ин-т математики, 90.36).

29. *Жукова Г. С.* Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / Г. С. Жукова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1988. – 200 с.

30. *Жукова Г. С.* Метод общего анализа линейных сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений и систем: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.02 / Жукова Галина Севастьяновна. – М., 1990. – 296 с.

31. *Жукова Г. С.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущённых линейных систем / Г. С. Жукова. – К. Ин-т математики, 1983. – 40 с. – (Препринт / АН УРСР, Ин-т математики, 80.38).

32. *Кочерга О. І.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Кочерга Ольга Іванівна. – К., 2005. – 174 с.

33. *Кочерга О. І.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора / О. І. Кочерга, В. П. Яковець // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 19–29.

34. *Кочерга О. І.* Асимптотичні властивості розв'язків задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної системи у випадку кратного спектра головного оператора / О. І. Кочерга // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 247–257.

35. *Кочерга О. І.* Розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи / О. І. Кочерга // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2, № 3. – С. 314–324.

36. *Крылов Н. М.* Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УРСР, 1937. – 364 с.

37. *Кушнир В. А.* Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков з малым параметром при производных: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Кушнир Василий Андреевич. – К., 1984. – 139 с.

38. *Кушнір В. А.* Побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з малим параметром при похідних / В. А. Кушнір, Г. А. Кушнір // Науковий часопис Нац. пед. ун-ту ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2007. – Вип. 8. – С. 139-143

39. *Лузин Н. Н.* К изучению матричной теории дифференциальных уравнений / Н. Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. – 1940. – № 5. – С. 4–66.

40. *Митропольський Ю. А.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова / Ю. А. Митропольський, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик. – К.: Наукова думка, 1990. – 272 с.

41. *Митропольський Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольський. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.

42. *Митропольський Ю. А.* Методи нелінійної механіки / Ю. А. Митропольський. – К.: Наукова думка, 2005. – 527 с.

43. *Павлюк І. А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку / І. А. Павлюк. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. – 208 с.

44. *Пафик С. П.* Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – № 13. – С. 201–217.

45. *Пафик С. П.* Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійник систем диференціальних рівнянь вищих порядків / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Український математичний журнал. – 2013. – Т. 65, № 2. – С. 296–306.

46. *Пафик С. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Нелінійні коливання. – 2014. – Т. 17, № 3. – С. 379–398.

47. *Пафик С. П.* Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць / С. П. Пафик // Динамические системы. – 2014. – Т. 3(31), № 3–4. – С. 255–274.

48. *Пафик С. П.* Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями / С. П. Пафик, В. П. Яковець // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 79–101.

49. *Пафик С. П.* Про побудову асимптотики загального розв'язку вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків / С. П. Пафик // Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь"(присвячена 80-річчю докт. фіз.-мат. наук, проф., академіка НАПН Ураїни Шкіля Миколи Івановича), 13–14 грудня 2012 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Видавництво НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. – С. 21–22.

50. *Пафик С. П.* Про асимптотику загального розв'язку вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь рівнянь вищих

порядків у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць / С. П. Пафик // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: тези доповідей. – К.: Ін-т математики НАН України, 2013. – С. 154.

51. *Пафик С. П.* Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь / С. П. Пафик, В. П. Яковець // XV Міжнародна наукова конференція ім. Михайла Кравчука. I Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування, 15–17 травня 2014 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Видавництво ТОВ "Спринт-Сервіс" , 2014. – С. 243–244.

52. *Потороча В. В.* Про залежність розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь від параметра / В. В. Потороча, В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко // Доповіді НАН України. – 2007. – № 1. – С 33–37.

53. *Потороча В. В.* Асимптотичні розв'язки вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / В. В. Потороча. – К., 2007. – 21 с.

54. *Потороча В. В.* Асимптотические решения сингулярно возмущенных нелинейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями и импульсным воздействием / В. В. Потороча, В. Г. Самойленко // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 42, № 3. – С. 356–367.

55. *Самойленко А. М.* Некоторые вопросы теории периодических и квазипереодических систем. Автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А. М. Самойленко. – К., 1967. – 24 с.

56. *Самойленко А. М.* О приводимости вырожденой линейной системы к центральной канонической форме / А. М. Самойленко, В. П. Яковец // Докл. АН Украины. – 1993. – № 4. – С. 10–15.

57. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний / А. М. Самойленко. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

58. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

59. *Самусенко П. Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням / П. Ф. Самусенко // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка. – 2007. – Вип. 17. – С. 9–15.

60. *Самусенко П. Ф.* Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних / П. Ф. Самусенко // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 527–539.

61. *Самусенко П. Ф.* Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженнями / П. Ф. Самусенко // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2007. – № 8. – С. 187–199.

62. *Самусенко П. Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь / П. Ф. Самусенко. – К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. – 342 с.

63. *Самусенко П. Ф.* Про побудову розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженнями / П. Ф. Самусенко // Математичні студії. – 2008. – Т. 29, № 2. – С. 175–181.

64. *Сотниченко Н. А.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений / Н. А. Сотниченко, С. Ф. Фещенко. – К. Ин-т математики, 1980. – 48 с. – (Препринт / АН УРСР, Ин-т математики, 80.3).

65. *Старун И. И.* Построение асимптотических решений сингулярно возмущённых линейных систем / И. И. Старун // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21, № 10. – С. 1822–1823.

66. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении производных функций в ряди / Я. Д. Тамаркин. – Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917. – 308 с.

67. *Тарасенко О. В.* Асимптотичне розв'язання лінійних сингулярно збурених задач оптимально керування з виродженнями. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / О. В. Тарасенко. – К., 2012. – 19 с.

68. *Тарасенко О. В.* Асимптотичне розв'язання задачі оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь / О. В. Тарасенко // Динамические системы. – 2011. – Т. 1(29), № 1. – С. 69–88.

69. *Тарасенко О. В.* Применения принципа максимума к вырожденным линейным задачам оптимального управления / О. В. Тарасенко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 178–183.

70. *Тарасенко О. В.* Наближене розв'язання задачі оптимального керування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем / О. В. Тарасенко // Нелінійні коливання. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 127–136.

71. *Территин Х. Л.* Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр / Х. Л. Территин // Математика. Сб. переводов. – 1957. – Вып. 1, № 2. – С. 29–59.

72. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Матем. сб. – 1952. – 31(73), № 3. – С. 575–586.

73. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

74. *Фещенко С. Ф.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К.: Наук. думка, 1966. – 252 с.

75. *Фещенко С. Ф.* Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. – 1955. – Т. 7, № 2. – С. 167–179.

76. *Фещенко С. Ф.* Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. – 1955. – Т. 7, № 4. – С. 232–243.

77. *Фещенко С. Ф.* Малі коливання систем із скінченним числом ступенів вільності / С. Ф. Фещенко // Наук. зап. Київ. пед. ін-ту, фіз-мат. серія. – 1949. – Т.9, №4. – С. 99–155.

78. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука. Сиб. изд-кая фирма РАН, 1996. – 279 с.

79. *Чистяков В. Ф.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.

80. *Шатковська К. В.* Побудова частинних асимптотичних розв'язків лінійних вироджених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу / К. В. Шатковська // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 400–419.

81. *Шатковська К. В.* Асимптотичне інтегрування вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу: дис.

канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Шатковська Катерина Валеріївна. – К., 2012. – 178 с.

82. *Шатковська К. В.* Асимптотичне розв'язання початкової задачі для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу / К. В. Шатковська // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 210–219.

83. *Шегда Л. М.* Нетерові крайові задачі для вироджених систем звичайних диференціальних рівнянь: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Шегда Любов Михайлівна. – К., 2010. – 137 с.

84. *Шегда Л. М.* Вироджені нелінійні нетерові крайові задачі / Л. М. Шегда // Доповіді НАН України. – 2009. –№ 8. – С. 29–34.

85. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – К.: Вища школа, 1991. – 207 с.

86. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае простых корней характеристического уравнения / Н. И. Шкиль // Укр. мат. журн. – 1962. – Т. 16, № 4. – С. 383–392.

87. *Шкиль Н. И.* О некоторых асимптотических методах в теории линейгых дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэфициентами: дис. . . . доктора физ.-мат. наук: 01.01.02 / Шкиль Николай Иванович. – К., 1968. – 420 с.

88. *Шкиль Н. И.* Об асимптотичеком решении системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр / Н. И. Шкиль // Докл. АН СССР. – 1963. – 150, № 5. – С. 1005–1008.

89. *Шкиль Н. И.* Построение общего асимптотического решения систем линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / Н. И. Шкиль // Изд. вузов. Математика. – 1966. – № 1. – С. 163–169.

90. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / М. І. Шкіль. – К.: Вища школа, 1971. – 226 с.

91. *Шкиль Н. И.* Об асимптотическом решении системы линейных диференциальных уравнений второго порядка // Н. И. Шкиль, З. Шаманов // Прилижённиые методы математического анализа.- К.: Киев. пед. ин-т, 1978. – С. 137-146.

92. *Шкиль Н. И.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга / Н. И. Шкиль, Т. К. Мейлиев // Докл. АН УССР. – 1979. – №4. – С. 264–267.

93. *Шкиль Н. И.* Асимптотические свойства формальных фундаментальных матриц систем линейных диффеенциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр / Н. И. Шкиль, И. И. Конет // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, № 1. – С. 124–130.

94. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – К.: Вища школа, 1989. – 287 с.

95. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной / Ю. Д. Шлапак // Укр. мат. журн. – 1975. – Т. 27, № 1. – С. 137–140.

96. *Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем диференциальных уравнений второго порядка в частных производных с медленно меняющимися коэфициентами: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Яковец Василий Павлович. – К., 1983. – 162 с.

97. *Яковец В. П.* Асимптотика решений линейной сингулярно возмущённой системы с вырождениями / В. П. Яковец // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1559–1566.

98. *Яковец В. П.* Асимптотика решений одного класса линейных сингулярно возмущённых систем / В. П. Яковец // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 1. – С. 18–21.

99. *Яковец В. П.* Асимптотической анализ сингулярно возмущённой линейной системы с сингулярным предельным пучком матриц / В. П. Яковец // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 1. – С. 106–122.

100. *Яковецъ В. П.* Асимптотика розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи / В. П. Яковець, О. І. Кочерга // Допов. НАН України. – 1999. – № 5. – С. 21–23.

101. *Яковецъ В. П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Яковець Василь Павлович. – К., 1993. – 318 с.

102. *Яковецъ В. П.* Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь / В. П. Яковець, А. М. Акименко // Наукові записки Ніжин. держ. пед. ун-ту ім. М. Гоголя. Природничі та фізико-математичні науки – 1998. – С. 154–169.

103. *Яковецъ В. П.* Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем з кратним елементарним дільником / В. П. Яковець, А. М. Акименко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 10. – С. 1403–1415.

104. *Яковецъ В. П.* Побудова асимптотики розв'язків крайової задачі для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь / В. П. Яковець, М. Б. Віра // Нелінійні коливання – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 272–286.

105. *Яковецъ В. П.* Про умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків / В. П. Яковець, С. П. Пафик // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"присвячена 70-річчю проф. В. В. Маринця, 27–29 вересня 2012 р., м. Ужгород, Україна: тези доповідей. – Ужгород, 2012. –

106. *Яковець В. П.* Асимптотичний аналіз лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь методом діаграм Ньютона /В. П. Яковець, С. П. Пафик // Міжнародна наукова конференція ім. Михайла Кравчука. І Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування, 15–17 травня 2014 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Видавництво ТОВ "Спринт-Сервіс 2014. – С. 141.

107. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter / G. D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – V. 9. – P. 219–231.

108. *Boichuk A. A.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.

109. *Campbell S. L.* A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations / S. L. Campbell // SIAM J. Math. Anal. – 1987. – 18, № 14. – P. 1101–1115.

110. *Campbell S. L.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations / S. L. Campbell, L. R. Petzold // SIAM J. Alg. Descrete Methods. – 1983. – № 4. – P. 517–521.

111. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations I / S. L. Campbell, S. Fransisko, London, Melbourne: Pitman Adv. Publ. Program, 1980. – 176 p.

112. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations II / S. L. Campbell, S. Fransisko, London, Melbourne: Pitman Adv. Publ. Program, 1982. – 234 p.

113. *Gear C. W.* ODE methods for the solutions of differential-algebraic systems / C. W. Gear, L. R. Petzold // SIAM J. on Numer. Anal. – 1984. – 24, № 4. – P. 716 – 728.

114. *Gohberg I.* Matrix polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. – Philadelphia, 2009. – 410 p.

115. *Griepentrog E.* Differential-algebraic equations and their numerical treatment / E. Griepentrog, R. Marz. – Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagd gessellehaft, 1986. – 220 p.

116. *Hansen B.* Comparing different concepts to treat differential-algebraic equations / Hansen B. – Berlin, 1989. – 28 p. – (Preprint / Humboldt – Univ., Sect. Math.; 220).

117. *Mars R.* Higher-index differential-algebraic equations: analytic and numerical treatment / Mars R. – Berlin, 1987. – 28 p. – (Preprint / Humboldt – Univ., Sect. Math.; 159).

118. *Mars R.* Multister methods for initial value problems in implicit differential-algebraic equations / R. Mars // Beitgre zur Num. Mathem. – 1984. – № 12. – P. 107–123.

119. *O'Malley R. E.* Singular singular-perturbation problems / R. E. O'Malley, J. E. Flaherty // Lect. Notes in Math. – 1978. – № 594. – P. 422–436.

120. *Pafyc S. P.* Asymptotic of the general solution of linear singularly perturbed systems of differential equations of higher orders with degeneration in case of multiple spectrum of the limit bundle of matrixes /S. P. Pafyc, V. P. Yakovets // XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation 29–31 травня 2013 р., Київ, Україна: тези доповідей. – К.: Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – С. 46.

121. *Potorocha V. V.* Asymptotical solutions to singularly perturbed systems of differential equations with degenerations and impulses / V. V. Potorocha, V. Hr. Samoilenko // Математичний вісних НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 261–277.

122. *Shlesinger L.* Uber asymptotische Dar stellungen der Losunger linearer Differential systeme als Functionene eines Parameteres /L. Shlesinger // Math. Anal. – 1907. – V. 63. – P. 277–300.

123. *Sibuya Y.* Some global properties of matrices of functions of one variable / Y. Sibuya // Math. Anal. – 1965. – 161, № 1. – P. 67–77.

124. *Sibuya Y.* Sur reduction analitique d'un systeme d'equation differentialles ordinaiir linearies contenant un parameter / Y. Sibuya // I. Sci. Univ. Tokyo. – 1958. – 7, № 5. – P. 527–540.

125. *Smith D. R.* Singular-perturbation theory: an introduction with applications / D. R. Smith. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 500 p.