НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СОЛДАТОВ ВІТАЛІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 517.927

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
МУРАЧ Олександр Олександрович,
Інститут математики НАН України, м. Київ,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ДУДКІН Микола Євгенович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського", м. Київ,
в. о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
САМОЙЛЕНКО Юлія Іванівна,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м. Київ,
старший науковий співробітник науково-дослідної частини
механіко-математичного факультету.

Захист дисертації відбудеться "28" березня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий " 23 " лютого 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Робота присвячена дослідженню властивостей найбільш широких класів крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, залежних від параметра, розв'язки яких належать до просторів Гельдера.

Актуальність теми. Питання щодо умов неперервності за параметром розв'язків систем диференціальних рівнянь посідають важливе місце в сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь. Найбільш повно ці питання досліджено стосовно задачі Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від параметра. В роботах І. І. Гіхмана (1952), М. А. Красносельського і С. Г. Крейна (1955), Я. Курцвейля і З. Ворела (1957), А. М. Самойленка (1962), А. Ю. Лєвіна (1967), З. Опяла (Z. Opial, 1967), У. Т. Рейда (W. T. Reid, 1967) і Нгуен Тхе Хоана (1993) отримано фундаментальні результати про умови неперервності за параметром розв'язків задачі Коші.

Крайові задачі, залежні від параметра, істотно менш вивчені, ніж задача Коші. Це пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. Тут піонерськими є результати І. Т. Кігурадзе (1975 – 2003) і М. Ашордіа (M. Ashordia, 1996), які ввели і дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Було встановлено умови неперервності за параметром розв'язків цих задач у просторі $C([a,b],\mathbb{R}^m)$. Недавно в роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Г. О. Чеханової (2008 – 2013) ці результати було уточнено та узагальнено на комплекснозначні функції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку.

Разом з тим В. А. Михайлецем та його учнями було введено і досліджено нові найбільш широкі класи крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до просторів Соболєва або просторів неперервно диференційовних функцій. Такі задачі було названо тотальними щодо вибраного нормованого функціонального простору. У них крайова умова задається у найбільш загальному вигляді $By = q$, де B є довільним лінійним неперервним оператором, що діє з цього простору у простір векторів $q \in \mathbb{C}^m$, де m — число рівнянь системи. Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (дані Коші, різні багатоточкові крайові умови, інтегральні умови та інші), так і некласичні крайові умови, які містять похідні шуканої функції. Для таких тотальних крайових задач було встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків у вказаних функціональних просторах.

У цьому зв'язку є актуальними дослідження тотальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь високих порядків, тотальних крайових задач щодо інших класичних функціональних просторів, питання про необхідні і достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач та про оцінку швидкості збіжності їх розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідних тем «Нелінійні, неархімедові та спектральні задачі теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики» (номер державної реєстрації 0111U001011) і «Дробове числення, неархімедів та спектральний аналіз у задачах теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U003127).

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження необхідних і достатніх умов неперервності за параметром розв'язків двох класів тотальних одновимірних крайових задач. Перший з них складається з усіх лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$. Другий складається з усіх лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)} := C^{n+r,0}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Об'єктом дослідження є одновимірні крайові задачі, тотальні щодо просторів Гельдера.

Предметом дослідження є характер залежності за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів Гельдера.

Завдання дослідження:

1. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{n+1,\alpha}$.

2. Встановити критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{n+1,\alpha}$ і дослідити швидкість збіжності розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

3. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору $C^{(n+r)}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{(n+r)}$.

4. Встановити критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{(n+r)}$ і дослідити швидкість збіжності розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

5. Ввести нові широкі класи багатоточкових крайових задач, залежних від параметра, і встановити достатні умови неперервності за параметром їх розв'язків у просторах $C^{n+1,\alpha}$ і $C^{(n+r)}$.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку введено новий клас лінійних крайових задач, тотальних щодо комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$.

2. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів $(C^{n+1,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$ та встановлено критерій однозначної розв'язності задач.

3. Встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{n+1,\alpha}$ і показано, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок.

4. Для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ введено новий клас лінійних крайових задач, тотальних щодо комплексного простору $C^{(n+r)}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

5. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ та встановлено критерій однозначної розв'язності задач.

6. Встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{(n+r)}$ та показано, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок.

7. Введено нові широкі класи багатоточкових крайових задач, залежних від параметра. Для їх розв'язків встановлено явні достатні умови неперервності за параметром у просторі $C^{n+1,\alpha}$ для систем диференціальних рівнянь першого порядку і у просторі $C^{(n+r)}$ для систем диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$.

Результати дисертації, вказані у пп. 3 і 6, є завершеними і непокращуваними. Вони є новими навіть для класичних крайових умов, оскільки отримано не лише достатні, а й необхідні умови неперервності за параметром розв'язків, і результати сформульовано у термінах більш сильних норм.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшого розвитку теорії одновимірних крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження і постановка задач належать науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук О. О. Мурачу і доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Результати статей [1, 2, 5] отримані здобувачем самостійно. Ключові результати статей [3, 4] отримано спільно з О. О. Мурачем і В. А. Михайлецем, інші результати — самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— XIII Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна — 2015“ (Україна, Київ, 1 – 3 квітня 2015 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 3 – 6 червня 2015 року);

— XIV Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна — 2016“ (Україна, Київ, 6 – 8 квітня 2016 року);

— Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня 2016 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20 – 24 вересня 2016 року);

— Всеукраїнській науково-практичній конференції „Диференціальні рівняння і суміжні питання“ (III сіверські читання з математики), присвяченій 90-річчю від дня народження Я. А. Ройтберга (Чернігів, 25 вересня 2015 року);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі кафедри вищої математики та методик навчання фізико-математичних дисциплін Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 12 наукових працях, з яких п'ять [1 – 5] — статті у провідних наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань, а інші [6 – 12] опубліковано в матеріалах наукових конференцій. Дві статті [1, 3] опубліковано в журналах, які входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 61 найменування. Повний обсяг роботи складає 120 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У *другому* розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha} := C^{n+1,\alpha}([a, b], \mathbb{C})$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$.

Розглядається така крайова задача для системи $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t) \equiv y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$By = q. \tag{2}$$

Тут є шуканою вектор-функція $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ і довільно задано матрицю-функцію $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (C^{n,\alpha})^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Оскільки цей оператор діє у простір $\mathbb{C}^m$, то крайова умова (2) задає m скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь.

Якщо вектор-функція f пробігає весь простір $(C^{n,\alpha})^m$, то розв'язок y системи (1) пробігає весь простір $(C^{n+1,\alpha})^m$. Отже, крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (1). Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (умови задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, умови змішаних крайових задач), так і різні некласичні крайові умови, які містять похідні шуканих функцій. Тому крайову задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$.

Пов'яжемо з нею неперервний лінійний оператор

$$(L, B) : (C^{n+1,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{4}$$

Він є фредгольмовим оператором з індексом нуль. Сформулюємо критерій оборотності цього оператора.

Позначимо через $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ матрицант системи (1), тобто єдиний розв'язок крайової задачі, яка складається з матричного диференціального рівняння $Y'(t) = -A(t)Y(t)$ при $a \le t \le b$ і крайової умови $Y(a) = I_m$, де I_m — одинична матриця порядку m. Позначимо через $[BY]$ числову квадратну матрицю порядку m, стовпці якої є результатом дії оператора B на відповідні стовпці матриці-функції Y.

Теорема 2.2. *Оператор* (4) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $\det[BY] \ne 0$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну крайову задачу вигляду (1), (2), залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{5}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{6}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вона є тотальною щодо простору $C^{n+1,\alpha}$.

Для крайової задачі (5), (6) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(2.I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$;

(2.II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

Окрім того, розглядається

Умова (2.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Базове означення розд. 2. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (5), (6) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

($**$) Збіжність правих частин

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \;\text{ в }\; (C^{n,\alpha})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \;\text{ в }\; \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Теорема 2.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (5), (6) *неперервно залежав від параметра ε при $\varepsilon = 0$ необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II).

Це — основний результат другого розділу. У важливому випадку, коли $\alpha = 0$, достатність у цій теоремі встановлена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою (2014).

Для крайової задачі (5), (6) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon))\|_{n,\alpha} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|,$$

де $\|\cdot\|_{n,\alpha}$ — норма у просторі $(C^{n,\alpha})^m$, а $\|\cdot\|$ — норма у просторі $\mathbb{C}^m$. При цьому $y(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Теорему 2.3 доповнює такий результат.

Теорема 2.5. *Нехай для крайової задачі* (5), (6) *виконуються умова* (0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *такі, що для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{n+1,\alpha} \leq \varkappa_2 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від* $y(\cdot, 0)$ *і* $y(\cdot, \varepsilon)$.

Отже, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot, \varepsilon)$ крайової задачі (5), (6) мають однаковий порядок.

У *третьому* розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ на відрізку $[a, b]$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)} := C^{n+r,0}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Розглядається така крайова задача для системи $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$:

$$Lz(t) \equiv z^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) z^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{7}$$

$$Bz = q. \tag{8}$$

Тут є шуканою вектор-функція $z \in (C^{(n+r)})^m$ і довільно задано матриці-функції $K_{r-j} \in (C^{(n)})^{m \times m}$, вектор-функцію $f \in (C^{(n)})^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^{rm}$ і лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{9}$$

Оскільки цей оператор діє у простір $\mathbb{C}^{rm}$, то крайова умова (8) задає rm скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r.

Якщо вектор-функція f пробігає весь простір $(C^{(n)})^m$, то розв'язок z системи (7) пробігає весь простір $(C^{(n+r)})^m$. Отже, крайова умова (8) з неперервним оператором (9) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (7). Тому крайову задачу (7), (8) називаємо тотальною щодо простору $C^{(n+r)}$ функцій, $n + r$ разів неперервно диференційовних на $[a, b]$.

Пов'яжемо з цією задачею неперервний лінійний оператор

$$(L, B) : \, (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{10}$$

Він є фредгольмовим оператором з індексом нуль. Сформулюємо критерій оборотності цього оператора.

Для кожного номера $l \in \{0, \dots, r-1\}$ позначимо через Z_l єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Z_l^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) Z_l^{(r-j)}(t) = 0, \quad a \le t \le b,$$
$$Z_l^{(j)}(a) = \delta_{l,j} I_m, \quad j = 0, \dots, r-1,$$

де $\delta_{l,j}$ — символ Кронекера.

Теорема 3.2. *Оператор* (10) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли є невиродженою матриця*

$$\big([BZ_0] \cdots [BZ_{r-1}]\big). \tag{11}$$

Тут (11) є числова квадратна матриця порядку rm, утворена з прямокутних блоків $[BZ_l]$, де $l = 0, \dots r-1$, розміру $rm \times m$. Кожний стовпець блоку $[BZ_l]$ є результатом дії оператора B на відповідний стовпець матриці-функції Z_l.

Розглянемо лінійну крайову задачу вигляду (7), (8), залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon) z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon) z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{12}$$
$$B(\varepsilon) z(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{13}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вона є тотальною щодо простору $C^{(n+r)}$.

Для крайової задачі (12), (13) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(3.I) $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to K_{r-j}(\cdot,0)$ в $(C^{(n)})^{m \times m}$ для кожного номера $j \in \{1 \dots r\}$;

(3.II) $B(\varepsilon) z \to B(0) z$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$.

Розглядається ще така

Умова (3.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0) z(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0) z(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Базове означення розд. 3. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (12), (13) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, вектор-функції $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ і вектора $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$.

($**$) Збіжність правих частин

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad \left(C^{(n+r)}\right)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Теорема 3.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (12), (13) *неперервно залежав від параметра ε при $\varepsilon = 0$ необхідно й достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I) *та* (3.II).

Це — основний результат третього розділу.

Для крайової задачі (12), (13) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_n(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)z(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_n + \|B(\varepsilon)z(\cdot, 0) - q(\varepsilon)\|,$$

де $\|\cdot\|_n$ — норма у просторі $(C^{(n)})^m$, а $\|\cdot\|$ — норма у просторі $\mathbb{C}^{rm}$. При цьому $z(\cdot, 0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Теорему 3.3 доповнює такий результат.

Теорема 3.4. *Нехай крайова задача* (12), (13) *задовольняє умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I) *і* (3.II). *Тоді існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ такі, що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1 \, d_n(\varepsilon) \le \|z(\cdot, 0) - z(\cdot, \varepsilon)\|_{n+r} \le \varkappa_2 \, d_n(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ не залежать від вектор-функцій $z(\cdot, 0)$ і $z(\cdot, \varepsilon)$.

Таким чином, похибка і нев'язка розв'язку $z(\cdot, \varepsilon)$ крайової задачі (12), (13) мають однаковий порядок.

У *четвертому* розділі дисертації введено і досліджено нові класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь як першого порядку, так і вищих порядків. Їх дослідження спирається на результати, отримані у другому і третьому розділах.

Нехай задано цілі числа $r \geq 1$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $p \geq 1$. На відрізку $[a, b]$ розглядаємо систему (12) лінійних диференціальних рівнянь порядку r, залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо з цією системою багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)z(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{14}$$

Тут усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm \times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a, b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими. При цьому не припускається, що коефіцієнти $K_{r-j}(t, \varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε.

Використання у крайовій умові (14) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1, p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядаємо таку крайову задачу:

$$L(0)z(t, 0) = f(\cdot, 0), \quad a \leq t \leq b, \tag{15}$$

$$B(0)z(\cdot, 0) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j}^{(l)} z^{(l)}(t_j, 0) = q(0). \tag{16}$$

Тут усі матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm \times m}$, точки $t_j \in [a, b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $z \mapsto B(\varepsilon)z$, де $z \in (C^{(n+r)})^m$, є обмеженим оператором на парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $\mathbb{C}^{rm}$. Зроблені у третьому розділі припущення щодо системи (12) та обмеженість цього оператора означають, що крайова задача (12), (14) є тотальною щодо простору $(C^{(n+r)})^m$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, як і задача (15), (16). Отже, для цих задач застосовні результати другого і третього розділів дисертації. Використовуючи ці результати, отримано явні достатні умови неперервності за параметром ε розв'язку крайової задачі (12), (14).

Сформулюємо ці явні

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(c1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(c2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+r}$;

(c3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| = O(1)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(c4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ та $l \in \overline{0,n+r-1}$;

(c5) $\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ та $l \in \overline{0,n+r}$.

Теорема 4.4. *Нехай крайова задача* (12), (14) *задовольняє умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I), (c1) – (c5). *Тоді її розв'язок неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у сенсі базового означення розд.* 3.

У випадку, коли $\omega_j = 1$ для кожного $j \in \overline{1,p}$, багатоточкові крайові задачі вигляду (12), (14) були введені і досліджені В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою (2014, 2015). Зокрема, ними доведена теорема 4.4 для $r = 1$ у зазначеному випадку. При цьому система умов (c2) – (c4) стає еквівалентною такій одній умові: $\beta_{j,1}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+1}$.

У четвертому розділі також введено і досліджено залежні від параметра багатоточкові крайові задачі з крайовою умовою вигляду (14) для систем диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \le n \in \mathbb{Z}$ і $0 < \alpha \le 1$. Для таких задач отримано явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \ge 1$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \le n \in \mathbb{Z}$ і $0 \le \alpha \le 1$, — тотальні крайові задачі щодо простору $C^{n+1,\alpha}$.

2. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{n+1,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, тотальних щодо простору $C^{n+1,\alpha}$ і залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі і показано, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

4. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору $C^{(n+r)}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{(n+r)}$.

5. Показано, що введені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, тотальних щодо простору $C^{(n+r)}$ і залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі і доведено, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

7. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 < \alpha \leq 1$. Для цих задач встановлено явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $C^{n+1,\alpha}$.

8. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Для цих задач встановлено явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $C^{(n+r)}$.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. *Soldatov V. O.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ / V. O. Soldatov // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 5. – С. 692 – 700. (Переклад англ. мовою: Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol. 67, No. 5. – P. 785 – 794.)

2. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 327 – 337.

3. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. Soldatov // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2016. – No. 87. – P. 1 – 16.

4. *Мурач О. О., Солдатов В. О.* Критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 256 – 273.

5. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, № 2. – С. 267 – 280.

6. *Солдатов В. О.* Про граничний перехід у крайових задачах для систем диференціальних рівнянь порядку r у просторах $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015". – 1–3 квітня 2015, м. Київ, Україна. – С. 46 – 48.

7. *Soldatov V. O.* On the limit theorem for boundary-value problems for systems of differential equations of order $r \geqslant 1$ in the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Міжнародна конференція молодих математиків. 3–6 червня 2015 р., Київ, Україна. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 130.

8. *Солдатов В. О.* Теорема про граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 24–27 лютого 2016 р. (тези доповідей). – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2016. – С. 135 – 136.

9. *Солдатов В. О.* Про граничний перехід у крайових задачах для систем диференціальних рівнянь порядку r у просторах $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016". – 6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна. – С. 75–77.

10. *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Гельдера-Зігмунда / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня, 2016 р. – Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла", 2016. – С. 120.

11. *Михайлець В. А., Мурач О. О., Солдатов В. О.* Про тотальні крайові задачі, залежні від параметра / В. А. Михайлець, О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19–20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ: НТУУ "КПІ", 2016. – С. 202 – 204.

12. *Soldatov V. O.* About generic boundary-value problems depending on parameter / V. O. Soldatov // Міжнародна конференція з диференціальнних рівнянь, присвячена 110-й річниці Я. Б. Лопатинського, 20–24 вересня, 2016 р., Львів, Україна. Тези доповідей. – С. 112 – 113.

Анотації

Солдатов В. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

У дисертаційній роботі введено і досліджено два нових класи лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший з них є максимально широким класом для систем диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$. Другий є максимально широким класом для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору $C^{(n+r)} = C^{n+r,0}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Крайові задачі з цих класів названо тотальними щодо вказаних просторів. Показано, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парах відповідних просторів і встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

Для введених тотальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованих просторах $C^{n+1,\alpha}$ і $C^{(n+r)}$ відповідно. Доведено, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

Введено нові широкі класи багатоточкових лінійних крайових задач, залежних від малого параметра ε. Для їх розв'язків встановлено явні достатні умови неперервності за параметром при $\varepsilon = 0$ у просторі $C^{n+1,\alpha}$ при $0 < \alpha \leq 1$ для систем диференціальних рівнянь першого порядку і у просторі $C^{(n+r)}$ для систем диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Гельдера, неперервність за параметром, багатоточкова крайова задача.

Солдатов В. А. Непрерывность по параметру решений одномерных краевых задач в пространствах Гёльдера. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертационной работе введены и исследованы два новых класса линейных краевых задач для систем $m \geq 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на отрезке вещественной оси. Первый из них является максимально широким классом для систем дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых принадлежат комплексному нормированному пространству Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, где $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Второй является максимально широким классом для систем дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$, решения которых принадлежат комплексному пространству $C^{(n+r)} = C^{n+r,0}$, где $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Краевые задачи из этих классов названы тотальными относительно указанных пространств. Краевые условия в этих задачах имеют вид $By = q$, где B — произвольный непрерывный линейный оператор, действующий из пространства $(C^{n+1,\alpha})^m$ либо $(C^{(n+r)})^m$ в конечномерное пространство комплексных векторов q. Такие условия охватывают как все классические типы краевых условий, так и неклассические краевые условия, которые содержат производные $y^{(l)}$ порядка $l \leq n+1$ либо $l \leq n+r$ соответственно.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов и библиографии.

Во введении дана общая характеристика тематики работы и обоснована ее актуальность, приведены основные результаты работы и показана их научная новизна, указаны данные об апробации диссертационной работы.

Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертации.

Во второй главе для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка исследованы тотальные краевые задачи относительно пространства Гельдера $C^{n+1,\alpha}$. Доказано, что эти задачи являются фредгольмовыми с индексом нуль на паре нормированных пространств $(C^{n+1,\alpha})^m$ и $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$. Получен критерий однозначной разрешимости этих задач. Для краевых задач, тотальных относительно пространства $C^{n+1,\alpha}$ и зависящих от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, установлен конструктивный критерий непрерывности по параметру решений при $\varepsilon = 0$ в этом пространстве. Показано, что погрешность и невязка решений имеют одинаковый порядок малости при $\varepsilon \to 0+$.

В третьей главе для систем линейных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$ исследованы тотальные краевые задачи относительно пространства $C^{(n+r)}$, состоящего из $n+r$ раз непрерывно дифференцируемых функций. Доказано, что эти задачи являются фредгольмовыми с индексом нуль на паре нормированных пространств $(C^{(n+r)})^m$ и $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$. Установлен критерий однозначной разрешимости этих задач. Для краевых задач, тотальных относительно пространства $C^{(n+r)}$ и зависящих от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, установлен конструктивный критерий непрерывности по параметру решений при $\varepsilon = 0$ в этом пространстве. Доказано, что погрешность и невязка решений одного порядка малости при $\varepsilon \to 0+$.

В четвертой главе результаты второй и третьей глав применены к многоточечным краевым задачам. Введены и исследованы новые широкие классы многоточечных краевых задач, зависимых от малого параметра $\varepsilon \geq 0$. Эти задачи рассмотрены для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых принадлежат пространству Гельдера $C^{n+1,\alpha}$ при $0 < \alpha \leq 1$, и для систем линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка r, решения которых принадлежат пространству $C^{(n+r)}$. Введенные многоточечные краевые задачи являются тотальными относительно указанных пространств и для них применимы результаты второй и третьей глав. Для этих задач получены явные достаточные условия непрерывности по параметру решений при $\varepsilon = 0$ в пространствах $C^{n+1,\alpha}$ и $C^{(n+r)}$.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, краевая задача, пространство Гельдера, непрерывность по параметру, многоточечная краевая задача.

Soldatov V. O. Continuity in a parameter of solutions to one-dimensional boundary-value problems in Hölder spaces. — Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

In the thesis we introduce and investigate two new classes of linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. The first of them is the broadest class for systems of first-order differential equations whose solutions belong to the complex Hölder space $C^{n+1,\alpha}$ with $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ and $0 \leq \alpha \leq 1$. The second is the broadest class for systems of differential equations of order $r \geq 2$ whose solutions belong to the complex space $C^{(n+r)} = C^{n+r,0}$ with $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. The boundary-value problems from these classes are called generic with respect to the indicated spaces. We prove that these problems are Fredholm with zero index between corresponding spaces and establish a criterion for the unique solvability of these problems.

For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, we establish a constructive criterion under which their solutions are continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the normed spaces $C^{n+1,\alpha}$ and $C^{(n+r)}$ respectively. We prove that the error and discrepancy of the solutions are of the same order as $\varepsilon \to 0+$.

New broad classes of multipoint linear boundary-value problems depending on the small parameter ε are introduced. We establish explicit sufficient conditions under which the solutions to these problems are continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the space $C^{n+1,\alpha}$ with $0 < \alpha \leq 1$ for systems of first-order differential equations and in the space $C^{(n+r)}$ for systems of differential equations of an arbitrary order $r \geq 1$.

Key words: differential system, boundary-value problem, Hölder space, continuity in parameter, multipoint boundary-value problem.