НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

СОЛДАТОВ ВІТАЛІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 517.927

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук
Мурач Олександр Олександрович

Київ — 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню властивостей найбільш широких класів крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, залежних від параметра, розв'язки яких належать до просторів Гельдера.

Актуальність теми. Питання щодо умов неперервності за параметром розв'язків систем диференціальних рівнянь посідають важливе місце в сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь. Найбільш повно ці питання досліджено стосовно задачі Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від параметра. В роботах І. І. Гіхмана [4], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [17], Я. Курцвейля і З. Ворела [18], А. М. Самойленка [32 33, 58], А. Ю. Лєвіна [20 – 19], З. Опяла [56] і Нгуен Тхе Хоана [30] отримано фундаментальні результати про умови неперервності за параметром розв'язків задачі Коші.

Крайові задачі, залежні від параметра, істотно менш вивчені, ніж задача Коші. Це пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. Тут піонерськими є результати І. Т. Кігурадзе [10 – 12] і М. Ашордіа [46], які ввели і дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Було встановлено умови неперервності за параметром розв'язків цих задач у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Недавно в роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Г. О. Чеханової [15, 23, 25, 54] ці результати було уточнено та узагальнено на комплекснозначні функції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку.

Разом з тим В. А. Михайлецем та його учнями [6, 24, 28, 51] було введено і досліджено нові найбільш широкі класи крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до просторів Соболєва або просторів неперервно диференційовних функцій. Такі задачі було названо тотальними щодо вибраного нормованого функціонального простору. У них крайова умова задається у найбільш загальному вигляді $By = q$, де B є довільним лінійним неперервним оператором, що діє з цього простору у простір векторів $q \in \mathbb{C}^m$, де m — число рівнянь системи. Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (дані Коші, різні багатоточкові крайові умови, інтегральні умови та інші), так і некласичні крайові умови, які містять похідні шуканої функції. Для таких тотальних крайових задач було встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків у вказаних функціональних просторах.

У цьому зв'язку є актуальними дослідження тотальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь високих порядків, тотальних крайових задач щодо інших класичних функціональних просторів, питання про необхідні і достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач та про оцінку швидкості збіжності їх розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідних тем «Нелінійні, неархімедові та спектральні задачі теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики» (номер державної реєстрації 0111U001011) і «Дробове числення, неархімедів та спектральний аналіз у задачах теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U003127).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження необхідних і достатніх умов неперервності за параметром розв'язків двох класів тотальних одновимірних крайових задач. Перший з них складається з усіх лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$. Другий складається з усіх лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)} := C^{n+r,0}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Об'єктом дослідження є одновимірні крайові задачі, тотальні щодо просторів Гельдера.

Предметом дослідження є характер залежності за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів Гельдера.

Завдання дослідження:

1. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{n+1,\alpha}$.

2. Встановити критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{n+1,\alpha}$ і дослідити швидкість збіжності розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

3. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору $C^{(n+r)}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{(n+r)}$.

4. Встановити критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{(n+r)}$ і дослідити швидкість збіжності розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

5. Ввести нові широкі класи багатоточкових крайових задач і встановити достатні умови неперервності за параметром їх розв'язків у просторах $C^{n+1,\alpha}$ і $C^{(n+r)}$.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку введено новий клас лінійних крайових задач, тотальних щодо комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$.

2. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів $(C^{n+1,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$ та встановлено критерій однозначної розв'язності задач.

3. Встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{n+1,\alpha}$ і показано, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок.

4. Для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ введено новий клас лінійних крайових задач, тотальних щодо комплексного простору $C^{(n+r)}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

5. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ та встановлено критерій однозначної розв'язності задач.

6. Встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків цих задач у нормованому просторі $C^{(n+r)}$ та показано, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок.

7. Введено нові широкі класи багатоточкових крайових задач. Для їх розв'язків встановлено явні достатні умови неперервності за параметром у просторі $C^{n+1,\alpha}$ для систем диференціальних рівнянь першого порядку і у просторі $C^{(n+r)}$ для систем диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$.

Результати дисертації, вказані у пп. 3 і 6, є завершеними і непокращуваними. Вони є новими навіть для класичних крайових умов, оскільки отримано не лише достатні, а й необхідні умови неперервності за параметром розв'язків, і результати сформульовано у термінах більш сильних норм.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшого розвитку теорії одновимірних крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження і постановка задач належать науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук О. О. Мурачу і доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Результати статей [34, 35, 36] отримані здобувачем самостійно. Ключові результати статей [29, 55] отримано спільно з О. О. Мурачем і В. А. Михайлецем, інші результати — самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— XIII Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна — 2015“ (Україна, Київ, 1 – 3 квітня 2015 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 3 – 6 червня 2015 року);

— XIV Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна — 2016“ (Україна, Київ, 6 – 8 квітня 2016 року);

— Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня 2016 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20 – 24 вересня 2016 року);

— Всеукраїнській науково-практичній конференції „Диференціальні рівняння і суміжні питання“ (III сіверські читання з математики), присвяченій 90-річчю від дня народження Я. А. Ройтберга (Чернігів, 25 вересня 2015 року);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі кафедри вищої математики та методик навчання фізико-математичних дисциплін Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 12 наукових працях, з яких п’ять [29, 34, 35, 36, 55] — статті у провідних наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань, а інші [26, 37, 38, 39, 40, 59, 60] опубліковано в матеріалах наукових конференцій. Дві статті [34, 55] опубліковано в журналах, які входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 61 найменування. Повний обсяг роботи складає 120 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У *другому* розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha} := C^{n+1,\alpha}([a, b], \mathbb{C})$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $0 \leq \alpha \leq 1$.

Розглядається така крайова задача для системи $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t) \equiv y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$By = q. \tag{2}$$

Тут є шуканою вектор-функція $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ і довільно задано матрицю-функцію $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (C^{n,\alpha})^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Оскільки цей оператор діє у простір $\mathbb{C}^m$, то крайова умова (2) задає m скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь першого порядку.

Якщо вектор-функція f пробігає весь простір $(C^{n,\alpha})^m$, то розв'язок y системи (1) пробігає весь простір $(C^{n+1,\alpha})^m$. Отже, крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (1). Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (умови задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, умови змішаних крайових задач), так і різні некласичні крайові умови, які містять похідні шуканих функцій. Тому крайову задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$.

Пов'яжемо з нею неперервний лінійний оператор

$$(L,B):(C^{n+1,\alpha})^m\to(C^{n,\alpha})^m\times\mathbb{C}^m. \tag{4}$$

Він є фредгольмовим оператором з індексом нуль. Сформулюємо критерій оборотності цього оператора.

Позначимо через Y матрицант системи (1), тобто єдиний розв'язок крайової задачі, яка складається з матричного диференціального рівняння $Y'(t)=-A(t)Y(t)$ при $a\le t\le b$ і крайової умови $Y(a)=I_m$, де I_m — одинична матриця порядку m. Позначимо через $[BY]$ числову квадратну матрицю порядку m, стовпці якої є результатом дії оператора B на відповідні стовпці матриці-функції Y.

Теорема 2.2. *Оператор* (4) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $\det[BY]\neq 0$.

Нехай $\varepsilon_0>0$. Розглянемо лінійну крайову задачу вигляду (1), (2), залежну від параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon)\equiv y'(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad a\le t\le b, \tag{5}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=q(\varepsilon). \tag{6}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ вона є тотальною щодо простору $C^{n+1,\alpha}$.

Для крайової задачі (5), (6) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon\to 0+$:

(2.I) $A(\cdot,\varepsilon)\to A(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$;

(2.II) $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y\in(C^{n+1,\alpha})^m$.

Окрім того, розглядається

Умова (2.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$
$$B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Базове означення розд. 2. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (5), (6) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

(∗) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

(∗∗) Збіжність правих частин

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \text{ в } (C^{n,\alpha})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \text{ в } \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Теорема 2.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (5), (6) *неперервно залежав від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II).

Це — основний результат другого розділу. У важливому випадку, коли $\alpha = 0$, достатність у цій теоремі встановлена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [28, с. 26, 27].

Для крайової задачі (5), (6) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon))\|_{n,\alpha} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|,$$

де $\|\cdot\|_{n,\alpha}$ — норма у просторі $(C^{n,\alpha})^m$, а $\|\cdot\|$ — норма у просторі $\mathbb{C}^m$. При цьому $y(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Теорему 2.3 доповнює такий результат.

Теорема 2.5. *Нехай для крайової задачі* (5), (6) *виконуються умова* (0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+1,\alpha} \leq \varkappa_2 \, d_{n,\alpha}(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від* $y(\cdot,0)$ *і* $y(\cdot,\varepsilon)$.

Отже, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (5), (6) мають однаковий порядок.

У *третьому* розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ на відрізку $[a,b]$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)} := C^{n+r,0}$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Розглядається така крайова задача для системи $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$:

$$Lz(t) \equiv z^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) z^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{7}$$

$$Bz = q. \tag{8}$$

Тут є шуканою вектор-функція $z \in (C^{(n+r)})^m$ і довільно задано матриці-функції $K_{r-j} \in (C^{(n)})^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (C^{(n)})^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^{rm}$ і лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{9}$$

Оскільки цей оператор діє у простір $\mathbb{C}^{rm}$, то крайова умова (8) задає rm скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r.

Якщо вектор-функція f пробігає весь простір $(C^{(n)})^m$, то розв'язок z системи (7) пробігає весь простір $(C^{(n+r)})^m$. Отже, крайова умова (8) з неперервним оператором (9) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (7). Тому крайову задачу (7), (8) називаємо тотальною щодо простору $C^{(n+r)}$ функцій, $n+r$ разів неперервно диференційовних на $[a,b]$.

Пов'яжемо з цією задачею неперервний лінійний оператор

$$(L,B):\ (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{10}$$

Він є фредгольмовим оператором з індексом нуль. Сформулюємо критерій оборотності цього оператора.

Для кожного номера $l \in \{0,\ldots,r-1\}$ позначимо через Z_l єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Z_l^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) Z_l^{(r-j)}(t) = 0, \quad a \le t \le b,$$

$$Z_l^{(j)}(a) = \delta_{l,j} I_m, \quad j = 0,\ldots,r-1,$$

де $\delta_{l,j}$ — символ Кронекера.

Теорема 3.2. *Оператор* (10) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли є невиродженою матриця*

$$\bigl([BZ_0]\cdots[BZ_{r-1}]\bigr). \tag{11}$$

Тут (11) є числова квадратна матриця порядку rm, утворена з прямокутних блоків $[BZ_l]$, де $l = 0,\ldots r-1$, розміру $rm \times m$. Кожний стовпець блоку $[BZ_l]$ є результатом дії оператора B на відповідний стовпець матриці-функції Z_l.

Розглянемо лінійну крайову задачу вигляду (7), (8), залежну від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon) z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{12}$$

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{13}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вона є тотальною щодо простору $C^{(n+r)}$.

Для крайової задачі (12), (13) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(3.I) $K_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \to K_{r-j}(\cdot, 0)$ в $(C^{(n)})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1 \dots r\}$;

(3.II) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$.

Розглядається ще така

Умова (3.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)z(t,0) = 0, \quad a \le t \le b,$$
$$B(0)z(\cdot, 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Базове означення розд. 3. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (12), (13) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, вектор-функції $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ і вектора $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$.

($**$) Збіжність правих частин

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad \left(C^{(n+r)}\right)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Теорема 3.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (12), (13) *неперервно залежав від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *необхідно й достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I) *та* (3.II).

Це — основний результат третього розділу.

Для крайової задачі (12), (13) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_n(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_n + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|,$$

де $\|\cdot\|_n$ — норма у просторі $(C^{(n)})^m$, а $\|\cdot\|$ — норма у просторі $\mathbb{C}^{rm}$. При цьому $z(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Теорему 3.3 доповнює такий результат.

Теорема 3.4. *Нехай крайова задача* (12)*,* (13) *задовольняє умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I) *і* (3.II)*. Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* $\varkappa_1$*,* $\varkappa_2$ *такі, що для довільного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1\, d_n(\varepsilon) \le \|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r} \le \varkappa_2\, d_n(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2*,* $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від вектор-функцій* $z(\cdot,0)$ *і* $z(\cdot,\varepsilon)$*.*

Таким чином, похибка і нев'язка розв'язку $z(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (12), (13) мають однаковий порядок.

У *четвертому* розділі дисертації введено і досліджено нові класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь як першого порядку, так і вищих порядків. Їх дослідження спирається на результати, отримані у другому і третьому розділах.

Нехай задано цілі числа $r \ge 1$, $m \ge 1$, $n \ge 0$ і $p \ge 1$. На відрізку $[a,b]$ розглядаємо систему (12) лінійних диференціальних рівнянь порядку r, залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ пов'яжемо з цією системою багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{\omega_j}\sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon). \qquad (14)$$

Тут усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими. При цьому не припускається, що коефіцієнти

$K_{r-j}(t,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε.

Використання у крайовій умові (14) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядаємо таку крайову задачу:

$$L(0)z(t,0) = f(\cdot,0), \quad a \le t \le b, \tag{15}$$

$$B(0)z(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+r} \beta_j^{(l)} z^{(l)}(t_j,0) = q(0). \tag{16}$$

Тут усі матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими.

Для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $z \mapsto B(\varepsilon)z$, де $z \in (C^{(n+r)})^m$, є обмеженим оператором на парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $\mathbb{C}^{rm}$. Зроблені у третьому розділі припущення щодо системи (12) та обмеженість цього оператора означають, що крайова задача (12), (14) є тотальною щодо простору $(C^{(n+r)})^m$ для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, як і задача (15), (16). Отже, для цих задач застосовні результати другого і третього розділів дисертації. Використовуючи ці результати, отримано явні достатні умови неперервності за параметром ε розв'язку крайової задачі (12), (14).

Сформулюємо ці явні

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(c1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(c2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+r}$;

(c3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| = O(1)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(c4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\|\cdot|t_{j,k}(\varepsilon)-t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ та $l \in \overline{0,n+r-1}$;

(c5) $\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ та $l \in \overline{0,n+r}$.

Теорема 4.4. *Нехай крайова задача* (12), (14) *задовольняє умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I), (c1) – (c5). *Тоді її розв'язок неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у сенсі базового означення розд.* 3.

У випадку, коли $\omega_j = 1$ для кожного $j \in \overline{1,p}$, багатоточкові крайові задачі вигляду (12), (14) були введені і досліджені В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [28, 54]. Зокрема, ними доведена теорема 4.4 для $r = 1$ у зазначеному випадку. При цьому система умов (c2) – (c4) стає еквівалентною такій одній умові: $\beta_{j,1}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+1}$.

У четвертому розділі також введено і досліджено залежні від параметра багатоточкові крайові задачі з крайовою умовою вигляду (14) для систем диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $0 \le n \in \mathbb{Z}$ і $0 < \alpha \le 1$. Для таких задач отримано явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Класичним об'єктом досліджень у теорії звичайних диференціальних рівнянь є задача Коші. Фундаментальні результати стосовно залежності її розв'язків від параметра отримали Й. І. Гіхман [4], М. А. Красносельский і С. Г. Крейн [17]. В їхніх роботах розглядалися нелінійні диференціальні рівняння, залежні від параметра, праві частини яких неперервні в інтегральному сенсі. Вибір такої постановки був пов'язаний із застосуванням цих результатів до обґрунтування принципу усереднення М. М. Боголюбова в різних постановках [2].

Окрема увага приділялася задачам Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь. Розглянемо лінійну матричну задачу Коші першого порядку, залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$\begin{gathered} Y'(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) + F(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \\ Y(a,\varepsilon) = I_m. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Тут $Y(\cdot,\varepsilon)$, $A(\cdot,\varepsilon)$ і $F(\cdot,\varepsilon)$ є дійсні квадратні матриці-функції порядку $m \in \mathbb{N}$, а I_m — числова одинична матриця порядку m.

Якщо

$$A(\cdot,\varepsilon), F(\cdot,\varepsilon) \in C([a,b], \mathbb{R}^{m\times m}),$$

то найпростішою умовою неперервності розв'язків цієї задачі за параметром, тобто властивості

$$Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad C([a,b], \mathbb{R}^{m\times m}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{1.2}$$

є рівномірна збіжність матриць коефіцієнтів і правих частин

$$A(t,\varepsilon) \rightrightarrows A(t,0) \quad \text{і} \quad F(t,\varepsilon) \rightrightarrows F(t,0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

(див., наприклад, [41, 50]).

У важливому випадку, коли

$$A(\cdot,\varepsilon), F(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times m}),$$

властивість (1.2) згідно з Я. Д. Тамаркіним [61] є наслідком збіжності матриць-функцій

$$A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0), \quad F(\cdot,\varepsilon) \to F(\cdot,0) \quad \text{в} \quad L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times m}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Згадані результати М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [17] дають можливість у випадку лінійної крайової задачі (1.1) одержати більш тонкі достатні умови неперервності за параметром розв'язків. Ці умови є такими:

1) при $\varepsilon \to 0+$ виконується збіжність

$$A^{\vee}(\cdot,\varepsilon) \to A^{\vee}(\cdot,0), \quad F^{\vee}(\cdot,\varepsilon) \to F^{\vee}(\cdot,0) \quad \text{в} \quad L_\infty([a,b],\mathbb{R}^{m\times m}), \quad (1.3)$$

   де

$$A^{\vee}(t) := \int_a^t A(s)ds, \quad F^{\vee}(t) := \int_a^t F(s)ds$$

   для довільного $t \in [a,b]$;

2) існує функція $L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times m})$ така, що $|A(t,\varepsilon)| \leq h(t)$ для довільних $t \in [a,b]$ і $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$.

Пізніше А. Ю. Лєвін [20] послабив другу умову так:

$$\|A(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \quad (1.4)$$

Більше того, ним було показано, що за припущення (1.4) умова (1.3) є не лише достатньою, але й необхідною для виконання (1.2).

Тут і надалі у цьому розділі позначаємо через $\|\cdot\|_{L_p}$, де $1 \leq p \leq \infty$, норму числових, скалярних, або матриць функцій у дійсному чи комплексному просторі Лебега L_p на $[a,b]$.

У. Т. Рейд [57] показав, що для виконання (1.2) достатньо, щоб матриця-функція $A(\cdot, \varepsilon)$ слабко збігалася до $A(\cdot, 0)$ у просторі $L_1([a, b], \mathbb{R}^{m\times m})$ при $\varepsilon \to 0+$. Втім, як відмітив А. Ю. Лєвін [21], з цієї слабкої збіжності випливають умови (1.3) і (1.4).

Умова (1.4) є суттєвою для розглянутої постановки. Спроба відкинути її значно ускладнює задачу, бо умова (1.3), взагалі кажучи, не є ані необхідною, ані достатньою для (1.2). Цю властивість ілюструє такий приклад, наведений у роботі Я. Курцвейля [52].

Приклад 1.1. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ послідовність дійсних скалярних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = p_k(t)x_k(t) + f_k(t), \tag{1.5}$$

де

$$p_k(t) := k^{1-\alpha}\cos kt, \quad f_k(t) := k^{1-\beta}\sin kt$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$, а α і β є дійсні числові параметри. Порівняємо розв'язки рівняння (1.5) з розв'язками рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.$$

Нехай $x_k(t)$ — розв'язок рівняння (1.5), який задовольняє початкову умову $x_k(a) = c_0$, де $c_0 \in \mathbb{R}$. Як перевірив Я. Курцвейль [52], рівність

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - c_0\|_{L_\infty} = 0 \tag{1.6}$$

правильна при будь-якому $c_0 \in \mathbb{R}$ тоді і лише тоді, коли

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta > 1. \tag{1.7}$$

Для розглянутих диференціальних рівнянь умова збіжності коефіцієнтів і правих частин у просторі $L_1([a, b], \mathbb{R})$ зводиться до пари нерівностей $\alpha > 1$ і $\beta > 1$, а умова (1.3) — до пари нерівностей $\alpha > 0$ і $\beta > 0$. Звідси випливає, що співвідношення (1.3) не є достатнім для збіжності розв'язків. Виявилося також, що ці співвідношення не є необхідними.

Продовжуючи дослідження рівняння (1.5), Я. Курцвейль [52, 53] отримав таку достатню умову для виконання (1.6):

$$\alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta > 1.$$

На ці результати Я. Курцвейля корисно подивитися з більш загальної точки зору матричних диференціальних рівнянь, спираючись на роботу А. Ю. Лєвіна [20], де було отримано наступний результат.

Теорема 1.1 (Левін [20]). *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконується одна із таких чотирьох нееквівалентних між собою умов:*

(L.1) $\|R(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} = O(1)$,

(L.2) $\|R^{\vee}(\cdot,\varepsilon)R(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} \to 0$,

(L.3) $\|R(\cdot,\varepsilon)R^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} \to 0$,

(L.4) $\|R(\cdot,\varepsilon)R^{\vee}(\cdot,\varepsilon) - R^{\vee}(\cdot,\varepsilon)R(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} \to 0$,

де $R(t,\varepsilon) := A(t,\varepsilon) - A(t,0)$. Тоді умова

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|R^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} = 0$$

є необхідною і достатньою для виконання співвідношення (1.2).

Інша умова, достатня для виконання (1.2), отримана З. Опялем [56]. Ним був встановлений такий результат.

Теорема 1.2 (Опял [56]). *Якщо*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|R^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} \cdot (1 + \|A(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1}) = 0, \tag{1.8}$$

то розв'язки системи (1.1) *задовольняють умову* (1.2).

Нгуен Тхе Хоан [30] послабив умови А. Ю. Лєвіна $(L.1)-(L.4)$ у такий спосіб. Розглянемо послідовності матриць-функцій

$$Q_0(t,\varepsilon), Q_1(t,\varepsilon), ..., Q_i(t,\varepsilon), ...,$$
$$P_0(t,\varepsilon), P_1(t,\varepsilon), ..., P_i(t,\varepsilon), ...$$

такі, що

$$Q_0(t,\varepsilon) := R(t,\varepsilon), \quad Q_i(t,\varepsilon) := Q_{i-1}^{\vee}(t,\varepsilon)R(t,\varepsilon)$$

та

$$P_0(t,\varepsilon) := R(t,\varepsilon), \quad P_i(t,\varepsilon) := R(t,\varepsilon)P_{i-1}^{\vee}(t,\varepsilon).$$

Для будь-яких $i, j \in \mathbb{N}$ покладемо

$$G_i(t,\varepsilon) := Q_0(t,\varepsilon) - Q_1(t,\varepsilon) + ... + (-1)^i Q_i(t,\varepsilon),$$
$$H_j(t,\varepsilon) := P_0(t,\varepsilon) + P_1(t,\varepsilon) + ... + P_j(t,\varepsilon).$$

Окрім того, $G_{-1}(t,\varepsilon) := 0$ і $H_{-1}(t,\varepsilon) := 0$.

Розглянемо для цілих $i, j \geq 0$ такі припущення:

(N^i) при $0 \leq \varepsilon \ll 1$ виконуються нерівності

$$\|G_{i-1}^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} \leq \delta < 1, \quad \|Q_i(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} \leq \sigma < \infty$$

для деяких чисел δ і σ;

(N_j) при $0 \leq \varepsilon \ll 1$ виконуються нерівності

$$\|H_{j-1}^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} \leq \delta < 1, \quad \|P_j(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} \leq \sigma < \infty$$

для деяких чисел δ і σ.

Теорема 1.3 (Нгуен Тхе Хоан [30])**.** *Якщо припущення (N^i) справджується для деякого цілого $i \geq 0$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|G_i^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} = 0 \ \Leftrightarrow \ (1.2).$$

Якщо припущення (N_j) справджується для деякого цілого $j \geq 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|H_j^{\vee}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} = 0 \ \Leftrightarrow \ (1.2).$$

Відмітимо, що умова $(L.1)$ еквівалентна кожній з умов (N^0) і (N_0). Окрім того, з умов $(L.2)$ і $(L.3)$ випливають умови (N^1) і (N_1) відповідно.

Узагальнюючи результати М. А. Красносельского та С. Г. Крейна [17], Я. Курцвейль і З. Ворел [18] розглянули цікавий випадок залежності розв'язків від параметра. Я. Курцвейль і З. Ворел показали, що з умов рівномірної збіжності

$$\int_0^t Y(t, y, \lambda)dt \rightrightarrows \int_0^t Y^0(t, y)dt \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0,$$

$$y(t, \lambda) \rightrightarrows y(t, \lambda_0) \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0,$$

де $Y(t, y, \lambda)$ — права частина, а $y(t, \lambda)$ розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y, \lambda),$$

не випливає, що функція $y(t, \lambda_0)$ задовольняє граничне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Y^0(t, y).$$

Пізніше А. М. Самойленком [32, 33] був запропонований підхід, що дозволяє з'ясовувати питання про характер залежності розв'язків від параметра для диференціальних рівнянь, праві частини яких неперервні в інтегральному сенсі. Цей підхід полягає в тому, щоб замість безпосереднього дослідження диференціального рівняння, досліджувати деяке йому еквівалентне інтегральне рівняння. Такий підхід дав змогу автору доповнити згадані вище результати [4, 17, 18, 52].

Наведені результати можна поширити на задачу Коші для лінійних систем диференціальних рівнянь високих порядків і на комплекснозначі функції (див., наприклад, роботу В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [23]).

На відміну від задачі Коші, крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь досліджено істотно менш повно. Це зумовлено великою різноманітністю крайових умов. Систематичне дослідження крайових задач було започатковано в роботах І. Т. Кігурадзе [10 – 12] і М. Ашордіа [46]. Ними була досліджена неперервність за малим параметром ε розв'язків лінійних крайових задач вигляду

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{1.9}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{1.10}$$

де для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ виконуються такі припущення:

$$A(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b], \mathbb{R}^{m\times m}), \quad f(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b], \mathbb{R}^m), \quad q(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m,$$

і, окрім того,

$$B(\varepsilon) : C([a,b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$$

є довільний неперервний лінійний оператор. Розв'язок $y(t,\varepsilon)$ цієї задачі розглядається у класі $\mathrm{AC}([a,b], \mathbb{R}^m)$ вектор-функцій, абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$. Оскільки похідна довільної вектор-функції з цього класу існує майже скрізь на $[a,b]$, то і диференціальне рівняння (1.10) розглядається майже в усіх точках $t \in [a,b]$. І. Т. Кігурадзе отримав достатні умови рівномірної збіжності при $\varepsilon \to 0+$ розв'язку $y(t,\varepsilon)$.

Теорема 1.4 (Кігурадзе [10])**.** *Припустимо, що однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t,0) = -A(t,0)y(t,0), \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(t,0) = 0 \tag{1.11}$$

має лише тривіальний розв'язок. Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі сім умов:

1) $\|A(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} = O(1)$;

2) $\|f(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} = O(1)$;

3) $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$;

4) $\max\limits_{t\in[a,b]} \left\| \int\limits_a^t A(s,\varepsilon)ds - \int\limits_a^t A(s,0)ds \right\| \to 0$;

5) $\max\limits_{t\in[a,b]}\left\|\int\limits_a^t f(s,\varepsilon)ds-\int\limits_a^t f(s,0)ds\right\|\to 0$;

6) $q(\varepsilon)\to q(0)$ *в* $\mathbb{R}^m$;

7) $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ *в* $\mathbb{R}^m$ *для кожного* $y\in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R}^m)$.

Тоді крайова задача (1.9), (1.10) *має єдиний розв'язок при* $0\leq\varepsilon\ll 1$ *і він задовольняє умову*

$$y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0)\quad \textit{в}\quad C([a,b],\mathbb{R}^m)\quad \textit{при}\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Як зауважили В. А. Михайлець і Н. В. Рева [25], умови 3) і 7) у цій теоремі значать, що оператор $B(\varepsilon)$ сильно збігається до оператора $B(0)$ при $\varepsilon\to 0+$. Тому в умові 7) множину $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R}^m)$ можна замінити довільною підмножиною вектор-функцій, повною у банаховому просторі $C([a,b],\mathbb{R}^m)$. Оскільки простір $\mathbb{R}^m$ скінченновимірний, то ця умова еквівалентна слабкій збіжності оператора $B(\varepsilon)$ до $B(0)$ при $\varepsilon\to 0+$. Отже, умова 7) істотно слабша за умову рівномірної збіжності оператора $B(\varepsilon)$ до $B(0)$. Окрім того, можна показати, що умови 1) і 4) випливають із слабкої збіжності матриці-функції $A(\cdot,\varepsilon)$ до $A(\cdot,0)$ у просторі $L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times})$, а умови 2) і 5) випливають із слабкої збіжності вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon)$ до $f(\cdot,0)$ у просторі $L_1([a,b],\mathbb{R}^m)$. Й поготів ці умови випливають із збіжності у нормах відповідних просторів. Керуючись цими міркуваннями, В. А. Михайлець і Н. В. Рева [25] узагальнили умови теореми Кігурадзе і покращили його результати. До того ж В. А. Михайлець і Н. В. Рева розглянули більш загальну ситуацію, коли розв'язки, праві частини і коефіцієнти диференціального рівняння (1.9) є комплекснозначними функціями і тому у крайовій умові (1.10) фігурує неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon):C([a,b],\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}^m,$$

на парі комплексних банахових просторів.

Сформулюємо ці результати. Позначимо через $\mathcal{M}^m[a,b]$ множину усіх абстрактних функцій

$$[0,\varepsilon_0) \ni \varepsilon \mapsto R(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$$

таких, що роз'язок $Z(t,\varepsilon)$ матричної задачі Коші

$$Z'(t,\varepsilon) = -R(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \qquad Z(a,\varepsilon) = I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(\cdot,\varepsilon) - I_m\|_{L_\infty} = 0.$$

Теорема 1.5 (Перше узагальнення теореми Кігурадзе; Михайлець і Рева [25]). *У формулюванні теореми* 1.4 *можна замінити умови* 1) *і* 4) *на більш слабку умову*

$$\begin{gathered}\textit{функція} \quad R(\cdot,\varepsilon) := A(\cdot,\varepsilon) - A(\cdot,0) \quad \textit{аргументу} \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0) \\ \textit{належить до} \quad \mathcal{M}^m.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Для заданих

$$A(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}) \quad \text{і} \quad f(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^m)$$

покладемо

$$A_f(t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} A(t;\varepsilon) & f(t,\varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для довільних $t \in [a,b]$ і $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Тут вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon)$ подана у вигляді стовпця. Отже,

$$A_f(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^{(m+1)\times(m+1)}).$$

Теорема 1.6 (Друге узагальнення теореми Кігурадзе; Михайлець і Рева [25]). *У формулюванні теореми* 1.4 *можна замінити умови* 2) *і* 5) *на більш слабку умову*

$$\begin{gathered}\textit{функція} \quad R_f(\cdot,\varepsilon) := A_f(\cdot,\varepsilon) - A_f(\cdot,0) \quad \textit{аргументу} \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0) \\ \textit{належить до} \quad \mathcal{M}^{m+1}.\end{gathered}$$

Як показав І. Т. Кігурадзе [10], якщо однорідна крайова задача, що відповідає (1.9), (1.10), має лише тривіальний розв'язок, то для напіводнорідної крайової задачі (1.9), (1.10) з $q(\varepsilon) = 0$ існує матриця Гріна, тобто матриця-функція

$$G(\cdot,\cdot,\varepsilon) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{R}^{m\times m})$$

така, що розв'язок останньої задачі зображається у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b G(t,s,\varepsilon) f(s,\varepsilon) ds \quad \text{при} \quad a \le t \le b$$

для кожної вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{R}^m)$. Ця матриця Гріна визначається однозначно з точністю до значень на підмножині квадрата $[a,b]\times[a,b]$ лебегової міри нуль.

В. А. Михайлець і Н. В. Рева встановили достатні умови неперервності за параметром ε вказаної матриці Гріна у нормі $\|\cdot\|_{L_\infty}$. Ними була розглянута загальна ситуація, коли коефіцієнти і праві частини системи диференціальних рівнянь (1.9) є комплекснозначними функціями.

Теорема 1.7 (Михайлець і Рева [25])**.** *Припустимо, що однорідна гранична крайова задача* (1.11) *має лише тривіальний розв'язок. Нехай виконується умова* (1.12) *і крайовий оператор* $B(\varepsilon)$ *рівномірно збігається до* $B(0)$ *при* $\varepsilon \to 0+$. *Тоді для достатньо малих* $\varepsilon \ge 0$ *існує матриця Гріна*

$$G(\cdot,\cdot,\varepsilon) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m}) \tag{1.13}$$

та

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|G(\cdot,\cdot,\varepsilon) - G(\cdot,\cdot,0)\|_{L_\infty} = 0. \tag{1.14}$$

Пізніше Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець і Н. В. Рева [15] ввели поняття нормованої матриці Гріна для напіводнорідної крайової задачі (1.9), (1.10). Ця матриця означається однозначно в усіх точках квадрата $[a,b]\times[a,b]$. Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець і Н. В. Рева показали, що за умов теореми 1.7 нормована матриця Гріна існує для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$ і рівномірно збігається на $[a, b] \times [a, b]$ до нормованої матриці Гріна, яка відповідає $\varepsilon = 0$.

Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$ загальні крайові задачі досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [54]. Таку задачу, залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, запишемо у вигляді

$$z^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t, \varepsilon) z^{(r-j)}(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{1.15}$$

$$B(\varepsilon) z(\cdot, \varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{1.16}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ задано матриці-функції

$$A_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \in L_1([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}), \quad j = 1, \ldots, r,$$

вектор-функцію

$$f(\cdot, \varepsilon) \in L_1([a, b], \mathbb{C}^{m}),$$

лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : C^{(r-1)}([a, b], \mathbb{C}^{m}) \to \mathbb{C}^{rm}$$

і вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m}$. Розв'язкок $z(t, \varepsilon)$ цієї задачі має абсолютно неперервну похідну порядку $r - 1$ і задовольняє диференціальне рівняння (1.15) майже скрізь на $[a, b]$.

Для загальної крайової задачі (1.15), (1.16) В. А. Михайлець і Г. О. Чеханова знайшли конструктивні умови, за яких розв'язок $z(\cdot, \varepsilon)$ неперервний за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $C^{(r-1)}([a, b], \mathbb{C}^{m})$. Сформулюємо відповідний результат. Для будь-яких $j \in \{1, \ldots, r\}$ і $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ введемо функції

$$R_{j-1}(t, \varepsilon) := A_{j-1}(t, \varepsilon) - A_{j-1}(t, 0),$$

$$R^{\vee}_{j-1}(t, \varepsilon) := \int\limits_{a}^{t} R_{j-1}(s, \varepsilon)\, ds, \quad f^{\vee}(t, \varepsilon) := \int\limits_{a}^{t} f(s, \varepsilon)\, ds$$

аргументу $t \in [a, b]$.

Теорема 1.8 (Михайлець і Чеханова [54]). *Припустимо, що однорідна крайова задача* (1.15), (1.16), *де* $\varepsilon = 0$, *має лише тривіальний розв'язок. Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі чотири умови:*

1) $\|R_{r-1}(\cdot,\varepsilon)R^{\vee}_{j-1}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} \to 0$ *для кожного* $j \in \{1,\ldots,r\}$;

2) $\|R^{\vee}_{j-1}(\cdot,\varepsilon)\|_{L_\infty} \to 0$ *для кожного* $j \in \{1,\ldots,r\}$;

3) $\|f(\cdot,\varepsilon)\|_{L_1} = O(1)$ *і* $\|f^{\vee}(\cdot,\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot,0)\|_{L_\infty} \to 0$;

4) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ *для довільного* $z \in C^{(r-1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ *та* $q(\varepsilon) \to q(0)$, *обидві збіжності в* $\mathbb{C}^{rm}$.

Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon \geq 0$ *існує єдиний розв'язок* $z(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (1.15), (1.16) *і він має граничну властивість*

$$z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0) \quad \text{в} \quad C^{(r-1)}([a,b],\mathbb{C}^m) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

У роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Є. В. Гнип [24, 6, 51] і В. А. Михайлеця, Г. О. Чеханової [27, 28] введено і досліджено максимально широкі класи лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких пробігають відповідно простір Соболєва $W^{n+1}_p([a,b],\mathbb{C}^m)$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $1 \leq p < \infty$, або простір $C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Ці крайові задачі названо тотальними щодо вказаного простору.

Першою у цьому напрямку була робота В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [24], у якій була розглянута тотальна крайова задача щодо простору Соболєва W^1_1. Ця задача, залежна від параметра ε, складається з системи (1.9) диференціальних рівнянь першого порядку і крайової умови

$$\alpha(\varepsilon)y(a,\varepsilon) + \int\limits_a^b \Phi(t,\varepsilon)y'(t,\varepsilon)dt = q(\varepsilon), \tag{1.17}$$

де для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ задано

$$A(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}), \quad f(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^m),$$
$$\Phi(\cdot,\varepsilon) \in L_\infty([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}), \quad \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}, \quad q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m.$$

Розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ цієї задачі розглядається у просторі Соболєва $W_1^1([a,b],\mathbb{C}^m)$. Оскільки останній збігається з класом $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C}^m)$, то $y(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє диференціальне рівняння (1.9) майже скрізь на відрізку $[a,b]$. Відмітимо, що ліва частина крайової умови (1.17) задає довільний неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon): W_1^1([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m.$$

Якщо усі елементи матриці-функції $\Phi(t,\varepsilon)$ мають обмежену по t варіацію на відрізку $[a,b]$, то розглянутий клас тотальних крайових задач містить у собі клас загальних крайових задач. Було досліджено питання існування, єдиності і неперервності за параметром ε розв'язку і матриці Гріна тотальної крайової задачі щодо простору Соболєва W_1^1. Сформулюємо отримані результати.

Теорема 1.9 (Михайлець і Рева [24]). *Припустимо, що однорідна крайова задача* (1.9), (1.17), *де* $\varepsilon=0$, *має лише тривіальний розв'язок. Нехай при* $\varepsilon\to 0+$ *виконуються такі п'ять умов:*

1) $A(\cdot,\varepsilon)\to A(\cdot,0)$ *в* $L_1([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$*;*

2) $f(\cdot,\varepsilon)\to f(\cdot,0)$ *в* $L_1([a,b],\mathbb{C}^m)$*;*

3) $q(\varepsilon)\to q(0)$ *в* $\mathbb{C}^m$*;*

4) $\alpha(\varepsilon)\to\alpha(0)$ *в* $\mathbb{C}^{m\times m}$*;*

5) $\Phi(\cdot,\varepsilon)\to\Phi(\cdot,0)$ *в* $L_\infty([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$.

Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon\geq 0$ *існує єдиний роз'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (1.9), (1.17) *і він має граничну властивість*

$$y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad W_1^1([a,b],\mathbb{C}^m) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+.$$

Теорема 1.10 (Михайлець і Рева [24]). *Припустимо, що однорідна крайова задача* (1.9), (1.17), *де* $\varepsilon=0$, *має лише тривіальний розв'язок. Нехай* *при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови* 1), 4) *і* 5) *теореми* 1.9. *Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує матриця Гріна* (1.13) *напіводнорідної крайової задачі* (1.9), (1.17), *де $q(\varepsilon) = 0$, і ця матриця Гріна задовольняє граничну властивість* (1.14).

Пізніше Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлець [51] узагальнили результати роботи [24] на крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку, тотальні щодо простору Соболєва W_p^{n+1}, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ і $1 \leq p < \infty$. Розглянемо крайову задачу цього класу, залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Вона складається з системи (1.9) диференціальних рівнянь першого порядку і крайової умови

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{1.18}$$

де для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ задано функції

$$\begin{gathered} A(\cdot, \varepsilon) \in W_p^n([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}), \qquad (1.19) \\ f(\cdot, \varepsilon) \in W_p^n([a, b], \mathbb{C}^m), \end{gathered}$$

вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ і неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon) : W_p^{n+1}([a, b], \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{1.20}$$

Розв'язок $y(\cdot, \varepsilon)$ цієї задачі розглядається у просторі $W_p^{n+1}([a, b], \mathbb{C}^m)$.

Права частина $f(\cdot, \varepsilon)$ (векторного) диференціального рівняння (1.9) пробігає увесь простір $W_p^n([a, b], \mathbb{C}^m)$ тоді і лише тоді, коли розв'язок $y(\cdot, \varepsilon)$ цього рівняння пробігає увесь простір $W_p^{n+1}([a, b], \mathbb{C}^m)$. Тому крайова умова (1.18) з довільним неперервним оператором (1.20) є найбільш загальною для диференціального рівняння (1.9), коефіцієнти яких задовольняють умову (1.19).

Теорема 1.11 (Кодлюк і Михайлець [51])**.** *Припустимо, що однорідна крайова задача* (1.9), (1.18), *де $\varepsilon = 0$, має лише тривіальний розв'язок. Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі чотири умови:*

1) $A(\cdot, \varepsilon) \to A(\cdot, 0)$ *в* $W_p^n([a, b], \mathbb{C}^{m \times m})$*;*

2) *$f(\cdot,\varepsilon)\to f(\cdot,0)$ в $W_p^n([a,b],\mathbb{C}^m)$;*

3) *$q(\varepsilon)\to q(0)$ в $\mathbb{C}^m$;*

4) *$B(\varepsilon)y\to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для довільного $y\in W_p^{n+1}([a,b],\mathbb{C}^m)$.*

Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon\geq 0$ існує єдиний роз'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (1.9), (1.18) *і він має граничну властивість*

$$y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad W_p^{n+1}([a,b],\mathbb{C}^m) \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0+\,.$$

В. А. Михайлець і Г. О. Чеханова [27, 28] ввели і дослідили крайові задачі тотальні щодо простору $C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$, де $0\leq n\in\mathbb{Z}$. Ці задачі ставляться для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Введена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою тотальна крайова задача, залежна від параметра ε, складається з системи (1.9) диференціальних рівнянь першого порядку і крайової умови (1.18), у яких для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ задано функції

$$A(\cdot,\varepsilon)\in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{1.21}$$

$$f(\cdot,\varepsilon)\in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m}), \tag{1.22}$$

вектор $q(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$ і неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon): C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}^m.$$

Розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ цієї задачі розглядається у просторі $C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$.

Права частина $f(\cdot,\varepsilon)$ диференціального рівняння (1.9) пробігає увесь простір $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ тоді і лише тоді, коли розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ цього рівняння пробігає увесь простір $C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$. Тому крайова умова (1.18) з довільним неперервним оператором (1.20) є найбільш загальною для диференціального рівняння (1.9), коефіцієнти яких задовольняють умову (1.21). Ця крайова умова охоплює як усі види класичних крайових умов (початкові умови Коші, багатоточкові крайові умови, різні інтегральні умови, умови мішаних крайових задач), так і некласичні крайові умови, які містять похідні шуканої функції до порядку $n+1$ включно.

Теорема 1.12 (Михайлець і Чеханова [28]). *Припустимо, що однорідна крайова задача* (1.9), (1.18), *де* $\varepsilon = 0$, *має лише тривіальний розв'язок. Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі чотири умови:*

1) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ *в* $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$*;*

2) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ *в* $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m})$*;*

3) $q(\varepsilon) \to q(0)$ *в* $\mathbb{C}^m$*;*

4) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *в* $\mathbb{C}^m$ *для довільного* $y \in C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$.

Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon \geq 0$ *існує єдиний роз'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (1.9), (1.18) *і він має граничну властивість*

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{C}^m) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{1.23}$$

Теореми про існування, єдиність і неперервність за параметром розв'язків загальних і тотальних крайових задач та методика їх доведень були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач у роботах Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [5], Т. І. Кодлюк [13], Г. О. Чеханової [43, 45], до вивчення питань про існування і неперервну залежність від параметра матриць Гріна крайових задач у роботах В. А. Михайлеця, Т. І. Кодлюк і Н. В. Реви [15, 24, 25, 51], В. А. Михайлеця і Г. О. Чеханової [44, 54], у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами у роботах А. С. Горюнова, В. А. Михайлеця і К. Панкрашкіна [7, 47, 48, 49].

Як приклад цих застосувань, сформулюємо один результат Г. О. Чеханової [45] (п. 2.4) про неперервну залежність від параметра розв'язків багатоточкових крайових задач. Цей результат близький до питань розглянутих у четвертому розділі дисертації. Для системи (1.9) диференціальних рівнянь першого порядку, яка задовольняє умови (1.21) і (1.22), розглядається при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ багатоточкова крайова умова

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_{j,l}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{1.24}$$

а при $\varepsilon = 0$ — багатоточкова крайова умова

$$B(\varepsilon)y(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_{j,l}(0) y^{(l)}(t_j(0),0) = q(0). \tag{1.25}$$

Тут при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ задано числові матриці $\beta_{j,l}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j(\varepsilon) \in [a,b]$ і вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Відмітимо, що у граничній крайовій умові (1.25) зовнішня сума містить на q доданків менше, ніж зовнішня сума в крайовій умові (1.24).

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ розглянута крайова задач є тотальною щодо простору $C^{(n+1)}$; тому для неї застосовна теорема 1.12. В останній замість умови 4) можна узяти явні умови, виражені у термінах лівих частин багатоточкових крайових умов (1.24) і (1.25).

Теорема 1.13 (Чеханова, [45, с. 74])**.** *Припустимо, що однорідна крайова задача, яка складається з системи* (1.9)*, де* $\varepsilon = 0$*, і крайової умови* (1.25)*, має лише тривіальний розв'язок. Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови* 1)*,* 2) *і* 3) *теореми* 1.12 *і ще такі дві умови:*

4′) $\beta_{j,l}(\varepsilon) \to \beta_{j,l}(0)$ *і* $t_j(\varepsilon) \to t_j(0)$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, p\}$*;*

4″) $\beta_{j,l}(\varepsilon) \to 0$ *для кожного* $j \in \{p+1, \ldots, p+q\}$*.*

Тоді для кожного достатньо малого $\varepsilon \geq 0$ *існує єдиний роз'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (1.9)*,* (1.24) *(*(1.25)*, якщо* $\varepsilon = 0$*) і він має граничну властивість* (1.23)*.*

Як бачимо, поняття тотальної крайової задачі виявилося досить плідним у теорії звичайних диференціальних рівнянь. З огляду на отримані результати стосовно властивостей цих задач та їх застосувань, можна запропонувати таку програму подальшого розвитку теорії тотальних крайових задач: дослідження цих задач для систем диференціальних рівнянь високих порядків, для функціональних просторів з дробовим показником регулярності таких як простори Гельдера і простори Соболєва-Слободецького, отримання не лише достатніх, але і необхідних конструктивних умов неперервності за параметром розв'язків тотальних крайових задач, знаходження оцінок швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі, дослідження різних класів некласичних багатоточкових крайових задач. Істотна частина цієї програми реалізована у даній дисертації.

РОЗДІЛ 2
ТОТАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У цьому розділі вводиться і досліджується максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до вказаного простору Гельдера.

2.1. Основні позначення

У роботі використовуємо такі основні позначення:

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ — відповідно множини усіх натуральних, цілих, дійсних і комплексних чисел; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $\overline{k,l} := \{j \in \mathbb{Z} : k \leq j \leq l\}$, де $k, l \in \mathbb{Z}$ і $k \leq l$.

3. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний лінійний простір усіх комплексних числових векторів-стовпців $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, ..., y_m)$, наділений нормою
$$\|y\| := \sum_{j=1}^{m} |y_j|.$$

4. $\mathbb{C}^{m\times\mu}$ — лінійний простір усіх комплексних числових матриць порядку $m \times \mu$, наділений нормою
$$\|A\| := \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu} |a_{j,k}|$$
матриці $A = (a_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,\mu}}$.

5. $\det A$ — визначник матриці A.

6. I_m — одинична матриця порядку m, та O_m — квадратна нуль-матриця матриця порядку m.

7. $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$ — комплексний простір усіх $l \in \mathbb{N}_0$ разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, наділений нормою
$$\|x\|_l := \sum_{j=0}^{l} \max\bigl\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\bigr\}.$$
Тут і далі $[a,b]$ є (скінченний) відрізок на дійсній осі. Простір $C^{(l)}$ є банаховою алгеброю.

8. $C^{l,\alpha} := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C})$ — комплексний простір Гельдера на $[a,b]$ з показниками гладкості $l \in \mathbb{N}_0$ і $\alpha \in (0,1]$. Він складається з усіх функцій $x \in C^{(l)}$ таких, що
$$\|x^{(l)}\|'_\alpha := \sup\Bigl\{\frac{|x^{(l)}(t_2) - x^{(l)}(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha} : \ t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2\Bigr\} < \infty.$$
Цей простір наділений нормою
$$\|x\|_{l,\alpha} := \|x\|_l + \|x^{(l)}\|'_\alpha$$
і є банаховою алгеброю. З метою уніфікації позначень покладаємо $C^{l,0} := C^{(l)}$.

9. $(C^{l,\alpha})^m := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$ і $(C^{l,\alpha})^{m\times m} := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$, де $l \in \mathbb{N}_0$ і $\alpha \in [0,1]$, є комплексні банахові простори відповідно всіх вектор-функцій та квадратних матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до $C^{l,\alpha}$. Норми у цих просторах дорівнюють сумі норм в $C^{l,\alpha}$ усіх компонентів вектор- або матриць-функцій. Усі ці норми позначаємо через $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. З контексту завжди буде зрозуміло у якому просторі (скалярних, вектор-, або матриць-функцій) розглядається норма $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. У випадку $\alpha = 0$ покладаємо також $(C^{(l)})^m := (C^{l,\alpha})^m$, $(C^{(l)})^{m\times m} := (C^{l,\alpha})^{m\times m}$ та $\|\cdot\|_l := \|\cdot\|_{l,\alpha}$.

10. $B_n \rightrightarrows B$ позначає рівномірну збіжність лінійних обмежених операторів.

11. $B_n \xrightarrow{s} B$ позначає сильну збіжність лінійних обмежених операторів.

У роботі числові вектори і вектор-функції трактуються як стовпці.

2.2. Постановка задачі

Нехай довільним чином вибрано (скінченний) відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, числа $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ і дійсне число α таке, що $0 \leq \alpha \leq 1$. Розглядаємо таку крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t) \equiv y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{2.1}$$

$$By = q. \tag{2.2}$$

Тут є шуканою вектор-функція $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ і довільно задано матрицю-функцію $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (C^{n,\alpha})^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B:\,(C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{2.3}$$

Оскільки цей оператор діє у простір $\mathbb{C}^m$, то крайова умова (2.2) задає m скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь.

Крайова умова (2.2) з неперервним оператором (2.3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (2.1), що випливає з леми 2.1, поданої нижче. Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (умови задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, умови змішаних крайових задач), так і різні некласичні крайові умови. Останні можуть містити похідні шуканих функцій порядку k, де $1 \leq k \leq n+1$. Тому крайову задачу (2.1), (2.2) *називаємо тотальною щодо простору Гельдера* $C^{n+1,\alpha}$.

Лема 2.1. *Нехай матриця-функція* $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$. *Якщо диференційовна функція* $y:\,[a,b] \to \mathbb{C}^m$ *є розв'язком рівняння* (2.1) *для деякої правої частини* $f \in (C^{n,\alpha})^m$, *то* $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$. *Більше того, якщо* f *пробігає весь простір* $(C^{n,\alpha})^m$, *то розв'язки рівняння* (2.1) *пробігають весь простір* $(C^{n+1,\alpha})^m$.

Доведення. Припустимо, що для деякого $f \in (C^{n,\alpha})^m$ диференційовна вектор-функція y є розв'язком рівняння (2.1). Доведемо, що $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$. Враховуючи, що A і f є принаймні неперервними на $[a, b]$, маємо

$$y' = f - Ay \in (C^{(0)})^m.$$

Звідси, $y \in (C^{(1)})^m \subset (C^{0,\alpha})^m$. Більше того,

$$\big(\, y \in (C^{l,\alpha})^m \;\Rightarrow\; y \in (C^{l+1,\alpha})^m \,\big) \quad \text{для кожного} \quad l \in \mathbb{Z} \cap [0, n]. \tag{2.4}$$

Справді, якщо $y \in (C^{l,\alpha})^m$ для деякого цілого числа $l \in [0, n]$, то

$$y' = f - Ay \in (C^{l,\alpha})^m,$$

і тому $y \in (C^{l+1,\alpha})^m$. Включення $y \in (C^{0,\alpha})^m$ і властивість (2.4) тягнуть за собою потрібне включення $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f \in (C^{n,\alpha})^m$ існує розв'язок y рівняння (2.1). Як щойно було показано, $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$. Це, враховуючи очевидну імплікацію

$$y \in (C^{n+1,\alpha})^m \;\Rightarrow\; Ly \in (C^{n,\alpha})^m,$$

доводить останнє твердження леми. Лема 2.1 доведена.

2.3. Розв'язність задачі

Запишемо крайову задачу (2.1), (2.2) у короткій формі $(L, B)y = (f, q)$ за допомогою неперервного лінійного оператора

$$(L, B) : (C^{n+1,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Оператор* (2.5) *є фредгольмовим з індексом нуль.*

У важливому випадку, коли $\alpha = 0$, ця теорема встановлена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [27, с. 271] (теорема 1).

З огляду на теорему 2.1 нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(E_2/T(E_1))$$

скінченний (див., наприклад, [42, лема 19.1.1]). Зауважимо, що часто в україномовній та російськомовній математичній літературі фредгольмів оператор з довільним індексом називають нетеровим, а термін "фредгольмів" застосовують до нетерових операторів з індексом нуль. Використана у роботі термінологія є загальноприйнятою в англомовній літературі.

Доведення теореми 2.1. Покладемо $Cy := y(a) \in \mathbb{C}^m$ для довільної вектор-функції $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$. Лінійне відображення $y \mapsto (Ly, Cy)$, де $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є ізоморфізмом

$$(L, C) : (C^{n+1,\alpha})^m \leftrightarrow (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.6}$$

Справді, для довільних $f \in (C^{n,\alpha})^m$ і $q \in \mathbb{C}^m$, задача Коші, яка складається з диференціального рівняння (2.1) і початкової умови $y(a) = q$, має єдиний розв'язок y. На підставі леми 2.1, маємо включення $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$. Тому, вказане відображення є взаємно однозначним лінійним оператором (2.6).

Оскільки він неперервний, то за теоремою Банаха про обернений оператор, маємо ізоморфізм (2.6).

Оператор (2.5) є скінченновимірним збуренням цього ізоморфізму. Тому, (2.5) є фредгольмовим оператором з індексом нуль (див., наприклад, [42, наслідок 19.1.8]). Теорема 2.1 доведена.

Встановимо критерій оборотності оператора (2.5). Позначимо через $Y := (y_{j,k})_{j,k=1}^{m}$ матрицант системи (2.1), віднесений до точки $t = a$. Отже, Y — єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) = -A(t)Y(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{2.7}$$

$$Y(a) = I_m. \tag{2.8}$$

Відмітимо, що $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ згідно з лемою 2.1. Покладемо

$$[BY] := \left(B \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{m,1} \end{pmatrix} \dots \; B \begin{pmatrix} y_{1,m} \\ \vdots \\ y_{m,m} \end{pmatrix} \right). \tag{2.9}$$

Таким чином, $[BY]$ є квадратна числова матриця порядку m, яка отримується в результаті дії оператора B на стовпці матриці-функції Y.

Теорема 2.2. *Оператор* (2.5) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $\det[BY] \neq 0$.

У важливому випадку, коли $\alpha = 0$, ця теорема встановлена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [27, с. 272] (теорема 3).

Доведення теореми 2.2. За теоремою 2.1, оператор (2.5) є оборотним тоді і тільки тоді, коли його ядро є тривіальним. Тому теорему 2.2 буде доведено, якщо ми обґрунтуємо еквівалентність

$$\ker(L, B) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \det[BY] = 0.$$

Припустимо спочатку, що $\ker(L, B) \neq \{0\}$. Тоді існує нетривіальний розв'язок $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ однорідної крайової задачі $(L, B)y = (0, 0)$. Він подається у вигляді $y = Yp$ для деякого вектора $p \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$. Тому

$$0 = By = B(Yp) = [BY]p.$$

Тут остання рівність правильна на підставі леми 2.2, наведеної зразу після цього доведення. Отже, $\det[BY] = 0$. Таким чином,

$$\ker(L, B) \neq \{0\} \;\Rightarrow\; \det[BY] = 0.$$

Доведемо тепер обернену імплікацію. Припустимо, що $\det[BY] = 0$. Тоді існує вектор $p \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ такий, що $[BY]p = 0$. Вектор-функція $y := Yp \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є нетривіальним розв'язком однорідної системи

$$Ly(t) = 0 \quad \text{для усіх} \quad t \in [a, b].$$

Окрім того,

$$By = B(Yp) = [BY]p = 0.$$

Отже, $0 \neq y \in \ker(L, B)$. Таким чином,

$$\det[BY] = 0 \;\Rightarrow\; \ker(L, B) \neq \{0\}.$$

Теорема 2.2 доведена.

У цьому доведенні використано рівність $B(Yp) = [BY]p$. Вона є окремим випадком такого результату.

Нехай $\varkappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$, E — комплексний лінійний простір, $T : E^{\varkappa} \to \mathbb{C}^{\lambda}$ є лінійний оператор, а H є матриця розміру $\varkappa \times \mu$, елементи якої належать до E. За аналогією з (2.9) позначимо через $[TH]$ числову матрицю розміру $\lambda \times \mu$, кожний стовпець якої є результатом дії оператора T на відповідний стовпець (з тим же номером) матриці H.

Лема 2.2. *За цих припущень правильна рівність*

$$[TH]d = T(Hd) \quad \textit{для довільного стовпця} \quad d \in \mathbb{C}^{\mu}.$$

Доведення. Запишемо

$$H=(h_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,\varkappa,\\ k=1,\dots,\mu}}\quad d=\operatorname{col}(d_1,\dots,d_\mu),\quad [TH]=(l_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,\lambda,\\ k=1,\dots,\mu}}$$

де

$$\begin{pmatrix} l_{1,k}\\ \vdots\\ l_{\lambda,k}\end{pmatrix}:=T\begin{pmatrix} h_{1,k}\\ \vdots\\ h_{\varkappa,k}\end{pmatrix}$$

для кожного $k\in\{1,\dots,\mu\}$. Тоді

$$T(Hd)=T\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\mu}h_{1,k}\,d_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{\mu}h_{\varkappa,k}\,d_k\end{pmatrix}=T\sum_{k=1}^{\mu}d_k\begin{pmatrix} h_{1,k}\\ \vdots\\ h_{\varkappa,k}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\mu}d_k\,T\begin{pmatrix} h_{1,k}\\ \vdots\\ h_{\varkappa,k}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{\mu}d_k\begin{pmatrix} l_{1,k}\\ \vdots\\ l_{\lambda,k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\mu}l_{1,k}\,d_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{\mu}l_{\lambda,k}\,d_k\end{pmatrix}=[TH]d.$$

Лема 2.2 доведена.

2.4. Критерій неперервності за параметром розв'язків задачі

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо систему m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (2.1), (2.2), які залежать від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{2.10}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{2.11}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є шуканою та довільним чином задано матрицю-функцію $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon) : (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m \tag{2.12}$$

і вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Отже, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача (2.10), (2.11) є тотальною щодо простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$.

Для цієї задачі розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(2.I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$;

(2.II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

Окрім того, розглядається

Умова (2.0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b,$$

$$B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Введемо

Базове означення розд. 2. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (2.10), (2.11) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

($**$) Збіжність правих частин

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \ \text{ в } \ (C^{n,\alpha})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \ \text{ в } \ \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Сформулюємо основну теорему другого розділу.

Теорема 2.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (2.10), (2.11) *неперервно залежав від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II).

Ця теорема буде доведена у п. 2.6. У важливому випадку, коли $\alpha = 0$, достатність у теоремі 2.3 встановлена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою у роботі [28, с. 26, 27].

Зауваження 2.1. Легко переконатися, що умови ($*$) і ($**$) базового означення еквівалентні таким умовам відповідно:

(✠) існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{n+1,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$$

є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$;

($\maltese\maltese$) обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крім того легко показати, що граничні умови (2.I) і (2.II) разом еквівалентні такій умові:

(2.A) оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до $(L(0), B(0))$ при $\varepsilon \to 0+$ в сильній операторній топології.

Отже, з основної теореми випливає, що при виконанні умови (2.0), правильна еквівалентність

$$(2.\mathrm{A}) \;\Leftrightarrow\; \big((\maltese) \wedge (\maltese\maltese)\big).$$

На перший погляд цей результат здається несподіваним. Справді, якщо X і Y є довільними нескінченновимірними банаховими просторами, та $\mathcal{L}(X, Y)$ — лінійний простір усіх неперервних лінійних операторів з X в Y, то множина всіх оборотних операторів з $\mathcal{L}(X, Y)$ є щільною в $\mathcal{L}(X, Y)$ в сильній операторній топології. Більше того, якщо простір X має базис Шаудера, то ця множина є не лише щільною, а й секвенціально щільною. Крім того, відображення $\mathrm{Inv} : T \mapsto T^{-1}$, задане на множині всіх оборотних операторів $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, є всюди розривним у сильній операторній топології. Обґрунтування цих фактів буде наведено у п. 2.9.

2.5. Допоміжні результати

Тут буде встановлено декілька результатів, пов'язаних з досліджуваною крайовою задачею. Вони будуть використані в доведенні основної теореми другого розділу.

Лема 2.3. *Для диференціального оператора $L(\varepsilon)$ маємо таку еквівалентність збіжностей при $\varepsilon \to 0+$:*

$$(L(\varepsilon) \rightrightarrows L(0)) \Leftrightarrow (L(\varepsilon) \xrightarrow{s} L(0)) \Leftrightarrow (\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n,\alpha} \to 0).$$

Тут рівномірна і сильна збіжності розглядаються для лінійних неперервних операторів

$$L(\varepsilon) : (C^{n+1,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m,$$

де $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$.

Доведення. Оскільки з рівномірної збіжності лінійних неперервних операторів випливає їх сильна збіжність, то для доведенні цієї леми залишається обґрунтувати такі дві імплікації:

$$(L(\varepsilon) \xrightarrow{s} L(0)) \Rightarrow (\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n,\alpha} \to 0),$$
$$(\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n,\alpha} \to 0) \Rightarrow (L(\varepsilon) \rightrightarrows L(0)).$$

Доведемо першу з них. Припустимо, що $L(\varepsilon) \xrightarrow{s} L(0)$. Тоді

$$Y' + A(\varepsilon)Y = [L(\varepsilon)Y] \to [L(0)Y] = Y' + A(0)Y \quad \text{в} \quad (C^{n,\alpha})^{m\times m}$$

при $\varepsilon \to 0+$ для кожної матриці-функції $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$. При цьому матриця-функція $[L(\varepsilon)Y]$ утворена стовпцями, які є результатами дії оператора $L(\varepsilon)$ на відповідні стовпці матриці Y. Узявши тут $Y(t) \equiv I_m$, отримаємо потрібну збіжність $A(\varepsilon) \to A(0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Перша імплікація доведена.

Обґрунтуємо другу імплікацію. Припустимо, що $\|A(\varepsilon)-A(0)\|_{n,\alpha} \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$. Для довільної вектор-функції $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ маємо таке:

$$\|(L(\varepsilon)-L(0))y\|_{n,\alpha} = \|(A(\varepsilon)-A(0))y\|_{n,\alpha} \leq$$
$$\leq c_{n,\alpha}\,\|A(\varepsilon)-A(0)\|_{n,\alpha}\,\|y\|_{n,\alpha} \leq c_{n,\alpha}\,\|A(\varepsilon)-A(0)\|_{n,\alpha}\,\|y\|_{n+1,\alpha}.$$

Тут $c_{n,\alpha}$ — деяке додатне число, не залежне від y; воно існує, оскільки $C^{n,\alpha}$ — банахова алгебра. Тому

$$\|L(\varepsilon)-L(0)\| \leq c_{n,\alpha}\,\|A(\varepsilon)-A(0)\|_{n,\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тут $\|\cdot\|$ позначає норму лінійного обмеженого оператора на парі просторів $(C^{n+1,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m$. Друга імплікація, а з нею і лема 2.3 доведена.

Позначимо через $\mathcal{Y}^{n+1,\alpha}$ множину всіх матриць-функцій $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ таких, що $Y(a)=I_m$ і $\det Y(t)\neq 0$ для кожної точки $t\in[a,b]$. Наділимо цю множину метрикою із банахового простору $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$.

Теорема 2.4. *Розглянемо нелінійне відображення* $\Upsilon : A \mapsto Y$*, яке кожній матриці-функції* $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$ *ставить у відповідність єдиний розв'язок* $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ *матричної задачі Коші* (2.7), (2.8)*. Це відображення є гомеоморфізмом банахового простору* $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ *на метричний простір* $\mathcal{Y}^{n+1,\alpha}$*.*

У важливому випадку, коли $\alpha=0$, ця теорема встановлена В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [28] (див. також кандидатську дисертацію Г. О. Чеханової [45, с. 54] (теорема 2.3)).

Нехай $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$. У доведенні цієї теореми буде використано властивості інтегрального оператора V_A, який довільній матриці-функції $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ ставить у відповідність матрицю-функцію

$$(V_A Y)(t) := \int\limits_a^t A(s)Y(s)\,ds \quad \text{аргументу} \quad t\in[a,b]. \tag{2.13}$$

Звісно, для кожного $Y \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ правильна еквівалентність

$$\Upsilon A = Y \;\Leftrightarrow\; (I + V_A)Y = I_m. \tag{2.14}$$

Тут і надалі I позначає тотожний оператор у відповідному просторі. Доведемо спочатку таку властивість оператора V_A.

Лема 2.4. *Нехай $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$. Тоді лінійний оператор V_A є компактним на $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$, а його норма задовольняє нерівність*

$$\|V_A\| \leq \varkappa \, \|A\|_{n,\alpha}, \tag{2.15}$$

де $\varkappa$ деяке додатне число, незалежне від A. Крім того, цей оператор є квазінільпотентним, тобто для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ виконується ізоморфізм

$$I - \lambda V_A : (C^{n+1,\alpha})^{m\times m} \leftrightarrow (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}. \tag{2.16}$$

Доведення. Для довільної матриці-функції $Y \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$ маємо таке:

$$\begin{gathered} \|V_A Y\|_{n+1,\alpha} = \|V_A Y\|_0 + \|AY\|_{n,\alpha} \leq \\ \leq (b-a)\,\|AY\|_0 + \|AY\|_{n,\alpha} \leq \\ \leq (b-a)\, c_0 \,\|A\|_0 \,\|Y\|_0 + c_1 \,\|A\|_{n,\alpha} \,\|Y\|_{n,\alpha}. \end{gathered}$$

Тут c_0 і c_1 — деякі додатні числа, які не залежать від A і Y. Ці числа існують, оскільки $C^{(0)}$ і $C^{n,\alpha}$ є банаховими алгебрами. Тому

$$\|V_A Y\|_{n+1,\alpha} \leq c_2 \,\|A\|_{n,\alpha} \,\|Y\|_{n,\alpha}$$

де $c_2 := ((b-a)c_0 + c_1)$. Таким чином, відображення $Y \mapsto V_A Y$ є обмеженим оператором з простору $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ у простір $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$, причому норма цього оператора не перевищує числа $c_2\|A\|_{n,\alpha}$. Звідси, з огляду на компактне вкладення

$$(C^{n+1,\alpha})^{m\times m} \hookrightarrow (C^{n,\alpha})^{m\times m}$$

робимо висновок, що звуження цього відображення на простір $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ є компактним оператором на цьому просторі. Окрім того, норма цього оператора задовольняє нерівність (2.15), де $\varkappa := c_2 c_3$, а c_3 є нормою вказаного компактного вкладення.

Обґрунтуємо останнє речення леми 2.4. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки матриця-функція A неперервна на $[a,b]$, то відображення $Y \mapsto Y - \lambda V_A Y$, де $Y \in (C^{(0)})^{m\times m}$, є ізоморфізмом простору $(C^{(0)})^{m\times m}$ на себе. Це випливає з огляду на теорему Банаха про обернений оператор з того, що інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$Y(t) - \lambda \int\limits_a^t G(t,s)Y(s)ds = F(t) \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b,$$

має єдиний розв'язок $Y \in (C^{(0)})^{m\times m}$ для кожного $F \in (C^{(0)})^{m\times m}$; тут квадратна матриця-функція $G(t,s)$ неперервна при $a \leq s \leq t \leq b$. (Нам потрібен окремий випадок, коли ядро $G(t,s) = A(s)$ не залежить від t.) Цей факт добре відомий, якщо $m = 1$ (див., наприклад, [1, с. 306] (вправа 6.7), або [3, с. 99] (теорема 7.1) у випадку дійсних функцій). Для довільного $m \in \mathbb{N}$ доведення аналогічно міркуванням у випадку $m = 1$. Для повноти викладення доведення буде наведено наприкінці цього підрозділу.

Звуження цього ізоморфізму на простір $(C^{0,\alpha})^{m\times m}$ є обмеженим ін'єктивним оператором на $(C^{0,\alpha})^{m\times m}$. Висновок про обмеженість зроблено на підставі імплікації

$$\begin{gathered}\bigl(A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m} \quad \text{для деяких} \quad n \in \mathbb{N}_0, \;\; \alpha \in [0,1]\bigr) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \bigl(\text{обмеженість оператора} \quad V_A : (C^{n,\alpha})^{m\times m} \to (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}\bigr),\end{gathered}$$

обґрунтованої вище у цьому доведенні. Окрім того, цей оператор є сюр'єктивним. Справді, якщо $F \in (C^{0,\alpha})^{m\times m}$, то існує функція $Y \in (C^{(0)})^{m\times m}$ така, що $Y - \lambda V_A Y = F$. Тому

$$Y = \lambda V_A Y + F \in (C^{0,\alpha})^{m\times m},$$

оскільки $V_A Y \in (C^{(1)})^{m\times m}$ на підставі цієї імплікації, де $n = \alpha = 0$. Отже, маємо ізоморфізм

$$I - \lambda V_A : (C^{k,\alpha})^{m\times m} \leftrightarrow (C^{k,\alpha})^{m\times m} \tag{2.17}$$

у випадку $k = 0$.

Виберемо довільним чином ціле число $l \in [0, n]$, і припустимо, що ізоморфізм (2.17) виконується і для $k = l$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що цей ізоморфізм виконується і для $k = l+1$. А саме, звуження ізоморфізму (2.17) для $k = l$ на простір $(C^{l+1,\alpha})^{m\times m}$ є обмеженим ін'єктивним оператором на цьому просторі. Крім того, якщо $F \in (C^{l+1,\alpha})^{m\times m}$, то, за припущенням, існує функція $Y \in (C^{l,\alpha})^{m\times m}$ така, що $Y - \lambda V_A Y = F$. Тому

$$Y = \lambda V_A Y + F \in (C^{l+1,\alpha})^{m\times m}$$

на підставі вказаної імплікації, де $n = l$. Отже, ізоморфізм (2.17) виконується для $k = l + 1$.

Таким чином, індукцією за цілим $k \in [0, n]$ в (2.17), доведено потрібний ізоморфізм (2.16). Лема 2.4 доведена.

Доведення теореми 2.4. Якщо $A \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, то за лемою 2.1 і формулою Ліувілля-Якобі маємо включення $Y := \Upsilon A \in \mathcal{Y}^{n+1,\alpha}$. Тоді

$$A(t) = -Y'(t)(Y(t))^{-1} \quad \text{для кожного} \quad t \in [a, b].$$

Отже, маємо ін'єктивне відображення

$$\Upsilon : (C^{n,\alpha})^{m\times m} \to \mathcal{Y}^{n+1,\alpha}. \tag{2.18}$$

Воно є і сюр'єктивним. Справді, якщо $Y \in \mathcal{Y}^{n+1,\alpha}$, то $\Upsilon A = Y$ для

$$A := -Y' Y^{-1} \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}.$$

Покажемо, що оператор (2.18) є неперервним. Припустимо, що $A_k \to A$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ при $k \to \infty$. З огляду на лему 2.3 маємо рівномірну збіжність

$I+V_{A_k} \rightrightarrows I+V_A$ при $k\to\infty$ обмежених операторів на просторі $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$. Тому на підставі леми 2.4 і формули (2.14), робимо висновок, що

$$\Upsilon A_k = (I+V_{A_k})^{-1} I_m \to (I+V_A)^{-1} I_m = \Upsilon A$$

в $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ при $k\to\infty$. Отже, оператор (2.18) є неперервним.

Оператор, обернений до нього, є також неперервним. Справді, якщо $Y_k \to Y$ в $\mathcal{Y}^{n+1,\alpha}$ при $k\to\infty$, то $Y_k' \to Y'$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ і $Y_k^{-1}\to Y^{-1}$ в $(C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$ при $k\to\infty$. Тому

$$\Upsilon^{-1} Y_k = -Y_k' Y_k^{-1} \to -Y' Y^{-1} = \Upsilon^{-1} Y$$

в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ при $k\to\infty$. Теорема 2.4 доведена.

Наприкінці цього підрозділу дамо обґрунтування одного результату, використаного у доведенні леми 2.4. Нехай на трикутнику

$$\bigl\{(t,s)\in\mathbb{R}^2 : a\le t\le b,\, a\le s\le t\bigr\}$$

задано неперервну квадратну матрицю-функцію $G(t,s)$ порядку m. Розглянемо інтегральний оператор Вольтерра, який кожній матриці функції $Y\in(C^{(0)})^{m\times m}$ ставить у відповідність матрицю-функцію

$$(V_G Y)(t) := \int_a^t G(t,s)Y(s)\,ds \quad \text{аргументу} \quad t\in[a,b].$$

Маємо лінійний обмежений оператор

$$V_G : (C^{(0)})^{m\times m} \to (C^{(0)})^{m\times m}. \tag{2.19}$$

Лема 2.5. *Оператор* (2.19) *є квазінільпотентним, тобто для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}$ *виконується ізоморфізм*

$$I-\lambda V_G : (C^{(0)})^{m\times m} \leftrightarrow (C^{(0)})^{m\times m}.$$

Доведення. Треба довести, що спектральний радіус оператора (2.19) дорівнює нулю. За формулою спектрального радіуса це рівносильно тому, що

$\|V_G^k\|^{1/k} \to 0$ при $k \to \infty$, де $\|\cdot\|$ позначає норму обмеженого оператора на просторі $(C^{(0)})^{m\times m}$. Покажемо спочатку, що при кожному $k \in \mathbb{N}$ правильна така формула k-го степеня оператора V_G:

$$(V_G^k Y)(t) = \int\limits_a^t G_k(t,s)Y(s)ds \quad \text{для усіх} \quad Y \in (C^{(0)})^{m\times m}, \ \ t \in [a,b], \tag{2.20}$$

де $G_1(t,s) := G(t,s)$ і

$$G_k(t,s) := \int\limits_s^t G_{k-1}(t,\tau)G(\tau,s)d\tau \quad \text{при} \quad k \geq 2 \tag{2.21}$$

для довільних $t \in [a,b]$ і $s \in [a,t]$. Доведемо цю формулу індукцією за k. Для $k=1$ вона є означенням оператора V_G. Припустивши, що ця формула правильна для деякого натурального k, доведемо її для наступного номера $k+1$. Для довільних $Y \in (C^{(0)})^{m\times m}$ і $t \in [a,b]$ запишемо за індуктивним припущенням таке:

$$(V_G^{k+1}Y)(t) = (V_G^k V_G Y)(t) = \int\limits_a^t G_k(t,\tau)\,(V_G Y)(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_a^t G_k(t,\tau)\biggl(\int\limits_a^\tau G(\tau,s)Y(s)ds\biggr)d\tau =$$

$$= \int\limits_a^t \biggl(\int\limits_a^\tau G_k(t,\tau)G(\tau,s)Y(s)ds\biggr)d\tau =$$

$$= \int\limits_a^t \biggl(\int\limits_s^t G_k(t,\tau)G(\tau,s)d\tau\biggr)Y(s)ds = \int\limits_a^t G_{k+1}(t,s)Y(s)ds.$$

Отже, отримали потрібну формулу для $k+1$. Тому згідно з принципом математичної індукції формула (2.20) правильна для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Запишемо $G = (g_{j,l})_{j,l=1}^m$ і $G_k = (g_k^{j,l})_{j,l=1}^m$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\mu := \sup\bigl\{|g_{j,l}(t,s)| : a \leq s \leq t \leq b,\ j,l \in \{1,\ldots,m\}\bigr\} < \infty.$$

Покажемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ матриця-функція G_k задовольняє таку властивість:

$$|g_k^{j,l}(t,s)| \le \frac{m^{k-1}\mu^k}{(k-1)!}\,(t-s)^{k-1} \quad \text{для усіх} \quad t \in [a,b], \;\; s \in [a,t], \qquad (2.22)$$
$$j,l \in \{1,\dots,m\}.$$

Доведемо цю властивість індукцією за k. Для $k=1$ властивість очевидна. Припустивши, що вона правильна для деякого $k \in \mathbb{N}$, доведемо її для наступного номера $k+1$. Для довільних j,l і t,s з формули (2.22) маємо згідно з рівністю (2.21) та індуктивним припущенням таке:

$$|g_{k+1}^{j,l}(t,s)| = \left| \sum_{r=1}^{m} \int\limits_s^t g_k^{j,r}(t,\tau)\, g_{r,l}(\tau,s)\, d\tau \right| \le$$
$$\le \sum_{r=1}^{m} \int\limits_s^t |g_k^{j,r}(t,\tau)\, g_{r,l}(\tau,s)|\, d\tau \Big| \le$$
$$\le \frac{m^{k-1}\mu^k}{(k-1)!}\,\mu\, m \int\limits_s^t (t-\tau)^{k-1} d\tau =$$
$$= \frac{m^k\mu^{k+1}}{(k-1)!} \cdot \frac{(t-s)^k}{k} = \frac{m^k\mu^{k+1}}{k!}\,(t-s)^k.$$

Отримали потрібну властивість для $k+1$. Тому за принципом математичної індукції властивість (2.22) правильна для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Тепер на підставі формул (2.20) і (2.22) запишемо для кожного номера $k \in \mathbb{N}$ і довільної матриці-функції $Y \in (C^{(0)})^{m\times m} = (y_{j,l})_{j,l=1}^m$ таку оцінку:

$$\|V_G^k Y\|_0 = \sum_{j,l=1}^{m} \max_{a\le t\le b} \left| \int\limits_a^t \sum_{r=1}^{m} g_k^{j,r}(t,s)\, y_{r,l}(s)\, ds \right| \le$$
$$\le \sum_{j,l=1}^{m} \max_{a\le t\le b} \sum_{r=1}^{m} \int\limits_a^t |g_k^{j,r}(t,s)\, y_{r,l}(s)|\, ds \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} \sum_{r,l=1}^{m} \max_{a\le t\le b} \int\limits_a^t |g_k^{j,r}(t,s)| \cdot |y_{r,l}(s)|\, ds \le$$

$$\leq m\,\frac{m^{k-1}\mu^k}{(k-1)!}\sum_{r,l=1}^{m}\max_{a\leq t\leq b}\int\limits_a^t (t-s)^{k-1}|y_{r,l}(s)|\,ds \leq$$

$$\leq \frac{m^k\mu^k}{(k-1)!}\,\|Y\|_0\max_{a\leq t\leq b}\int\limits_a^t (t-s)^{k-1}ds =$$

$$= \frac{m^k\mu^k}{(k-1)!}\,\|Y\|_0\max_{a\leq t\leq b}\frac{(t-a)^k}{k} = \frac{(m\,\mu\,(b-a))^k}{k!}\,\|Y\|_0.$$

Тому

$$\|V_G^k\|^{1/k} \leq \frac{m\,\mu\,(b-a)}{(k!)^{1/k}} \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Лема 2.5 доведена.

2.6. Доведення критерію

У цьому пункті доведемо основний результат другого розділу — теорему 2.3. Нагадаємо, що вона є критерієм неперервності за параметром ε при $\varepsilon = 0$ розв'язку крайової задачі (2.10), (2.11).

Попередньо відмітимо таке. Пов'яжемо з крайовою задачею (2.10), (2.11) лінійний неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{n+1,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m, \tag{2.23}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. За теоремою 2.1, цей оператор є фредгольмовим з індексом нуль для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тому умова (2.0) еквівалентна тому, що оператор (2.23) для $\varepsilon = 0$ є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0)) : (C^{n+1,\alpha})^m \leftrightarrow (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.24}$$

Доведення теореми 2.3 подамо у вигляді доведення трьох лем, наведених нижче.

Лема 2.6. *Припустимо, що виконуються умова* (2.0) *та граничні умови* (2.I) *і* (2.II)*. Тоді існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що оператор* (2.23) *є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$.*

Зауваження 2.2. Нехай виконується умова (2.0). Тоді з граничних умов (2.I) і (2.II) не випливає, що оператор (2.23) при $0 < \varepsilon \ll 1$ є малим збурення ізоморфізму (2.24) у нормі операторів. Це було б так, якщо б ми замінили граничну умову (2.II) на істотно сильнішу умову рівномірної збіжності крайових операторів $B(\varepsilon) \rightrightarrows B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому висновок леми 2.6 не є наслідком відомого факту про те, що клас усіх ізоморфізмів одного банахового простору на інший є відкритою множиною у рівномірній операторній топології.

Доведення леми 2.6. З огляду на теорему 2.4 покладемо

$$Y(\cdot,\varepsilon) := \Upsilon A(\cdot,\varepsilon) \in \mathcal{Y}^{n+1,\alpha}$$

для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. На підставі цієї теореми і граничної умови (2.I) маємо збіжність

$$Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^{m\times m} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.25}$$

Звідси і з граничної умови (2.II) випливає, що

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot,0)] \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{m\times m} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.26}$$

Умова (2.0) тягне за собою нерівність $\det[B(0)Y(\cdot,0)] \neq 0$ з огляду на теореми 2.1 і 2.2. Тому існує число $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ таке, що

$$\det[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] \neq 0 \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_1). \tag{2.27}$$

Отже, за теоремою 2.2, оператор (2.23) є оборотним для довільного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$. Лема 2.6 доведена.

Лема 2.7. *Припустимо, що крайова задача* (2.10), (2.11) *задовольняє умову* (2.0), *граничні умови* (2.I), (2.II) *і граничні умови*

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (C^{n,\alpha})^{m} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+, \tag{2.28}$$

$$q(\varepsilon) \to q(0) \quad \textit{в} \quad \mathbb{C}^{m} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.29}$$

Тоді єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ *цієї задачі, де* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, *має граничну властивість*

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^{m} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.30}$$

Доведення виконаємо у два кроки.

Крок 1. Тут доведемо лему 2.7 у випадку, коли $f(t,\varepsilon) = 0$ для довільних $t \in [a,b]$ і $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Використаємо міркування з доведення леми 2.6. За цією лемою крайова задача (2.10), (2.11) має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)\in(C^{n+1,\alpha})^m$ для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$. Оскільки $f(\cdot,\varepsilon)\equiv 0$, то існує вектор $p(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$ такий, що $y(\cdot,\varepsilon)=Y(\cdot,\varepsilon)p(\varepsilon)$. На підставі умови (2.29) маємо збіжність

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]p(\varepsilon)=q(\varepsilon)\to q(0)=[B(0)Y(\cdot,0)]p(0)$$

в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon\to 0+$. Тут рівності виконуються тому, що

$$q(\varepsilon)=B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=B(\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon)p(\varepsilon))=[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]p(\varepsilon)$$

для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$. З останньої збіжності випливає на підставі формул (2.26) і (2.27), що

$$p(\varepsilon)=[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]^{-1}q(\varepsilon)\to[B(0)Y(\cdot,0)]^{-1}q(0)=p(0)$$

в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon\to 0+$. Звідси та з формули (2.25) дістаємо потрібну збіжність (2.30); а саме,

$$y(\cdot,\varepsilon)=Y(\cdot,\varepsilon)p(\varepsilon)\to Y(\cdot,0)p(0)=y(\cdot,0)$$

в $(C^{n+1,\alpha})^m$ при $\varepsilon\to 0+$.

Крок 2. Використовуючи результат кроку 1, доведемо граничну властивість (2.30) у загальній ситуації. Для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$ єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)\in(C^{n+1,\alpha})^m$ крайової задачі (2.10), (2.11) зобразимо у вигляді

$$y(\cdot,\varepsilon)=x(\cdot,\varepsilon)+\widehat{y}(\cdot,\varepsilon).$$

Тут $x(\cdot,\varepsilon)\in(C^{n+1,\alpha})^m$ — єдиний розв'язок здачі Коші

$$L(\varepsilon)x(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad a\leq t\leq b,$$
$$x(a,\varepsilon)=0,$$

а $\widehat{y}(\cdot,\varepsilon)\in(C^{n+1,\alpha})^m$ — єдиний розв'язок крайової задачі

$$L(\varepsilon)\widehat{y}(t,\varepsilon)=0,\quad a\leq t\leq b,$$
$$B(\varepsilon)\widehat{y}(\cdot,\varepsilon)=\widehat{q}(\varepsilon),$$

де

$$\widehat{q}(\varepsilon) := q(\varepsilon) - B(\varepsilon)x(\cdot, \varepsilon).$$

За лемою 2.6 усі ці три розв'язки існують і єдині.

Нехай $Cx := x(a)$ для довільного $x \in (C^{n+1,\alpha})^m$. За лемою 2.1 і теоремою Банаха про обернений оператор маємо ізоморфізм

$$(L(\varepsilon), C) : (C^{n+1,\alpha})^m \leftrightarrow (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$$

для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. На підставі граничної умови (2.I) маємо рівномірну збіжність $L(\varepsilon) \rightrightarrows L(0)$ при $\varepsilon \to 0+$ обмежених операторів, які діють з простору $(C^{n+1,\alpha})^m$ у простір $(C^{n,\alpha})^m$. Справді, для довільних $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і $z \in (C^{n+1,\alpha})^m$, можемо записати

$$\begin{gathered}
\|(L(\varepsilon) - L(0))z\|_{n,\alpha} = \|(A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0))z\|_{n,\alpha} \leq \\
\leq c_0 \, \|A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0)\|_{n,\alpha} \, \|z\|_{n,\alpha} \leq \\
\leq c_0 \, c_1 \, \|A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0)\|_{n,\alpha} \, \|z\|_{n+1,\alpha};
\end{gathered}$$

тут c_0 і c_1 деякі додатні числа, не залежні від ε і z. Остання збіжність тягне за собою рівномірну збіжність

$$(L(\varepsilon), C)^{-1} \to (L(0), C)^{-1} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

обмежених операторів, що діють з простору $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$ у простір $(C^{n+1,\alpha})^m$. Звідси, використовуючи граничну умову (2.28), робимо висновок, що

$$(L(\varepsilon), C)^{-1}(f(\cdot, \varepsilon), 0) \to (L(0), C)^{-1}(f(\cdot, 0), 0) \tag{2.31}$$

в $(C^{n+1,\alpha})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Отже, з урахуванням рівностей

$$\begin{gathered}
(L(\varepsilon), C)^{-1}(f(\cdot, \varepsilon), 0) = x(\cdot, \varepsilon), \\
(L(0), C)^{-1}(f(\cdot, 0), 0) = x(\cdot, 0),
\end{gathered}$$

отримаємо збіжність

$$x(\cdot,\varepsilon) \to x(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.32}$$

З цієї збіжності та граничних умов (2.II) і (2.29) випливає, що

$$\widehat{q}(\varepsilon) = q(\varepsilon) - B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) \to q(0) - B(0)x(\cdot,0) = \widehat{q}(0)$$

в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Звідси за доведеним на кроці 1 і на підставі граничних умов (2.I), (2.II) і (2.29) отримуємо збіжність

$$\widehat{y}(\cdot,\varepsilon) \to \widehat{y}(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.33}$$

Тепер, враховуючи співвідношення (2.32) і (2.33), маємо шукану властивість (2.30) для $y(\cdot,\varepsilon) = x(\cdot,\varepsilon) + \widehat{y}(\cdot,\varepsilon)$.

Лема 2.7 доведена.

Лема 2.8. *Припустимо, що крайова задача* (2.10), (2.11) *задовольняє базове означення. Тоді для неї виконуються граничні умови* (2.I) *і* (2.II).

Доведення. Проведемо міркування у три кроки.

Крок 1. Доведемо тут, що крайова задача (2.10), (2.11) задовольняє граничну умову (2.I). За умовою $(*)$ базового означення оператор (2.23) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$. Нехай задано $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) = O_m, \quad a \le t \le b, \tag{2.34}$$

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] = I_m. \tag{2.35}$$

Зауважимо, що вона є об'єднанням m крайових задач (2.10), (2.11), праві частини яких не залежать від ε. Тому матрична задача (2.34), (2.35) має єдиний розв'язок $Y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^{m\times m}$. Більше того, за умовою $(**)$ базового означення маємо збіжність

$$Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^{m\times m} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.36}$$

Стверджується, що

$$\det Y(t,\varepsilon) \neq 0 \quad \text{для кожного} \quad t \in [a,b]. \tag{2.37}$$

Справді, якщо б властивість (2.37) не виконувалася, то функції-стовпці матриці $Y(\cdot,\varepsilon)$ були б лінійно залежними, що суперечило б (2.35). Тепер, формули (2.36) і (2.37) дають шукану збіжність

$$A(\cdot,\varepsilon) = -Y'(\cdot,\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot,0)(Y(\cdot,0))^{-1} = A(\cdot,0)$$

в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Таким чином, крайова задача (2.10), (2.11) задовольняє граничну умову (2.I). Зауважимо, що тоді

$$\sup\bigl\{\|A(\varepsilon)\|_{n,\alpha} : \varepsilon \in [0,\varepsilon_3)\bigr\} < \infty \tag{2.38}$$

для деякого числа $\varepsilon_3 \in (0,\varepsilon_1)$.

Крок 2. Перед тим як доводити, що досліджувана крайова задача задовольняє граничну умову (2.II), покажемо на цьому кроці, що

$$\sup\bigl\{\|B(\varepsilon)\| : \varepsilon \in [0,\varepsilon_4)\bigr\} < \infty \tag{2.39}$$

для деякого числа $\varepsilon_4 \in (0,\varepsilon_1)$. Тут $\|\cdot\|$ позначає норму обмеженого оператора з $(C^{n+1,\alpha})^m$ в $\mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне. Тоді існує послідовність чисел $\varepsilon^{(k)} \in (0,\varepsilon_1)$, де $k \in \mathbb{N}$, таких, що

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad 0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.40}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо функцію $z_k \in (C^{n+1,\alpha})^m$ таку, що

$$\|z_k\|_{n+1,\alpha} = 1 \quad \text{і} \quad \|B(\varepsilon^{(k)})z_k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\,\|B(\varepsilon^{(k)})\|. \tag{2.41}$$

Покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}\, z_k \in (C^{n+1,\alpha})^m,$$
$$f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in (C^{n,\alpha})^m,$$
$$q(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in \mathbb{C}^m.$$

За формулами (2.40) і (2.41) маємо збіжність

$$y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0 \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{2.42}$$

Звідси, враховуючи, що матриця-функція $A(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє граничну умову (2.I) за доведеним на кроці 1, отримаємо збіжність

$$f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0 \quad \text{в} \quad (C^{n,\alpha})^m \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{2.43}$$

Крім того, за властивістю (2.41), маємо нерівність

$$\frac{1}{2} \leq \|q(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1.$$

Тоді існує збіжна підпослідовність $(q(\varepsilon^{(k_j)}))_{j=1}^{\infty}$ послідовності $(q(\varepsilon^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$, причому

$$q(0) := \lim_{j\to\infty} q(\varepsilon^{(k_j)}) \neq 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^m. \tag{2.44}$$

Таким чином для кожного цілого числа $j\geq 1$, вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon^{(k_j)}) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k_j)})\, y(t,\varepsilon^{(k_j)}) = f(t,\varepsilon^{(k_j)}), \quad a\leq t\leq b,$$
$$B(\varepsilon^{(k_j)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k_j)}) = q(\varepsilon^{(k_j)}).$$

За умовою $(**)$ базового означення та згідно з формулами (2.43) і (2.44), послідовність $(y(\cdot,\varepsilon^{(k_j)}))_{j=1}^{\infty}$ збігається у просторі $(C^{n+1,\alpha})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot,0)$ граничної крайової задачі

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a\leq t\leq b,$$
$$B(0)y(\cdot,0) = q(0).$$

На підставі (2.42) маємо рівність $y(\cdot,0)=0$, що суперечить крайовій умові $B(0)y(\cdot,0)=q(0)$, де $q(0)\neq 0$. Тому зроблене припущення хибне. Тим самим доведено потрібну нерівність (2.39).

Крок 3. Доведемо тут, що крайова задача (2.10), (2.11) задовольняє граничну умову (2.II). Згідно з формулами (2.38) і (2.39) маємо нерівність

$$\varkappa' := \sup\bigl\{\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| : \varepsilon \in [0, \varepsilon_2')\bigr\} < \infty, \tag{2.45}$$

де $\varepsilon_2' := \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\} < \varepsilon_1$, а $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\|$ позначає норму оператора (2.23). Виберемо довільним чином функцію $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ та позначимо

$$f(\cdot, \varepsilon) := L(\varepsilon)y \in (C^{n,\alpha})^m \quad \text{і} \quad q(\varepsilon) := B(\varepsilon)y \in \mathbb{C}^m$$

для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Отже,

$$y = (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot, \varepsilon), q(\varepsilon)) \tag{2.46}$$

для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Тут $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ позначає обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} : (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m \to (C^{n+1,\alpha})^m, \tag{2.47}$$

обернений до оператора (2.23). За умовою $(**)$ базового означення маємо збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, q) \to (L(0), B(0))^{-1}(f, q) \tag{2.48}$$

в $(C^{n+1,\alpha})^m$ при $\varepsilon \to 0+$ для довільних $f \in (C^{n,\alpha})^m$ і $q \in \mathbb{C}^m$.

Використовуючи послідовно формули (2.45), (2.46) і (2.48), отримуємо для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2')$ такі співвідношення:

$$\begin{gathered}
\bigl\|B(\varepsilon)y - B(0)y\bigr\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\
\leq \bigl\|(f(\cdot,\varepsilon), q(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), q(0))\bigr\|_{(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m} = \\
= \bigl\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\bigl((f(\cdot,\varepsilon), q(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), q(0))\bigr)\bigr\|_{(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m} \leq \\
\leq \varkappa' \bigl\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\bigl((f(\cdot,\varepsilon), q(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), q(0))\bigr)\bigr\|_{n+1,\alpha} = \\
= \varkappa' \bigl\|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot, 0), q(0)) - (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot, 0), q(0))\bigr\|_{n+1,\alpha} \to 0,
\end{gathered}$$

де границя виконується при $\varepsilon \to 0+$. Таким чином,

$$\bigl\|B(\varepsilon)y - B(0)y\bigr\|_{\mathbb{C}^m} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Оскільки вектор-функція $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ вибрана довільним чином, то крайова задача (2.10), (2.11) задовольняє граничну умову (2.II). Лема (2.8) доведена.

Оскільки теорема 2.3 складається з щойно доведених лем 2.6, 2.7 і 2.8, то ця теорема також доведена.

2.7. Оцінка швидкості збіжності розв'язків задачі за параметром

Для крайової задачі (2.10), (2.11) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon))\|_{n,\alpha} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}. \qquad (2.49)$$

При цьому $y(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Основну теорему другого розділу доповнює такий результат.

Теорема 2.5. *Нехай для крайової задачі* (2.10), (2.11) *виконуються умова* (0) *і граничні умови* (2.I) *та* (2.II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *такі, що для довільного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1\, d_{n,\alpha}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+1,\alpha} \leq \varkappa_2\, d_{n,\alpha}(\varepsilon). \qquad (2.50)$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від вектор-функцій* $y(\cdot,0)$ *і* $y(\cdot,\varepsilon)$.

Згідно з (2.50), похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (2.10), (2.11) мають однаковий порядок.

Доведення теореми 2.5. Доведемо спочатку ліву частину двобічної оцінки (2.50). Згідно з граничними умовами (2.I) і (2.II), крайовий оператор (2.23) збігається сильно до обмеженого оператора (2.24) при $\varepsilon \to 0+$. Тому існує додатне число $\varepsilon_2' < \varepsilon_1$ таке, що нерівність (2.45) виконується, де $\|\cdot\|$ позначає норму оператора (2.23).

Справді, припускаючи супротивне, отримаємо послідовність додатних чисел $\varepsilon^{(k)}$, де $k \in \mathbb{N}$ таку, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $\|(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty$ при $k \to \infty$. За теоремою Банаха-Штейнгауза, це суперечить сильній збіжності

$$(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})) \to ((L(0), B(0)) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тому для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2')$ виконується оцінка

$$d_{n,\alpha}(\varepsilon) = \|L(\varepsilon)(y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon))\|_{n,\alpha} + \|B(\varepsilon)(y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon))\|_{\mathbb{C}^m} \leq$$
$$\leq \varkappa' \,\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+1,\alpha}.$$

Отримали ліву частину двобічної оцінки (2.50), де $\varkappa_1 := 1/\varkappa'$.

Доведемо тепер праву частину цієї оцінки. За лемою 2.6, кожний оператор (2.23), де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, має обмежений обернений оператор (2.47). Більше того, $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (C^{n,\alpha})^m$ і $q \in \mathbb{C}^m$ маємо на підставі основної теореми 2.3 збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, q) =: y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, q)$$

у просторі $(C^{n+1,\alpha})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Тоді існує додатне число $\varepsilon_2 < \varepsilon_2'$ таке, що

$$\varkappa_2 := \sup\bigl\{\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\| : \varepsilon \in [0, \varepsilon_2)\bigr\} < \infty,$$

де $\|\cdot\|$ позначає норму оператора (2.47). Це випливає з теореми Банаха-Штейнгауза за допомогою міркувань, цілком аналогічним тим, що були у попередньому абзаці. Тому для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ маємо таке:

$$\begin{gathered}\|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{n+1,\alpha} = \\ = \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon))\|_{n+1,\alpha} \leq \\ \leq \varkappa_2\bigl(\,\|L(\varepsilon)(y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon))\|_{n,\alpha} + \|B(\varepsilon)(y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon))\|_{\mathbb{C}^m}\bigr) = \\ = \varkappa_2\, d_{n,\alpha}(\varepsilon).\end{gathered}$$

Отримали праву частину двобічної оцінки (2.50). Теорема 2.5 доведена.

2.8. Приклад

Нехай $n = 0$ і $\alpha = 0$. Розглянемо такий приклад крайової задачі, тотальної щодо простору $C^{n+1,\alpha} = C^{(1)}$ і залежної від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{2.51}$$

$$\beta_0(\varepsilon)y(t(\varepsilon),\varepsilon) + \beta_1(\varepsilon)y'(t(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{2.52}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(1)})^m$ є шуканою та довільним чином задано матрицю-функцію $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(0)})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(0)})^m$, числові матриці $\beta_0(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точку $t(\varepsilon) \in [a,b]$ і вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Відмітимо, що не припускається яка-небудь регулярність матриць $A(\cdot,\varepsilon)$, $\beta_0(\varepsilon)$, $\beta_1(\varepsilon)$ і точок $t(\varepsilon)$ за параметром ε.

Задача (2.51), (2.52) є некласичною одноточковою крайовою задачею, оскільки у крайовій умові (2.52) наявна похідні шуканої функції, а порядок диференціального рівняння (2.51) дорівнює одиниці. Відображення

$$B(\varepsilon) : y \mapsto \beta_0(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) + \beta_1(\varepsilon)y'(t(\varepsilon)), \quad \text{де} \quad y \in (C^{(1)})^m, \tag{2.53}$$

є неперервним лінійним оператором з простору $(C^{(1)})^m$ у простір $\mathbb{C}^m$. Тому ця задача є справді тотальною щодо простору $C^{(1)}$ неперервно диференційовних функцій. Отже, для неї застосовні теореми 2.3 і 2.5.

У цьому зв'язку обговоримо граничну умову (2-II) для крайового оператора (2.53). Звісно, вона є наслідком системи явних умов

$$\beta_0(\varepsilon) \to \beta_0(0), \quad \beta_1(\varepsilon) \to \beta_1(0), \quad t(\varepsilon) \to t(0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.54}$$

Більше того, якщо $B(0)$ не є нуль-оператором, то гранична умова (2-II) еквівалентна цій системі умов. Це буде показано нижче.

З огляду на зауваження 2.2 відмітимо, що система умов (2.54) не тягне за собою рівномірну збіжність крайових операторів $B(\varepsilon) \rightrightarrows B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$ як неперервних операторів на парі просторів $(C^{(1)})^m$ і $\mathbb{C}^m$. Справді, для кожного числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ розглянемо вектор-функцію $u(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(0)})^m$ таку, що її перша компонента $u_1(\cdot, \varepsilon)$ задовольняє умови $u_1(t(\varepsilon), \varepsilon) = 1$, $u_1(t(0), \varepsilon) = 0$ і $0 \leq u_1(t, \varepsilon) \leq 1$ для довільного $t \in [a, b]$, а усі інші компоненти тотожно дорівнюють нулю. Вектор-функція

$$y(t, \varepsilon) := \int_a^t u(\tau, \varepsilon)\, d\tau \quad \text{аргументу} \quad t \in [a, b]$$

належить до простору $(C^{(1)})^m$ і задовольняє такі умови:

$$\|y(\cdot, \varepsilon)\|_1 \leq b - a + 1, \tag{2.55}$$

$$\|y(t(\varepsilon), \varepsilon) - y(t(0), \varepsilon)\| \leq |t(\varepsilon) - t(0)|, \tag{2.56}$$

$$y'(t(\varepsilon), \varepsilon) = \mathrm{col}(1, 0, \ldots, 0), \quad y'(t(0), \varepsilon) = 0 \in \mathbb{C}^m. \tag{2.57}$$

З огляду на формули (2.55) і (2.57) маємо нерівності

$$\|B(\varepsilon) - B(0)\| \geq \frac{\|B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) - B(0)y(\cdot, \varepsilon)\|}{\|y(\cdot, \varepsilon)\|_1} \geq$$
$$\geq (b - a + 1)^{-1}\big(\|\beta_1(\varepsilon)\mathrm{col}(1, 0, \ldots, 0)\| -$$
$$- \|\beta_0(\varepsilon)y(t(\varepsilon), \varepsilon) - \beta_0(0)y(t(0), \varepsilon)\|\big).$$

Тут $\|\cdot\|$ позначає норму лінійного неперервного оператора, який діє з простору $(C^{(1)})^m$ у простір $\mathbb{C}^m$. Отже, за умов (2.54) робимо висновок на підставі (2.56), що

$$\|B(\varepsilon) - B(0)\| \geq \frac{\|\beta_1(0)\mathrm{col}(1, 0, \ldots, 0)\|}{2(b - a + 1)} \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Якщо перший стовпець числової матриці $\beta_1(0)$ не нульовий, то отримана нерівність означає, що нема рівномірної збіжності оператора $B(\varepsilon)$ до $B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Припустимо тепер, що крайовий оператор (2.53) задовольняє граничну умову (2-II) і що $B(0)$ не є нуль-оператором. Покажемо, що тоді крайовий оператор (2.53) задовольняє умови (2.54). Для кожного числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і довільної вектор-функції $y \in (C^{(1)})^m$ покладемо

$$B_0(\varepsilon)y := \beta_0(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) \quad \text{і} \quad B_1(\varepsilon)y := \beta_1(\varepsilon)y'(t(\varepsilon)).$$

Розглянемо вектор-функцію

$$y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_m) \in (C^{(1)})^m \tag{2.58}$$

таку, $y_k(t) \equiv 1$ для деякого номера $k \in \overline{1,m}$ і $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для такої функції маємо на підставі граничної умови (2-II) співвідношення

$$\beta_0(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) = B(\varepsilon)y \to B(0)y = \beta_0(0)y(t(0));$$

тут і далі у цьому підрозділі границі розглядаються за умови $\varepsilon \to 0+$, якщо інше не вказано окремо. Отже, k-ий стовпець матриці $\beta_0(\varepsilon)$ збігається до k-ого стовпця матриці $\beta_0(0)$. Таким чином, $\beta_0(\varepsilon) \to \beta_0(0)$ з огляду на довільність вибору номера $k \in \overline{1,m}$.

Доведемо, що крайовий оператор (2.53) задовольняє решту умов (2.54). Розглянемо окремо випадки, коли $\beta_0(0) \neq O_m$ і коли $\beta_0(0) = O_m$.

Припустимо спочатку, що $\beta_0(0) \neq O_m$. Тоді числова матриця $\beta_0(0)$ містить принаймні один елемент $\theta \neq 0$; нехай він розташований у j-ому рядку і k-ому стовпці цієї матриці. Доведемо, що $t(\varepsilon) \to t(0)$. Припустимо супротивне; тоді існує нескінченно мала послідовність $(\varepsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_0)$ і число $\tau \neq t(0)$ такі, що $t(\varepsilon_\nu) \to \tau$ при $\nu \to \infty$. Розглянемо вектор-функцію (2.58) таку, що $y_k(t) = 1$ у достатньо малому околі точки $t(0)$ і $y_k(t) = 0$ у достатньо малому околі точки τ та $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для цієї функції $B(\varepsilon_\nu)y \to B(0)y$ при $\nu \to \infty$ згідно з граничною умовою (2-II), де

$$B(\varepsilon_\nu)y = \beta_0(\varepsilon_\nu)y(t(\varepsilon_\nu)) + \beta_1(\varepsilon_\nu)y'(t(\varepsilon_\nu)) = 0 \in \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \nu \gg 1.$$

Тому

$$0 = B(0)y = \beta_0(0)y(t(0)),$$

звідки $\theta = 0$, оскільки j-ий елемент вектора $\beta_0(0)y(t(0))$ дорівнює θ. Отримали протиріччя, яке і доводить збіжність $t(\varepsilon) \to t(0)$.

Звідси на підставі доведеної раніше збіжності $\beta_0(\varepsilon) \to \beta_0(0)$ випливає сильна збіжність $B_0(\varepsilon) \xrightarrow{s} B_0(0)$ операторів. Остання разом з граничною умовою (2-II) дає сильну збіжність $B_1(\varepsilon) \xrightarrow{s} B_1(0)$. Виведемо звідси, що $\beta_1(\varepsilon) \to \beta_1(0)$. Розглянемо вектор-функцію (2.58) таку, що $y_k(t) \equiv t$ для деякого номера $k \in \overline{1,m}$ і $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для цієї функції маємо на підставі сильної збіжності $B_1(\varepsilon) \xrightarrow{s} B_1(0)$ співвідношення

$$\beta_1(\varepsilon)y'(t(\varepsilon)) = B_1(\varepsilon)y \to B_1(0)y = \beta_1(0)y'(t(0)).$$

Отже, k-ий стовпець матриці $\beta_1(\varepsilon)$ збігається до k-ого стовпця матриці $\beta_1(0)$. Таким чином, $\beta_1(\varepsilon) \to \beta_1(0)$ з огляду на довільність вибору номера $k \in \overline{1,m}$.

Дослідимо тепер випадок, коли $\beta_0(0) = O_m$. Оскільки за доведеним $\beta_0(\varepsilon) \to \beta_0(0)$, то $B_0(\varepsilon) \xrightarrow{s} 0$ у цьому випадку. Тому на підставі граничної умови (2-II) маємо збіжність

$$B_1(\varepsilon) = B(\varepsilon) - B_0(\varepsilon) \xrightarrow{s} B(0) = B_1(0). \tag{2.59}$$

Звідси виводиться, що $t(\varepsilon) \to t(0)$ подібно до міркувань, застосованих у попередньому випадку. А саме, припустимо супротивне; тоді існує нескінченно мала послідовність $(\varepsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_0)$ і число $\tau \neq t(0)$ такі, що $t(\varepsilon_\nu) \to \tau$ при $\nu \to \infty$. Оскільки оператор $B(0)$ не нульовий, то матриця $\beta_1(0) \neq O_m$ у випадку, що досліджується. Отже, вона містить принаймні один елемент $\theta \neq 0$; нехай він розташований у її j-ому рядку і k-ому стовпці. Розглянемо вектор-функцію (2.58) таку, що $y_k(t) = t$ у достатньо малому околі точки $t(0)$ і $y_k(t) = 0$ у достатньо малому околі точки τ та $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Згідно з (2.59) маємо збіжність $B_1(\varepsilon_\nu)y \to B_1(0)y$ при $\nu \to \infty$, де

$$B_1(\varepsilon_\nu)y = \beta_1(\varepsilon_\nu)y'(t(\varepsilon_\nu)) = 0 \in \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \nu \gg 1.$$

Тому

$$0 = B_1(0)y = \beta_1(0)y'(t(0)),$$

звідки $\theta = 0$, оскільки j-ий елемент вектора $\beta_1(0)y'(t(0))$ дорівнює θ. Отримали протиріччя, яке і доводить збіжність $t(\varepsilon) \to t(0)$. Звідси і з властивості (2.59) виводиться збіжність $\beta_1(\varepsilon) \to \beta_1(0)$ так само як і в попередньому випадку.

Таким чином, доведено, що гранична умова (2-II) тягне за собою умови (2.54), якщо $B(0) \neq 0$.

2.9. Деякі властивості сильної операторної топології

Нехай X і Y комплексні або дійсні банахові простори. Нехай хоча б один із просторів X і Y має базис Шаудера.

Твердження 2.1. *Множина всіх скінченновимірних операторів з простору $\mathcal{L}(X,Y)$ є секвенціально щільною в $\mathcal{L}(X,Y)$ у сильній операторній топології.*

Оскільки кожен скінченновимірний оператор з простору $\mathcal{L}(X,Y)$ є необоротним, то це твердження означає, що множина всіх необоротних операторів з $\mathcal{L}(X,Y)$ є секвенціально щільною в $\mathcal{L}(X,Y)$ у сильній операторній топології.

Доведення твердження 2.1. Розглянемо окремо випадки, коли X або Y має базис Шаудера.

Розглянемо спочатку перший випадок, коли X має деякий базис Шаудера $(e_j)_{j=1}^{\infty}$. Тоді кожен вектор $x \in X$ єдиним чином зображається у вигляді

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)\, e_j, \tag{2.60}$$

де кожне e_j^* є деяким лінійним неперервним функціоналом на X. Використовуючи цей базис, означимо оператор k-ої частинної суми

$$S_k : x \mapsto \sum_{j=1}^{k} e_j^*(x)\, e_j, \quad \text{де} \quad x \in X.$$

Очевидно, що $S_k \to I_X$ при $k \to \infty$ у сильній операторній топології в $\mathcal{L}(X,X)$. Тут, як звичайно, I_X позначає тотожний оператор на X. Розглянемо довільний оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ і покладемо $T_k := TS_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Кожний оператор T_k є скінченновимірним, і $T_k \to T$ при $k \to \infty$ в сильній операторній топології у просторі $\mathcal{L}(X,Y)$.

Випадок, коли Y має базис Шаудера розглядається аналогічним чином. А саме, нехай $(\tilde{e}_j)_{j=1}^{\infty}$ — базис Шаудера у просторі Y і $\tilde{e}_j^*(y)$ — j-та координата вектора $y \in Y$ в цьому базисі. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ означимо оператор

$$\widetilde{S}_k : y \mapsto \sum_{j=1}^{k} \tilde{e}_j^*(y)\, \tilde{e}_j, \quad \text{де} \quad y \in Y.$$

Для довільного оператора $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ покладемо $\widetilde{T}_k := \widetilde{S}_k T$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Кожний оператор $\widetilde{T}_k$ є скінченновимірним, і $\widetilde{T}_k \to T$ при $k \to \infty$ в сильній операторній топології в $\mathcal{L}(X,Y)$. Твердження 2.1 доведене.

Твердження 2.2. *Нехай простори X і Y ізоморфні. Тоді відображення $T \mapsto T^{-1}$, задане на множині всіх оборотних операторів $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, є всюди розривним у сильній операторній топології.*

Припущення, зроблене у цьому твердженні, є природними. Справді, якщо простори X і Y не є ізоморфними, то не існує оборотних операторів в $\mathcal{L}(X,Y)$.

Доведення твердження 2.2. За теоремою Банаха-Штейнгауза достатньо показати, що для довільного оборотного оператора $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ існує послідовність оборотних операторів $(T_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ така, що $T_k \to T$ при $k \to \infty$ в сильній операторній топології в $\mathcal{L}(X,Y)$ і послідовність $(\|T_k^{-1}\|)_{k=1}^{\infty}$ є необмеженою. Тут, звісно, $\|T_k^{-1}\|$ позначає норму оберненого оператора $T_k^{-1} : Y \to X$. Без втрати загальності можна припустити, що $Y = X$ і $T = I_X$. Справді, враховуючи, що банахові простори X і Y є ізоморфними, загальний випадок тривіально зводиться до вже розглянутого.

Використаємо міркування з доведення твердження 2.1. Для кожного $k \in \mathbb{N}$, розглянемо оператор

$$I_k : x \mapsto \sum_{j=1}^{k-1} e_j^*(x)\, e_j + \frac{1}{k}\, e_k^*(x)\, e_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} e_j^*(x)\, e_j, \quad \text{де} \quad x \in X. \tag{2.61}$$

Кожен оператор I_k належить до простору $\mathcal{L}(X,Y)$ і є оборотним, причому

$$I_k^{-1} : x \mapsto \sum_{j=1}^{k-1} e_j^*(x)\, e_j + k\, e_k^*(x)\, e_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} e_j^*(x)\, e_j, \quad \text{де} \quad x \in X. \tag{2.62}$$

З формул (2.60) і (2.61) випливає, що $I_k \to I_X$ при $k \to \infty$ в сильній операторній топології у просторі $\mathcal{L}(X, Y)$. Проте, послідовність $(\|I_k^{-1}\|)_{k=1}^{\infty}$ є необмеженою, оскільки за формулою (2.62) задовольняє умову

$$\|I_k^{-1}\| \geq \frac{\|I_k^{-1} e_k\|}{\|e_k\|_X} = k \quad \text{для кожного} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Твердження 2.2 доведене.

Зауважимо, що в твердженнях 2.1 і 2.2 не можна замінити сильну операторну топологію на рівномірну. Справді, як відомо, відображення $T \mapsto T^{-1}$ є всюди неперервним у рівномірній операторній топології, а замикання множини усіх скінченовимірних операторів у цій топології містить лише компактні (а тому необоротні) оператори.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $n \in \mathbb{N}_0$ і $0 \leq \alpha \leq 1$. Ці крайові задачі названо тотальними щодо простору $C^{n+1,\alpha}$. Отримано такі основні результати:

1. Показано, що введеним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{n+1,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$ (теорема 2.1).

2. Встановлено критерій однозначної розв'язності введених крайових задач у цих просторах (теорема 2.2).

3. Для крайових задач, тотальних щодо простору $C^{n+1,\alpha}$ і залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі (теорема 2.3). Це — основний результат другого розділу.

4. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ (теорема 2.5).

Результати другого розділу опубліковано у статті [55].

РОЗДІЛ 3
ТОТАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКИХ ПОРЯДКІВ

У цьому розділі вводиться і досліджується максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до простору $l \geq r$ разів неперервно диференційовних функцій.

3.1. Формулювання задачі

Як і раніше, $[a, b]$ є (скінченний) відрізок дійсної осі, $m \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}_0$. Нехай також довільним чином вибрано натуральне число $r \geq 2$.

Розглянемо таку крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь порядку r:

$$Lz(t) \equiv z^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) z^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{3.1}$$

$$Bz = q. \tag{3.2}$$

Тут є шуканою вектор-функція $z \in (C^{(n+r)})^m$ і довільно задано матрицю-функцію $K_{r-j} \in (C^{(n)})^{m \times m}$ для кожного $j \in \{1, \dots, r\}$, вектор-функцію $f \in (C^{(n)})^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^{rm}$ і лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{3.3}$$

Оскільки цей оператор діє у простір $\mathbb{C}^{rm}$, то крайова умова (3.2) задає rm скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r.

Крайова умова (3.2) з неперервним оператором (3.3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (3.1). Це випливає з леми, поданої нижче. Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов (умови задачі Коші, різні багатоточкові умови, інтегральні умови, умови змішаних крайових задач), так і різні некласичні крайові умови. Останні можуть містити похідні шуканих функцій порядку k, де $r \le k \le n+r$. Тому крайову задачу (2.1), (2.2) *називаємо тотальною щодо простору* $C^{(n+r)}$, тобто простору $n+r$ разів неперервно диференційовних функцій .

Лема 3.1. *Нехай* $K_{r-j} \in (C^{(n)})^{m\times m}$ *для кожного* $j \in \{1,\dots,r\}$*. Якщо* r *разів диференційовна функція* $z : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ *є розв'язком рівняння* (3.1) *для деякої правої частини* $f \in (C^{(n)})^m$*, то* $z \in (C^{(n+r)})^m$*. Більше того, якщо* f *пробігає весь простір* $(C^{(n)})^m$*, то розв'язки рівняння* (3.1) *пробігають весь простір* $(C^{(n+r)})^m$*.*

Доведення. Припустимо, що r разів диференційовна функція z є розв'язком рівняння (3.1) для деякого $f \in (C^{(n)})^m$. Доведемо, що $z \in (C^{(n+r)})^m$. Враховуючи, що f і всі K_{r-j} є принаймні неперервними на $[a,b]$, маємо

$$z^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}\, z^{(r-j)} \in (C^{(0)})^m.$$

Отже, $z \in (C^{(r)})^m$. Більше того,

$$\begin{gathered}\bigl(\, z \in (C^{(l)})^m \;\Rightarrow\; z \in (C^{(l+1)})^m \,\bigr)\\ \text{для кожного} \quad l \in \mathbb{Z} \cap [r, n+r-1].\end{gathered} \tag{3.4}$$

Справді, якщо $z \in (C^{(l)})^m$ для деякого цілого числа $l \in [r, n+r-1]$, то

$$z^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}\, z^{(r-j)} \in (C^{(l-r+1)})^m,$$

оскільки $l - r + 1 \le n$ і кожне $K_{r-j} \in (C^{(n)})^{m\times m}$; отже, $z \in (C^{(l+1)})^m$. Тепер включення $z \in (C^{(r)})^m$ і властивість (3.4) тягнуть за собою потрібне включення $z \in (C^{(n+r)})^m$.

Доведемо останнє твердження леми. Для довільного $f \in (C^{(n)})^m$ існує розв'язок z рівняння (3.1). Як щойно було показано, $z \in (C^{(n+r)})^m$. А це, враховуючи очевидну властивість

$$z \in (C^{(n+r)})^m \;\Rightarrow\; Lz \in (C^{(n)})^m,$$

доводить останнє твердження леми. Лема 3.1 доведена.

3.2. Характер розв'язності задачі

Коротко запишемо крайову задачу (3.1), (3.2) у вигляді $(L,B)z=(f,q)$ за допомогою неперервного лінійного оператора

$$(L,B):\,(C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Оператор* (3.5) *є фредгольмовим з індексом нуль.*

Доведення. Лінійне відображення $z \mapsto (Lz, Cz)$, де $z \in (C^{(n+r)})^m$ і

$$Cz := \bigl(z(a), z'(a), \ldots, z^{(r-1)}(a)\bigr),$$

є ізоморфізмом

$$(L,C):\,(C^{(n+r)})^m \leftrightarrow (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{3.6}$$

Справді, для довільних $f \in (C^{(n)})^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$, задача Коші, яка складається з диференціального рівняння (3.1) і початкової умови $Cz = q$, має єдиний розв'язок z (див., наприклад, [9, с. 146]). На підставі леми 3.1 виконується включення $z \in (C^{(n+r)})^m$. Тому, вказане відображення є взаємно однозначним лінійним оператором (3.6). Оскільки він неперервний, то за теоремою Банаха про обернений оператор, маємо ізоморфізм (3.6).

Оператор (3.5) є скінченновимірним збуренням цього ізоморфізму. Тому, (3.5) є фредгольмовим оператором з індексом нуль. Теорема 3.1 доведена.

Для фредгольмового оператора (3.5) сформулюємо критерій бути ізоморфізмом.

Як відомо, загальний розв'язок однорідного рівняння (3.1) з $f \equiv 0$ подається у вигляді

$$z = \sum_{l=0}^{r-1} Z_l\, q_l, \tag{3.7}$$

де стовпці $q_0, \ldots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ довільні (див., наприклад, [9] (розд. 2, п. 2.5)). Тут кожна матриця-функція $Z_l \in (C^{(n+r)})^{m\times m}$, де $l \in \{0, \ldots, r-1\}$, є розв'язком матричної задачі Коші

$$Z_l^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) Z_l^{(r-j)}(t) = 0, \quad a \le t \le b, \tag{3.8}$$

$$Z_l^{(j)}(a) = \delta_{l,j} I_m, \quad j = 0, \ldots, r-1.. \tag{3.9}$$

Як звичайно $\delta_{l,j}$ — символ Кронекера.

Теорема 3.2. *Оператор* (3.5) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли є невиродженою матриця*

$$\big([BZ_0)] \cdots [BZ_{r-1}]\big). \tag{3.10}$$

Тут (3.10) є числова квадратна матриця порядку rm, утворена з прямокутних блоків $[BZ_l]$, де $l = 0, \ldots r-1$, розміру $rm \times m$. Як і в п. 2.3, кожний стовпець блоку $[BZ_l]$ є результатом дії оператора B на відповідний стовпець (з тим же номером) матриці-функції Z_l.

Доведення теореми 3.2. За теоремою 3.1, оператор (3.5) є оборотним тоді і тільки тоді, коли його ядро $\ker(L, B)$ є нуль-простором. Тому теорема 3.2 буде доведена, якщо покажемо, що нерівність $\ker(L, B) \ne \{0\}$ еквівалентна виродженості матриці (3.10).

Припустимо спочатку, що $\ker(L, B) \ne \{0\}$. Тоді існує нетривіальний $z \in (C^{(n+r)})^m$ однорідної крайової задачі $(L, B)z = (0, 0)$. Він зображається у вигляді (3.7), де принаймні один із стовпців $q_0, \ldots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. На підставі леми 2.2 запишемо

$$0 = Bz = \sum_{l=0}^{r-1} B(Z_l q_l) = \sum_{l=0}^{r-1} [BZ_l] q_l,$$

тобто блоки матриці (3.10) лінійно залежні. Тому її стовпці лінійно залежні і вона вироджена.

Зворотно, припустимо, що матриця (3.10) вироджена. Тоді її стовпці, а отже, і блоки є лінійно залежними:

$$\sum_{l=0}^{r-1} [BZ_l] q_l = 0 \tag{3.11}$$

для деяких стовпців $q_0, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, серед яких принаймні один відмінний від нуля. Означимо ненульову вектор-функцію $z \in (C^{(n+r)})^m$ за формулою (3.7). Для цієї функції $Lz = 0$ і

$$Bz = \sum_{l=0}^{r-1} B(Z_l q_l) = \sum_{l=0}^{r-1} [BZ_l] q_l = 0$$

на підставі леми 2.2 і рівності (3.11). Отже, $0 \neq z \in \ker(L, B)$. Теорема 3.2 доведена.

3.3. Необхідні й достатні умови неперервності за параметром розв'язків задачі

Нехай $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну крайову задачу вигляду (3.1), (3.2), залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon)z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \quad (3.12)$$

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \quad (3.13)$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є шуканою вектор-функція $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ і довільним чином задані матриці-функції $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, де $j = 1 \ldots r$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$, неперервний лінійний оператор

$$B(\varepsilon) : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm} \quad (3.14)$$

та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$.

Для крайової задачі (3.12), (3.13) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(3.I) $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to K_{r-j}(\cdot,0)$ в $(C^{(n)})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1 \ldots r\}$;

(3.II) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$.

Розглядається ще така

Умова (3.0). Гранична однорідна крайова задача

$$\begin{aligned} L(0)z(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \\ B(0)z(\cdot,0) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

має лише тривіальний розв'язок.

Сформулюємо

Базове означення розд. 3. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (3.12), (3.13) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

(∗) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, вектор-функції $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ і вектора $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$.

(∗∗) Збіжність правих частин

$$f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad \left(C^{(n+r)}\right)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Сформулюємо основну теорему третього розділу.

Теорема 3.3. *Для того, щоб розв'язок крайової задачі* (3.12), (3.13) *неперервно залежав від параметра ε при $\varepsilon = 0$ необхідно й достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I) *та* (3.II).

Цю теорему доведемо у наступному п. 3.4.

Зауваження 3.1. Лінійний неперервний оператор (3.14) єдиним чином зображається у вигляді

$$B(\varepsilon)z = \sum_{k=1}^{n+r} \beta_k(\varepsilon)\, z^{(k-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi(t, \varepsilon)) z^{(n+r)}(t) \tag{3.16}$$

для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$. Тут кожне $\beta_k(\varepsilon)$, де $k \in \{1, \ldots, n + r\}$, є числовою матрицею розміру $rm \times m$, а $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ є матрицею-функцією розміру $rm \times m$, складеною із скалярних функцій обмеженої варіації на $[a, b]$, неперервних справа на (a, b) та рівних нулю у точці $t = a$. (Звісно, інтеграл в (3.16) розуміється за Ріманом-Стільтьєсом.) Зображення (3.16) є прямим наслідком відомого опису простору, спряженого до $C^{(n+r)}$ (див., наприклад, [8, с. 374]). Використовуючи (3.16), можемо переписати граничну умову (3.II) у явній формі. А саме, гранична умова (3.II) при $\varepsilon \to 0+$ еквівалентна виконанню таких чотирьох умов:

(2a) $\beta_k(\varepsilon) \to \beta_k(0)$ для кожного номера $k \in \{1, \ldots, n+r\}$;

(2b) $\|V_a^b \Phi(\cdot, \varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm\times m}} = O(1)$;

(2c) $\Phi(b, \varepsilon) \to \Phi(b, 0)$;

(2d) $\int\limits_a^t \Phi(s, \varepsilon) ds \to \int\limits_a^t \Phi(s, 0) ds$ для кожного $t \in (a, b]$.

(Звісно, збіжність розглядається у просторі $\mathbb{C}^{rm\times m}$.) Така еквівалентність є наслідком критерію Ф. Ріса [31, с. 136] слабкої збіжності лінійних функціоналів на $C^{(0)}$. Корисно порівняти ці умови з критерієм збіжності операторів $B(\varepsilon) \to B(0)$ за нормою при $\varepsilon \to 0+$. Він стверджує, що ця збіжність за нормою еквівалентна виконанню умов (2a) і

$$V_a^b \bigl(\Phi(\cdot, \varepsilon) - \Phi(\cdot, 0)\bigr) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.17}$$

Умова (3.17) є більш сильною, ніж система умов (2b) – (2d). Справді, з умови (3.17) випливає рівномірна збіжність функцій $\Phi(t, \varepsilon)$ до $\Phi(t, 0)$ на $[a, b]$ при $\varepsilon \to 0+$, тоді як з умов (2b) – (2d) не випливає поточкова збіжність цих функцій хоча б в одній точці інтервалу (a, b).

3.4. Доведення необхідної і достатньої умови

У цьому пункті доведемо основний результат третього розділу — теорему 3.3.

Попередньо доведемо достатню частину цієї теореми у випадку задачі Коші

$$L(\varepsilon)x(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{3.18}$$

$$x^{(j-1)}(a,\varepsilon) = p_j(\varepsilon), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{3.19}$$

залежної від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, довільно задано як вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$, так і вектори $p_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, де $j = 1, \ldots, r$. Єдиний розв'язок $x(\cdot,\varepsilon)$ цієї задачі належить до $(C^{(n+r)})^m$ за лемою 3.1.

Лема 3.2. *Нехай виконуються гранична умова* (3.I) *і умови*

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (C^{(n)})^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+, \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} p_j(\varepsilon) \to p_j(0) \quad \textit{в} \quad \mathbb{C}^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+ \\ \textit{для кожного} \quad j \in \{1, \ldots, r\}. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Тоді розв'язок $x(\cdot,\varepsilon)$ *задачі Коші* (3.18), (3.19) *має таку властивість:*

$$x(\cdot,\varepsilon) \to x(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (C^{(n+r)})^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.22}$$

Доведення. Нехай $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Зведемо задачу Коші (3.18), (3.19) до задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку (див., наприклад, [9, п. 2.5]). Для цього, як звичайно, покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\big(x(\cdot,\varepsilon), x'(\cdot,\varepsilon), \ldots, x^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\big) \in (C^{(n+1)})^{rm}, \tag{3.23}$$

$$g(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\big(0, f(\cdot,\varepsilon)\big) \in (C^{(n)})^{rm},$$

$$p(\varepsilon) := \mathrm{col}\big(p_1(\varepsilon), \ldots, p_r(\varepsilon)\big) \in \mathbb{C}^{rm}$$

та

$$A(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} O_m & I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \dots & I_m \\ K_0(\cdot,\varepsilon) & K_1(\cdot,\varepsilon) & K_2(\cdot,\varepsilon) & \dots & K_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

де $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{rm\times rm}$. Розглянемо задачу Коші

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{3.25}$$

$$y(a,\varepsilon) = p(\varepsilon). \tag{3.26}$$

Вектор-функція $x(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ є розв'язком задачі Коші (3.18), (3.19) тоді і лише тоді, коли вектор-функція (3.23) є розв'язком задачі Коші (3.25), (3.26).

Задача Коші (3.25), (3.26) є окремим випадком тотальної щодо $C^{(n+1)}$ крайової задачі вигляду (2.10), (2.11), де крайовий оператор $B(\varepsilon)y := y(a)$ не залежить від ε і тому задовольняє граничну умову (2.II). З граничних умов (3.I), (3.20) і (3.21) негайно випливає, що ця задача Коші задовольняє при $\varepsilon \to +0$ граничну умову (2.I) та умови $g(\cdot,\varepsilon) \to g(\cdot,0)$ в $(C^{(n)})^{rm}$ і $p(\varepsilon) \to p(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$. Отже, за основною теоремою 2.3 для $\alpha = 0$, маємо збіжність $y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0)$ в $(C^{(n+1)})^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Звідси з огляду на (3.23) випливає потрібна властивість (3.22). Лема 3.2 доведена.

Доведення теореми 3.3 подамо у вигляді доведення трьох лем, сформульованих нижче. При цьому буде використана щойно встановлена лема 3.2.

Пов'яжемо із крайовою задачею (3.12), (3.13) лінійний неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{3.27}$$

З теореми 3.1 випливає, що оператор (3.27) є фредгольмовим з індексом нуль для кожного числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$.

Лема 3.3. *Припустимо, що виконуються умова* (3.0) *та граничні умови* (3.I) *і* (3.II). *Тоді існує додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *таке, що оператор* (3.27) *є оборотним для кожного* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$.

Доведення. Для довільних числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і номера $l \in \{0, \ldots, r-1\}$ розглянемо матричну задачу Коші (3.8), (3.9), де $Z_l(\cdot) = Z_l(\cdot, \varepsilon)$ і $K_{r-j}(\cdot) = K_{r-j}(\cdot, \varepsilon)$. Вона складається з m напіводнорідних задач Коші вигляду (3.18), (3.19), де $f(\cdot, \varepsilon) \equiv 0$ і кожне p_j не залежить від ε, відносно вектор-функцій $x(t, \varepsilon)$, що є стовпчиками матриці $Z_l(\cdot, \varepsilon)$. Тому, скориставшись граничною умовою (3.I) і лемою (3.2), отримуємо збіжність

$$Z_l(\cdot, \varepsilon) \to Z_l(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{(n+r)})^{m \times m} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.28}$$

Звідси на підставі граничної умови (3.II) маємо таку збіжність блочних числових квадратних матриць:

$$\begin{gathered}\big([B(\varepsilon)Z_0(\varepsilon, \cdot)] \cdots [B(\varepsilon)Z_{r-1}(\varepsilon, \cdot)]\big) \to \\ \to \big([B(0)Z_0(\varepsilon, 0)] \cdots [B(0)Z_{r-1}(\varepsilon, 0)]\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.\end{gathered} \tag{3.29}$$

Тут гранична матриця невироджена згідно з умовою (3.0) і з огляду на теореми 3.1 і 3.2. Тому існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що

$$\begin{gathered}\det\big([B(\varepsilon)Z_0(\varepsilon, \cdot)] \cdots [B(\varepsilon)Z_{r-1}(\varepsilon, \cdot)]\big) \neq 0 \\ \text{для довільного} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_1).\end{gathered} \tag{3.30}$$

Отже, за теоремою 3.2, оператор (3.27) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Лема 3.3 доведена.

Лема 3.4. *Припустимо, що крайова задача* (3.12), (3.13) *задовольняє умову* (3.0), *граничні умови* (3.I), (3.II), (3.20) *і*

$$q(\varepsilon) \to q(0) \quad \textit{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.31}$$

Тоді єдиний розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ *цієї задачі, де* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, *має граничну властивість*

$$z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) \quad \textit{в} \quad (C^{(n+r)})^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.32}$$

Доведення виконаємо у два кроки.

Крок 1. Доведемо тут граничну властивість (3.32) у випадку напіводнорідної крайової задачі (3.12), (3.13), коли $f(\cdot,\varepsilon) \equiv 0$ для довільного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Для кожного такого числа ε запишемо загальний розв'язок рівняння $L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0$ у вигляді (3.7), тобто

$$z(\cdot,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{r-1} Z_l(\cdot,\varepsilon)h_l(\varepsilon) \tag{3.33}$$

із довільними стовпцями $h_0(\varepsilon),\ldots,h_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Тут кожна матриця-функція $Z_l(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^{m\times m}$ є розв'язком задачі Коші (3.8), (3.9), де $Z_l(\cdot) = Z_l(\cdot,\varepsilon)$ і $K_{r-j}(\cdot) = K_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$.

На підставі леми 2.2 маємо рівності

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{r-1} B(\varepsilon)(Z_l(\cdot,\varepsilon)h_l(\varepsilon)) = \sum_{l=0}^{r-1}[B(\varepsilon)Z_l(\cdot,\varepsilon)]h_l(\varepsilon).$$

Отже, крайова умова $B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon)$ рівносильна умові

$$\sum_{l=0}^{r-1}[B(\varepsilon)Z_l(\cdot,\varepsilon)]h_l(\varepsilon) = q(\varepsilon).$$

Остання є системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\big([B(\varepsilon)Z_0(\varepsilon,\cdot)]\cdots[B(\varepsilon)Z_{r-1}(\varepsilon,\cdot)]\big)h(\varepsilon) = q(\varepsilon),$$

відносно координат стовпця $h(\varepsilon) := \mathrm{col}(h_0(\varepsilon),\ldots,h_{r-1}(\varepsilon))$. Звідси, на підставі властивостей (3.29) і (3.30) та умови (3.31), робимо висновок, що ця система має єдиний розв'язок $h(\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ і він задовольняє граничну умову $h(\varepsilon) \to h(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Тепер потрібна властивість (3.32) є прямим наслідком останньої умови та формул (3.28) і (3.33).

Крок 2. Доведемо тут граничну властивість (3.32) у загальній ситуації. Для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ покладемо $\widehat{z}(\cdot,\varepsilon) := z(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,\varepsilon)$, де $z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі (3.12), (3.13) (він існує за лемою 3.3), а $x(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші (3.18), (3.19), в якій усі $p_j(\varepsilon)=0$. Тоді $\widehat{z}(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(t,\varepsilon)\widehat{z}(t,\varepsilon)=0, \quad a\leq t\leq b, \tag{3.34}$$

$$B(\varepsilon)\widehat{z}(\cdot,\varepsilon)=\widehat{q}(\varepsilon), \tag{3.35}$$

де

$$\widehat{q}(\varepsilon):=q(\varepsilon)-B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^{rm}.$$

На підставі леми 3.2 розв'язок $x(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє граничну умову (3.22). Тому за умовами (3.II) і (3.31) маємо збіжність $\widehat{q}(\varepsilon)\to\widehat{q}(0)$ в просторі $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Отже, за доведеним на першому кроці для крайової задачі (3.34), (3.35) її розв'язок має граничну властивість

$$\widehat{z}(\cdot,\varepsilon)\to\widehat{z}(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n+r)})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{3.36}$$

Тепер на підставі властивостей (3.22) і (3.36) отримуємо потрібну гранична властивість (3.32)

$$x(\cdot,\varepsilon)+\widehat{z}(\cdot,\varepsilon)=z(\cdot,\varepsilon)\to z(\cdot,0)=x(\cdot,0)+\widehat{z}(\cdot,0)$$

у просторі $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon\to 0+$.

Лема 3.4 доведена.

Лема 3.5. *Припустимо, що крайова задача* (3.12), (3.13) *задовольняє базове означення. Тоді для неї виконуються граничні умови* (3.I) *і* (3.II).

Доведення. Проведемо міркування у три кроки.

Крок 1. Означимо матрицю $A(\cdot,\varepsilon)$ за формулою (3.24) та покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon):=\operatorname{col}\big(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\ldots,z^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\big)\in(C^{(n+1)})^{rm},$$

$$g(\cdot,\varepsilon):=\operatorname{col}\big(0,f(\cdot,\varepsilon)\big)\in(C^{(n)})^{rm},$$

Окрім того, з огляду на зображення (3.16) покладемо

$$N(\varepsilon)y := \sum_{k=1}^{r-1} \beta_k(\varepsilon) y_k(a) + \sum_{k=r}^{n+r} \beta_k(\varepsilon) y_r^{(k-r)}(a) + \\ + \int_a^b (d\Phi(t,\varepsilon)) y_r^{(n+1)}(t) \tag{3.37}$$

для довільної вектор-функції $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_r)$, де $y_1, \ldots, y_r \in (C^{(n+1)})^m$. Лінійне відображення $y \mapsto Ny$ діє неперервно з простору $(C^{(n+1)})^{rm}$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$.

Вектор-функція $z(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ є розв'язком крайової задачі (3.12), (3.13) тоді і тільки тоді, коли функція $y(\cdot, \varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{3.38}$$

$$N(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{3.39}$$

За умовою $(*)$ базового означення ця задача має єдиний розв'язок $y(t,\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Гранична умова (3.I) еквівалента тому, що

$$A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^{rm\times rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Доведемо цю збіжність.

Зауважимо попередньо таке: якщо $g(\cdot,\varepsilon)$ і $q(\varepsilon)$ не залежать від $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, то $z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0)$ в $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon \to 0+$ за умовою $(**)$ базового означення. Остання збіжність еквівалента тому, що

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n+1)})^{rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Для кожного числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) = O_{rm}, \quad a \le t \le b, \tag{3.40}$$

$$[N(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] = I_{rm}. \tag{3.41}$$

Тут шуканою є матриця-функція $Y(\cdot,\varepsilon) := (y_{j,k}(\cdot,\varepsilon))_{j,k=1}^{rm}$ з простору $(C^{(n+1)})^{rm\times rm}$ і, за означенням,

$$[N(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] := \left(N(\varepsilon)\begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot,\varepsilon) \\ \vdots \\ y_{rm,1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \ldots N(\varepsilon)\begin{pmatrix} y_{1,rm}(\cdot,\varepsilon) \\ \vdots \\ y_{rm,rm}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \right).$$

Задача (3.40), (3.41) є сукупністю rm крайових задач (3.38), (3.39), праві частини яких не залежать від ε. Тому вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+1)})^{rm\times rm}$, і він задовольняє умову

$$Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n+1)})^{rm\times rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.42}$$

Окрім того,

$$\det Y(t,\varepsilon) \neq 0 \quad \text{для кожного} \quad t \in [a,b]. \tag{3.43}$$

Справді, у противному разі функції, що є стовпцями матриці $Y(\cdot,\varepsilon)$ були б лінійно залежними, що суперечило б крайовій умові (3.41).

Тепер на підставі формул (3.42) і (3.43) отримаємо потрібну збіжність

$$A(\cdot,\varepsilon) = -Y'(\cdot,\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot,0)(Y(\cdot,0))^{-1} = A(\cdot,0),$$

у просторі $(C^{(n)})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Таким чином крайова задача (3.12), (3.13) задовольняє граничну умову (3.I). Звідси негайно випливає, що

$$\begin{gathered} \|K_{r-j}(\varepsilon)\|_{(n)} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \\ \text{для кожного номера} \quad j \in \{1,\ldots,r\}. \end{gathered} \tag{3.44}$$

Крок 2. На цьому кроці доведемо, що

$$\|B(\varepsilon)\| = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.45}$$

Тут $\|\cdot\|$ позначає норму обмеженого оператора, що діє з простору $(C^{(n+r)})^m$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$. Припустимо супротивне; тоді існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0,\varepsilon_1)$ така, що

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad 0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.46}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо функцію $w_k \in (C^{(n+r)})^m$ таку, що

$$\|w_k\|_{(n+r)} = 1 \quad \text{i} \quad \|B(\varepsilon^{(k)})w_k\|_{\mathbb{C}^{rm}} \geq \|B(\varepsilon^{(k)})\|/2. \tag{3.47}$$

Покладемо

$$z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}\, w_k \in (C^{(n+r)})^m,$$
$$f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in (C^{(n)})^m,$$
$$q(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

Враховуючи співвідношення (3.46), (3.47), маємо збіжність

$$z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0 \quad \text{в} \quad (C^{(n+r)})^m \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.48}$$

Звідси

$$f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0 \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{3.49}$$

оскільки крайова задача (3.12), (3.13) задовольняє граничну умову (3.I), як було показано на кроці 1. Окрім того, на підставі (3.47) маємо двобічну оцінку

$$1/2 \leq \|q(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq 1 \quad \text{для кожного} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому існує підпослідовність

$$(q(\varepsilon^{(k_p)}))_{p=1}^{\infty} \subset (q(\varepsilon^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$$

та ненульовий вектор $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ такі, що

$$q(\varepsilon^{(k_p)}) \to q(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{3.50}$$

Отже, для кожного номера p функція $z(\cdot, \varepsilon^{(k_p)}) \in (C^{(n+r)})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k_p)})\, z(t, \varepsilon^{(k_p)}) = f(t, \varepsilon^{(k_p)}), \quad a \leq t \leq b,$$
$$B(\varepsilon^{(k_p)})\, z(\cdot, \varepsilon^{(k_p)}) = q(\varepsilon^{(k_p)}).$$

Тому на підставі формул (3.49) і (3.50) та умови (∗∗) базового означення робимо висновок, що функція $z(\cdot,\varepsilon^{(k_p)})$ збігається до єдиного розв'язку $z(\cdot,0)$ граничної крайової задачі

$$\begin{gathered} L(0)z(t,0)=0, \quad a\leq t\leq b, \\ B(0)z(\cdot,0)=q(0). \end{gathered} \tag{3.51}$$

Ця збіжність виконується у просторі $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon\to 0+$. Отже, $z(\cdot,0)\equiv 0$ згідно з формулою (3.48). Ця рівність суперечить крайовій умові (3.51), де $q(0)\neq 0$. Таким чином, зроблене припущення є хибним, чим і доведено (3.45).

Крок 3. Використовуючи результати попередніх двох кроків, доведемо, що крайова задача (3.12), (3.13) задовольняє граничну умову (3.II). На підставі формул (3.44) і (3.45) існують числа $\varkappa'>0$ і $\varepsilon'\in(0,\varepsilon_1)$ такі, що

$$\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\|\leq\varkappa' \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon\in[0,\varepsilon'). \tag{3.52}$$

Тут $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\|$ позначає норму обмеженого оператора (3.27). Виберемо довільним чином вектор-функцію $z\in(C^{(n+r)})^m$ та покладемо $f(\cdot,\varepsilon):=L(\varepsilon)z$ і $q(\varepsilon):=B(\varepsilon)z$ для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon')$. Отже,

$$z=(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon)) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon\in[0,\varepsilon'). \tag{3.53}$$

Тут, звісно, $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}$ позначає оператор, обернений до (3.27). (Нагадаємо, що оператор (3.27) оборотний за умовою (∗) базового означення.)

Застосовуючи формули (3.52) і (3.53), отримаємо при $0<\varepsilon<\varepsilon'$ таке:

$$\begin{gathered} \big\|B(\varepsilon)z-B(0)z\big\|_{\mathbb{C}^{rm}}\leq \\ \leq\big\|(f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon))-(f(\cdot,0),q(0))\big\|_{(C^n)^m\times\mathbb{C}^{rm}}= \\ =\big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon))-(f(\cdot,0),q(0))\big)\big\|_{(C^{(n)})^m\times\mathbb{C}^{rm}}\leq \\ \leq\varkappa'\,\big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon))-(f(\cdot,0),q(0))\big)\big\|_{n+r}= \\ =\varkappa'\,\big\|(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),q(0))-(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,0),q(0))\big\|_{n+r}. \end{gathered}$$

Звідси на підставі умови (**) базового означення робимо висновок, що $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Оскільки вектор-функцію $y \in (C^{(n+r)})^m$ вибрано довільно, то крайова задача (3.12), (3.13) задовольняє граничну умову (3.II).

Лема 3.5 доведена.

3.5. Швидкість збіжності за параметром розв'язків задачі

Для крайової задачі (3.12), (3.13) розглянемо нев'язку її розв'язку

$$d_n(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_n + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}. \tag{3.54}$$

При цьому $z(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Основну теорему третього розділу доповнює такий результат.

Теорема 3.4. *Нехай крайова задача* (3.12), (3.13) *задовольняє умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I) *і* (3.II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *такі, що для довільного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1\, d_n(\varepsilon) \leq \|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r} \leq \varkappa_2\, d_n(\varepsilon). \tag{3.55}$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від вектор-функцій* $z(\cdot,0)$ *і* $z(\cdot,\varepsilon)$.

Згідно з нерівністю (3.55), похибка і нев'язка розв'язку $z(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (3.12), (3.13) мають однаковий порядок.

Доведення теореми 3.4 аналогічне доведенню теореми 2.5. Для повноти викладення наведемо відповідні міркування. Спочатку доведемо ліву частину оцінки (3.55). Граничні умови (3.I) і (3.II) тягнуть за собою сильну збіжність операторів

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тут, як і раніше, $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$, де $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, є обмеженим оператором, що діє з простору $(C^{(n+r)})^m$ у простір $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$. Тому існують числа $\varkappa' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що норма цього оператора задовольняє нерівність (3.52).

Справді, у противному разі існувала б послідовність додатних чисел $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\varepsilon^{(k)} \to 0 \quad \text{і} \quad \|(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)}))\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Це з огляду на теорему Банаха-Штейнгауза суперечило б вказаній вище сильній збіжності операторів.

Тепер на підставі нерівності (3.52) робимо висновок, що

$$d_n(\varepsilon) = \|L(\varepsilon)(z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon))\|_n + \|B(\varepsilon)(z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon))\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq \\ \leq \varkappa' \, \|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r}$$

для довільного $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$. Отримали ліву частину двобічної оцінки (3.55), де $\varkappa_1 := 1/\varkappa'$.

Доведемо тепер праву частину цієї оцінки. Згідно з теоремою 3.3, крайова задача (3.12), (3.13) задовольняє базове означення. Тому оператор (3.27) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$. Більше того, оператор $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}$, обернений до (3.27), збігається сильно до $(L(0),B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (C^n)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$ за умовою $(**)$ базового означення маємо збіжність

$$(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f,q) =: z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0) := (L(0),B(0))^{-1}(f,q)$$

у просторі $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Отже, за теоремою Банаха-Штейнгауза існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon'$ і $\varkappa_2$ такі, що норма оберненого оператора

$$\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\| \leq \varkappa_2 \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_2).$$

Тому для довільного числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_2)$ правильні такі співвідношення:

$$\|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r} = \\ = \|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(L(\varepsilon),B(\varepsilon))(z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon))\|_{n+r} \leq \\ \leq \varkappa_2 \, \|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))(z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon))\|_{(C^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}} = \varkappa_2 \, d_n(\varepsilon).$$

Отримали праву частину двобічної оцінки (3.55). Теорема 3.4 доведена.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації введено і досліджено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)}$, де $n \in \mathbb{N}_0$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{(n+r)}$. Отримано такі основні результати:

1. Доведено, що цим крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ (теорема 3.1).

2. Встановлено критерій однозначної розв'язності цих крайових задач у вказаних просторах (теорема 3.2).

3. Для крайових задач, тотальних щодо простору $C^{(n+r)}$ і залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі (теорема 3.3). Це — основний результат третього розділу.

4. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ (теорема 3.4).

Результати цього розділу опубліковано у статтях [29, 34].

РОЗДІЛ 4
БАГАТОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

У цьому розділі введемо і дослідимо нові класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь як першого порядку, так і вищих порядків. Їх дослідження спирається на результати другого і третього розділів.

4.1. Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку

У четвертому розділі $[a, b]$ — скінченний відрізок дійсної осі, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$ і $\varepsilon_0 > 0$. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ розглядається система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{4.1}$$

така сама як і в другому розділі. Тут, нагадаємо, вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є шуканою та довільним чином задано матрицю-функцію $A(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m \times m}$ і вектор-функцію $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$.

Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо з системою (4.1) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{4.2}$$

Тут усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m \times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a, b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Для крайової задачі (4.1), (4.2) не припускається, що коефіцієнти $A(t, \varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε.

Використання у крайовій умові (4.2) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$

у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядаємо таку крайову задачу

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad a \le t \le b, \tag{4.3}$$

$$B(0)y(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j,0) = q(0). \tag{4.4}$$

Тут усі матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $y \mapsto B(\varepsilon)y$, де $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$, є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{4.5}$$

Зроблені припущення щодо системи (4.1) та обмеженість оператора (4.5) означають, що крайова задача (4.1), (4.2) є тотальною щодо простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, як і задача (4.1), (4.4).

Зауважимо, що крайові умови (4.2), (4.4) охоплюють як класичні багатоточкові задачі, так і некласичні, що містять похідні шуканої функції.

Для багатоточкової крайової задачі (4.1), (4.2) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(b1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(b2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+1}$;

(b3) $\|\beta_{j,k}^{(n+1)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^\alpha \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(b4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ та $l \in \overline{0,n}$;

(b5) $\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ та $l \in \overline{0,n+1}$.

Окрім того, для крайової задачі (4.1), (4.2) розглядаємо граничні умови (2.I) і (2.II), а для граничної крайової задачі (4.3), (4.4) — і умову (2.0). Ці умови сформульовані у п. 2.4.

Теорема 4.1. *Нехай крайова задача* (4.1), (4.2) *задовольняє граничні умови* (b1) – (b5). *Тоді вона задовольняє і граничну умову* (2.II).

Доведення. Для довільної вектор-функції $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ і достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ маємо таке:

$$\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| =$$
$$= \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_0} \sum_{l=0}^{n+1} \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\|. \tag{4.6}$$

Тут на підставі умови (b5) виконується

$$\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \leq \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha} \to 0 \tag{4.7}$$

для усіх припустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Дослідимо другий доданок у правій частині формули (4.6). Для довільних $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+1}$ маємо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| =$$
$$= \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \Big) \right\| +$$
$$+ \left\| \left(\sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right) \cdot y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\| +$$
$$+ \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha}. \tag{4.8}$$

Тут на підставі умови (b2) маємо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha} \to 0. \tag{4.9}$$

Окрім того,

$$\sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\,\| \to 0. \tag{4.10}$$

Справді, якщо $l = n+1$, то це є прямим наслідком умови (b3) і того факту, що вектор-функція y належить до простору $(C^{n+1,\alpha})^m$:

$$\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\,\| =$$
$$= \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}\|'_{\alpha} \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{\alpha} \leq$$
$$\leq \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha} \cdot |\, t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{\alpha}.$$

Якщо $l \leq n$, то це випливає з теореми Лагранжа і умови (b4):

$$\sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\,\| \leq$$
$$\leq \|y\|_{n+1,\alpha} \sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0.$$

Із формул (4.8), (4.9), (4.10) негайно випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \to 0. \tag{4.11}$$

Тепер на підставі формул (4.6), (4.7) і (4.11) робимо висновок, що $\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \to 0$. Тут, нагадаємо, вектор-функція $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ довільна. Отже, гранична умова (2.II) задовольняється. Теорема 4.1 доведена.

Сформулюємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 4.2. *Нехай крайова задача* (4.1), (4.2) *задовольняє умову* (2.0) *і граничні умови* (2.I), (b1) – (b5). *Тоді її розв'язок неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у сенсі базового означення розд.* 2.

Цей результат є прямим наслідком теорем 2.3 і 4.1.

4.2. Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь довільних порядків

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ розглядається система лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon)z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \\ a \leq t \leq b, \tag{4.12}$$

така сама як і в третьому розділі. Тут, нагадаємо, вектор-функція $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ шукана, а усі матриці-функції $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{m\times m}$ і вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ вважаються відомими.

Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо з системою (4.12) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{\omega_j}\sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{4.13}$$

Тут усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими. Ця умова є аналогом багатоточкової крайової умови (4.2), введеної для системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Відмітимо, що як і у п. 4.1, не припускається, що коефіцієнти $K_{r-j}(t,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε.

У граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядаємо таку крайову задачу:

$$L(0)z(t,0) = f(\cdot,0), \quad a \leq t \leq b, \tag{4.14}$$

$$B(0)z(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j}^{(l)} z^{(l)}(t_j,0) = q(0). \tag{4.15}$$

Тут усі матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $z \mapsto B(\varepsilon)z$, де $z \in (C^{(n+r)})^m$, є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon) : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{4.16}$$

Зроблені припущення щодо системи (4.12) та обмеженість оператора (4.16) означають, що крайова задача (4.12), (4.13) є тотальною щодо простору $(C^{(n+r)})^m$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, як і задача (4.14), (4.15).

Для крайової задачі (4.12), (4.13) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(c1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(c2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+r}$;

(c3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| = O(1)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(c4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ та $l \in \overline{0,n+r-1}$;

(c5) $\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ та $l \in \overline{0,n+r}$.

Окрім того, для крайової задачі (4.12), (4.13) розглядаємо граничні умови (3.I) і (3.II), а для граничної крайової задачі (4.14), (4.15) — і умову (3.0). Ці умови сформульовані у п. 3.2.

Теорема 4.3. *Нехай задача* (4.12), (4.13) *задовольняє умови* (c1)–(c5). *Тоді вона задовольняє і граничну умову* (3.II).

Доведення. Для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$ і достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ маємо:

$$\|B(\varepsilon)z - B(0)z\| =$$
$$= \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_j^{(l)} z^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_0} \sum_{l=0}^{n+r} \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} z^{(l)}(t_j) \right\|. \tag{4.17}$$

Тут на підставі умови (c5) виконується збіжність

$$\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \leq \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z\|_{(n+r)} \to 0 \tag{4.18}$$

для усіх припустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Дослідимо останній доданок в (4.17). Для довільних $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0, n+1}$ запишемо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} z^{(l)}(t_j) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} z^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \Big(z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j) \Big) \right\| +$$

$$+ \left\| \left(\sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right) \cdot z^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j)\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \cdot \|z\|_{n+r}. \tag{4.19}$$

Тут на підставі умови (c2) маємо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \cdot \|z\|_{n+r} \to 0. \tag{4.20}$$

Окрім того,

$$\sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j)\,\| \to 0. \tag{4.21}$$

Справді, якщо $l = n + r$, то це є прямим наслідком умов (c1), (c3) і неперервності функції $z^{(l)}$. Якщо $l \leq n + r - 1$, то це випливає з теореми Лагранжа і умови (c4):

$$\sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j)\,\| \leq$$

$$\leq \|z\|_{(n+r)} \sum_{k=1}^{\omega_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0.$$

Із формул (4.19), (4.20) і (4.21) негайно випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} z^{(l)}(t_j) \right\| \to 0. \tag{4.22}$$

З формул (4.17), (4.18) і (4.22) негайно випливає, що $\|B(\varepsilon)z - B(0)z\| \to 0$, де, нагадаємо, вектор-функція $z \in (C^{(n+r)})^m$ довільна. Отже, гранична умова (3.II) задовольняється. Теорема 4.3 доведена.

Сформулюємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 4.4. *Нехай крайова задача* (4.12), (4.13) *задовольняє умову* (3.0) *і граничні умови* (3.I), (c1) – (c5). *Тоді її розв'язок неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у сенсі базового означення розд.* 3.

Цей результат є негайним наслідком теорем 3.3 і 4.3.

У випадку, коли $r = 1$ і $\omega_j = 1$ для кожного $j \in \overline{1,p}$, багатоточкова крайова задача (4.12), (4.13) була введена Г. О. Чехановою [45] (п. 2.4) та досліджена у просторі $C^{(n+1)}$. У цьому випадку Г. О. Чеханова встановила теорему 4.2. При цьому система умов (c.2) – (c.4) стає еквівалентною такій одній умові: $\beta_{j,1}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0, n+1}$.

У ситуації, коли $r \geq 1$, $n = -1$ і $\omega_j = 1$ для кожного $j \in \overline{1,p}$, багатоточкова крайова задача (4.12), (4.13) була введена Г. О. Чехановою [45] (п. 3.5).

Розв'язок цієї задачі розглядався ними у просторі функцій, які мають абсолютно неперервну похідну порядку $r-1$ на $[a, b]$. Для такої задачі Г. О. Чеханова отримала достатні умови неперервності за параметром розв'язку в просторі $C^{(r-1)}$.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертації дано застосування основних результатів її другого і третього розділів до одновимірних багатоточкових крайових задач, залежних від параметра. Введено і досліджено нові широкі класи багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $n \in \mathbb{N}_0$ і $0 < \alpha \leq 1$, і для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)}$, де $n \in \mathbb{N}_0$. Для цих задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованих просторах $C^{n+1,\alpha}$ (теорема 4.2) і $C^{(n+r)}$ (теорема 4.4).

Результати цього розділу опубліковано у статтях [35, 36].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $n \in \mathbb{N}_0$ і $0 \leq \alpha \leq 1$, — тотальні крайові задачі щодо простору $C^{n+1,\alpha}$.

2. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{n+1,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^m$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Для крайових задач, тотальних щодо простору $C^{n+1,\alpha}$ і залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі і показано, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

4. Введено максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору $C^{(n+r)}$, де $n \in \mathbb{N}_0$, — тотальні крайові задачі щодо $C^{(n+r)}$.

5. Показано, що введені задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі нормованих просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

6. Для крайових задач, тотальних щодо простору $C^{(n+r)}$ і залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі і доведено, що похибка і нев'язка розв'язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

7. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, де $n \in \mathbb{N}_0$ і $0 < \alpha \leq 1$. Для цих задач встановлено явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $C^{n+1,\alpha}$.

8. Введено новий широкий клас залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$ багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$, розв'язки яких належать до простору $C^{(n+r)}$, де $n \in \mathbb{N}_0$. Для цих задач встановлено явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $C^{(n+r)}$.

Результати дисертації, вказані у пп. 3 і 6, є завершеними і непокращуваними.

Підхід, запропонований у дисертації, носить загальний характер. Цей підхід оснований у більшій мірі на мультиплікативних властивостях функцій із простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, ніж на явній формі норми в цьому просторі. Так, постійно використовується той факт, що простір $C^{n+1,\alpha}$ утворює банахову алгебру, в якій, як відомо, відображення $x \mapsto x^{-1}$ є неперервним у топології, породженій нормою. Тому цей підхід застосовний і для інших функціональних просторів, які є банаховими алгебрами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Березанский Ю. М.* Функциональный анализ. Курс лекций: учеб. пособ. / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К.: Вища шк., 1990. – 600 с.

2. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Физматгиз, 1955. – 410 с.

3. *Васильева А. Б.* Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1989. – 156 с.

4. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова / И. И. Гихман // Український математичний журнал. – 1952. – № 4. – С. 215 – 219.

5. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 101 – 112.

6. *Гнып Е. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева / Е. В. Гнып, Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Український математичний журнал. – 2015. – Т. 67, № 5. – С. 584 – 591.

7. *Горюнов А. С.* Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Український математичний журнал. – 2011. – Т. 63, № 9. – С. 1190 – 1205.

8. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – Москва: Изд-во иностранной лит., 1962. – 895 с.

9. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – Москва: Мир, 1971. – 392 с.

10. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

11. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ – 1987. – Т. 30. – С. 3 – 103.

12. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями / И. Т. Кигурадзе // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 198 – 209

13. *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач / Т. И. Кодлюк // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – Т. 9, № 2. – С. 203 – 216.

14. *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 11. – С. 15 – 19.

15. *Кодлюк Т. И.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Український математичний журнал. – 2013. – Т. 65, № 1. – С. 70 – 81.

16. *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк // Диференціальні рівняння

і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 2. – С. 191 – 199.

17. *Красносельский М. А.* О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Успехи математических наук. – 1955. – Т. 3, № 10. – С. 147 – 153.

18. *Курцвейль Я.* О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра / Я. Курцвейль, З. Ворель // Чехословацкий математический журнал. – 1957. – Т. 7, № 4. – С. 568 – 583.

19. *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи / А. Ю. Левин // Доклады Академии наук СССР. – 1961. – Т. 136, № 5. – С. 1022 – 1025.

20. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // Доклады Академии наук СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 774 – 777.

21. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. – 1973. – № 5. – С. 105 – 132.

22. *Левин А. Ю.* О многоточечной краевой задаче / А. Ю. Левин // Научные доклады высшей школы. – 1985. – № 5. – С. 34 – 37.

23. *Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 227 – 239.

24. *Михайлец В. А.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. – 2008. – № 8. – С. 28 – 30.

25. *Михайлец В. А.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.

26. *Михайлець В. А.* Про тотальні крайові задачі, залежні від параметра / В. А. Михайлець, О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19 – 20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ: НТУУ "КПІ", 2016. – С. 202 – 204.

27. *Михайлец В. А* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке / В. А. Михайлець, Г. А. Чеханова // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 2. – С. 268 – 274.

28. *Михайлец В. А* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ / В. А. Михайлець, Г. А. Чеханова // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 7. – С. 24 – 28.

29. *Мурач О. О., Солдатов В. О.* Критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 256 – 273.

30. *Нгуен Тхе Хоан* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений / Тхе Хоан Нгуен // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 970 – 975.

31. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. – Москва: Мир, 1979. – 592 с.

32. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра / А. М. Самойленко // Український математичний журнал. – 1962. – Т. 14, № 3. – С. 289 – 298.

33. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра / А. М. Самойленко // Доповіді Академії наук УРСР. – 1962. – № 10. – С. 1290 – 1293.

34. *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Український математичний журнал. – 2015. – Т. 67, № 5. – С. 692 – 700. (Переклад англ. мовою: *Soldatov V. O.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukrainian Mathematical Journal – 2015. – Vol. 67, № 5. – P. 785 – 794.)

35. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 327 – 337.

36. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, № 2. – С. 267 – 280.

37. *Солдатов В. О.* Про граничний перехід у крайових задачах для систем диференціальних рівнянь порядку r у просторах $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції

студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015". – 1 – 3 квітня 2015, м. Київ, Україна. – С. 46 – 48.

38. *Солдатов В. О.* Теорема про граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 24 – 27 лютого 2016 р. (тези доповідей). – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", 2016. – С. 135 – 136.

39. *Солдатов В. О.* Про граничний перехід у крайових задачах для систем диференціальних рівнянь порядку r у просторах $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016". – 6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна. – С. 75 – 77.

40. *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Гельдера-Зігмунда / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19 – 21 травня, 2016 р. – Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла", 2016. – С. 120.

41. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

42. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. – Москва: Мир, 1987. – 696 с.

43. *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач / Г. Чеханова // Диференціальні рівняння і суміжні питання

аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 2. – С. 260 – 279.

44. *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач / Г. А. Чеханова // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 4–5. – С. 532–541.

45. *Чеханова Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Г. О. Чеханова. – Київ, 2014. – 122 с.

46. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations / M. Ashordia // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1996. – Vol. 46, № 3. – P. 385 – 404.

47. *Goriunov A. S.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87, № 1–2. – P. 287 – 292.

48. *Goriunov A. S.* Regularization of singular Sturm-Liouville equations / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Methods of Functional Analisys and Topology. – 2010. – Vol. 16, №. 2. – P. 120 – 130.

49. *Goriunov A. S.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, K. Pankrashkin // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 2013, № 101. – P. 1 — 16.

50. *Graves L. M.* Theory of function of real variables / L. M. Graves // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1948. — Vol. 54, № 5. — P. 487—489.

51. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces / T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 2013. – Vol. 190, № 4. – P. 589 – 599.

52. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1957. – Vol. 7, № 3. – P. 418 – 449.

53. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1959. – Vol. 9, № 4. – P. 564 – 573.

54. *Mikhailets V. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems / V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 2015. – Vol. 204, № 3. – P. 333 – 342.

55. *Mikhailets V. A.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. Soldatov // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations – 2016. – № 87. – P. 1 – 16.

56. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations / Z. Opial // Journal of Differential Equations. – 1967. – № 3. – P. 571 – 579.

57. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // Journal of Differential Equations. – 1967. – Vol. 3, № 3. – P. 423 – 439.

58. *Samoilenko A. M.* Certain questions in the investigation of differential equations with an irregular right side / A. M. Samoilenko // Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. – 1965. – Vol. 11, № 3 – 4. – P. 85 – 92.

59. *Soldatov V. O.* On the limit theorem for boundary-value problems for systems of differential equations of order $r \geqslant 1$ in the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Міжнародна конференція молодих математиків. 3 – 6 червня 2015 р., Київ, Україна. Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 130.

60. *Soldatov V. O.* About generic boundary-value problems depending on parameter / V. O. Soldatov // Міжнародна конференція з диференціальинх рівнянь, присвячена 110-й річниці Я. Б. Лопатинського, 20 – 24 вересня, 2016 р., Львів, Україна. Тези доповідей. – С. 112 – 113.

61. *Tamarkin Y. D.* A lemma of the theory of linear differential systems / Y. D. Tamarkin // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1930. – № 36. – P. 99 – 102.