НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ГНИП ЄВГЕНІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.927

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА-СЛОБОДЕЦЬКОГО

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
МИХАЙЛЕЦЬ Володимир Андрійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Самойленко Юлія Іванівна,
Київський національний
університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,
старший науковий співробітник
науково-дослідної частини
механіко-математичного факультету;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Самусенко Петро Федорович,
Національний педагогічний
університет імені М. П. Драгоманова, м. Київ,
доцент кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист дисертації відбудеться 28 березня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий “23” лютого 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Питання, які пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Так, Й. І. Гіхман (1952), а пізніше М. О. Красносельський та С. Г. Крейн (1955), Я. Курцвейль та З. Ворель (1957), А. М. Самойленко (1962), О. А. Бойчук (2004) та інші встановили фундаментальні результати про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметра. Частина їх пов'язана з обґрунтуванням відомого принципу усереднення М. М. Боголюбова в нелінійній механіці та характеризується спільною точкою зору на лінійний та нелінійний випадки. Для лінійних задач Коші ці результати посилювалися та уточнювалися в роботах У. Т. Рейда (W. T. Reid, 1967), З. Опеля (Z. Opial, 1967), А. Ю. Левіна (1967), Нгуен Тхе Хоана (1993) та інших. Більш складний випадок загальних крайових задач досліджений І. Т. Кігурадзе (1975 – 1987). Нещодавно В. А. Михайлецю і Н. В. Реві (2008) вдалося узагальнити і уточнити ці результати.

На теперешній час низка питань теорії лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку та скалярних рівнянь порядку $r \geqslant 2$ достатньо добре вивчені. Такі задачі знаходять широке застосування в різних областях і активно досліджуються математиками багатьох країн світу. Цього, проте, не можна сказати про більш загальні лінійні крайові задачі. Ці задачі мають ряд специфічних особливостей, які відсутні у задачах Коші чи двоточкових крайових задач. Тому систематичне вивчення їх властивостей представляє науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідної теми "Методи нелінійного аналізу та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь і задач математичної фізики" (номер державної реєстрації 0111U001011).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження необхідних і достатніх умов неперервної залежності від параметра розв'язків двох класів неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі.

Об'єктом дослідження є багатоточкові (некласичні) та тотальні щодо просторів Соболєва та Слободецького лінійні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь відповідно довільного та першого порядків.

Предметом дослідження є залежність розв'язків лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь та крайових умов задачі.

Завдання дослідження:

1. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$.

2. Для цих задач, залежних від параметра, дослідити умови неперервності за параметром розв'язків у вказаному просторі Соболєва і знайти порядок швидкості їх збіжності до розв'язку незбуреної задачі.

3. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$.

4. Для цих задач, залежних від параметра, дослідити умови неперервності за параметром розв'язків у вказаному просторі Слободецького і знайти порядок швидкості їх збіжності.

5. Ввести нові широкі класи параметризованих багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва або Слободецького. Застосувати отримані результати до дослідження умови неперервності за параметром розв'язків цих задач у вказаних просторах.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, функціонального та дійсного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Введено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку r, розв'язки яких належать до комплексного простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$. Ці задачі названо тотальними щодо W_p^{n+r}. Доведено, що вони є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів Соболєва та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

2. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Соболєва W_p^{n+r} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності цих розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

3. Введено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$. Ці задачі названо тотальними щодо W_p^{s+1}. Доведено їх фредгольмовість з індексом нуль на парі просторів Слободецького та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

4. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{s+1} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності цих розв'язків.

5. Введено нові широкі класи параметризованих багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва W_p^{n+r} у випадку рівнянь порядку $r \geq 1$, або до простору Слободецького W_p^{s+1} у випадку рівнянь першого порядку. Встановлено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у вказаних просторах.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути застосовані до дослідження крайових задач тотальних щодо інших функціональних просторів.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності і постановка задач належать науковому керівнику та співавтору праць — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Ключові результати отримано спільно з ним, інші – автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

– семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

– Міжнародна конференція молодих математиків, Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.;

– XIV Міжнародна найково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016 Україна, Київ, 6–8 квітня 2016 р.;

– Міжнародна конференція з диференціальних рівнянь, присвячена 110-річчю Я. Б. Лопатинського, Україна, Львів, 20–24 вересня 2016 р.;

– V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Україна, Київ, 9–11 листопада 2016 р.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в п'ятьох статтях у фахових виданнях [1, 2, 3, 4, 5] та тезах доповідей міжнародних наукових конференцій [6, 7, 8]. Дві статті [1, 2] опубліковано в журналах, які входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 85 найменувань. Повний обсяг роботи складає 116 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і сформульовано задачі дослідження, а також висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію роботи та публікації.

У *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню неперервної залежності від параметра ε розв'язків крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку за нормою комплексного простору Соболєва W_p^{n+r} на відрізку $[a,b]$ та застосуванню одержаних результатів до некласичних багатоточкових крайових задач. Тут ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$.

Розглядається залежна від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ крайова задача для систем $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \;\; a \leq t \leq b, \quad (1)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \quad (2)$$

Тут задано матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, і лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}.$$

Якщо $n \geq 1$, то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ належить простору $(C^r)^m := C^r([a,b],\mathbb{C}^m)$ за теоремою Соболєва про вкладення і рівняння (1) розглядається в усіх точках $t \in [a,b]$. (У цьому випадку, всі коефіцієнти $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$ і $f(\cdot,\varepsilon)$ неперервні на $[a,b]$.) Якщо $n = 0$, то $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m \subset (C^{r-1})^m$ за цією теоремою і функція $y^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$. У цьому випадку класична похідна $y^{(r)}(\cdot,\varepsilon)$ існує майже скрізь на $[a,b]$ і рівняння (1) розглядається майже скрізь на $[a,b]$.

Крайова умова (2) є найбільш загальною для системи (1), розв'язок якої пробігає увесь простір Соболєва $(W_p^{n+r})^m$. Тому крайову задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо цього простору. Їй відповідає обмежений фредгольмів оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

з індексом нуль.

Розглянемо декілька умов для крайової задачі (1), (2).

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \leq t \leq b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного $j \in \{1\ldots r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Означення 2.1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються такі дві умови:*

($*$) *Існує додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *таке, що для довільних* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, *функції* $f(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^n)^m$ *і вектора* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$.

($**$) *Збіжність правих частин* $f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ *в* $(W_p^n)^m$ *та* $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *тягне за собою збіжність розв'язку*

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Теорема 2.4. *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II).

Це — основний результат другого розділу. Його доповнює двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (1), (2).

Покладемо

$$d_{n,p}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_{n,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot, 0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}.$$

Величини $\|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{n+r,p}$ і $d_{n,p}(\varepsilon)$ є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot, \varepsilon)$ цієї крайової задачі, якщо вважати $y(\cdot, 0)$ за наближений її розв'язок.

Теорема 2.5. *Нехай крайова задача* (1), (2) *задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2 *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\gamma_1 d_{n,p}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{n+r,p} \leq \gamma_2 d_{n,p}(\varepsilon). \tag{3}$$

Тут числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot, 0)$, $y(\cdot, \varepsilon)$, $f(\cdot, \varepsilon)$ *і* $c(\varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

Основний результат другого розділу застосовано до дослідження умов неперервності за параметром багатоточкової крайової задачі, яка для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ складається з системи (1) і крайової умови

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon), \varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{4}$$

Тут задано N натуральних чисел k_i, матриці $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і точки $t_{i,j}(\varepsilon) \in [a,b]$. Умова (4) є некласичною для системи диференціальних рівнянь порядку r, бо містить похідні шуканої функції до порядку $n + r - 1 \geq r$ включно.

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами i та j зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{i,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра i. У граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядаємо крайову умову

$$B(0)y \equiv \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) = c(0).$$

Тут задано точки $t_1, \ldots, t_N \in [a,b]$ і матриці $\alpha_i^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$.

Теорема 2.6. *Припустимо, що крайова задача* (1), (4) *задовольняє такі умови при* $\varepsilon \to 0+$*:*

(d1) $t_{i,j}(\varepsilon) \to t_i$ *для всіх* $i \in \{1,\ldots,N\}$ *та* $j \in \{1,\ldots,k_i\}$*;*

(d2) $\sum\limits_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_i^{(l)}$ *для всіх* $i \in \{1,\ldots,N\}$ *та* $l \in \{0,\ldots,n+r-1\}$*;*

(d3) $\|\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} = O(1)$ *для всіх* $i \in \{1,\ldots,N\}$ *та* $j \in \{1,\ldots,k_i\}$, *де* $1/p + 1/q = 1$*;*

(d4) $\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \to 0$ *для всіх* $i \in \{1,\ldots,N\}$, $j \in \{1,\ldots,k_i\}$ *та* $l \in \mathbb{Z}$ *таких, що* $0 \leq l \leq n+r-2$*;*

(d5) $\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для всіх* $j \in \{1,\ldots,k_0\}$ *та* $l \in \{0,\ldots,n+r-1\}$.

Тоді ця задача задовольняє граничну умову (II).

Оскільки багатоточкова крайова задача (1), (4) є тотальною щодо простору Соболєва W_p^{n+r}, то з теорем 2.4 і 2.6 випливає

Теорема 2.7. *Припустимо, що багатоточкова крайова задача* (1), (4) *задовольняє умову* (0), *граничну умову* (I) *та умови* (d1) – (d5). *Тоді розв'язок цієї задачі неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у сенсі означення* 2.1.

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню неперервної залежності від параметра ε розв'язків крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку за нормою комплексного простору Слободецького W_p^{s+1} на відрізку $[a,b]$ та застосуванню одержаних результатів до широкого класу багатоточкових крайових задач. Тут неціле $s>0$ і дійсне $p>1$.

Розглядається така крайова задача для систем $m\geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t)\equiv y'(t)+A(t)y(t)=f(t),\quad a\leq t\leq b, \tag{5}$$

$$By(\cdot)=c. \tag{6}$$

Тут задано матрицю-функцію $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot)\in(W_p^s)^m$, вектор $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$, і лінійний неперервний оператор

$$B:(W_p^{s+1})^m\to\mathbb{C}^m.$$

Розв'язком цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot)\in(W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (5) на відрізку $[a,b]$ (при $[s]=0$ — майже скрізь на $[a,b]$).

Крайова умова (6) є найбільш загальною для рівняння (5), бо коли його права частина f пробігає весь простір $(W_p^s)^m$, то шукана функція пробігає весь простір $(W_p^{s+1})^m$. Ця умова охоплює всі класичні види крайових умов, а також низку некласичних умов, бо може містити похідні шуканої функції аж до порядку $[s]$. Тому крайову задачу (5), (6) природно називати тотальною щодо простору Слободецького W_p^{s+1}.

Теорема 3.2. *Лінійне відображення $y\mapsto(L,B)y$ є обмеженим фредгольмовим оператором*

$$(L,B):\left(W_p^{s+1}\right)^m\to\left(W_p^s\right)^m\times\mathbb{C}^m.$$

з індексом нуль.

Сформульовано критерій оборотності цього оператора. Позначимо через $Y(\cdot)\in(W_p^{s+1})^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t)+A(t)Y(t)=0,\quad a\leq t\leq b,$$
$$Y(a)=I_m,$$

де I_m — одинична матриця порядку m. Позначимо через $[BY]$ числову квадратну матрицю порядку m, стовпці якої є результатом дії оператора B на відповідні стовпці матриці-функції $Y(\cdot)$.

Теорема 3.3. *Оператор (L,B) оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця $[BY]$ невироджена.*

Далі у третьому розділі розглядається залежна від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача для систем $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{7}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{8}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ ця задача є тотальною щодо простору Слободецького W_p^{s+1}.

Для цієї задачі розглядаємо умову (0) з другого розділу і такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (W_p^{s+1})^m$.

Означення 3.1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (7), (8) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:*

(∗) *Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^m$.*

(∗∗) *Збіжність правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^m$ та $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ тягне за собою збіжність*

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (W_p^{s+1})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Теорема 3.5. *Розв'язок крайової задачі* (7), (8) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II).

Цей основний результат третього розділу доповнює двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (7), (8). Покладемо

$$\widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Теорема 3.6. *Нехай крайова задача* (7), (8) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2 такі, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка*

$$\gamma_1 \widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p} \leq \gamma_2 \widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$.

Згідно з теоремою 3.6 похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (7), (8) мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$. При цьому $y(\cdot,0)$ розглядається як наближений розв'язок цієї задачі.

Наприкінці третього розділу отримані у ньому результати застосовано до дослідження умов неперервності за параметром ε багатоточкових крайових задач, тотальних щодо простору Слободецького W_p^{s+1}. Крайовий оператор у цих задачах має вигляд (4), де $n+r-1=[s]$. Для таких багатоточкових задач встановлено версії теорем 2.6 і 2.7.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку r введено клас тотальних крайових задач щодо простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$.

2. Доведено, що ці крайові задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів Соболєва та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

3. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Соболєва W_p^{n+r} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі.

4. Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку введено клас тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$.

5. Доведено, що ці крайові задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів Слободецького та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

6. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{s+1} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі.

7. Введено широкі класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва W_p^{n+r} у випадку рівнянь порядку $r \geq 1$, або до простору Слободецького W_p^{s+1} у випадку рівнянь першого порядку. Встановлено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у вказаних просторах.

Результати, наведені у пп. 3 і 6, є завершеними і непокращуваними для вказаних там крайових задач.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. *Гнып Е. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева. / Е. В. Гнып, Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 5. – С. 584–591; англ. переклад в Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol. 67, № 5. – P. 658–667.

2. *Гнип Є. В.* Неперервність за пераметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Слободецького. / Є. В. Гнип // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68, № 6. – С. 746–756; англ. переклад в Ukrainian Math. J. – 2016. – Vol. 68, № 6. – P. 849–861.

3. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових на просторах Соболєва. / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12. – № 2. – С. 101–112.

4. *Гнип Є. В.* Критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва. / Є. В. Гнип, В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. – Т. 13, № 2. – С. 111–124.

5. *Гнип Є. В.* Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького. / Є. В. Гнип, В. А. Михайлець // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 76–87.

6. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Слободецького. / Є. В. Гнип // Матеріали XIV Міжнародної найково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016 6–8 квітня 2016, Київ, Україна. – Київ: "Київський університет 2016. – С. 16–18.

7. *Гнип Є. В.* Про фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Соболєва. / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Міжнародна конференція молодих математиків, 3–6 червня 2015, Київ: тези доповідей – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 141.

8. *Hnyp Ye. V.* On the Fredholm boundary-value problems with a parameter on Slobodetsky space / Ye. V. Hnyp // Міжнародна коференція з диференціальних рівнянь, присвячена 110-й річниці Я. Б. Лопатинського, 20–24 вересня, 2016р., Львів, Україна. Тези доповідей. – С. 67

АНОТАЦІЇ

Гнип Є. В. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач на просторах Соболєва-Слободецького — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню умов неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до вибраного простору Соболєва або до простору Слободецького. Ці задачі названо тотальними щодо відповідного функціонального простору.

Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку r введено тотальні крайові задачі щодо комплексного простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$. Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку введено тотальні крайові задачі щодо комплексного простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$. Доведено, що ці задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі відповідних просторів і отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності. Для введених тотальних крайових задач, залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, встановлено конструктивний критерій неперервної

залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у нормованих просторах W_p^{n+r} і W_p^{s+1} відповідно. Окрім того, отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі у цих просторах.

Отримані результати застосовано до дослідження багатоточкових крайових задач. Введено нові широкі класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва W_p^{n+r} у випадку рівнянь порядку $r \geq 1$, або до простору Слободецького W_p^{s+1} у випадку рівнянь першого порядку. Встановлено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у вказаних просторах.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, неперервність розв'язків за параметром, простір Соболєва, простір Слободецького, багатоточкова крайова задача.

Гнып Е. В. Непрерывность по параметру решений одномерных краевых задач на пространствах Соболева-Слободецкого. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена исследованию условий непрерывности по параметру решений наиболее общих линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых принадлежат выбранному пространству Соболева или пространству Слободецкого. Такие задачи естественно называть тотальными относительного соответствующего функционального пространства.

Диссертация состоит из введения, трёх разделов, общих выводов и списка цитированной литературы.

Во введении дана общая характеристика диссертации, обоснована ее актуальность и указана новизна полученных результатов. Сформулированы основные результаты работы и приведены данные о их апробации.

Первый раздел содержит обзор литературы по теме диссертации.

Во втором разделе для систем линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка r введен и исследован новый класс тотальных краевых задач относительно комплексного пространства Соболева W_p^{n+r}, где целое $n \geq 0$ и вещественное $p \geq 1$. Показано, что эти задачи являются фредгольмовыми с нулевым индексом на паре соболевских пространств, и получено необходимое и достаточное условие их однозначной разрешимости. Для введенных тотальных краевых задач, параметризованных числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, установлен конструктивный кри-

терий непрерывности их решений по параметру при $\varepsilon = 0$ в пространстве Соболева W_p^{n+r}. В соболевских пространствах получена двусторонняя оценка сходимости решений этих задач к решению невозмущенной задачи. Указанные результаты применены к новому широкому классу многоточечных краевых задач, для которых установлены явные достаточные условия непрерывности решений по параметру в пространстве W_p^{n+r}.

В третьем разделе для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка введен и исследован новый класс тотальных краевых задач относительно комплексного пространства Слободецкого W_p^{s+1}, где нецелое $s > 0$ и вещественное $p > 1$. Доказана фредгольмовость с нулевым индексом этих задач на паре пространств Слободецкого, и получено необходимое и достаточное условие их однозначной разрешимости. Для введенных тотальных краевых задач, зависящих от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, установлен конструктивный критерий непрерывности их решений по параметру при $\varepsilon = 0$ в пространстве Слободецкого. Получена также двусторонняя оценка сходимости решений этих задач в этом пространстве. Указанные результаты применены к многоточечным краевым задачам, решения которых принадлежат пространству W_p^{s+1}. Для этих задач найдены явные достаточные условия непрерывности решений по параметру в указанном пространстве.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, краевая задача, непрерывность решений по параметру, пространство Соболева, пространство Слободецкого, многоточечная краевая задача.

Hnyp Ye. V. Continuity in a parameter of solutions to one-dimensional boundary-value problems on Sobolev-Slobodetskii spaces. — Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the investigation of conditions for continuity in a parameter of solutions to the most general linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations whose solutions belong to the chosen Sobolev space or Slobodetskii space.

For systems of linear differential equations of an arbitrary order r, we introduce generic boundary-value problems with respect to the complex Sobolev space W_p^{n+r} with integer-valued $n \geq 0$ and real $p \geq 1$. For systems of first-order linear differential equations, we introduce generic boundary-value problems with respect to the complex Slobodetskii space W_p^{s+1} with nonintegral $s > 0$ and real $p > 1$. We prove that these problems are Fredholm with zero index on a pair of the corresponding spaces and obtain a necessary and sufficient condition for their unique solvability. For the introduced generic boundary-value problems depending on a parameter $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, we establish a constructive criterion under which their solutions depend continuously on the parameter ε at $\varepsilon = 0$ in the normed spaces W_p^{n+r} and W_p^{s+1} respectively. Besides, we get a two-sided estimate for the degree of convergence of the solutions to the solution of the unperturbed problem in these spaces.

The results obtained are applied to the investigation of multipoint boundary-value problems. We introduce new broad classes of parameter-dependent multipoint boundary-value problems for systems of differential equations whose solutions belong to the Sobolev space W_p^{n+r} in the case of equations of order $r \geq 1$ or to the Slobodetskii space W_p^{s+1} in the case of first-order equations. We establish explicit sufficient conditions under which the solutions to these problems are continuous in the parameter ε at $\varepsilon = 0$ in the spaces indicated.

Key words: differential systems, boundary-value problem, continuity of solutions in parameter, Sobolev space, Slobodetskii space, multipoint boundary-value problem.