НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГНИП ЄВГЕНІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.927

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА-СЛОБОДЕЦЬКОГО

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Михайлець Володимир Андрійович

Київ — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

1. $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел.

2. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний комплексний простір векторів $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ з нормою
$$\|y\| := |y| = \max_i |y_i|.$$

3. $\mathbb{C}^{m\times m}$ — простір комплексних $m \times m$-матриць $A = (a_{ik})_{i,k=1}^m$ з нормою
$$\|A\| := |A| = \max_{i,k} |a_{ik}|.$$

4. $\det A$ — визначник матриці A.

5. A^{-1} — матриця, обернена до A.

6. I_m та 0_m — відповідно одинична та нульова $m \times m$-матриці.

7. $C := C([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх комплекснозначних функцій $y(t)$, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$, з нормою
$$\|y\|_\infty := \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|.$$

8. $C^m := C^m([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх комплекснозначних m раз неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій з нормою
$$\|y\|_{C^m} := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y^{(k)}(t)|.$$

9. $(C)^m := C([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(C)^{m\times m} := C([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з неперервними на відрізку $[a,b]$ елементами.

10. $L_\infty := L_\infty([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, визначених і суттєво обмежених на відрізку $[a,b]$, з нормою
$$\|y\|_{+\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|.$$

11. $(L_\infty)^m := L_\infty([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(L_\infty)^{m\times m} := L_\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з суттєво обмеженими на відрізку $[a,b]$ елементами.

12. $L_p := L_p([a,b];\mathbb{C})$, де $1 \le p < \infty$, — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, які при піднесенні до степеня p інтегровними за Лебегом, з нормою
$$\|y\|_p := \left(\int\limits_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

13. $(L_p)^m := L_p([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(L_p)^{m\times m} := L_p([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору L_p.

14. $W_p^n := W_p^n([a,b];\mathbb{C})$, де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p < \infty$, — простір С. Л. Соболєва всіх комплекснозначних функцій, тобто
$$W_p^n([a,b];\mathbb{C}) := \{y \in C^{n-1} : y^{(n-1)} \in AC[a,b], y^{(n)} \in L_p[a,b]\},$$
де $AC[a,b]$ — множина усіх абсолютно неперервних комплекснозначних функцій на відрізку $[a,b]$. Норма у просторі W_p^n означена за формулою
$$\|y\|_{n,p} := \left(\sum_{\alpha\leqslant n} \int\limits_a^b |D^\alpha y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$
і еквівалентна нормі
$$\|y\|_{n,p} \asymp \sum_{k=0}^{n-1} \|y^{(k)}\|_\infty + \|y^{(n)}\|_p.$$
Покладемо також $W_p^0 := L_p$.

15. $(W_p^n)^m := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать соболєвському простору W_p^n.

16. $W_p^s := W_p^s([a,b];\mathbb{C})$, де $1 < p < \infty$ і неціле $s > 0$, — простір Л. Н. Слободецького всіх комплекснозначних функцій, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int_a^b \int_a^b \frac{|f^{[s]}(x) - f^{[s]}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy \right)^{1/p} < +\infty,$$

де $[s]$ є ціла, а $\{s\}$ є дробова частини числа s. Тут, нагадаємо, $\|\cdot\|_{[s],p}$ — норма у просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Ліва частина цієї нерівності задає норму $\|f\|_{s,p}$ у просторі W_p^s.

17. $(W_p^s)^m := W_p^s([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(W_p^s)^{m\times m} := W_p^s([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $f : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору Слободецького W_p^s.

18. $\mathcal{L}[E_1, E_2]$ — простір усіх лінійних неперервних операторів, які діють із лінійного нормованого простору E_1 в лінійний нормований простір E_2.

19. $\mathcal{L}[E]$ — алгебра усіх лінійних неперервних операторів на лінійному нормованому просторі E.

20. $B_n \xrightarrow{s} B$ — сильна збіжність операторів.

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню умов неперервності за параметром розв'язків тотальних (найбільш загальних) щодо просторів Соболєва лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку і тотальних щодо просторів Слободецького лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Актуальність теми. Питання, які пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Так, Й. І. Гіхман [23], а пізніше М. О. Красносельський та С. Г. Крейн [42], Я. Курцвейль та З. Ворель [43], А. М. Самойленко [67; 68], О. А. Бойчук [3] та інші встановили фундаментальні результати про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметра. Частина їх пов'язана з обгрунтуванням відомого принципу усереднення М. М. Боголюбова (див., наприклад, [20]) в нелінійній механіці (див., наприклад, [70]) та характеризується спільною точкою зору на лінійний та нелінійний випадки (див., наприклад [37]). Для лінійних задач Коші ці результати посилювалися та уточнювалися в роботах У. Т. Рейда (W. T. Reid) [17], З. Опеля (Z. Opial) [16], А. Ю. Левіна [45, 44], Нгуен Тхе Хоана [57] та інших. Більш складний випадок загальних крайових задач досліджений І. Т. Кігурадзе [34, 35]. Нещодавно В. А. Михайлецю і Н. В. Реві [49], [50] вдалося узагальнити і уточнити ці результати.

На теперешній час низка питань теорії лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку та скалярних рівнянь порядку $r \geqslant 2$ достатньо добре вивчені. Такі задачі знаходять широке застосування в різних областях і активно досліджуються математиками багатьох країн світу. Цього, проте, не можна сказати про більш загальні лінійні крайові задачі. Ці задачі мають ряд специфічних особливостей, які відсутні у задачах Коші чи двоточкових крайових задач. Тому систематичне вивчення їх властивостей представляє науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідної теми "Методи нелінійного аналізу та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь і задач математичної фізики" (номер державної реєстрації 0111U001011).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження достатніх умов неперервної залежності від параметра розв'язків двох класів неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі.

Об'єктом дослідження є багатоточкові (некласичні) та тотальні щодо просторів Соболєва та Слободецького лінійні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь відповідно довільного та першого порядків.

Предметом дослідження є залежність розв'язків лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь та крайових умов задачі.

Завдання дослідження:

1. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, розв'язки яких належать до комплексного простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$.

2. Для цих задач, залежних від параметра, дослідити умови неперервності за параметром розв'язків у вказаному просторі Соболєва і знайти порядок швидкості їх збіжності до розв'язку незбуреної задачі.

3. Ввести і дослідити найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$.

4. Для цих задач, залежних від параметра, дослідити умови неперервності за параметром розв'язків у вказаному просторі Слободецького і знайти порядок швидкості їх збіжності.

5. Ввести нові широкі класи параметризованих багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва або Слободецького. Застосувати отримані результати до дослідження умови неперервності за параметром розв'язків цих задач у вказаних просторах.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, функціонального та дійсного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Введено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку r, розв'язки яких належать до комплексного простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$. Ці задачі названо тотальними щодо W_p^{n+r}. Доведено, що вони є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів Соболєва та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

2. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Соболєва W_p^{n+r} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності цих розв'язків до розв'язку незбуреної задачі.

3. Введено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$. Ці задачі названо тотальними щодо W_p^{s+1}. Доведено їх фредгольмовість з індексом нуль на парі просторів Слободецького та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

4. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{s+1} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності цих розв'язків.

5. Введено нові широкі класи параметризованих багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва W_p^{n+r} у випадку рівнянь порядку $r \geq 1$, або до простору Слободецького W_p^{s+1} у випадку рівнянь першого порядку. Встановлено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у вказаних просторах.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути застосовані до дослідження крайових задач тотальних щодо інших функціональних просторів.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності і постановка задач належать науковому керівнику та співавтору праць — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Ключові результати отримано спільно з ним, інші – автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару – академік НАН України А. М. Самойленко);

– семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук А. Н. Кочубей);

– Міжнародна конференція молодих математиків, Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.;

– XIV Міжнародна найково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016 Україна, Київ, 6–8 квітня 2016 р.;

– Міжнародна конференція з диференціальних рівнянь, присвячена 110-річчю Я. Б. Лопатинського, Україна, Львів, 20–24 вересня 2016 р.;

– V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Україна, Київ, 9–11 листопада 2016 р.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в п'ятьох статтях у фахових виданнях [24, 25, 26, 29, 30] та тезах доповідей міжнародних наукових конференцій [10, 27, 28].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 85 найменувань. Повний обсяг роботи складає 116 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і сформульовано задачі дослідження, а також висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію роботи та публікації.

У *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню неперервної залежності від параметра ε розв'язків крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку за нормою комплексного простору Соболєва W_p^{n+r} на відрізку $[a,b]$ та застосуванню одержаних результатів до некласичних багатоточкових крайових задач. Тут ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$.

Розглядається залежна від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача для систем $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2}$$

Тут задано матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, і лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}.$$

Якщо $n \geq 1$, то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ належить простору $(C^r)^m := C^r([a,b],\mathbb{C}^m)$ за теоремою Соболєва про вкладення і рівняння (1) розглядається в усіх точках $t \in [a,b]$. (У цьому випадку, всі коефіцієнти $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$ і $f(\cdot,\varepsilon)$ неперервні на $[a,b]$.) Якщо $n = 0$, то $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m \subset (C^{r-1})^m$ за цією теоремою і функція $y^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$. У цьому випадку класична похідна $y^{(r)}(\cdot,\varepsilon)$ існує майже скрізь на $[a,b]$ і рівняння (1) розглядається майже скрізь на $[a,b]$.

Крайова умова (2) є найбільш загальною для системи (1), розв'язок якої пробігає увесь простір Соболєва $(W_p^{n+r})^m$. Тому крайову задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо цього простору. Їй відповідає обмежений фредгольмів оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

з індексом нуль.

Розглянемо декілька умов для крайової задачі (1), (2).

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0)=0, \quad a\leq t\leq b, \qquad B(0)y(\cdot,0)=0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Граничні умови при $\varepsilon\to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)\to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного $j\in\{1\ldots r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного $y\in (W_p^{n+r})^m$.

Означення 2.1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$, *якщо виконуються такі дві умови:*

($*$) *Існує додатне число* $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ *таке, що для довільних* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$, *функції* $f(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^n)^m$ *і вектора* $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{rm}$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^{n+r})^m$.

($**$) *Збіжність правих частин* $f(\cdot,\varepsilon)\to f(\cdot,0)$ *в* $(W_p^n)^m$ *та* $c(\varepsilon)\to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $\varepsilon\to 0+$ *тягне за собою збіжність розв'язку*

$$y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Теорема 2.4. *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II).

Це — основний результат другого розділу. Його доповнює двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (1), (2).

Покладемо

$$d_{n,p}(\varepsilon):=\|L(\varepsilon)y(\cdot,0)-f(\cdot,\varepsilon)\|_{n,p}+\|B(\varepsilon)y(\cdot,0)-c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}.$$

Величини $\|y(\cdot,0)-y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,p}$ і $d_{n,p}(\varepsilon)$ є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ цієї крайової задачі, якщо вважати $y(\cdot,0)$ за наближений її розв'язок.

Теорема 2.5. *Нехай крайова задача* (1), (2) *задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2 *такі, що для кожного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\gamma_1 d_{n,p}(\varepsilon)\leq\|y(\cdot,0)-y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,p}\leq\gamma_2 d_{n,p}(\varepsilon). \tag{3}$$

Тут числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ *і* $c(\varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок малості при $\varepsilon\to0+$.

Основний результат другого розділу застосовано до дослідження умов неперервності за параметром багатоточкової крайової задачі, яка для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ складається з системи (1) і крайової умови

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)\equiv\sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon),\varepsilon)=c(\varepsilon). \tag{4}$$

Тут задано N натуральних чисел k_i, матриці $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{m\times m}$ і точки $t_{i,j}(\varepsilon)\in[a,b]$. Умова (4) є некласичною для системи диференціальних рівнянь порядку r, бо містить похідні шуканої функції до порядку $n+r-1\geq r$ включно.

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами i та j зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{i,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to0+$ у залежності від значень параметра i. У граничному випадку $\varepsilon=0$ розглядаємо крайову умову

$$B(0)y\equiv\sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^{(l)}y^{(l)}(t_i)=c(0).$$

Тут задано точки $t_1,\ldots,t_N\in[a,b]$ і матриці $\alpha_i^{(l)}\in\mathbb{C}^{rm\times m}$.

Теорема 2.6. *Припустимо, що крайова задача* (1), (4) *задовольняє такі умови при* $\varepsilon\to0+$*:*

(d1) $t_{i,j}(\varepsilon) \to t_i$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$ *та* $j \in \{1, \dots, k_i\}$*;*

(d2) $\sum\limits_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_i^{(l)}$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$ *та* $l \in \{0, \dots, n+r-1\}$*;*

(d3) $\|\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} = O(1)$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$ *та* $j \in \{1, \dots, k_i\}$*, де* $1/p + 1/q = 1$*;*

(d4) $\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \to 0$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$*,* $j \in \{1, \dots, k_i\}$ *та* $l \in \mathbb{Z}$ *таких, що* $0 \le l \le n + r - 2$*;*

(d5) $\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для всіх* $j \in \{1, \dots, k_0\}$ *та* $l \in \{0, \dots, n+r-1\}$.

Тоді ця задача задовольняє граничну умову (II).

Оскільки багатоточкова крайова задача (1), (4) є тотальною щодо простору Соболєва W_p^{n+r}, то з теорем 2.4 і 2.6 випливає

Теорема 2.7. *Припустимо, що багатоточкова крайова задача* (1), (4) *задовольняє умову* (0), *граничну умову* (I) *та умови* (d1) – (d5). *Тоді розв'язок цієї задачі неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *у сенсі означення* 2.1.

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню неперервної залежності від параметра ε розв'язків крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку за нормою комплексного простору Слободецького W_p^{s+1} на відрізку $[a, b]$ та застосуванню одержаних результатів до широкого класу багатоточкових крайових задач. Тут неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$.

Розглядається така крайова задача для систем $m \ge 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t) \equiv y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad a \le t \le b, \tag{5}$$

$$By(\cdot) = c. \tag{6}$$

Тут задано матрицю-функцію $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot) \in (W_p^s)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, і лінійний неперервний оператор

$$B : (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m.$$

Розв'язком цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (5) на відрізку $[a, b]$ (при $[s] = 0$ — майже скрізь на $[a, b]$).

Крайова умова (6) є найбільш загальною для рівняння (5), бо коли його права частина f пробігає весь простір $(W_p^s)^m$, то шукана функція пробігає весь простір $(W_p^{s+1})^m$. Ця умова охоплює всі класичні види крайових умов, а також низку некласичних умов, бо може містити похідні шуканої функції аж до порядку $[s]$. Тому крайову задачу (5), (6) природно називати тотальною щодо простору Слободецького W_p^{s+1}.

Теорема 3.2. *Лінійне відображення $y \mapsto (L, B)y$ є обмеженим фредгольмовим оператором*

$$(L, B) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m.$$

з індексом нуль.

Сформульовано критерій оборотності цього оператора. Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$\begin{aligned} &Y'(t) + A(t)Y(t) = 0, \quad a \le t \le b,\\ &Y(a) = I_m, \end{aligned}$$

де I_m — одинична матриця порядку m. Позначимо через $[BY]$ числову квадратну матрицю порядку m, стовпці якої є результатом дії оператора B на відповідні стовпці матриці-функції $Y(\cdot)$.

Теорема 3.3. *Оператор (L, B) оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця $[BY]$ невироджена.*

Далі у третьому розділі розглядається залежна від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача для систем $m \ge 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad a\leq t\leq b, \tag{7}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=c(\varepsilon). \tag{8}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ ця задача є тотальною щодо простору Слободецького W_p^{s+1}.

Для цієї задачі розглядаємо умову (0) з другого розділу і такі

Граничні умови при $\varepsilon\to 0+$:

(I) $A(\cdot,\varepsilon)\to A(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y\in(W_p^{s+1})^m$.

Означення 3.1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (7), (8) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$, *якщо виконуються такі дві умови:*

($*$) *Існує додатне число* $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ *таке, що для кожного* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$ *і будь-яких правих частин* $f(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^s)^m$ *і* $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^{s+1})^m$.

($**$) *Збіжність правих частин* $f(\cdot,\varepsilon)\to f(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^m$ *та* $c(\varepsilon)\to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $\varepsilon\to 0+$ *тягне за собою збіжність*

$$y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0)\quad\text{в}\quad(W_p^{s+1})^m\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0+\,.$$

Теорема 3.5. *Розв'язок крайової задачі* (7), (8) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II).

Цей основний результат третього розділу доповнює двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (7), (8). Покладемо

$$\widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon):=\|L(\varepsilon)y(\cdot,0)-f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p}+\|B(\varepsilon)y(\cdot,0)-c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Теорема 3.6. *Нехай крайова задача* (7), (8) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2 *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\gamma_1 \widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p} \leq \gamma_2 \widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon).$$

Тут числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ *і* $c(\varepsilon)$.

Згідно з теоремою 3.6 похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (7), (8) мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$. При цьому $y(\cdot,0)$ розглядається як наближений розв'язок цієї задачі.

Наприкінці третього розділу отримані у ньому результати застосовано до дослідження умов неперервності за параметром ε багатоточкових крайових задач, тотальних щодо простору Слободецького W_p^{s+1}. Крайовий оператор у цих задачах має вигляд (4), де $n+r-1 = [s]$. Для таких багатоточкових задач встановлено версії теорем 2.6 і 2.7.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Задача Коші

Питання, які пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Й. І. Гіхман [23], а пізніше М. А. Красносельський та С. Г. Крейн [42] отримали фундаментальні результати про характер залежності розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних систем від параметра, відносно якого праві частини неперервні в інтегральному сенсі. Важливість таких теорем, зокрема, пов'язана з тим, що вони обґрунтовують відомий принцип усереднення М. М. Боголюбова та М. М. Крилова (див., наприклад, [20]).

Для лінійної матричної задачі Коші вигляду

$$Y'(t;k) = A(t;k)Y(t;k) + F(t;k), \quad t \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

$$Y(a;k) = I_m,$$

найпростішою і досить грубою умовою на коефіцієнти $A(t;k) \in (C)^{m\times m}$ та праві частини $F(t;k) \in (C)^{m\times m}$, яка забезпечує рівномірну збіжність на відрізку $[a,b]$ розв'язків $Y(t;k)$ до $Y(t;0)$, є рівномірна на $[a,b]$ збіжність матриць-функцій $A(t;k)$, $F(t;k)$ до $A(t;0)$ і $F(t;0)$ відповідно (див., наприклад, [8; 79]).

Якщо розглядати загальніший випадок, коли елементи матриць-функцій $A(t;k)$ та $F(t;k)$ належать банаховому простору $L_1^{m\times m}$, а $A(t;k)$ та $F(t;k)$ збігаються в цьому просторі до матриць $A(t;0)$ і $F(t;0)$ відповідно, рівномірна збіжність розв'язків $Y(t;k)$ до $Y(t;0)$ на $[a,b]$ є прямим наслідком результату, встановленого ще в 1930 році Я. Д. Тамаркіним [18].

Результати робіт М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [42] в застосуванні до лінійного випадку дають більш тонкі достатні умови для виконання співвідношення

$$\| \, Y(t;k) - Y(t;0)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.2}$$

Нехай

$$A^\vee(t;k) = \int_a^t A(s;k)ds, \quad F^\vee(t;k) = \int_a^t F(s;k)ds.$$

Достатні умови полягають в тому, що

$$\|A^\vee(t;k) - A^\vee(t;0)\|_\infty \to 0, \quad \|F^\vee(t;k) - F^\vee(t;0)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty \tag{1.3}$$

та в існуванні сумовної мажоранти

$$|A(t;k)| \leq h(t) \in L_1, \quad t \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вдосконалення доведень дозволило А. Ю. Лєвіну [44] послабити останню нерівність до

$$\|A(t;k)\|_1 \leq c < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Крім цього, виявилося, що при виконанні (1.4) умова (1.3) є не лише достатньою, але й *необхідною* для (1.2).

В. Т. Рейд [17] встановив, що для виконання граничного співвідношення (1.2) достатньо, щоб при $k \to \infty$ коефіцієнти $R(t;k) = [A(t;k) - A(t;0)] \in (C)^{m\times m}$ слабко збігалися в просторі L_1 до нуля. Але А. Ю. Левіна в роботі [45] показав, що цей результат не можна вважати суттєво новим, оскільки із умови слабкої збіжності в просторі L_1 випливають умови (1.3) та (1.4). Як стверджується в роботі [45], на цю оцінку не впливає також та обставина, що замість умови

$$Y(a;k) = C$$

в [45] фігурують умови

$$Y(a_k;k) = C_k, \text{ де } a_k \to a_0, \; C_k \to C_0 \text{ при } k \to \infty.$$

Якщо відмовитися від обмеження (1.4), то проблема суттєво ускладнюється. Хоча в деяких випадках, – наприклад, для скалярного рівняння першого порядку – співвідношення (1.4), очевидно, зайве. Але в цілому це не так, адже умова (1.3) сама по собі не є ні необхідною, ані достатньою для (1.2).

Щоб пояснити останнє зауваження, скористаємось прикладом, запозиченим із роботи Я. Курцвейля [14].

Приклад 1.1. Розглянемо на проміжку $[a, b]$ послідовність дійсних скалярних рівнянь

$$\frac{dx(t;k)}{dt} = p(t;k)x(t;k) + f(t;k), \tag{1.5}$$

де

$$p(t;k) = k^{1-\alpha}\cos kt, \quad f(t;k) = k^{1-\beta}\sin kt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Будемо порівнювати розв'язки (1.5) з розв'язками рівняння

$$\frac{dx(t;0)}{dt} = 0.$$

Нехай $x(t;k)$ – розв'язок рівняння (1.5), який задовольняє умову

$$x(a;k) = c(0).$$

Як показує безпосередній підрахунок, співвідношення

$$\|x(t;k) - c(0)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty \tag{1.6}$$

при будь-якому $c(0)$ справедливе в тому і лише в тому випадку, якщо

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta > 1. \tag{1.7}$$

Для даного прикладу вимога збіжності в просторі L_1 коефіцієнтів і правих частин зводиться до нерівностей

$$\alpha > 1, \quad \beta > 1,$$

а умова (1.3) – до нерівностей

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Звідси випливає, що співвідношення (1.3) не є достатніми для збіжності розв'язків. В той же час вони не будуть і необхідними. Щоб впевнитися в цьому, покладемо

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Тоді розв'язок $x(t;k)$ рівняння (1.5), який задовольняє умову

$$x(a;k) = c$$

матиме вигляд

$$x(t;k) = c - \frac{1}{2}(t-a) + O(k^{-\frac{1}{2}}),$$

тобто при $k \to \infty$ та будь-якому c отримані розв'язки $x(t;k)$ рівномірно збігаються до відповідного розв'язку рівняння

$$\frac{dx(t;k)}{dt} = \frac{1}{2},$$

хоча співвідношення

$$f^{\vee}(t;k) \xrightarrow{\infty} \frac{1}{2}t, \quad k \to \infty$$

не виконується.

Приклад 1.1 став відправною точкою для робіт [14; 15] Я. Курцвейля, результати яких, дають достатню для (1.6) умову у вигляді

$$\alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta > 1.$$

В роботі А. Ю. Левіна [44] було встановлено, що коли при $k \to \infty$ виконується одна із наступних чотирьох нееквівалентних між собою умов:

(L_1) $\|R(\cdot;k)\|_1 = O(1)$,

(L_2) $\|R^{\vee}(\cdot;k)R(\cdot;k)\|_1 \to 0$,

(L_3) $\|R(\cdot;k)R^{\vee}(\cdot;k)\|_1 \to 0$,

(L_4) $\|R(\cdot;k)R^{\vee}(\cdot;k) - R^{\vee}(\cdot;k)R(\cdot;k)\|_1 \to 0$,

то умова

$$\|R^{\vee}(\cdot;k)\|_{\infty} \to 0, \quad k \to \infty$$

є *необхідною* і *достатньою* для виконання співвідношення (1.2).

Даний результат пояснює в прикладі 1.1 основну імплікацію (1.7) → (1.6) з більш загальної, матричної, точки зору. Дійсно, переходячи до однорідного матричного запису, отримуємо, що

$$R(t;k) = \begin{pmatrix} k^{1-\alpha}\cos kt & k^{1-\beta}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^{\vee}(t;k) = \begin{pmatrix} k^{-\alpha}\sin kt & k^{-\beta}(1-\cos kt) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умови $(L_1)-(L_3)$ виявляються недостатніми, оскільки, окрім (1.7), вимагають додаткових обмежень. Але умова (L_4) нас влаштовує:

$$R(t;k)R^{\vee}(t;k) - R^{\vee}(t;k)R(t;k) = \begin{pmatrix} 0 & k^{1-\alpha-\beta}(\cos kt - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достатні умови для виконання співвідношення (1.2) отримані також в роботі Z. Opial'а [16]:

(O) *Якщо при* $k\to\infty$ *виконується умова*

$$\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty}(1+\|A(t;k)\|_1)\to 0, \tag{1.8}$$

то розв'зки системи (1.1) задовольняють умові (1.2).

Наведемо приклад, який показує, що умова (1.8) в теоремі Z. Opial'а є суттєвою.

Приклад 1.2. Розглянемо послідовність (2×2) - матриць

$$A(t;k) = \begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}}\cos kt & k^{\frac{1}{2}}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і відповідну послідовність задач Коші

$$u'(t;k) = k^{\frac{1}{2}}\cos ktu_k(t) + k^{\frac{1}{2}}\sin kt, \quad u(0;k)=0,$$

$$v'(t;k) = 0, \quad v(0;k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0,1].$$

Розв'язки $u(t;k), v(t;k)$ мають такий вигляд:

$$u(t;k) = k^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \sin ks \exp(k^{-\frac{1}{2}}(\sin kt - \sin ks))ds, \quad v(t;k) = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

і

$$u(t;0) = 0, \quad v(t;0) = 1.$$

У даному випадку послідовність $\{A(t;k)\}$ задовольняє умову (L_1) теореми А. Ю. Левіна. Але, оскільки

$$u(t;k) = -\frac{1}{2}t + O(k^{-\frac{1}{2}}),$$

то

$$\|u(t;k) - u(t;0)\|_\infty \nrightarrow 0, \quad k \to \infty.$$

В 1993 році Нгуєн Тхе Хоан [57] отримав більш загальні умови на коефіцієнти системи (1.1), що узагальнюють умови $(L_1) - (L_4)$ отримані А. Ю. Лєвіним. В його роботі [57] введено послідовності матриць

$$Q_0(t;k), Q_1(t;k), ..., Q_i(t;k), ...$$

та

$$P_0(t;k), P_1(t;k), ..., P_i(t;k), ..., i = 1, 2, ...,$$

які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_0(t;k) = R(t;k), \quad Q_i(t;k) = Q^{\vee}_{i-1}(t;k)R(t;k)$$

та

$$P_0(t;k) = R(t;k), \quad P_i(t;k) = R(t;k)P^{\vee}_{i-1}(t;k).$$

Далі було покладено

$$G_i(t;k) = Q_0(t;k) - Q_1(t;k) + ... + (-1)^i Q_i(t;k), \quad i = 1, 2, ...,$$

$$H_j(t;k) = P_0(t;k) + P_1(t;k) + ... + P_j(t;k), \quad j = 1, 2, ...$$

Тоді умови, при яких має місце співвідношення (1.2), формулюються наступним чином:

(N^i). Нехай при $k \to \infty$ та $i \geq 0$

$$\|G_{i-1}^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \leq \delta < 1, \quad \|Q_i(t;k)\|_1 \leq \sigma < \infty.$$

Тоді умова

$$\|G_i^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \to 0, \quad k \to \infty$$

є необхідною і достатньою для (1.2).

(N_j). Нехай при $k \to \infty$ та $j \geq 0$

$$\|H_{j-1}^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \leq \delta < 1, \quad \|P_j(t;k)\|_1 \leq \sigma < \infty.$$

Тоді умова

$$\|H_j^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \to 0, \quad k \to \infty$$

є необхідною і достатньою для (1.2).

Вважаючи

$$G_{-1}(t;k) = H_{-1}(t;k) = 0$$

із умов (N^i) та (N_j) при $i = j = 0$ отримуємо, що достатня умова (L_1) еквівалентна достатнім умовам (N^0) та (N_0).

А при $i = j = 1$ із достатніх умов (L_2) та (L_3) випливають достатні умови (N^1) та (N_1) відповідно.

Дійсно, із умови (L_2) :

$$\|R^{\vee}(t;k)R(t;k)\|_1 \to 0, \quad k \to \infty$$

випливає, що

$$\|R^{\vee}(t;k)R(t;k)\|_1 \leq \sigma < \infty,$$

а із

$$\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \to 0, \quad k \to \infty$$

випливає

$$\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \leq \delta < 1.$$

Тоді

$$\|R^{\vee}(t;k) + (R(t;k)R^{\vee}(t;k))^{\vee}\|_{\infty} \leq \|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} + \|(R(t;k)R^{\vee}(t;k))^{\vee}\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} + \|R(t;k)R^{\vee}(t;k)\|_{1} \to 0 \quad k \to \infty.$$

Отже, із умови (L_2) випливає умова (N^1). Аналогічно із умови (L_3) випливає умова (N_1).

Приклад 1.3. Нехай $m = 2, \quad [a,b] = [0,1], \quad A(t;k) = A(t) + R(t;k)$, де

$$R(t;k) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k}\cos kt \\ \sqrt{k}\sin 2kt & 0 \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що $\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \to 0$ і

$$R(t;k)R^{\vee}(t;k) = diag\ \{\frac{1}{2}\sin 2kt \cdot \sin kt, \quad \sin 2kt \cdot \sin kt\},$$

$$R^{\vee}(t;k)R(t;k) = diag\ \{\sin kt \cdot \sin 2kt, \quad \frac{1}{2}\sin kt \cdot \sin 2kt\},$$

$$R^{\vee}(t;k)R(t;k) - R(t;k)R^{\vee}(t;k) = diag\ \{-\frac{1}{2}\sin 2kt \cdot \sin kt, \quad \frac{1}{2}\sin kt \cdot \sin 2kt\}.$$

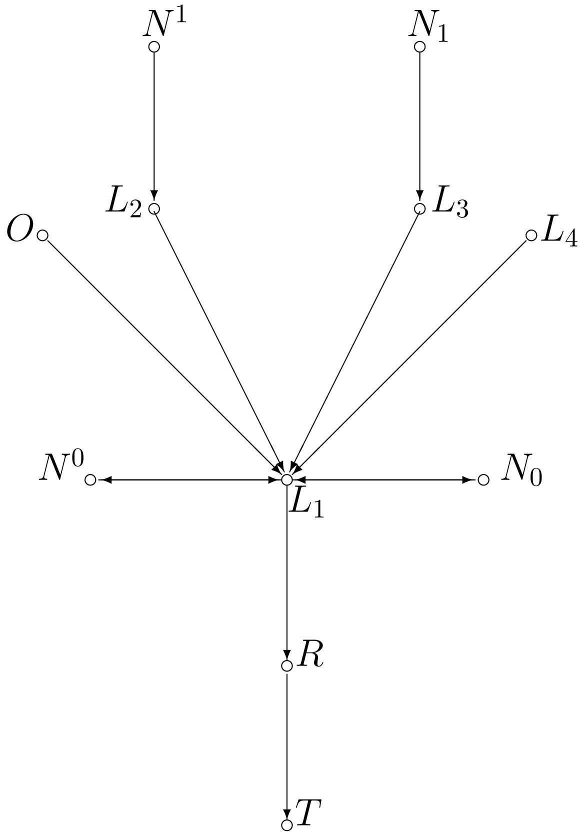
Однак:

$$\|R(t;k)\|_1 \geq \sqrt{k}\int\limits_0^1 |\cos kt| dt = \frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_0^{\frac{1}{k}} |\cos t| dt = \sqrt{k} M\{|\cos t|\} \to +\infty,$$

$$\int\limits_0^1 |\sin kt \cdot \sin 2kt| dt = \frac{1}{k}\int\limits_0^k |\sin t| \cdot |\sin 2t| dt \to M\{|\sin t \cdot \sin 2t|\} > 0,$$

(див. [32]). Жодна із чотирьох наведених вище умов $(L_1) - (L_4)$ тут не виконана, однак неважко впевнитися, що виконується умова (N^1).

Зв'язки між вище розглянутими достатніми умовами можна зобразити у вигляді наступного графа



Узагальнюючи результати М. А. Красносельського та С. Г. Крейна [42], Я. Курцвейль і З. Ворель [43] дійшли до цікавого випадку залежності розв'язків від параметра, коли наявність граничних співвідношень

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int\limits_0^t Y(t,y,\lambda)dt = \int\limits_0^t Y^0(t,y)dt$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} y(t,\lambda) = y(t,\lambda_0)$$

у сенсі рівномірної збіжності, де $Y(t,y,\lambda)$ – права частина, а $y(t,\lambda)$ розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y,\lambda),$$

не означає, що $y(t,\lambda_0)$ задовольняє граничне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Y^0(t,y).$$

Бажання з'ясувати більш детально цей випадок штовхнули Я. Курцвейля на створення поняття узагальненого розв'язку диференціального рівняння.

В 1962 році А. М. Самойленко [67; 68] довів теорему, яка показала, що для того, щоб з'ясувати питання про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметра, відносно якого праві частини неперервні в інтегральному сенсі, потрібно перейти від диференціального рівняння до деякого, еквівалентного йому, інтегрального і досліджувати безпосередньо останнє. Такий підхід дозволив автору доповнити існуючі результати Й. І. Гіхмана, М. А. Красносельського та С. Г. Крейна, Я. Курцвейля і З. Вореля [14; 23; 42; 43] та детальніше з'ясувати питання про рівняння для функції $y(t, \lambda_0)$ у наведеному вище випадку.

Як приклад дослідження непererервної залежності від параметра розв'зків задачі Коші для диференціальних рівнянь високих порядків можна навести роботу В. А. Михайлеця та Н. В. Реви [51].

1.2. Багатоточкові крайові задачі

В теорії звичайних диференціальних рівнянь багатоточкові крайові задачі є класичним об'єктом досліджень. Їх особливістю є те, що проміжні точки, які входять в крайові умови, породжують ряд проблем: порушення гладкості функції Гріна, відсутність спряженої задачі та інше. Вирішення цих труднощів, які виникають в даних задачах, здійснюється за рахунок використання функції Гріна, яка відображає всю специфіку крайової задачі і є досить складним об'єктом.

Багато робіт відомих математиків присвячені питанню існування, єдиності і побудови наближених методів знаходження розв'язків багатоточкових крайових задач (див. наприклад, [11; 36; 63; 64; 67; 69; 71; 80; 82]). Велика кількість математиків досліджувала також питання про властивості функції

Гріна цих задач, зокрема І. Т. Кігурадзе [36], А. Ю. Левін [46; 47], Ю. В. Покорний [60; 61; 62], Є. С. Чічкін [84], P. R. Beesack [2], L. J. Grimm і P. W. Eloe [9], L. K. Jackson та інші [64; 81 і т. д.].

Н. В. Рева у своїй роботі [64] розглянула параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку.

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.9}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) := \sum_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = 0, \tag{1.10}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, матриці $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $t_j \in [a,b]$, $\quad j \in J := \{1, 2, ..., n\}, \quad n \in \mathbb{N}$.

В роботі Н. В. Реви [64] встановлена

Теорема. *Нехай гранична однорідна крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \tag{1.11}$$

$$U(0)y(t;0) := \sum_{j=1}^{n} B_j(0)y(t_j;0) = 0, \tag{1.12}$$

має лише тривіальний розв'язок і виконуються умови:

1) $\quad A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) = R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\quad \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;

3) $\quad \|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$;

4) $\quad \forall j \in J: \quad B_j(\varepsilon) \longrightarrow B_j(0), \quad \varepsilon \to 0+.$

Тоді для достатньо малих значень ε розв'язки $y(\cdot;\varepsilon)$ задачі (1.9) – (1.10) визначені однозначно і задовльняють граничне співвідношення

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{1.13}$$

Тут $\mathcal{M}^m[a,b] =: \mathcal{M}^m, \quad m \in \mathbb{N}$ – клас всіх $m \times m$ комплекснозначних сумовних на $[a,b]$ матриць-функцій $R(\cdot;\varepsilon) : [0,\varepsilon_0] \to (L_1)^{m\times m}$, для яких нормований розв'язок $Z(\cdot;\varepsilon)$ системи

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|Z(t;\varepsilon) - I_m\|_{(0)} = 0.$$

Випадок, коли коефіцієнти $A(\cdot)$ належать більш вузькому простору, простору Соболєва $W_p^{n-1}([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, досліджено в роботі [41] Т. І. Кодлюк.

В роботі [41] розглянута параметризована числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ сім'я багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку такого вигляду:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{1.15}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, матриці $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, вектори $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, $t, t_j \in [a,b]$, $\quad j = \{1,2,...,k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

В її роботі встановлена

Теорема. *Нехай гранична однорідна крайова задача вигляду* (1.14) – (1.15) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0$;

2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0$;

3) $c_\varepsilon \to c_0$;

4) $\|B_j(\varepsilon) \to B_j(0)\|, \quad j = \{1,2,...,k\}$.

Тоді для достатньо малих значень ε *розв'язки* $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (1.14) – (1.15) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{1.16}$$

В роботі [83] Чеханової Г. розглядається багатоточкова задача щодо просторів $C^{(n)}[a,b]$ для рівнянь першого порядків, в яких допускається існування додаткових точок, що входять у крайовий вираз, нехтуваний при $\varepsilon \to 0$

$$y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \tag{1.17}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}(\varepsilon)y^{(j)}(t_i(\varepsilon);\varepsilon)=c(\varepsilon), \tag{1.18}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon)\in C^{(n-1)}\left([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}\right)$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon)\in C^{(n-1)}\left([a,b],\mathbb{C}^{m}\right)$, матриці $\alpha_{i,j}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{m\times m}$, де $\quad i\in\overline{1,p+q},\quad j\in\overline{0,n}$, точки $t_i\in[a,b]$, а вектори $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$.

Зазначимо, що гранична ($\varepsilon=0$) крайова умова

$$y'(t;0)+A(t;0)y(t;0)=0, \tag{1.19}$$

$$B(0)y(\cdot)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}y^{(j)}(t_i(0);0)=0, \tag{1.20}$$

ставиться лише для p точок $t_1,\dots,t_p$.

Теорема. *Нехай* (1.19), (1.20) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon\to 0+$ *виконуються умови:*

1) $\quad\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0$;

2) $\quad\|f(\cdot;\varepsilon)-f(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0$;

3) $\quad t_i(\varepsilon)\to t_i(0),\quad \alpha_{i,j}(\varepsilon)\to\alpha_{i,j}(0),\quad i\in\overline{1,p},\quad j\in\overline{0,n}$;

4) $\quad\alpha_{i,j}(\varepsilon)\to 0,\quad i\in\overline{p+1,p+q},\quad j\in\overline{0,n}$;

5) $\quad c(\varepsilon)\to c(0)$.

Тоді при достатньо малих значеннях ε *розв'язки* $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (1.17) – (1.18) *однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;\varepsilon)-y(\cdot;0)\|_{(n)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+. \tag{1.21}$$

Для системи диференціальних рівнянь високого порядку Чехановою Г. в роботі [83] розглянута наступна класична багатоточкова крайова задача

$$y^{(r)}(t;\varepsilon)+A_{r-1}(t;\varepsilon)y^{(r-1)}(t;\varepsilon)+\dots+A_0(t)y(t;\varepsilon)=f(t;\varepsilon), \tag{1.22}$$

$$B_j(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p+q}\sum_{k=1}^{r}\alpha^{j}_{i,k-1}(\varepsilon)y^{(k-1)}(t_i(\varepsilon);\varepsilon)=c_j(\varepsilon),\quad j\in\overline{1,r}, \tag{1.23}$$

де матриці-функції $A_{k-1}(\cdot;\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$, $k \in \overline{1,r}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in L_1([a,b],\mathbb{C}^m)$, матриці $\alpha^j_{i,k-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, де $i \in \overline{1,p+q}$, а вектори $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, $t_i \in [a,b]$. Розв'язки рівняння (1.22) мають абсолютно неперервну похідну порядку $r-1$ і задовольняють рівність (1.23) майже скрізь.

І справедлива наступна

Теорема. *Нехай гранична однорідна задача вигляду* (1.22), (1.23) *має лише тривіальний ров'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *та* $k \in \overline{1,r}$, $j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

1) $\|R_{r-1}(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}_{k-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0;$

2) $\|R^{\vee}_{k-1}(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0;$

3) $\|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1); \quad \|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0;$

4) $t_i(\varepsilon) \to t_i(0), \quad \alpha^j_{i,k-1}(\varepsilon) \to \alpha^j_{i,k-1}(0), \quad i \in \overline{1,p};$

5) $\alpha^j_{i,k-1}(\varepsilon) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q};$

6) $c_j(\varepsilon) \to c_j(0).$

Тоді для достатньо малих значень ε *розв'язки* $y(\cdot;\varepsilon)$ *задач* (1.22), (1.23) *однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{(r-1)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ . \tag{1.24}$$

Що ж стосується матриць Гріна, то у 1987 році І. Т. Кігурадзе довів, що якщо визначник

$$\det \sum_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon)Y(t_j;\varepsilon) \neq 0, \tag{1.25}$$

то для багатоточкової крайової задачі (1.9) – (1.10) існуватиме матриця Гріна, тобто матрична функція

$$G_{\bar{t},\overline{B}}(t,s;\varepsilon) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

де

$$\bar{t} = t_1, t_2, ..., t_n, \quad \overline{B} = B_1, B_2, ..., B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

за допомогою якої розв'язок напіводнорідної крайової задачі може бути представлений у вигляді

$$y(t;\varepsilon) = \int_a^b G_{\overline{t},\overline{B}}(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \quad t \in [a,b], \quad f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m.$$

В цій рівності матриця Гріна $G_{\overline{t},\overline{B}}(t,s;\varepsilon)$ визначається неоднозначно, лише з точністю до значень на підмножини квадрата $[a,b] \times [a,b]$ міри нуль.

У зв'язку з цим Н. В. Рева [64] досліджувала збіжність таких матриць Гріна у просторі L_∞.

В її роботі встановлена

Теорема. *Нехай однорідна гранична крайова задача* (1.11) – (1.12) *має лише тривіальний розв'язок і виконуються умови:*

1) $\quad A(t;\varepsilon) - A(t;0) = R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\quad \forall j \in J \quad B_j(\varepsilon) \longrightarrow B_j(0), \quad \varepsilon \to 0+.$

Тоді для достатньо малих ε *існують матриці Гріна* $G_{\overline{t},\overline{B}}(t,s;\varepsilon)$ *задачі вигляду* (1.9) – (1.10) *і на квадраті* $[a,b] \times [a,b]$ *виконується*

$$\|G_{\overline{t},\overline{B}}(t,s;\varepsilon) - G_{\overline{t},\overline{B}}(t,s;0)\|_{+\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Питання про достатні умови збіжності матриць Гріна багатоточкових крайових задач в більш сильних нормах соболєвських просторів $W_p^n([a,b];\mathbb{C})$ дослідила в своїй роботі Т. І. Кодлюк [41] .

В цій роботі розглядається напіводнорідна крайова задача для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.26}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = 0, \tag{1.27}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, матриці $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $t, t_j \in [a,b], \quad j = \{1,2,...,k\}, \quad k \in \mathbb{N}$.

В роботі [41] була виділена особлива, *нормована*, матриця Гріна, яка визначається однозначно і доведена

Теорема. *Нехай*

$$\det[B_1(0) + \sum_{j=2}^{k} B_j(0)Y(t_j;0)] \neq 0,$$

тоді існує ***нормована*** *матриця Гріна напіводнорідної багатоточкової крайової задачі виду* (1.26) – (1.27)*, яка представляється у вигляді:*

$$G(t,s) = \\ = \begin{cases} -Y(t)[B_1 + \sum\limits_{j=2}^{k} B_jY(t_j)]^{-1}Z(s), & t \leq s; \\ Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)[B_1 + \sum\limits_{j=2}^{k} B_jY(t_j)]^{-1}Z(s), & s < t, \end{cases} \qquad (1.28)$$

де

$$Z(s) = \sum_{j:t_j \leq s} B_jY(t_j)Y^{-1}(s).$$

Матриця Гріна $G(t,s)$, що записана формулою (1.28), визначається однозначно.

Теорема. *Нехай*

$$\det[B_1(0) + \sum_{j=2}^{k} B_j(0)Y(t_j;0)] \neq 0$$

і при $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0;$

2) $\|B_j(\varepsilon) \to B_j(0)\|, \quad j = \{1,2,...,k\}.$

Тоді для достатньо малих значень ε *існують нормовані матриці Гріна* $G(t,s;\varepsilon)$ *задач* (1.26) – (1.27) *і на кожному з* $k-1$ *прямокутників* $(a,b) \times (a_{j-1},a_j)$ *виконується*

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

1.3. Загальні крайові задачі

У роботі І. Т. Кігурадзе [35] були отримані достатні умови рівномірної збіжності розв'язків сім'ї *загальних лінійних крайових задач* для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку з *дійсними* коефіцієнтами

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.29}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{1.30}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in L_1^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in L_1^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, а лінійні неперервні оператори

$$U(\varepsilon) : C([a,b];\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m.$$

Теорема *(І.Т. Кігурадзе).* *Нехай однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \quad U(0)y(t;0) = 0 \tag{1.31}$$

має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to \infty$ *виконуються умови:*

1) $\sup\limits_{\varepsilon} \|A(\cdot;\varepsilon)\|_1 < \infty$;
2) $\sup\limits_{\varepsilon} \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 < \infty$;
3) $\sup\limits_{\varepsilon} \|U(\varepsilon)\| < \infty$;
4) $\max\limits_{t\in[a,b]} |\int\limits_a^t A(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t A(s;0)ds| \to 0$;
5) $\max\limits_{t\in[a,b]} |\int\limits_a^t f(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t f(s;0)ds| \to 0$;
6) $c_\varepsilon \to c(0)$;
7) $U(\varepsilon)y \to U(0)y, \quad \forall y \in (W_1^1)^m$.

Тоді, починаючи з деякого ε_0*, задачі (1.29) – (1.30) мають єдиний розв'язок і*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to \infty. \tag{1.32}$$

Наведені нижче приклади показують, що в теоремі І. Т. Кігурадзе всі умови є суттєвими.

Приклад 1.4. Нехай $m = 1, \quad [a, b] = [0, 2\pi], \quad c_\varepsilon = c(0) = 1,$

$$A(t;\varepsilon) = A(t;0) = 0, \quad f(t;0) = 0, \quad f(t;\varepsilon) = \varepsilon \cos \varepsilon^2 t,$$

$$U(0)y = y(0), \quad U(\varepsilon)y = y(0) + \varepsilon \int\limits_0^2 \pi y(t) \sin \varepsilon^2 t dt.$$

Тоді виконуються всі умови теореми Кігурадзе окрім 3). З іншого боку

$$y(t;0) = 1, \quad y(t;\varepsilon) = 1 - \pi + \frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon^2 t,$$

що й показує порушення граничної рівності (1.32).

Приклад 1.5. Припустимо тепер, що $m = 1, \quad [a, b] = [0, 2\pi],$

$$A(t;0) = f(t;0) = 0, \quad A(t;\varepsilon) = \varepsilon \cos \varepsilon^2 t, \quad f(t;\varepsilon) = -\varepsilon \sin \varepsilon^2 t,$$

$$U(\varepsilon)y = U(0)y = y(0), \quad c_\varepsilon = c(0) = 1.$$

Тоді

$$y(t;0) = 0, \quad y(t;\varepsilon) = -\varepsilon \int\limits_0^1 \exp\left(\frac{\sin \varepsilon^2 t}{\varepsilon} - \frac{\sin \varepsilon^2 \tau}{\varepsilon}\right) \sin \varepsilon^2 \tau d\tau$$

і

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} [y(t;\varepsilon) - y(t;0)] = \frac{t}{2}.$$

У даному випадку виконуються всі умови теореми Кігурадзе, окрім 1).

Умови 3) та 7) в теоремі Кігурадзе означають, що оператори $U(\varepsilon)$ *сильно* збігаються до оператора $U(0)$. Тому в умові 7) множину AC^m можна замінити довільною підмножиною вектор-функцій, лінійна оболонка яких щільна в банаховому просторі $C([a, b]; \mathbb{R}^m)$. Із скінченовимірності простору $\mathbb{R}^m$ випливає, що дана умова рівносильна тому, що оператори $U(\varepsilon)$ *слабко* збігаються до оператора $U(0)$. Вона суттєво слабша, ніж умова рівномірної збіжності операторів: $\|U(\varepsilon) - U(0)\| \to 0$.

Можна показати, що для виконання умов 1), 4) и 2), 5) достатньо, щоб $A(\cdot;\varepsilon)$ *слабко* збігалась в банаховому просторі $L_1^{m\times m}$ до матриці - функції $A(\cdot;0)$, а $f(\cdot;\varepsilon)$ *слабко* збігалась в банаховому просторі L_1^m до вектор - функції $f(\cdot;0)$. Тим більше для цього достатньо збіжності в нормах відповідних просторів. Приклади також показують, що із цих умов *не* випливає збіжність за мірою Лебега і тим більше поточкова збіжність майже скрізь на відрізку $[a,b]$.

У роботі [50] В. А. Михайлецю та Н. В. Реві вдалося узагальнити теорему І. Т. Кігурадзе та покращити його результати.

Теорема ***(Перше узагальнення теореми Кігурадзе).*** *В формулюванні теореми І. Т. Кігурадзе умови 1) та 4) на коефіцієнти системи* (1.29) *можна замінити більш загальною нелінійною умовою*

$$R(t;\varepsilon) := A(t;\varepsilon) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m.$$

Тут $\mathcal{M}^m[a,b] =: \mathcal{M}^m, \quad m \in \mathbb{N}$ – клас всіх $m \times m$ комплекснозначних сумовних на $[a,b]$ матриць-функцій $R(\cdot;\varepsilon) : [0,\varepsilon_0] \to (L_1)^{m\times m}$, для яких нормований розв'язок $Z(\cdot;\varepsilon)$ системи

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(t;\varepsilon) - I_m\|_{(0)} = 0.$$

Якщо визначити за заданими матрицями-функціями $A(t;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$ та вектор-функціями $f(t;\varepsilon) \in (L_1)^m$ матрицю-функцію

$$A_f(t;\varepsilon) := \begin{pmatrix} A(t;\varepsilon) & f(t;\varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in (L_1)^{m+1\times m+1}, \tag{1.33}$$

де вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon)$ записана у вигляді стовпчика висоти m, то справедлива (див. [50]) наступна

Теорема ***(Друге узагальнення теореми Кігурадзе).*** *В формулюванні теореми Кігурадзе можна замінити умови 2), 5) на праві частини системи* (1.29) *однією більш загальною умовою*

$$R_f(t;\varepsilon) := A_f(t;\varepsilon) - A_f(t;0) \in \mathcal{M}^{m+1}.$$

Дана теорема дозволила істотно послабити умови теореми Кігурадзе не лише на ростки відображень $A(\cdot;\varepsilon)$, а й на $f(\cdot;\varepsilon)$ в точці $\varepsilon = 0$.

Розглядаючи напіводнорідну загальну крайову задачу, яка відповідає задачі (1.29) – (1.30), Кігурадзе встановив, що якщо однорідна крайова задача (1.31) має лише тривіальний розв'язок, то для неї буде існувати матриця Гріна, тобто матрична функція $G(t,s) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, за допомогою якої розв'язок задачі може бути представлений у вигляді:

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds, \quad t \in (a,b)$$

для кожної вектор-функції $f(\cdot) \in (L_1)^m$.

Така матриця Гріна визначається однозначно з точністю до значень на підмножині квадрата $[a,b]\times[a,b]$ міри нуль.

В. А. Михайлець та Н. В. Рева дослідили питання про неперервність за параметром ε матриці Гріна $G(t,s;\varepsilon)$ в метриці простору L_∞, яка для сім'ї загальних крайових задач (1.29) – (1.30) теж буде залежати від параметра ε.

Теорема ***(Уточнення теореми Кігурадзе).*** *Нехай однорідна гранична крайова задача з* $\varepsilon = 0$ *має лише тривіальний розв'язок та виконуються умови*

1) $A(t;\varepsilon) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m$;

2) *оператори* $U(\varepsilon)$ *рівномірно збігаються до оператора* $U(0)$*, тобто*

$$\|U(\varepsilon) - U(0)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тоді для достатньо малих ε *існують матриці Гріна*

$$G(t,s) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$$

розглянутих задач і на квадраті $[a,b]\times[a,b]$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon)-G(\cdot,\cdot;0)\|_{+\infty}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Достатні умови збіжності матриць Гріна розглянутих задач до матриці Гріна граничної крайової задачі на квадраті $(a,b)\times(a,b)$ за рівномірною нормою розглянула Т. І. Кодлюк [41].

Теорема. *Нехай однорідна гранична крайова задача з* $\varepsilon=0$ *має лише тривіальний розв'язок та виконуються такі умови:*

1) $A(t;\varepsilon)-A(t;0)\in\mathcal{M}^m$;

2) $\|U(\varepsilon)-U(0)\|\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$

Тоді для достатньо малих ε *існують нормовані матриці Гріна задач (1.29) – (1.30) і рівномірно на квадраті* $(a,b)\times(a,b)$

$$\|G(t,s;\varepsilon)-G(t,s;0)\|_{\infty}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{1.34}$$

У слабшій формі граничне співвідношення (1.34), де $\|\cdot\|_{+\infty}$ – норма в просторі Лебега L_∞, використовувалося в роботах [4; 5] для доведення рівномірної апроксимації операторів Штурма-Ліувілля з сильно сингулярними потенціалами аналогічними операторами з гладкими потенціалами. Подібні диференціальні оператори зустрічаються у ряді задач сучасної математичної фізики. Відносно диференціальних операторів високих порядків див., наприклад, роботи [6; 7].

В роботах [1; 34; 49; 50] знайдені достатні умови неперервної залежності від параметра при $\varepsilon\to 0+$ розв'язків загальних крайових задач для систем рівнянь першого порядку за рівномірною нормою $\|\cdot\|_\infty$.

Питання залежності від параметра $\varepsilon\to 0+$ розв'язків і матриць Гріна загальних крайових задач для систем рівнянь довільних порядків за нормами просторів $C^{(r-1)}([a,b],\mathbb{C})$ були розглянуті Чехановою Г. в десертаційній роботі [83].

Розглядалась крайова задача з параметром ε наступного вигляду:

$$y^{(r)}(t;\varepsilon) + A_{r-1}(t;\varepsilon)y^{(r-1)}(t;\varepsilon) + \cdots + A_0(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \\ t \in [a,b], \tag{1.35}$$

$$B_j(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \quad j \in \overline{1,r}. \tag{1.36}$$

Тут $(m \times m)$–матриці-функціїї $A_{j-1}(\cdot;\varepsilon)$ і вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon)$ сумовні на $[a,b]$, вектори $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, розв'язок $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_1^r)^m$,
а кожне B_j є лінійним неперервним оператором у парі просторів

$$B_j(\varepsilon) : C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m. \tag{1.37}$$

Теорема ***(Г. Чеханової).*** *Нехай гранична однорідна крайова задача вигляду* (1.35), (1.36) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *та* $j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

(*i*) $\|R_{r-1}(\cdot;\varepsilon)R_{j-1}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

(*ii*) $\|R_{j-1}^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0$;

(*iii*) $B_j(\varepsilon)y \to B_j(0)y, \quad y \in C^{(n-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right); \quad c_j(\varepsilon) \to c_j(0)$;

(*iv*) $\|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1); \quad \|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0$.

Тоді для достатночно малих $\varepsilon > 0$ *задача* (1.35) – (1.36) *має єдиний розв'язок* $y(\cdot;\varepsilon)$ *і для нього виконується співвідношення*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{(r-1)} \to 0, \ \varepsilon \to 0+. \tag{1.38}$$

Умова (i) даної теореми виконується, якщо $\|A_{r-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$, при цьому немає обмежень на поведінку функцій $\|A_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1$ при $j < r$.

Також Г. Чеханова отримала достатню умову рівномірної збіжності матриць Гріна для напіводнорідної крайової задачі вигляду:

$$y^{(r)}(t;\varepsilon) + A_{r-1}(t;\varepsilon)y^{(r-1)}(t;\varepsilon) + \cdots + A_0(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \\ t \in [a,b], \tag{1.39}$$

$$B_j(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = 0, \quad j \in \overline{1,r}. \tag{1.40}$$

Тут $A_{j-1}(\cdot;\varepsilon)$ і вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon)$ сумовні на $[a,b]$, а лінійні неперервні оператори

$$B_j : C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m. \tag{1.41}$$

Для крайової задачі (1.39), (1.40) нормована матриця Гріна означена як $(m \times m)$ матриця-функція

$$G(\cdot,\cdot;\varepsilon) := \widetilde{G}_{1r}(\cdot,\cdot;\varepsilon),$$

де $\widetilde{G}_{1r}(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ є блок $(mr \times mr)$ матриці Гріна однорідної крайової задачі для відповідної системи рівнянь I-го порядку.

Теорема. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *та* $j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

1) $\|R_{r-1}(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0;$

2) $\|R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0;$

3) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0,$

де

$$R_{j-1}(\cdot;\varepsilon) := A_{j-1}(\cdot;\varepsilon) - A_{j-1}(\cdot;0), \quad R^{\vee}_{j-1}(t;\varepsilon) := \int\limits_a^t R_{j-1}(s;\varepsilon)ds.$$

Тоді для достатньо малих ε *існують нормовані матриці Гріна задач* (1.39), (1.40) *то для них виконується граничне співвідношення*

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.42}$$

де

$$G(\cdot,\cdot;\varepsilon) := \widetilde{G}_{1r}(\cdot,\cdot;\varepsilon),$$

де $\widetilde{G}_{1r}(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ є блок $(mr \times mr)$ матриці Гріна однорідної крайової задачі для відповідної системи рівнянь I-го порядку.

1.4. Тотальні крайові задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку

У диссертаційній роботі Н. В. Реви розглянуто найбільш загальні (тотальні) щодо простору W_1^1 крайові задачі, що містять в собі загальні крайові задачі, та досліджено неперервність за параметром розв'язків таких задач за нормою простору Соболєва W_1^1 на відрізку $[a, b]$ та відповідних їм матриць Гріна за нормою простору L_∞ на квадраті $[a, b] \times [a, b]$. Розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю неоднорідних тотальних щодо простору W_1^1 крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a, b], \tag{1.43}$$

$$\alpha_\varepsilon y(a;\varepsilon) + \int_a^b \Phi(t;\varepsilon)y'(t;\varepsilon)dt = c(\varepsilon). \tag{1.44}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, $\Phi(\cdot;\varepsilon) \in (L_\infty)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in L_1^m$, матриці $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$.

У випадку, коли матриці-функції $\Phi(\cdot;\varepsilon)$ мають обмежену варіацію по t на $[a, b]$, умова (1.44) еквівалентна загальній крайовій.

Під розв'язком тотальної щодо простору W_1^1 крайової задачі розуміється вектор-функція $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_1^1)^m$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1.43) майже скрізь на відрізку $[a, b]$ та крайову умову (1.44).

Теорема. *Нехай однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0) + f(t;0), \quad \alpha_0 y(a;0) + \int_a^b \Phi(t;0)y'(t;0)dt = c_0, \tag{1.45}$$

має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_1 \to 0+$;

2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_1 \to 0+$;

3) $c_\varepsilon \to c(0)$;

4) $\alpha_\varepsilon \to \alpha_0$;

5) $\|\Phi(\cdot;\varepsilon)-\Phi(\cdot;0)\|_{\infty}\to 0+\,.$

Тоді для достатньо малих $\varepsilon>0$ *задача* (1.43) – (1.44) *має єдиний розв'язок та виконується*

$$\|y(\cdot;\varepsilon)-y(\cdot;0)\|_{1,1}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Якщо однорідна гранична крайова задача (1.45) має лише тривіальний розв'язок, то існує матриця Гріна $G(t,s)\in L_{\infty}([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ задачі (1.43) – (1.44), за допомогою якої розв'язок напіводнорідної тотальної щодо простору W_1^1 крайової задачі ($c_\varepsilon=0$) можна представити у вигляді

$$y(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds,\quad t\in[a,b],\quad f(\cdot)\in(L_1)^m.$$

У роботі Н. В. Реви встановлена

Теорема. *Нехай при* $\varepsilon\to 0+$ *виконуються умови*:

1) $\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_1\to 0+;$

2) $\alpha_\varepsilon\to\alpha_0;$

3) $\|\Phi(\cdot;\varepsilon)-\Phi(\cdot;0)\|_{+\infty}\to 0+\,.$

Тоді для достатньо малих $\varepsilon>0$ *існують матриці Гріна* $G(t,s)$ *задачі* (1.43) – (1.44) *і на квадраті* $[a,b]\times[a,b]$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon)-G(\cdot,\cdot;0)\|_{+\infty}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

У роботі Н. В. Реви досліджена неперервна залежність від параметра розв'язків тотальних крайових задач та відповідних їм матриць Гріна за нормою просторів W_1^1 та L_∞ відповідно.

Неперервна залежність розв'язків за параметром тотальних крайових задач в нормах соболєвських просторів W_p^n $(n>0,\quad p>0)$ досліджено у роботі [41] Т. І. Кодлюк.

В роботі [41] розглянуто параметризовану числом $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ сім'ю неоднорідних тотальних щодо простору W_p^n крайових задач для системи $m\in\mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.46}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{1.47}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, а лінійні неперервні оператори

$$U(\varepsilon): \quad W_p^n([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком тотальної щодо простору W_p^n крайової задачі розуміється вектор-функція $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1.46) майже скрізь на відрізку $[a,b]$ та крайову умову (1.47).

Теорема ***(Т. І. Кодлюк).*** *Нехай однорідна гранична крайова задача вигляду* (1.46) – (1.47) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1} \to 0+$;

2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n-1} \to 0+$;

3) $c_\varepsilon \to c(0)$;

4) $U(\varepsilon)y \to U(0)y, \quad \forall y \in (W_p^n)^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *розв'язок розглядуваних задач однозначно визначений та виконується*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Питання неперервності за параметром ε матриць Гріна тотальних щодо просторів $W_p^1([a,b],\mathbb{C}^m)$ крайових задач досліджено Т. І. Кодлюк (див. [41]).

В цій роботі Т. І. Кодлюк розглядає параметризовану числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ сім'ю напіводнорідних крайових задач:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{1.48}$$

$$\alpha_\varepsilon y(a;\varepsilon) + \int_a^b \Phi(t;\varepsilon)y'(t;\varepsilon)dt = 0. \tag{1.49}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_p)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_p)^m$, матриці $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а матриці-функції $\Phi(\cdot;\varepsilon) \in (L_q)^{m\times m}, \quad q = \frac{p}{p-1}$.

Теорема *(Т. І. Кодлюк).* *Нехай однорідна гранична крайова задача вигляду* (1.48) – (1.49) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \quad \to \quad 0+$ *виконуються умови:*

1) $\quad \|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_p \to 0+;$

2) $\quad \alpha_\varepsilon \to \alpha_0;$

3) $\quad \|\Phi(\cdot;\varepsilon - \Phi(\cdot;0)\|_q, \quad q = \frac{p}{p-1}.$

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *існують матриці Гріна розглядуваних задач і на квадраті* $(a,b)\times(a,b)$ *виконується*

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_q \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Разом з тим відкритим залишається питання залежності від параметра $\varepsilon \to 0+$ розв'язків тотальних крайових задач для систем рівнянь довільних порядків.

1.5. Тотальні крайові задачі для системи диференціальних рівнянь високого порядку

Щодо просторів неперервно диференційовних функцій тотальні крайові задачі введено і досліджено в роботах [52], [55], [83] для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Доведено фредгольмовість цих задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

В. Солдатов у своїй роботі [73] поширив ці результати на системи диференціальних рівнянь високих порядків. Хоча такі системи зводяться до систем диференціальних рівнянь першого порядку, для тотальних крайових задач застосування цієї стандартної редукції викликає складнощі з огляду на некласичність крайових умов.

Розглядалась сім'я крайових задач, залежних від числового параметра ε, вигляду:

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon)z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{1.50}$$

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{1.51}$$

де $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, а число $\varepsilon_0 > 0$ фіксоване, $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$, усі $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$, $B(\varepsilon)$ є лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$.

І була сформульована теорема про умови, достатні для однозначної розв'язності задачі (1.50), (1.51) і неперервної залежності її розв'язку за малим параметром.

Теорема. *Нехай гранична однорідна задача виду* (1.50)*,* (1.51) *має лише тривільний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі умови:*

(i) $\|K_l(\cdot,\varepsilon) - K_l(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$ *для кожного номера* $l \in \{0,\ldots,r-1\}$*;*

(ii) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$*;*

(iii) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ *для довільного* $z \in (C^{(n+r)})^m$*;*

(iv) $c(\varepsilon) \to c(0)$*.*

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *задача* (1.50)*,* (1.51) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничну властивість*

$$\|z(\cdot,\epsilon) - z(\cdot,0)\|_{(n+r)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \,.$$

***Зауваження* 1.** Для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ подамо крайовий оператор $B(\varepsilon)$ у вигляді

$$Bz(\cdot) = \sum_{k=1}^{n+r} \alpha_k \, z^{(k-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi(t))z^{(n+r)}(t), \tag{1.52}$$

де усі α_k є деякі числові матриці розміру $rm \times m$, а $\Phi(t)$ є деяка матриця-функція розміру $rm\times m$, утворена скалярними функціями обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$, неперервними зліва на $[a, b]$ і рівними нулю при $t = a$, причому інтеграл розуміється за Ріманом–Стілтьєсом. З теореми Ріса про критерій слабкої збіжності лінійних неперервних функціоналів на $C([a, b], \mathbb{C})$ (див., наприклад, [58, с. 523]) випливає, що умова (iii) рівносильна виконанню таких чотирьох умов щодо $\alpha_k(\varepsilon)$ і $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$:

(3a) $\alpha_k(\varepsilon) \to \alpha_k(0)$ для довільного номера $k \in \{1, \dots, n + r\}$;

(3b) $\|V_a^b \Phi(\cdot, \varepsilon)\| = O(1)$;

(3c) $\Phi(b, \varepsilon) \to \Phi(b, 0)$;

(3d) $\int\limits_a^t \Phi(s, \varepsilon) ds \to \int\limits_a^t \Phi(s, 0) ds$ для кожного $t \in (a, b]$.

Пізніше у роботі Мурача О.О. та Солдатова В. [56] автори показали, що встановлені раніше умови є ще й необхідними.

Базове означення. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (1.50), (1.51) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, функції $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ і вектора $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$.

($**$) Граничні умови (ii) і (iv) тягнуть за собою збіжність

$$z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (C^{(n+r)})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Теорема. *Розв'язок крайової задачі* (1.50), (1.51) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли гранична однорідна задача виду* (1.50), (1.51) *має лише тривіальний розв'язок і граничні умови* (i) *і* (iii).

Крім того, дали двобічну оцінку степеня відхилення розв'язків.

Теорема. *Нехай гранична однорідна задача виду* (1.50), (1.51) *має лише тривільний розв'язок і крайова задача* (1.50), (1.51) *задовольняє граничні* *умови* (i) *і* (iii). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\begin{aligned}
&\varkappa_1\bigl(\,\|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{(n)} + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}\bigr)\\
&\quad\leq \|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{(n+r)}\\
&\quad\leq \varkappa_2\bigl(\,\|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{(n)} + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}\bigr).
\end{aligned}$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ *і* $\varkappa_2$ *не залежать від* $z(\cdot,0)$, $z(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ *і* $q(\varepsilon)$.

Цікавим для подальшого розгляду залишається питання про критерій неперервної залежності розв'язків за нормами вужчих просторів, наприклад, Слободецького.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури за темою дисертації. З наведених відомостей можна зробити такі висновки:

1. Недослідженим є питання неперервної залежності від параметра розв'язків тотальних крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ у просторах Соболєва.
2. Актуальним і цікавим є поширення результатів, наведених в огляді літератури, на простори з дробовими показниками регулярності такі як простори Слободецького і простори Гельдера.
3. Корисно розглянути застосування теорем про неперервність за параметром розв'язків тотальних крайових задач до некласичних багатоточкових крайових задач.

РОЗДІЛ 2
ТОТАЛЬНІ ЩОДО ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

2.1. Постановка задачі

У цьому розділі задано дійсне число $p \in [1, \infty)$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$, $r \geq 1$ і (скінченний) відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Введемо клас *тотальних* щодо простору $W_p^{n+r}[a, b]$ крайових задач. А саме, розглянемо на інтервалі (a, b) таку неоднорідну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь порядку r:

$$(Ly)(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \qquad t \in [a, b], \tag{2.1}$$

$$By = c, \tag{2.2}$$

де є невідомою вектор-функція $y(\cdot) \in \left(W_p^{n+r}\right)^m$ і задані матриці-функції $A_{r-j}(\cdot) \in \left(W_p^{n}\right)^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in \left(W_p^{n}\right)^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$ та лінійний неперервний оператор

$$B : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{2.3}$$

Якщо $n \geq 1$, то розв'язок $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$ належить простору $(C^r)^m := C^r([a, b], \mathbb{C}^m)$ за теоремою Соболєва про вкладення і тоді рівність (2.1) має розв'язок в кожній точці $t \in [a, b]$. (В цьому випадку, всі коефіцієнти $A_{r-j}(\cdot)$ і $f(\cdot)$ неперервні на $[a, b]$.) Якщо $n = 0$, тоді $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m \subset (C^{r-1})^m$ за цією теоромою і $y^{(r-1)}(\cdot)$ абсолютно неперервна на $[a, b]$. Тому в даному випадку класична похідна $y^{(r)}(\cdot)$ існує майже скрізь на $[a, b]$, і тому рівність (2.1) розглядається майже скрізь на $[a, b]$.

Крайова умова (2.2) з неперервним оператором (2.3) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (2.1), бо коли її права частина $f(\cdot)$

пробігає весь простір $(W_p^n)^m$, то розв'язок $y(\cdot)$ цієї системи пробігає весь простір $(W_p^{n+r})^m$. Така умова містить в собі як усі класичні типи крайових умов, такі як початкові умови задачі Коші, багатоточкові й інтегральні крайові умови, так і некласичні умови, які містять похідні $y^{(k)}(\cdot)$, де $1 \leq k \leq n+r$. Тому природно називати крайову задачу (2.1), (2.2) тотальною щодо простору W_p^{n+r}.

Оператор (2.3) допускає однозначне аналітичне представлення.

Твердження 2.1. *При кожному виборі числових матриць* $\alpha_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *і квадратної матриці-функції* $\Phi(\cdot) \in (L_q)^{m\times m}$, *де* $1/p+1/q=1$, *формула*

$$F(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^{(k-1)}(a)+\int\limits_a^b \Phi(t)f^{(n)}(t)dt, \quad f\in \left(W_p^n\right)^m, \tag{2.4}$$

задає єдиним чином деякий лінійний неперервний оператор $F:\left(W_p^n\right)^m \to \mathbb{C}^m$. *Правильне і обернене твердження: для кожного лінійного неперервного оператора* $F:\left(W_p^n\right)^m \to \mathbb{C}^m$ *знайдуться такі* $\alpha_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *і* $\Phi(\cdot)\in (L_q)^{m\times m}$, *що він зображається у вигляді* (2.4). *При цьому* $\{\alpha_k, \Phi(t)\}$ *і* $\{\tilde{\alpha}_k, \tilde{\Phi}(t)\}$ *задають один і той же оператор* F *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_k=\tilde{\alpha}_k$ *для довільного* $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ *і* $\Phi(t)=\tilde{\Phi}(t)$ *для майже усіх* $t\in[a,b]$.

Для доведення цього факту сформулюємо відомі твердження.

Лема 2.1. *Для кожної фіксованій матриці-функції* $\Phi(\cdot)\in (L_q)^{m\times m}$ *формула*

$$F(f)=\int\limits_a^b \Phi(t)f(t)dt, \quad f\in (L_p)^m, \tag{2.5}$$

єдиним чином задає деякий лінійний неперервний оператор $F:(L_p)^m\to \mathbb{C}^m$, *і, окрім того,* $\|F\|=\|\Phi(\cdot)\|_q$, *де* $1/p+1/q=1$. *Правильне і обернене твердження: для кожного лінійного неперервного оператора* F *знайдеться така матриця-функція* $\Phi(\cdot)\in(L_q)^{m\times m}$, *що* F *зображається у вигляді* (2.5). *При цьому матриці-функції* $\Phi(t)$ *і* $\tilde{\Phi}(t)$ *задають один і той же оператор тоді і тільки тоді, коли* $\Phi(t)=\tilde{\Phi}(t)$ *для майже усіх* $t\in[a,b]$.

Лема 2.2. *Нехай E, E_1, E_2 — банахові простори і A, B — неперервні лінійні оператори, які діють відповідно з E в E_1 та з E в E_2, причому B відображає E на все E_2. Якщо при цьому $KerA \supset KerB$, то існує неперервний лінійний оператор $C : E_2 \to E_1$, такий що $A = CB$*

Доведення твердження 2.1. Розглянемо в $\left(W_p^n\right)^m$ підпростір $\left(\check{W}_p^n\right)^m$ вектор-функцій, які задовольняють умову $g^{(n-1)}(a) = 0$ і оператор $A = d^n/dt^n$, який переводить цей простір в простір $(L_p[a,b])^m$. Нехай F — оператор на $\left(W_p^n\right)^m$. Розглянемо його спочатку на підпросторі $\left(\check{W}_p^n\right)^m$. Тепер до операторів $A : \left(\check{W}_p^n\right)^m \longmapsto (L_p[a,b])^m$ і $F : \left(\check{W}_p^n\right)^m \longmapsto \mathbb{C}^m$ можно застосувати лему про трійку 2.2. В силу цієї леми знайдеться таке лінійне відображення:

$$\varphi : (L_p[a,b])^m \longmapsto \mathbb{C}^m,$$

що для кожної вектор-функції $g \in \left(\check{W}_p^n\right)^m$ виконується рівність

$$F(g) = \varphi(Ag). \tag{2.6}$$

Кожна вектор-функція $f \in \left(W_p^n\right)^m$ зображається у вигляді

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} + g(t), \quad g \in \left(\check{W}_p^n\right)^m.$$

Тому

$$F(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{F((t-a)^k)}{k!} + F(g). \tag{2.7}$$

В силу теореми (2.1), рівності (2.6) і означення оператора A маємо:

$$F(g) = \varphi(Ag) = \int\limits_a^b \Phi(t) g^{(n)}(t) dt,$$

тобто

$$F(g) = \int\limits_a^b \Phi(t) f^{(n)}(t) dt, \tag{2.8}$$

оскільки $f^{(n)}(t) = g^{(n)}(t)$. Позначимо

$$\alpha_k = \frac{F((t-a)^k)}{k!}, \quad k = \{0, \ldots, n-1\}.$$

Тоді, враховуючи дане позначення та рівності (2.7) і (2.8), отримаємо потрібну формулу (2.4).

Доведемо єдиність зображення (2.4). Припустимо супротивне, тобто, що існує ще одне зображення оператора F

$$F(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_k f^{(k-1)}(a) + \int\limits_a^b \tilde{\Phi}(t) f^{(n)}(t) dt, \tag{2.9}$$

яке задовольняє тим же вимогам, що і (2.4).

Тоді з формул (2.4) і (2.9) матимемо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{(k-1)}(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_k f^{(k-1)}(a), \quad \int\limits_a^b \Phi(t) f^{(n)}(t) dt = \int\limits_a^b \tilde{\Phi}(t) f^{(n)}(t) dt$$

для кожної вектор-функції $f(t) \in \left(W_p^n\right)^m$. Звідси випливає покомпонетна рівність числових матриць $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k, k = \{0, \ldots, n-1\}$ і матриць-функцій $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t)$ майже скрізь на $[a, b]$, що і доводить єдиність.

Твердження 2.1 доведено.

2.2. Фредгольмовість крайових задач

Розглянемо неоднорідну крайову задачу (2.1), (2.2) і запишемо її у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) — лінійний оператор на парі банахових просторів

$$(L, B) : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \left(W_p^n\right)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1. *Лінійний оператор* (2.10) *обмежений і фредгольмів з нульовим індексом.*

Доведення. Обґрунтуємо неперервність оператора (L, B). Так як оператор B за умовою є лінійним і неперервним, то залишається довести неперервність оператора L, яка еквівалентна його обмеженості (див., наприклад, [48]).

Обмеженість лінійного оператора

$$L : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \left(W_p^n\right)^m$$

випливає з означення норм в просторах Соболєва W_p^n і того, що кожен з цих просторів утворює банахову алгебру. Доведемо фредгольмовість оператора (L, B).

Означимо лінійний обмежений оператор

$$C : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm},$$

поклавши

$$Cy = \left(y(a), y'(a) \ldots, y^{(r-1)}(a)\right).$$

Оскільки неоднорідна задача Коші

$$(L, C)y = (f, c) \in \left(W_p^n\right)^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

має єдиний розв'язок $y \in \left(W_p^{n+r}\right)^m$ при будь-якому значенні правої частини рівняння, то оператор (L, C) бієктивний. За теоремою Банаха про обернений оператор він оборотний. З іншого боку, оператор (L, B) допускає зображення у вигляді

$$(L, B) = (L, C) + (0, B - C),$$

де другий доданок є скінченновимірним оператором. Оскільки компактне збурення не змінює фредгольмовість оператора і його індекс (див., наприклад, [31]), то оператора (L, B) фредгольмів з індексом 0.

Теорема 2.1 доведена.

Наслідок 2.1. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1. *Неоднорідна крайова задача* (2.1), (2.2) *має єдиний розв'язок при довільних* $f(\cdot) \in \left(W_p^n\right)^m$ *та* $c \in \mathbb{C}^{rm}$.
2. *Однорідна крайова задача вигляду* (2.1), (2.2) *має лише тривіальний розв'язок.*

З теореми 2.1 випливає, що оператор (L, B) є оборотним тоді і тільки тоді, коли його ядро тривіальне. Цю умову можна переформулювати в конструктивніших термінах.

Позначимо через $Y_k(\cdot) \in \left(W_p^{n+r}\right)^{m\times m}$ розв'язок матричної задачі задачі Коші

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0, \quad t \in [a, b] \tag{2.11}$$

$$Y_k^{(j)}(a) = \delta_{kj} I_m, \qquad k, j = 0, \dots, r-1, \tag{2.12}$$

де δ_{kj} — символ Кронекера. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (2.1) з $f = 0$ можна записати у вигляді

$$y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot) g_k, \tag{2.13}$$

де вектори-стовпці $g_k \in \mathbb{C}^m$ довільні.

Нехай комплекснозначна матриця-функція $Y(\cdot) \in \left(W_p^{n+r}\right)^{m\times m}$. Позначимо через $[BY(\cdot)]$ квадратну матрицю з простору $\mathbb{C}^{m\times m}$, k-ий стовпець якої збігається з дією оператора B на k-ий стовпець матриці-функції $Y(\cdot)$.

Лема 2.3. *Для довільної матриці-функції* $Y(\cdot) \in \left(W_p^{n}\right)^{m\times m}$*, вектора* $q \in \mathbb{C}^m$ *та лінійного неперервного оператора* B *правильна така рівність:*

$$B(Y(t)\cdot q) = [BY(t)]\, q. \tag{2.14}$$

Доведення. Нехай матриця-функція Y має вигляд $Y(t) = (y_{ij}(t))_{i,j=1}^m$, а матриця-стовпець — вигляд $q = (q_j)_{j=1}^m$. Позначимо $(\alpha_i)_{i=1}^m = [BY(\cdot)]\cdot q$ та $(\beta_i)_{i=1}^m = B(Y(\cdot)q)$. Нагадаємо, що k-ий стовпець квадратної матриці $[BY(\cdot)]$ збігається з результатом дії оператора B на k-ий стовпець матриці-функції $Y(\cdot)$. Нехай

$$B(y_k(\cdot))_{k=1}^m = (c_k)_{k=1}^m.$$

При дії оператора B на матрицю-функцію $Y(\cdot)$ отримаємо матрицю

$$[BY(\cdot)] = (c_{ij})_{i,j=1}^m.$$

Тоді

$$(\alpha_i)_{i=1}^m = (c_{ij})_{i,j=1}^m \cdot (q_j)_{j=1}^m = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}q_j\right)_{i=1}^m.$$

Отже, довільний елемент α_i має вигляд

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}q_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тепер

$$(\beta_i)_{i=1}^m = B\left((y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m \cdot (q_j)_{j=1}^m\right) = B\left(\sum_{j=1}^m y_{ij}(\cdot)q_j\right)_{i=1}^m =$$

$$= \sum_{j=1}^m (By_{ij}(\cdot))_{i=1}^m \cdot q_j = \sum_{j=1}^m (c_{ij})_{i=1}^m \cdot q_j = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}\cdot q_j\right)_{i=1}^m.$$

З цього випливає, що $\alpha_i = \beta_i$.

Лема 2.3 доведена.

Теорема 2.2. *Оператор* (L, B) *оборотний тоді і тільки тоді, коли квадратна матриця*

$$([BY_0(\cdot)]\dots[BY_{r-1}(\cdot)]) \tag{2.15}$$

невироджена.

Тут квадратна $rm\times rm$-матриця (2.15) утворена з r прямокутних блоків $[BY_k(\cdot)]$ розмірності $rm\times m$, а j-ий стовпчик матриці $[BY_k(\cdot)]$ співпадає з дією оператора B на j-ий стовпчик матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Доведення. За теоремою 2.1 оператор (L, B) оборотний тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Ker}(L, B) = \{0\}$. Тому достатньо показати, що умова $\mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$ рівносильна виродженості матриці (2.15).

Нехай $\mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$. Тоді існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L, B)y = (0, 0)$, який допускає представлення (2.13), де хоча б один з векторів-стовпців $q_0, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. В силу леми 2.3

$$0 = By(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k(\cdot)q_k) = \sum_{k=0}^{r-1}[BY_k(\cdot)]q_k.$$

Це означає, що блоки матриці (2.15) лінійно незалежні. Тому її стовпці також лінійно незалежні і сама матриця вироджена.

Зворотно, нехай матриця (2.15) вироджена. Тоді її стовпці лінійно незалежні, а, отже, лінійно незалежні і блоки, тобто

$$\sum_{k=0}^{r-1}[BY_k(\cdot)]q_k = 0 \tag{2.16}$$

для деяких вектор-стовпців $q_0, q_1, \dots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, серед яких є ненульовий. Означимо за формулою (2.13) вектор-функцію $y(\cdot) \not\equiv 0$. Для неї $Ly = 0$ і

$$By(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k(\cdot)q_k) = \sum_{k=0}^{r-1}[BY_k(\cdot)]q_k = 0$$

на підставі леми 2.3 і рівності (2.16). Тому $y(\cdot) \in \mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$.

Теорема 2.2 доведена.

2.3. Неперервна залежність розв'язків від параметра

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю неоднорідних крайових задач для систем m лінійних диференціальних рівнянь порядку r:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in [a,b] \qquad (2.17)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \qquad (2.18)$$

де для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є шуканою вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ і задано матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ та лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}. \qquad (2.19)$$

Отже, крайова задача (2.17), (2.18) є тотальною щодо простору W_p^{n+r}.

Будемо вважати далі, що виконується

Передумова $\mathcal{I}$. *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(\cdot,0) = 0, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тим самим вектор-функція $y(\cdot,0)$ визначена однозначно. Наступна теорема вказує конструктивні умови при яких неперервний оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним при достатньо малих значеннях параметра ε і одночасно гарантує неперервну залежність розв'язків від параметра на просторі $(W_p^{n+r})^m$.

Теорема 2.3. *Нехай виконується передумова* I *і при* $\varepsilon \to 0+$ *умови*

1) *норма* $\|A_k(\cdot,\varepsilon) - A_k(\cdot,0)\|_{n,p} \to 0$ *для кожного* $k \in \{0,\dots,r-1\}$*;*

2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для кожної вектор-функції* $y \in \left(W_p^{n+r}\right)^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний.*

Якщо, окрім того,

3) $\|f(\cdot,\varepsilon)-f(\cdot,0)\|_{n,p}\to 0,\quad c(\varepsilon)\to c(0),$

то єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ *при малих* ε *крайової задачі* (2.17), (2.18) *задовольняє граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot,\varepsilon)-y(\cdot,0)\|_{n+r,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{2.20}$$

Зауваження 2.1. Запишемо при кожному $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ оператор $B(\varepsilon)$ у вигляді (2.4), де $\alpha_k=\alpha_k(\varepsilon)$, $\Phi(t)=\Phi(t,\varepsilon)$. Тоді з критерію слабкої збіжності функціоналів на просторі на просторі $L_p\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ випливає, що умова 2) рівносильна виконанню таких умов на $\alpha_k(\varepsilon)$ і $\Phi(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$:

2a) $\alpha_k(\varepsilon)\to\alpha_k(0)$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$ для кожного $k\in\{1,2,\ldots,n+r\}$;

2b) $\|\Phi(\cdot,\varepsilon)\|_q=O(1)$;

2c) $\int\limits_a^t\Phi(s,\varepsilon)ds\to\int\limits_a^t\Phi(s,0)ds$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$ для кожного $t\in(a,b]$.

При цьому умова $\|B(\varepsilon)-B(0)\|\to 0$ рівносильна умові 2a) і більш сильній, чим умова 2b) і 2c), умові

2d) $\|\Phi(\cdot,\varepsilon)-\Phi(\cdot,0)\|_q\to 0.$

Зауваження 2.2. З умов 1) і 2) теореми 2.3 не випливає, що оператор $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))$ є малим у операторній нормі збуренням оборотного оператора $(L(0),B(0))$, оскільки із виконання умов 2b) і 2c) не випливає співвідношення 2d). Більш того, множина необоротних операторів у парі банахових просторів $\left(W_p^{n+r}\right)^m\to\left(W_p^n\right)^m\times\mathbb{C}^m$ є секвенціально щільним в просторі всіх лінійно неперервних операторів, які діють в цій парі просторів.

Доведення теореми 2.3. Розглянемо спочатку параметризовану сім'ю неоднорідних задач Коші для системи $k\in\mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t,\varepsilon)=A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)+g(t,\varepsilon),\quad t\in[a,b],\quad y(a,\varepsilon)=h(\varepsilon). \tag{2.21}$$

Тут при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є шуканою вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in \left(W_p^{n+1}\right)^k$ і задані матриця-функція $A(\cdot, \varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^{k \times k}$, вектор-функція $g(\cdot, \varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^k$ і вектор $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}^k$. Як відомо, ця задача однозначно розв'язна при кожному фіксованому ε.

Лема 2.4. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

a) $\|A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0)\|_{n,p} \to 0$*;*

b) $\|g(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, 0)\|_{n,p} \to 0$*;*

c) $h(\varepsilon) \to h(0)$*.*

Тоді

$$\|y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0)\|_{n+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.22}$$

Це твердження є наслідком теореми 1.1 з роботи [12].

Доведемо спочатку теорему 2.3 для задачі Коші

$$L(\varepsilon)x(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad t \in [a, b] \tag{2.23}$$

$$x^{(j-1)}(a, \varepsilon) = h_j(\varepsilon), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{2.24}$$

де параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Єдиний розв'язок $x(\cdot, \varepsilon)$ цієї задачі належить простору $\left(W_p^{n+r}\right)^m$.

Лема 2.5. *Нехай виконуються умови* 1)*,* 3) *теореми* 2.3 *і, крім того,*

$$h_j(\varepsilon) \to h_j(0), \quad \varepsilon \to 0+, \qquad \textit{для кожного } j \in \{1, \ldots, r\} \tag{2.25}$$

Тоді

$$\|x(\cdot, \varepsilon) - x(\cdot, 0)\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.26}$$

Доведення. При $r = 1$ лема 2.5 рівносильна лемі 2.4. Нехай $r \geq 2$. Як відомо, задача Коші (2.23), (2.24) рівносильна задачі (2.21), в якій

$$A(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -A_0(\cdot,\varepsilon) & -A_1(\cdot,\varepsilon) & -A_2(\cdot,\varepsilon) & \dots & -A_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \in \left(W_p^n\right)^{mr\times mr},$$

де

$$g(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\left(0, f(\cdot,\varepsilon)\right),$$
$$h(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\left(h_1(\cdot,\varepsilon), \dots, h_r(\cdot,\varepsilon)\right).$$

Розв'язки цих задач пов'язані між собою рівністю

$$y(\cdot,\varepsilon) = \operatorname{col}\Big(x(\cdot,\varepsilon), x'(\cdot,\varepsilon), \dots, x^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\Big). \tag{2.27}$$

При цьому, умови 1), 3) теореми 2.3 і умова (2.25) рівносильні відповідно умовам a), b), c) леми 2.4, а асимптотична рівність (2.26) з урахуванням (2.27) рівносильна (2.22). Таким чином, твердження леми 2.5 випливає із справедливості леми 2.4.

Встановимо тепер існування і єдиність розв'язку крайової задачі (2.17), (2.18) при малих значеннях параметра ε.

Лема 2.6. *Нехай виконуються умови* 1) *і* 2) *теореми* 2.3 *і передумова* I. *Тоді для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний.*

Доведення. Розглянемо при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і $k \in \{0, \dots, r-1\}$ задачу Коші (2.11), (2.12), де

$$Y_k^{(r)}(\cdot) = Y_k^{(r)}(\cdot,\varepsilon), \qquad A_{r-j}(\cdot) = A_{r-j}(\cdot,\varepsilon).$$

Вона складається з m задач Коші виду (2.23), (2.24) з $f = 0$ відносно вектор-функції $x(\cdot,\varepsilon)$, які є стовпцями матриці $Y_k(\cdot,\varepsilon)$. Тоді, в силу леми 2.5

$$\|Y_k(\cdot,\varepsilon) - Y_k(\cdot,0)\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2.28}$$

Звідки на підставі умови 2) теореми 2.3 випливає збіжність при $\varepsilon \to 0+$ блочних числових матриць

$$([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\dots[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]) \to ([B(0)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\dots[B(0)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)])\,.$$

Але гранична квадратна матриця невироджена в силу передумови I і теореми 2.2. Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\dots[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]) \neq 0. \tag{2.29}$$

Звідки на підставі теореми 2.2 випливає оборотність оператора $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$.

Лема 2.6 доведена.

Розглянемо тепер напіводнорідну крайову задачу

$$L(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \qquad B(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2.30}$$

яка залежить від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$.

Лема 2.7. *Нехай виконуються умови* 1), 2), 3) *теореми* 2.3. *Тоді*

$$\|v(\cdot,\varepsilon) - v(\cdot,0)\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.31}$$

Доведення. Запишемо при кожному $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.30) у вигляді

$$v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon) \tag{2.32}$$

з довільними вектор-функціями $q_0(\varepsilon),\dots,q_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, де кожна матриця-функція $Y_k(\cdot,\varepsilon) \in \left(W_p^{n+r}\right)^{m\times m}$. На підставі леми 2.3 маємо

$$B(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} B(\varepsilon)\left(Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \left[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\right]q_k(\varepsilon).$$

Тому друге рівняння в формулі (2.30) рівносильно тому, що

$$\sum_{k=0}^{r-1} \left[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\right]q_k(\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2.33}$$

Рівність (2.33) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$([B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\ldots[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)])\,q(\varepsilon)=c(\varepsilon) \qquad (2.34)$$

відносно вектора-стовпця $q(\varepsilon) = \operatorname{col}(q_0(\varepsilon),\ldots,q_{r-1}(\varepsilon))$. Звідси і з умови 3) теореми 2.3 й формули (2.29) випливає, що система (2.34) має єдиний розв'язок при достатньо малих ε і він задовольняє граничну рівність $q(\varepsilon)\to q(0)\in\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. З неї і співвідношення (2.28) випливає потрібна формула (2.31).

Лема 2.7 доведена.

Доведемо тепер правильність граничної рівності (2.20) без припущення про однорідність диференціального рівняння (2.17). Для кожного достатньо малого $\varepsilon\geq 0$ покладемо

$$z(\cdot,\varepsilon)=y(\cdot,\varepsilon)-x(\cdot,\varepsilon),$$

де вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком неоднорідної крайової задачі (2.17), (2.18), а вектор-функція $x(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші (2.23), (2.24) з $h_j(\varepsilon)\equiv 0$. Тоді $z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)\equiv 0,\qquad B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)=\tilde{c}(\varepsilon),$$

де

$$\tilde{c}(\varepsilon):=c(\varepsilon)-B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^{rm}.$$

На підставі зроблених припущень і леми 2.5 маємо збіжність $\tilde{c}(\varepsilon)\to\tilde{c}(0)$ при $\varepsilon\to 0+$. Тому за лемою 2.7 виконується

$$\|z(\cdot,\varepsilon)-z(\cdot,0)\|_{n+r,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \qquad (2.35)$$

Із співвідношення (2.26) і (2.35) випливає потрібна гранична властивість (2.20).

Теорема 2.3 доведена.

2.4. Критерій неперервної залежності розв'язків від параметра

Виявляється, що сформульвані умови в теоремі 2.3 є не лише достатніми, а й необхідними. І у цьому підрозділі буде встановлено критерій неперевної залежності розв'язків крайової задачі вигляду (2.17), (2.18) для систем диференціальних рівнянь довільного порядку.

Розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного $j \in \{1,\dots,r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Розглядається також ще одна

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Введемо

Означення 2.1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (2.17), (2.18) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються такі дві умови:*

(∗) *Існує додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *таке, що для довільних* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, *функції* $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$ *і вектора* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$.

(∗∗) *Збіжність правих частин* $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ *в* $(W_p^n)^m$ *та* $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *тягне за собою збіжність*

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{2.36}$$

Теорема 2.4. *Розв'язок крайової задачі* (2.17), (2.18) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (II).

Доведення. Достатність умов (0), (I) і (II) для того, щоб задача (2.17), (2.18) задовольняла означення 2.1 доведена в теоремі 1.1 роботи [12] для $r = 1$ і в теоремі 2.3 для $r \geq 2$. Доведемо необхідність цих умов. Припустимо, що ця задача задовольняє означення 2.1; тоді виконується умова (0). Залишається показати, що для цієї задачі виконуються умови (I) і (II). Розділимо це доведення на три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (2.17), (2.18) задовольняє граничну умову (I).

Якщо $r \geq 2$, то зведемо крайову задачу (2.17), (2.18) до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього, як звичайно, покладемо

$$x(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(y(\cdot,\varepsilon), y'(\cdot,\varepsilon), \ldots, y^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (W_p^{n+1})^{rm},$$
$$\tilde{f}(\cdot,\varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(0, f(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (W_p^n)^{rm},$$

та

$$\tilde{A}(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} O_m & I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & I_m \\ A_0(\cdot,\varepsilon) & A_1(\cdot,\varepsilon) & A_2(\cdot,\varepsilon) & \ldots & A_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \in (W_p^n)^{rm\times rm}.$$

З огляду на зображення (2.4), покладемо

$$\tilde{B}(\varepsilon)x := \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k(\varepsilon) x_k(a) + \sum_{k=r}^{n+r} \alpha_k(\varepsilon) x_r^{(k-r)}(a) + \int_a^b \Phi(t,\varepsilon) x_r^{(n+1)}(t) \qquad (2.37)$$

для довільної вектор-функції $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_r)$, де $x_1, \ldots, x_r \in (W_p^{n+1})^m$. Лінійне відображення $x \mapsto \tilde{B}x$ є неперервним оператором з $(W_p^{n+1})^{rm}$ в $\mathbb{C}^{rm}$.

Розглянемо крайову задачу

$$x'(t,\varepsilon)+\tilde{A}(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon)=\tilde{f}(t,\varepsilon),\quad t\in[a,b], \tag{2.38}$$

$$\tilde{B}(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon)=\tilde{c}(\varepsilon). \tag{2.39}$$

Звісно, функція $y(t,\varepsilon)\in\left(W_p^{n+r}\right)^m$ є розв'язком крайової задачі (2.17), (2.18) тоді і тільки тоді, коли функція $x(t,\varepsilon)\in\left(W_p^{n+1}\right)^{rm}$ є розв'язком крайової задачі (2.38), (2.39). У випадку $r=1$, покладемо $x(\cdot,\varepsilon):=y(\cdot,\varepsilon)$, $\widetilde{f}(\cdot,\varepsilon):=f(\cdot,\varepsilon)$, $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon):=A_0(\cdot,\varepsilon)$ і $\widetilde{B}(\varepsilon):=B(\varepsilon)$, тому задача (2.17), (2.18) збігається з задачею (2.38), (2.39).

Гранична умова (I) еквівалентна збіжності $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon)\to\widetilde{A}(\cdot,0)$ в просторі $(W_p^n)^{rm\times rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Доведемо цю збіжність. Спочатку зауважимо таке: якщо $\tilde{f}(\cdot,\varepsilon)$ і $\tilde{c}(\varepsilon)$ не залежать від $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$, то $y(\cdot,\varepsilon)\to y(\cdot,0)$ в $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon\to 0+$ за умовою $(**)$ означення 2.1. Остання збіжність еквівалента тому, що $x(\cdot,\varepsilon)\to x(\cdot,0)$ в $(W_p^{n+1})^{rm}$ при $\varepsilon\to 0+$.

Розглянемо матричну крайову задачу

$$X'(t,\varepsilon)+\widetilde{A}(t,\varepsilon)X(t,\varepsilon)=0_{rm},\quad t\in[a,b], \tag{2.40}$$

$$[\widetilde{B}(\varepsilon)X(\cdot,\varepsilon)]=I_{rm}. \tag{2.41}$$

Тут невідома матриця-функція $X(\cdot,\varepsilon):=(x_{j,k}(\cdot,\varepsilon))_{j,k=1}^m$ належить простору $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ і

$$[\widetilde{B}(\varepsilon)X(\cdot,\varepsilon)]:=\left(\widetilde{B}(\varepsilon)\begin{pmatrix}x_{1,1}(\cdot,\varepsilon)\\ \vdots\\ x_{rm,1}(\cdot,\varepsilon)\end{pmatrix}\ \ldots\ \widetilde{B}(\varepsilon)\begin{pmatrix}x_{1,rm}(\cdot,\varepsilon)\\ \vdots\\ x_{rm,rm}(\cdot,\varepsilon)\end{pmatrix}\right).$$

Крайова задача (2.40), (2.41) є сукупністю rm крайових задач (2.38), (2.39), праві частини яких не залежать від ε. Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок $X(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ і він задовольняє умову $X(\cdot,\varepsilon)\to X(\cdot,0)$ в $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Відмітимо, що $\det X(t,\varepsilon)\neq 0$ для кожного $t\in[a,b]$, бо інакше функції-стовпці $X(\cdot,\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечить (2.41). Оскільки $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ — банахова алгебра, то $(X(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to (X(\cdot,0))^{-1}$ в $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Окрім того, $X'(\cdot,\varepsilon) \to X'(\cdot,0)$ в $(W_p^{n})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Отже, на підставі (2.40) маємо збіжність

$$\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) = -X'(\cdot,\varepsilon)(X(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -X'(\cdot,0)(X(\cdot,0))^{-1} = \widetilde{A}(\cdot,0)$$

у просторі $(W_p^{n})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Тут використовуємо той факт, що $(W_p^{n})^{rm\times rm}$ є банаховою алгеброю при $n \geq 1$, і, що $(X(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to (X(\cdot,0))^{-1}$ в $C([a,b],\mathbb{C}^{rm\times rm})$ при $n=0$. Отже, крайова задача (2.17), (2.18) задовольняє граничну умову (I). Тому

$$\|A_{r-j}(\varepsilon)\|_{n,p} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{2.42}$$

для кожного $j \in \{1,\ldots,r\}$.

Крок 2. Доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора (2.3). Припустимо супротивне: існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0,\varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Для кожного номера k виберемо функцію $w_k \in (W_p^{n+r})^m$ таку, що

$$\|w_k\|_{n+r,p} = 1 \quad i \quad \|B(\varepsilon^{(k)})w_k\|_{\mathbb{C}^{rm}} \geq \frac{1}{2}\|B(\varepsilon^{(k)})\|.$$

Покладемо $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}w_k$, $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot,\varepsilon^{(k)})$ та $c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot,\varepsilon^{(k)})$. Оскільки $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^n)^m$, бо, за доведеним, $A(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє умову (I). Оскільки $1/2 \leq \|c(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1$, то, перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор в $\mathbb{C}^m$. Таким чином, для кожного номера k вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in (W_p^{n+r})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k)})\,y(t,\varepsilon^{(k)}) = f(t,\varepsilon^{(k)}), \quad t \in [a,b],$$
$$B(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}).$$

Тут, нагадаємо, $f(\cdot,\varepsilon^{(k)})\to 0$ в $(W_p^{n+r})^m$ і $c(\varepsilon^{(k)})\to c(0)\neq 0$ при $k\to\infty$. Тому на підставі умови $(**)$ означення 2.1 функція $y(\cdot,\varepsilon^{(k)})$ збігається у просторі $(W_p^{n+r})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot,0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)y(t,0)=0$, $t\in[a,b]$, і неоднорідної крайової умови $B(0)y(\cdot,0)=c(0)$. Але $y(\cdot,\varepsilon^{(k)})\to 0$ у тому ж просторі. Отже, $y(\cdot,0)\equiv 0$, що суперечить цій неоднорідній крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\|=O(1)$ при $\varepsilon\to 0+$.

*Крок 3.*Тепер можемо показати, що виконується умова (II). За доведеним у попередніх двох кроках, існують числа $\gamma'>0$ і $\varepsilon'\in(0,\varepsilon_1)$ такі, що $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\|\leq\gamma'$ для усіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon')$, де $\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора, що діє з простору $(W_p^{n+r})^m$ у простір $(W_p^n)^m\times\mathbb{C}^m$. Виберемо функцію $y\in(W_p^{n+r})^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot,\varepsilon):=L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon):=B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon\to 0+$ маємо:

$$\begin{aligned}&\big\|B(\varepsilon)y-B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m}\leq\big\|(f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon))-(f(\cdot,0),c(0))\big\|_{(W_p^n)^m\times\mathbb{C}^m}\\&\leq\gamma'\,\big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon))-(f(\cdot,0),c(0))\big)\big\|_{n+r,p}\\&=\gamma'\,\big\|(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),c(0))-(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,0),c(0))\big\|_{n+r,p}\to 0\end{aligned}$$

за умовою $(**)$ означення 2.1. Відмітимо, що остання рівність правильна, оскільки

$$(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),c(0))=y=(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)).$$

Отже, крайова задача (2.17), (2.18) задовольняє умову (II).

Теорема 2.4 доведена.

Легко перевірити, що умова $(*)$ і $(**)$ означення 2.1 рівносильні відповідно умовам

($\star$) існує додатнє $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$ оператор $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))$ є оборотним;

($\star\star$) оператор $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}$ збігається до оператора $(L(0),B(0))^{-1}$ в сильній операторній топології.

Можна також показати, що система умов (I), (II) рівносильна тому, що виконується

Гранична умова (IV). Оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до оператора $(L(0), B(0))$ в сильній операторній топології.

Таким чином, з теореми 2.4 випливає, що за умови (0) маємо еквівалентність граничної умови (IV) парі умов $(\star)$ і $(\star\star)$.

Це може здатися дещо несподіваним, бо якщо X і Y нескінченно вимірні банахові простори з базисом Шаудера, то множина необоротних операторів секвенціально щільна в $L(X, Y)$ в сильній топології. Крім того, в цьому випадку задане на множині оборотних операторів відображення $\mathrm{Inv} : T \mapsto T^{-1}$ є скрізь розривним в сильній операторній топології.

2.5. Двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі

Покладемо

$$d_{n,p}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{n,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}.$$

Величини

$$\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,p}$$

і $d_{n,p}(\varepsilon)$ є похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (2.17), (2.18), якщо $y(\cdot,0)$ розглядати як її наближений розв'язк. Покажемо, що вони мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 2.5. *Нехай крайова задача* (2.17), (2.18) *задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I), (II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2 *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\gamma_1 d_{n,p}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,p} \leq \gamma_2 d_{n,p}(\varepsilon). \tag{2.43}$$

Тут числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ *і* $c(\varepsilon)$.

Доведення. Спочатку доведемо ліву частину оцінки (2.43). Граничні умови (I) і (II) тягнуть сильну збіжність операторів $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ до $(L(0), B(0))$ при $\varepsilon \to 0+$. Нагадаємо, що оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$, де $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, є обмеженим

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{2.44}$$

Існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що його норма $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$. Справді, у противному разі існувала б послідовність додатних чисел $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $\|(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty$ при $k \to \infty$, що на підставі теореми Банаха-Штейнгауза суперечило б вказаній сильній збіжності. Отже, ліва частина двобічної оцінки (2.43) виконується для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon')$, де $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо тепер праву частину оцінки. Відповідно до теореми 2.4, крайова задача (2.17), (2.18) задовольняє означення 2.1. Тому оператор (2.44) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, і, більше того, його обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (W_p^n)^m$ і $c \in \mathbb{C}^{rm}$ за умовою $(**)$ означення 2.1 маємо збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, c) =: y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, c)$$

в $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Отже, існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon'$ і γ_2 такі, що норма оберненого оператора $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\| \leq \gamma_2$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$. Це випливає із теореми Банаха-Штейнгауза, так само як це було показано раніше.

Теорема 2.5 доведена.

2.6. Некласичні багатоточкові крайові задачі

Застосуємо отримані результати до багатоточкових крайових задач. Довільним чином виберемо $N \geq 1$ точок $t_1, \ldots, t_N \in [a, b]$ і розглянемо багатоточкову крайову задачу

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{2.45}$$

$$By \equiv \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) = c. \tag{2.46}$$

Тут є невідомою вектор-функція $y \in (W_p^{n+r})^m$ і задано матриці-функції $A_{r-j} \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (W_p^n)^m$, матриці $\alpha_i^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$ і вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$.

З огляду на неперервне вкладення

$$(W_p^{n+r})^m \hookrightarrow (C^{n+r-1})^m \tag{2.47}$$

ліва частина крайової умови (2.46) має сенс, і відображення $y \to By$, де $y \in (W_p^{n+r})^m$, є неперервним оператором з простору $B : (W_p^{n+r})^m$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$. Тому крайова задача (2.45), (2.46) є тотальною щодо простору Соболєва W_p^{n+r}. Відмітимо, що крайова умова (2.46) не є класичною, тому що містить похідні $y^{(l)}$ порядку $l \geq r$, якщо $n \geq 1$.

Розглянемо такий приклад задачі вигляду (2.45), (2.46), де $r = N = 1$ і $n \geq 1$, залежної від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b \tag{2.48}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \alpha(\varepsilon)y'(t(\varepsilon),\varepsilon) + \beta(\varepsilon)y(t(\varepsilon),\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2.49}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ є невідомою вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+1})^m$ і задано матрицю-функцію $A(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точку $t(\varepsilon) \in [a, b]$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Для крайової умови (2.49) оператор $B(\varepsilon)$ сильно збігається до $B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$, якщо

$$\alpha(\varepsilon)\to\alpha(0),\quad \beta(\varepsilon)\to\beta(0),\quad t(\varepsilon)\to t(0)\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{2.50}$$

Тому з теореми 2.3 негайно випливає

Наслідок 2.2. *Нехай однорідна крайова задача* (2.48), (2.49) *має лише тривіальний розв'язок при* $\varepsilon = 0$. *Тоді, якщо* $A(t,\varepsilon)\to A(t,0)$ *в* $(W_p^n)^m$ *при* $\varepsilon\to 0+$ *і виконуються умови* (2.50), *то розв'язок крайової задачі* (2.48), (2.49) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$.

Перейдемо до загальної ситуації. Розглядаємо (2.45), (2.46) як граничну крайову задачу при $\varepsilon\to 0+$ для такої багатоточкової крайової задачі, залежної від параметра $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon)\equiv y^{(r)}(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{r}A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad a\le t\le b, \tag{2.51}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon),\varepsilon)=c(\varepsilon). \tag{2.52}$$

Тут для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ є невідомою вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^{n+r})^m$ і задано матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^n)^m$, матриці $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_{i,j}(\varepsilon)\in[a,b]$ і вектор $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{rm}$. Окрім того, фіксовано натуральні числа $k_0,k_1,\ldots,k_N$. Не припускається, що коефіцієнти $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$ і $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{i,j}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε. Як і (2.45), (2.46), крайова задача (2.51), (2.52) тотальна щодо простору Соболєва W_p^{n+r} для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Використання у крайовій умові (2.52) повторної суми за індексами i та j зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{i,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$ у залежності від значень параметра i. У граничному випадку при $\varepsilon = 0$ на відрізку $[a,b]$ вибрано N точок t_i. У випадку, коли $\varepsilon > 0$, на відрізку вибрано більше точок, які поєднані у $N+1$ серію таким чином: для кожного фіксованого $i \in \{1, \dots, N\}$ усі точки $t_{i,j}(\varepsilon)$ повинні мати спільну границю t_i при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

Відмітимо, що у роботах Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [39, 40, 41] досліджено багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Соболєва, але в цих роботах точки відрізка $[a, b]$, які фігурують у крайовій умові, не залежать від параметра. Тому задачі (2.51), (2.52) навіть у випадку $r = 1$ не зводяться до багатоточкових крайових задач, досліджених раніше.

Оскільки крайова задача (2.51), (2.52) і гранична крайова задача (2.45), (2.46) обидві тотальні щодо простору W_p^{n+r}, то до них застосовні теореми 2.3 і 2.4. У цих теоремах фігурує гранична умова (II), згідно з якою оператор $B(\varepsilon)$ сильно збігається до оператора $B(0)$. З огляду на спеціальний вигляд крайових умов у цих задачах, можна пред'явити явні умови, достатні для виконання граничної умови (II).

Теорема 2.6. *Припустимо, що крайова задача* (2.51), (2.52) *задовольняє такі умови при* $\varepsilon \to 0+$*:*

(d1) $t_{i,j}(\varepsilon) \to t_i$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$ *та* $j \in \{1, \dots, k_i\}$*;*

(d2) $\sum\limits_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_i^{(l)}$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$ *та* $l \in \{0, \dots, n + r - 1\}$*;*

(d3) $\|\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} = O(1)$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$ *та* $j \in \{1, \dots, k_i\}$, *де* $1/p + 1/q = 1$*;*

(d4) $\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \to 0$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, k_i\}$ *та* $l \in \mathbb{Z}$ *таких, що* $0 \le l \le n + r - 2$*;*

(d5) $\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для всіх* $j \in \{1, \dots, k_0\}$ *та* $l \in \{0, \dots, n + r - 1\}$.

Тоді ця задача задовольняє граничну умову (II) *теореми* 2.4.

Зробимо деякі коментарі до формулювання цієї теореми. В умовах (d3) і (d4) вираз $\| \cdot \|$ є нормою комплексної числової матриці і ця норма дорівнює сумі абсолютних значень усіх елементів матриці. Якщо $p = 1$, то $1/q = 0$ в умові (d3) і вона означає, що $\|\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$. Умови (d2) та (d4) допускають, що коефіцієнти $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)$ при $l \leq n+r-2$ можуть зростати нескінченно при $\varepsilon \to 0+$, але не надто швидко. Те саме стосується і коефіцієнтів при старших похідних $\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)$, якщо $p > 1$, з огляду на умову (d3). З умови (d5) випливає, що не потрібно вимагати збіжність точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$, на відміну для умови (d1).

Відмітимо, що система умов (d1) – (d5) не гарантує рівномірну збіжність $B(\varepsilon) \to B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$ неперервних операторів з $(W_p^{n+r})^m$ в $\mathbb{C}^{rm}$. Тому теорема 2.7 не випливає з теореми Банаха про оборотний оператор.

Доведення теореми 2.6. За теоремою Банаха–Штейнгауза, достатньо показати, що норма оператора $B(\varepsilon) : (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ обмежена при $0 < \varepsilon \ll 1$ і, що $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожної вектор-функції y, яка належить щільній множині $(C^\infty)^m := C^\infty([a,b], \mathbb{C}^m)$ в просторі $(W_p^{n+r})^m$.

Доведемо спочатку обмеженість норми $B(\varepsilon)$. Виберемо довільну вектор-функцію $y \in (W_p^{n+r})^m$ і достатньо малий параметр $\varepsilon > 0$. З огляду на (2.46) і (2.52) маємо нерівність

$$\begin{aligned} \|B(0)y - B(\varepsilon)y\| \leq \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{j=1}^{k_0} \|\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,j}(\varepsilon))\| + \\ + \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{\varkappa} \left\| \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \right\|. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Тут, використовуючи неперервність вкладення (2.47), запишемо нерівність

$$\|\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,j}(\varepsilon))\| \leq c_0 \|\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+r,p} \tag{2.54}$$

для всіх $l \in \{0, \ldots, n+r-1\}$ і $j \in \{1, \ldots, k_0\}$, де c_0 — норма оператора вкладення (2.47).

Крім того, для будь-яких $l \in \{0,\dots,n+r-1\}$ і $i \in \{1,\dots,N\}$, маємо нерівність

$$\begin{aligned}&\Bigl\|\alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon))\Bigr\| \le \\ &\le \Bigl\|\Bigl(\alpha_i^{(l)} - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\Bigr) y^{(l)}(t_i)\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\bigl(y^{(l)}(t_i) - y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon))\bigr)\Bigr\| \le \\ &\le c_0 \Bigl\|\alpha_i^{(l)} - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\Bigr\| \cdot \|y\|_{n+r,p} + \sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\|.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Тут, для $l = n+r-1$ і кожного $j \in \{1,\dots,k_i\}$, правильна нерівність

$$\begin{aligned}&\|\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(n+r-1)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(n+r-1)}(t_i)\| \le \\ &\le \|\alpha_{i,j}^{(n+r-1)}(\varepsilon)\|\, c_1\, \|y\|_{n+r,p}\, |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q},\end{aligned} \tag{2.56}$$

де c_1 — норма неперервного оператора вкладення простору Соболєва W_p^{n+r} в комплексний простір Гельдера $C^{n+r-1,1/q}([a,b])$ (див., наприклад, [77, Теорема 4.6.1(e)]). Якщо $1/q = 0$, то останній простір є C^{n+r-1} і нерівність (2.56) правильна з $c_1 := 2c_0$. Крім того, для кожного $l \in \mathbb{Z}$, де $0 \le l \le n+r-2$, за теоремою Лагранжа маємо

$$\begin{aligned}\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| &\le \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \max_{a \le t \le b} \|y^{(l+1)}(t)\| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \le \\ &\le \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\|\, c_0 \|y\|_{n+r,p} |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Тепер з нерівностей (2.53) – (2.57) і умов (d2) – (d5) негайно випливає, що

$$\|B(0)y - B(\varepsilon)y\| \le c\, \|y\|_{n+r,p}$$

де число $c > 0$ не залежить від $y \in (W_p^{n+r})^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$. Отже, норма оператора $B(\varepsilon)$ обмежена при $0 < \varepsilon \ll 1$.

Окрім того,

$$\|\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,j}(\varepsilon))\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{2.58}$$

на підставі нерівності (2.54) і умови (d5), і

$$c_0\left\|\alpha_i^{(l)}-\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\right\|\cdot\|y\|_{n+r,p}\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+ \tag{2.59}$$

за умовою (d2). Якщо $y\in(C^\infty)^m$, то

$$\begin{aligned}&\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\|\cdot\|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon))-y^{(l)}(t_i)\|\\ &\leq\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\|\max_{a\leq t\leq b}\|y^{(l+1)}(t)\|\cdot|t_{i,j}(\varepsilon)-t_i|\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+\end{aligned} \tag{2.60}$$

для всіх $l\in\{0,\ldots,n+r-1\}$ на підставі умов (d1), (d3) і (d4). Отже, формули (2.53) і (2.58) – (2.60) дають збіжність $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon\to 0+$ для кожного $y\in(C^\infty)^m$.

Теорема 2.6 доведена.

З теорем 2.4 і 2.6 негайно випливає

Теорема 2.7. *Припустимо, що однорідна гранична крайова задача* (2.45), (2.46) *має лише тривіальний розв'язок. Нехай багатоточкова крайова задача* (2.51), (2.52) *задовольняє граничну умову* (I) *та умови* (d1) – (d5). *Тоді розв'язок цієї задачі неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертаційної роботи отримано такі основні результати:

1. Для систем $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку r введено тотальні крайові задачі щодо простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$. Ці задачі утворюють максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких пробігають простір $(W_p^{n+r})^m$.

2. Доведено, що крайові задачі, тотальні щодо простору W_p^{n+r}, є фредгольмовими з індексом нуль і отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

3. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору W_p^{n+r} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r}.

4. Отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі за нормою у просторі W_p^{n+r}.

5. Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку r, залежних від параметра ε, введено новий широкий клас багатоточкових крайових задач, розв'язки яких належать до простору Соболєва W_p^{n+r}. Встановлено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r}.

РОЗДІЛ 3

ТОТАЛЬНІ ЩОДО ПРОСТОРІВ СЛОБОДЕЦЬКОГО КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

3.1. Деякі властивості просторів Слободецького

У цьому розділі задано дійсне число $p > 1$, натуральне число m і скінченний інтервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Окрім того, задано неціле число $s > 0$. Як звичайно, $[s]$ і $\{s\}$ позначають відповідно цілу і дробову частину числа s.

Комплексний простір Слободецького $W_p^s := W_p^s([a, b], \mathbb{C})$ і норма $\| \cdot \|_{s,p}$ у ньому означені у п. 16 переліку умовних позначень. Відмітимо, що функція f належить до W_p^s тоді і тільки тоді, коли $f \in L_p$ і узагальнена похідна $f^{([s])} \in W_p^{\{s\}}$. Більше того, виконується еквівалентність норм

$$\|f\|_{s,p} \asymp \|f\|_{0,p} + \|f^{([s])}\|_{\{s\},p}$$

(див., наприклад, [77] (п.4.4.1, зауваження 2)).

Простір W_p^s банахів. Відомо, що він є банаховою алгеброю відносно операції множення функцій тоді і лише тоді, коли $s > 1/p$ (див., наприклад, [78, с. 211] (теорема 2.8.3)). Замість цієї властивості у випадку $s \leq 1/p$ будемо використовувати такий результат.

Позначимо через $M(W_p^s)$ лінійний простір усіх функцій $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ таких, що $\varphi f \in W_p^s$ для довільної функції $f \in W_p^s$ і

$$\|\varphi\|_{M(W_p^s)} := \sup\left\{ \frac{\|\varphi f\|_{s,p}}{\|f\|_{s,p}} : f \in W_p^s,\ f \neq 0 \right\} < \infty.$$

Функції $\varphi \in M(W_p^s)$ називають (поточковими) мультиплікаторами у просторі W_p^s. Простір $M(W_p^s)$ наділений нормою $\|\varphi\|_{M(W_p^s)}$, яка дорівнює лівій частині останньої нерівності.

Лема 3.1. *Нехай* $s \in (0,1)$. *Тоді* $W_p^1 \subset M(W_p^s)$ *та існує число* $c > 0$ *таке, що*

$$\|\varphi\|_{M(W_p^s)} \leq c\,\|\varphi\|_{1,p} \quad \textit{для довільного} \quad \varphi \in M(W_p^s).$$

Доведення. Нехай функція φ належить до соболєвського простору W_p^1. Оскільки він є банаховою алгеброю, то

$$\|\varphi f\|_{1,p} \leq c_1 \|f\|_{1,p}$$

для довільного $f \in W_p^1$, де число $c_1 > 0$ не залежить від f. Окрім того, оскільки

$$\varphi \in W_p^1 \subset W_1^1 \subset C[a,b],$$

то

$$\|\varphi f\|_p \leq c_2 \|f\|_p \leq c_2 \|f\|_{1,p},$$

для довільного $f \in L_p$, де $c_2 := \|\varphi\|_\infty$.

Тому відображення $f \mapsto \varphi f$ є обмеженим лінійним оператором як на просторі W_p^1, так і на просторі L_p. За інтерполяційною теоремою [77] (теорема 4.3.1/1) це відображення є обмеженим оператором і на банаховому просторі W_p^s, оскільки $0 < s < 1$. Отож, $W_p^1 \subset M(W_p^s)$. Окрім того, згідно з [77] (теорема 1.3.1 (a)) з останніх двох нерівностей випливає потрібна оцінка для $\|\varphi\|_{M(W_p^s)}$.

Лема 3.1 доведена.

Зауваження 3.1. Якщо $s \in (1/p, 1)$, то лема 3.1 випливає з того, що простір W_p^s є банаховою алгеброю.

3.2. Теорема про гомеоморфізм

Позначимо через $Y(\cdot) \in \left(W_p^{s+1}\right)^{m\times m}$ єдиний розв'язок (матрицант) матричної задачі Коші

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0, \quad t \in [a,b], \tag{3.1}$$

$$Y(a) = I_m, \tag{3.2}$$

де комплекснозначний коефіцієнт $A(\cdot) \in \left(W_p^s\right)^{m\times m}$.

Розглянемо питання про коректність задачі (3.1), (3.2) у просторі Слободецького з нормою $\|\cdot\|_{s+1,p}$. Для цього введемо метричний простір матриць-функцій

$$(\mathcal{Y}_p^{s+1}) := \{Y(t) \in (W_p^{s+1})^{m\times m} : Y(a) = I_m, \det Y(t) \neq 0\}$$

з метрикою

$$d_p^{s+1}(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{s+1,p}.$$

Теорема 3.1. *Нелінійне відображення* $\gamma : A \mapsto Y$, *де* $A \in (W_p^s)^{m\times m}$, *а* $Y \in AC[a,b]$ *є розв'язок задачі* (3.1), (3.2), *є гомеоморфізмом банахового простору* $(W_p^s)^{m\times m}$ *на метричний простір* $(\mathcal{Y}_p^{s+1})$.

Доведення теореми розділимо на три частини.

1. Покажемо спочатку, що це відображення є бієкцією. Скористаємося методом математичної індукції по $[s]$.

1.1.Покажемо справедливість твердження для випадку $[s] = 0$. Оскільки $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ і усі елементи матриці-функції обмежені на $[a,b]$, то $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$. Отже, $Y(\cdot) \in (W_p^1)^{m\times m}$. Тому $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ за лемою 3.1. Звідси $Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$.

1.2. Припустимо, що для $[s] = k$ правильною є імплікація $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m} \Rightarrow Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$.

1.3. Проведемо тепер доведення для $[s] = k + 1$. Нехай $A(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$. За індуктивним припущенням, матрицант $Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$. Тоді $Y'(\cdot) = -A(\cdot) \cdot Y(\cdot)$ належатиме просторову $(W_p^{s+1})^{m\times m}$, оскільки W_p^{s+1} є алгебра. Отже, $Y(\cdot) \in (W_p^{s+2})^{m\times m}$. Таким чином, відображення $\gamma : (W_p^s)^{m\times m} \to (\mathcal{Y}_p^{s+1})$ є ін'єктивним, оскільки $A(\cdot) = Y'(\cdot) \cdot Y(\cdot)$.

Покажемо, що це відображення є сюр'єктивним. Нехай $Y(\cdot) \in (\mathcal{Y}_p^{s+1})$, покладемо $A(\cdot) := Y'(\cdot) \cdot Y(\cdot)$. Оскільки $Y'(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ і $Y^{-1}(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$, то $Y'(\cdot) \cdot Y^{-1}(\cdot)$ належить до $(W_p^s)^{m\times m}$. Тому матрична функція $A(\cdot)$ належить до $(W_p^s)^{m\times m}$. У випадку $0 < s < 1$ це випливає з леми 3.1, а у випадку $s \geq 1$ – з того, що W_p^s є алгеброю. Тепер $Y(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші (3.1), (3.2), де $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, тобто $\gamma(A(\cdot)) = Y(\cdot)$. Отже, відображення γ є сюр'єктивним. Таким чином, маємо бієкцію

$$\gamma : (W_p^s)^{m\times m} \leftrightarrow (\mathcal{Y}_p^{s+1}). \tag{3.3}$$

2. Покажемо, що розв'язок $Y(\cdot) \in (\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (3.1) неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ при $m \in \mathbb{N}$, $s > 0$, $p > 1$.

Застосуємо знову принцип математичної індукції за $[s]$.

2.1. Доведемо твердження для випадку $[s] = 0$, тобто покажемо неперервну залежность розв'язку $Y(\cdot) \in (\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (3.1) від коефіцієнта $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$.

Для цього розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю матричних задач вигляду

$$Y'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{3.4}$$

$$Y(a;\varepsilon) = I_m, \quad a \in [a,b], \tag{3.5}$$

де $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^s)^{m\times m}$.

Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконується умова

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0, \tag{3.6}$$

яка рівносильне такій:

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_p\to 0, \tag{3.7}$$

і

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b\frac{|(A(x;\varepsilon)-A(x;0))-(A(y;\varepsilon)-A(y;0))|^p}{|x-y|^{1+sp}}dxdy\to 0.$$

Покажемо, що в такому випадку однозначно визначені розв'язки задач (3.4), (3.5) задовольняють граничне співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{s+1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{3.8}$$

За теоремою (Т. І. Кодлюк), що, якщо виконується (3.7), то

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{3.9}$$

Залишилось тепер оцінити ліву частину (3.8)

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{s,p}=\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s,p}\le$$

$$\le\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;0)\|_{s,p}+\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;0)-A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s,p}\le$$

$$\le c\|A(\cdot;\varepsilon)\|_{s,p}\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{1,p}+c\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s,p}\|Y(\cdot;0)\|_{1,p}.$$

Звідси на підставі леми 3.1 та умов (3.6), (3.9) отримуємо (3.8).

2.2. Припустимо, що умови леми виконуються для випадку $[s]=k$ і розв'язок $Y(\cdot)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (3.1) неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$.

2.3. Доведемо тепер правильність твердження для $[s]=k+1$. Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконано умову

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0. \tag{3.10}$$

Тоді

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s-1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

і за індуктивним припущенням

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Тому

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{s,p}=\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s,p}\leqslant$$

$$\leqslant\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s,p}\|Y(\cdot;\varepsilon)\|_{s,p}+\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{s,p}\|A(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0,$$

$\varepsilon\to 0+$. Отже, виконується (3.8).

Таким чином, неперервність відображення (3.3) доведена для всіх s.

3. Залишилось показати, що коефіцієнти $A(\cdot;\varepsilon)\in(W_p^s)^{m\times m}$ неперервно залежать від розв'язків $Y(\cdot;\varepsilon)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (3.4).

Нехай для розв'язків задач (3.4), (3.5) виконується співвідношення (3.8). Тоді

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+,$$

та

$$\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon)-Y^{-1}(\cdot;0)\|_{s+1,p}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+, \tag{3.11}$$

оскільки $(W_p^{s+1})^{m\times m}$ — банахова алгебра. Тому

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s,p}=\|Y'(\cdot;\varepsilon)Y^{-1}(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)Y^{-1}(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0, \quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Таким чином, встановлено бінеперервність відображення

$$A(\cdot)\mapsto Y(\cdot):(W_p^s)^{m\times m}\to(\mathcal{Y}_p^{s+1}).$$

Теорему 3.1 доведено.

3.3. Фредгольмовість крайових задач

Розглянемо лінійну крайову задачу на просторі $(W_p^{s+1})^m$ для системи m диференціальних рівнянь першого порядку вигляду:

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{3.12}$$

$$By(\cdot) = c. \tag{3.13}$$

Тут матриця-функція $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (W_p^s)^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а B є лінійний неперервний оператор

$$B : (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m.$$

Розв'язком цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (3.12) в кожній точці (a, b) (при $[s] = 0$, майже скрізь). Крім того, $y(\cdot)$ повинна задовольняти рівність (3.13).

Якщо y належить W_p^{s+1}, то y' належить W_p^s як узагальнена похідна. Якщо $[s] = 0$, то $W_p^{s+1} \subset W_p^1 \subset AC[a, b]$ і y' існує майже скрізь на $[a, b]$. Якщо $[s] \geq 1$, то $W_p^{s+1} \subset W_p^2 \subset C^1[a, b]$ і y' – класична похідна, абсолютно неперервна на $[a, b]$.

Неоднорідна крайова умова (3.13) охоплює всі класичні види крайових умов: задачі Коші, двоточкові та багатоточкові, інтегральні та мішані крайові задачі, а також ряд некласичних задач, бо може містити похідні аж до порядку $[s] \geq 1$. За аналогією з [12, 51] крайову задачу (3.12), (3.13) можна називати тотальною щодо простору W_p^{s+1}.

Запишемо неоднорідну крайову задачу (3.12), (3.13) у вигляді операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c).$$

Теорема 3.2. *Відображення $y \mapsto (L, B)y$, де $y \in \left(W_p^{s+1}\right)^m$, є обмеженим лінійним оператором*

$$(L, B) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m.$$

Цей оператор фредгольмів з індексом 0.

Доведення. Обмеженість лінійного оператора $L : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m$ випливає з означення норм у просторах Слободецького і, при $s \in \left(0, \frac{1}{p}\right]$ – леми 3.1 і при $s > \frac{1}{p}$ – з того, що W_p^s є банаховою алгеброю. Оператор B обмежений за означенням. Доведемо фредгольмовість оператора (L, B).

Означемо лінійний обмежений оператор $C : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m$, поклавши

$$Cy := y(a).$$

Оскільки неоднорідна задача Коші

$$(L, C)y = (f, c) \in \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m$$

має єдиний розв'язок $y \in \left(W_p^s\right)^m$ при будь-якому значенні правої частини рівняння, то оператор (L, C) бієктивний. За теоремою Банаха про обернений оператор він є оборотний. З іншого боку, оператор (L, B) допускає представлення

$$(L, B) = (L, C) + (0, B - C),$$

де другий доданок - це скінченновимірний оператор. Тоді за теоремою Нікольського [76] (§21.5) , оператор (L, B) є фредгольмовим з індексом 0.

Теорему 3.2 доведено.

Сформулюємо критерій оборотності оператора (L, B) тобто умови, коли неоднорідна крайова задача (3.12), (3.13) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правої частини диференціального рівняння та крайової умови.

Позначимо

$$[BY(t)] := \left(B \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) \\ \vdots \\ y_{m,1}(t) \end{pmatrix} \ldots B \begin{pmatrix} y_{1,m}(t) \\ \vdots \\ y_{m,m}(t) \end{pmatrix} \right). \tag{3.14}$$

Цю матриця отримуємо в результаті дії оператора B на стовпчики матриканта $Y(t)$ рівняння (3.1), (3.2).

Теорема 3.3. *Оператор* (L, B) *оборотний тоді і тільки тоді, коли квадратна* $(m \times m)$*-матриця* $[BY(\cdot)]$ *невироджена.*

Доведення. За теоремою 3.2 неперервна оборотність оператора (L, B) рівносильна тому, що ядро $N(L, B) = \{0\}$. На підставі леми 2.3

$$y(\cdot) \in N(L, B) \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{C}^m : y(t) = Y(t) \cdot q, [BY(\cdot)]\, q = 0).$$

Тому $N(L, B) \neq \{0\}$ тоді й лише тоді, коли $\det [BY(\cdot)] = 0$.

Теорема 3.3 доведена.

3.4. Неперервна залежність розв'язків від параметра

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю тотальних щодо простору W_p^{s+1} крайових задач вигляду

$$y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{3.15}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{3.16}$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot;\varepsilon)$ належить простору $\left(W_p^s\right)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon)$ – простору $\left(W_p^s\right)^m$, $c(\varepsilon)$ – простору $\mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ – лінійний неперервний оператор:

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m.$$

Для того, щоб досліджувана задача мала зміст, будемо надалі вважати, що виконується

Припущення $\mathcal{E}$. *Гранична однорідна крайова задача вигляду* (3.15), (3.16) *має лише тривіальний розв'язок, тобто, є невиродженою.*

У цьому випадку гранична неоднорідна крайова задача завжди має єдиний розв'язок.

Теорема 3.4. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0;$

2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$, *для довільного* $y \in \left(W_p^{s+1}\right)^m$;

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним. Якщо, окрім цього*

3) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0, \quad c(\varepsilon) \to c(0),$

то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ *задачі* (3.15), (3.16) *задовольняє граничну властивість*

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.17}$$

Попередньо встановимо декілька допоміжних тверджень.

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови 1) и 2) теореми 3.4 і припущення* $\mathcal{E}$. *Тоді для достатно малих* $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Доведення. З умови 1) за теоремою 3.1 про гомеоморфізми випливає, що

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.18}$$

Тоді на підставі умови 2 отримаємо збіжність числових матриць

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot,0)]\,, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.19}$$

Гранична квадратна матриця невироджена згідно з припущенням $\mathcal{E}$ і теоремою 3.3. Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det\,[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] \neq 0.$$

Звідси за теоремою 3.3 випливає оборотність оператора $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$.

Лему 3.2 доведено.

Розглянемо разом з вихідною неоднорідною крайовою задачею (3.15), (3.16) відносно вектор-функції $y(t;\varepsilon)$ ще три векторні крайові задачі:

$$v'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{3.20}$$

$$x'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) = 0, \tag{3.21}$$

$$w'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)w(\cdot;\varepsilon) = 0, \tag{3.22}$$

де параметр $\varepsilon \geq 0$ малий. Як відомо, крайова задача (3.21) (задача Коші) завжди має єдиний розв'язок.

З огляду на лему 3.2

$$y(\cdot;\varepsilon) = v(\cdot;\varepsilon) + w(\cdot;\varepsilon), \tag{3.23}$$

для малих $\varepsilon \geq 0$. Тому для доведення теореми 3.4 достатньо показати, що при виконанні її умов є правильними такі співвідношення:

$$\|v(\cdot;\varepsilon) - v(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{3.24}$$

$$\|w(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.25}$$

Лема 3.3. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови теореми 3.4. Тоді правильне граничне співвідношення (3.24).*

Доведення. З першої рівності крайової задачі (3.20) випливає, що

$$v(\cdot;\varepsilon) = Y(\cdot;\varepsilon)\widetilde{c}(\varepsilon), \tag{3.26}$$

для деякого $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Звідси, враховуючи другу рівність задачі (3.20) і лему 2.3, отримуємо

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]\widetilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon).$$

Тому на підставі леми 3.2, теореми 3.3, формули (3.19) і умови 2), маємо

$$\widetilde{c}(\varepsilon) = [B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon) \to [B(0)Y(\cdot;0)]^{-1}c(0) = \widetilde{c}(0), \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Звідси на підставі (3.18) і (3.26) отримуємо співвідношення (3.24).

Лему 3.3 доведено.

Лема 3.4. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови 1)–3) теореми 3.4. Тоді розв'язок задачі (3.21) має властивість*

$$\|x(\cdot;\varepsilon) - x(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{3.27}$$

Доведення. Нехай число $\varepsilon > 0$ достатньо мале. Розв'язок задачі (3.21) допускає представлення

$$x(t;\varepsilon) = Y^{-1}(t;\varepsilon)\int\limits_a^t Y(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds. \tag{3.28}$$

З умови 1) за теоремою 3.1 про гомеоморфізм маємо

$$\|Y^{\pm 1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{\pm 1}(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0 \tag{3.29}$$

при $\varepsilon \to 0+$. Тоді на підставі умови 3) і співвідношення (3.29)

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)f(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)f(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{3.30}$$

Для $0 < s < 1$ це випливає з леми 3.1, а для $s \geq 1$ – з того, що W_p^s є банахова алгебра. Тепер з співвідношень (3.28)-(3.30) отримаємо потрібне нам співвідношення (3.27).

Лему 3.4 доведено.

Лема 3.5. *За умов теореми* 3.4 *виконується граничне співвідношення* (3.25)*.*

Доведення. Вектор-функція $u(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі вигляду (3.20):

$$\begin{aligned} u'(t;\varepsilon) &= -A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon), \\ B(\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon) &= B(\varepsilon)x(\cdot;\varepsilon) =: \widetilde{c}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Тут $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ при $\varepsilon \to 0+$ на підставі властивості 2) і леми 3.4. Тому за лемою 3.3 маємо збіжність

$$\|u(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.32}$$

Із рівності $w(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;\varepsilon)$ та формул (3.27) і (3.32) отримуємо (3.25).

Лему 3.4 доведено.

Потрібна гранична властивість (3.17) є безпосереднім наслідком рівності (3.23) і лем 3.3, 3.5. Цим і доведено теорему 3.4.

Зазначимо, що в умовах теореми 3.4 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до оператора $(L(0), B(0))$ в сильній операторній топології, але, узагалі кажучи, не збігаються за нормою.

3.5. Критерій неперервної залежності розв'язків від параметра

Встановимо критерій неперервності розв'язку $y = y(t, \varepsilon)$ крайової задачі (3.15), (3.16) за параметром ε у просторі W_p^{s+1} при $\varepsilon \to 0+$.

Розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot, \varepsilon) \to A(\cdot, 0)$ в $(W_p^s)^{m \times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (W_p^{s+1})^m$.

Розглянемо ще одну умову

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t, 0) = 0, \quad a \leq t \leq b, \qquad B(0)y(\cdot, 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тепер сформулюємо наше

Означення 3.1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (3.15), (3.16) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:*

($*$) *Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^s)^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{s+1})^m$.*

($**$) *Збіжність правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ в $(W_p^s)^m$ та $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ тягне за собою збіжність розв'язків*

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \textit{в} \quad (W_p^{s+1})^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3.33}$$

Теорема 3.5. *Розв'язок крайової задачі* (3.15), (3.16) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II).

Доведення. Достатність умов (0), (I) і (II) для того, щоб задача (3.15), (3.16) задовольняла означення 3.1 була доведена в теоремі 3.4 . Доведемо необхідність. Припускаємо, що ця задача задовольняє означення 3.1, тоді виконується умова (0). Залишається показати, що для цієї задачі виконуються умови (I) і (II). Розділимо це доведення на три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (3.15), (3.16) задовольняє граничну умову (I). В силу умови $(*)$ основного означення, оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : \, (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m \tag{3.34}$$

оборотний для будь якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) = 0 \cdot I_m, \quad t \in [a,b],$$

$$[BY(\cdot,\varepsilon)] = I_m.$$

Ця крайова задача є сукупністю m крайових задач (3.15), (3.16) із правими частинами, не залежними від ε. Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$ і він задовольняє умову $Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0)$ у просторі $(W_p^{s+1})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Відмітимо, що $\det Y(t,\varepsilon) \neq 0$ для довільного $t \in [a,b]$, бо інакше стовпці-функції матриці $Y(\cdot,\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові $[BY(\cdot,\varepsilon)] = I_m$. Тому

$$A(\cdot,\varepsilon) = -Y'(\cdot,\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot,0)(Y(\cdot,0))^{-1} = A(\cdot,0)$$

у просторі $(W_p^{s+1})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$, тобто виконується умова (I).

Крок 2. Покажемо, що виконується умова (II) . Спочатку доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора

$B(\varepsilon) : (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне: існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Для кожного номера k виберемо функцію $x_k \in (W_p^{s+1})^m$ таку, що

$$\|x_k\|_{s+1,p} = 1 \quad i \quad \|B(\varepsilon^{(k)})x_k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\|B(\varepsilon^{(k)})\|.$$

Покладемо

$$\begin{gathered} y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1} x_k, \\ f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}), \\ c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}). \end{gathered}$$

Оскільки $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ у просторі $(W_p^{s+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^s)^m$, бо, за доведеним, $A(\cdot, \varepsilon)$ задовольняє умову (I). Оскільки $1/2 \leq \|c(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1$, то, перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор в $\mathbb{C}^m$. Таким чином, для кожного номера k вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in (W_p^{n+1})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$\begin{gathered} L(\varepsilon^{(k)})\, y(t, \varepsilon^{(k)}) = f(t, \varepsilon^{(k)}), \quad t \in [a, b], \\ B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}). \end{gathered}$$

Тут, нагадаємо, $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^{n+1})^m$ і $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0) \neq 0$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови $(**)$ базового означення функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$ збігається у просторі $(W_p^{n+1})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot, 0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)y(t, 0) = 0$, $t \in [a, b]$, і неоднорідної крайової умови $B(0)y(\cdot, 0) = c(0)$. Але, згадаємо, $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ у тому ж просторі. Отож, $y(\cdot, 0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. Тепер можемо показати, що виконується умова (II). За доведеним у попередніх двох абзацах, існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_1)$ такі, що $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для усіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon')$, де $\| \cdot \|$ є норма обмеженого оператора, що діє з простору $(W_p^{n+1})^m$ у простір $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо функцію $y \in (W_p^{n+1})^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot, \varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon \to 0+$ маємо:

$$\begin{gathered}
\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\
\leq \big\|(f(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), c(0))\big\|_{(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m} \leq \\
\leq \gamma' \, \big\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), c(0))\big)\big\|_{s+1,p} = \\
= \gamma' \, \big\|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot, 0), c(0)) - \\
-(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot, 0), c(0))\big\|_{s+1,p} \to 0
\end{gathered}$$

за умовою $(**)$. Отже, крайова задача (3.15), (3.16) задовольняє умову (II).

Теорема доведена.

3.6. Двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі

Покладемо

$$\widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon) := \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Величини

$$\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p}$$

і $\widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon)$ є похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (3.15), (3.16), якщо $y(\cdot,0)$ розглядати як її наближений розв'язк.

Теорема 3.6. *Нехай крайова задача* (3.15), (3.16) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2 такі, що для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка*

$$\gamma_1\,\widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon) \leq \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p} \leq \gamma_2\,\widetilde{d}_{s,p}(\varepsilon). \tag{3.35}$$

Тут числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (3.15), (3.16) мають однаковий порядок.

Доведення теореми 3.6. Доведемо спочатку ліву частину подвійної нерівності (3.35). Згідно з граничними умовами (I) і (II)

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)), \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Тому норми операторів обмежені деяким числом $\gamma' > 0$ при $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Дійсно, припустивши протилежне, можна знайти послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ таку, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $\|(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)}))\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Але за теоремою Банаха-Штейнгауза це суперечить сильній збіжності $(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)}))$ до $(L(0), B(0))$ при $k \to \infty$. Тому для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2')$

$$\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \leq$$
$$\leq \gamma'\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p},$$

тобто встановлена ліва частина (3.35) із $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо праву частину подвійної нерівності (3.35). За теоремою 3.5 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ має обмежений обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ для довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon)$, причому виконується

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1}, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Справді, вибравши $f \in (W_p^n)^m$ та $c \in \mathbb{C}^m$, маємо

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, c) =: y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, c),$$

в $(W_p^{n+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Тоді за теоремою Банаха-Штейнгауза аналогічним чином, який наведений у попередньому абзаці, випливає, що норми цих обернених операторів обмежені. Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$

$$\|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{s+1,p} \leq$$
$$\leq \gamma_2\big(\,\|L(\varepsilon)y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot, 0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}\big).$$

Звідси негайно випливає права частина двобічної оцінки (3.35).

Теорема 3.6 доведена.

3.7. Некласичні багатоточкові крайові задачі

Розглянемо некласичну багатоточкову крайову задачу для системи неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку, яка залежить від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, де $\varepsilon_0 > 0$

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \qquad t \in [a, b], \tag{3.36}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{l=0}^{[s]} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon), \varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{3.37}$$

де матриця-функції $A(\cdot; \varepsilon) \in \left(W_p^s\right)^{m \times m}$, вектор-функції $f(\cdot; \varepsilon) \in \left(W_p^s\right)^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, матриці $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m \times m}$, а точки $t_i \in [a, b]$ мають відповідну серію точок $t_{i,j}$, де $\quad i \in \overline{0, p}, \quad j \in \overline{1, k_i}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad l \in \overline{0, [s]}$.

Розв'язком цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (3.36) в кожній точці $[a, b]$. Крім того, $y(\cdot)$ повинна задовольняти умову (3.37). Вона є некласичною при $s > 1$, бо містить похідні шуканої вектор-функції до порядку $[s]$.

Як і в другому розділі, використання у крайовій умові повторної суми за індексами i і j зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{i,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра i. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $i \in \overline{0, p}$ усі точки $t_{i,j}(\varepsilon)$ мають спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядається така крайова задача:

$$L(0)y(t; 0) = f(t, 0), \qquad t \in [a, b], \tag{3.38}$$

$$B(0)y(\cdot, 0) \equiv \sum_{l=0}^{[s]} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)}(0) y^{(l)}(t_i(0); 0) = c(0), \tag{3.39}$$

де матриці $\alpha_i^{(l)}(0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$, точки $t_i \in [a, b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y(\cdot, \varepsilon) \mapsto B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon)$ є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3.40}$$

Крайова задача (3.36), (3.37) при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ відповідає лінійний обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3.41}$$

Оскільки дана задача є тотальною щодо простору $\left(W_p^{s+1}\right)^m$, то, як показано в теоремі 3.2, оператор (3.41) є фредгольмовим з індексом нуль для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Надалі вважатимемо, що виконується

Припущення $\mathcal{E}'$. *Однорідна гранична крайова задача*

$$L(0)y(t, 0) = 0, \quad t \in [a, b] \quad B(0)y(\cdot, 0) = 0,$$

має лише тривіальний розв'язок.

Звідси випливає, що при $\varepsilon = 0$ фредгольмів оператор (3.41) є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0)) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \leftrightarrow \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m.$$

Тому крайова задача (3.38),(3.39) має один і тільки один розв'язок $y(t, 0) \in \left(W_p^{s+1}\right)^m$ для довільно вибраних правих частин $f(t, 0) \in \left(W_p^s\right)^m$ і $c(0) \in \mathbb{C}^m$.

Теорема 3.7. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0)\|_{s,p} \to 0$;

2) $t_{i,j}(\varepsilon) \to t_i$ *для будь-яких* $i \in \overline{1, p}$ *та* $j \in \overline{1, k_i}$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_i^{(l)}$ *для будь-яких* $l \in \overline{0, [s]}$ *та* $i \in \overline{1, p}$;

4) $|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)| \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \to 0$ *і* $|\alpha_{i,j}^{([s])}(\varepsilon)| = O(1)$ *для будь-яких* $l \in \overline{0, [s]-1}$, $i \in \overline{1,p}$ *та* $j \in \overline{1,k_i}$;

5) $\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для будь-яких* $l \in \overline{0,[s]}$ *та* $j \in \overline{1,k_0}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний. Якщо, окрім того,*

6) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad c(\varepsilon) \to c(0)$,

то однозначно визначений розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (3.36), (3.37) *задовольняє граничне співвідношення* (3.17).

Оскільки задача (3.36), (3.37) є тотальною щодо простору $(W_p^{s+1})^m$, то для доведення цієї теореми достатньо показати, що умова 2) теореми 3.4 є наслідком умов 2) - 5) теореми, що доводяться. Встановимо попередньо дві леми.

Лема 3.6. *Нехай для задачі* (3.36) – (3.37) *при* $\varepsilon \to +0$ *виконуються умови* 2), 3) *і* 4) *теореми* 3.7. *Тоді*

$$\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \to \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0$$

для для будь-яких $y \in (W_p^{s+1})^m$, $l \in \overline{0,[s]}$ *та* $i \in \overline{1,p}$.

Доведення. Для вказаних y, l та i маємо нерівності

$$\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \| \leq$$

$$\leq \| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_i) \| +$$

$$+ \| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_i) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \| \leq$$

$$\leq \| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \left(y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i) \right) \| + \| \left(\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i \right) y^{(l)}(t_i) \| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| + \| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i^{(l)} \| \cdot \|y\|_{s+1,p}.$$

Дослідимо доданки у першій сумі. Нехай $j \in \overline{1, k_i}$. Якщо $l = [s]$, то на підставі умов 2), 4) і неперервності функції $y^{(l)}$ маємо збіжність

$$\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Якщо $l < [s]$, то на підставі теореми Лагранжа про середнє маємо

$$\|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| \leq$$

$$\leq \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l+1)}\|_\infty |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

з огляду на ті самі умови 2) і 4). Отже,

$$\sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Окрім того, за умовою 3) маємо

$$\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i^{(l)} \| \cdot \|y\|_{s+1,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

З останніх двох збіжностей випливає висновок леми 3.6.

Лема 3.7. *Нехай для задачі* (3.36) – (3.37) *при* $\varepsilon \to +0$ *виконується умова* 5) *теореми* 3.7. *Тоді*

$$\sum_{j=1}^{k_0} \alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

для кожного кожного $l \in \overline{0, [s]}$.

Доведення. Нехай $l \in \overline{0, [s]}$. Маємо

$$\| \sum_{j=1}^{k_0} \alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \| \leq \sum_{j=1}^{k_0} \|\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \|y\|_{s+1,p} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0+$ на підставі умови 5). Лема 3.7 доведена.

Доведення теореми 3.7. Запишемо

$$\|B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) - B(0)y(\cdot,0)\| \leq$$

$$\|\sum_{l=0}^{[s]}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{[s]}\sum_{i=1}^{p}\alpha_{i}^{(l)}y^{(l)}(t_i)\| \leq$$

$$\|\sum_{l=0}^{[s]}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{[s]}\sum_{i=1}^{p}\alpha_{i}^{(l)}y^{(l)}(t_i)\|+$$

$$+\|\sum_{l=0}^{[s]}\sum_{j=1}^{k_0}\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon))\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{[s]}\sum_{i=1}^{p}\|\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \alpha_{i}^{(l)}y^{(l)}(t_i)\|+$$

$$+\sum_{l=0}^{[s]}\|\sum_{j=1}^{k_0}\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon))\|.$$

Звідси на підставі лем 3.6 і 3.7 маємо сильну збіжність операторів $B(\varepsilon) \xrightarrow{s} B(0)$. З цієї збіжності і умови 1) випливає висновок теореми 3.7 на підставі теореми 3.4.

Таким чином, встановлено явні достатні умови неперервності за параметром ε при $\varepsilon = 0$ розв'язків задачі (3.36), (3.37). Це досягається, зокрема, завдяки тому, що умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від параметра і мають спільну граничну точку.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертаційної роботи одержано такі основні результати:

1. Для систем $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку введено тотальні крайові задачі щодо простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$. Ці задачі утворюють максимально широкий клас лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких пробігають простір $(W_p^{s+1})^m$.

2. Доведено, що крайові задачі, тотальні щодо простору Слободецького W_p^{s+1}, є фредгольмовими з індексом нуль і отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

3. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у цьому просторі.

4. Отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі за нормою у просторі W_p^{s+1}.

5. Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від параметра ε, введено новий широкий клас багатоточкових крайових задач, розв'язки яких належать до простору Слободецького W_p^{s+1}. Знайдено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у вказаному просторі.

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Для систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку r введено клас тотальних крайових задач щодо простору Соболєва W_p^{n+r}, де ціле $n \geq 0$ і дійсне $p \geq 1$.

2. Доведено, що ці крайові задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів Соболєва та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

3. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Соболєва W_p^{n+r} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{n+r} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі.

4. Для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку введено клас тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1}, де неціле $s > 0$ і дійсне $p > 1$.

5. Доведено, що ці крайові задачі є фредгольмовими з індексом нуль на парі просторів Слободецького та отримано необхідну і достатню умову їх однозначної розв'язності.

6. Для залежних від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ тотальних крайових задач щодо простору Слободецького W_p^{s+1} встановлено конструктивний критерій неперервної залежності розв'язків від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^{s+1} і отримано двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків цих задач до розв'язку незбуреної задачі.

7. Введено широкі класи залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких належать до простору Соболєва W_p^{n+r} у випадку рівнянь порядку $r \geq 1$, або до простору Слободецького W_p^{s+1} у випадку рівнянь першого порядку. Встановлено явні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у вказаних просторах.

Результати, наведені у пп. 3 і 6, є завершеними і непокращуваними для вказаних там крайових задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary-value problems for systems of generalized differential equations / M. Ashordia // Czechoslovak Math. J. — 1996. — Vol. 46, № 3. — P. 385–404.

2. *Beesack P. R.* On the Green's function of an a-point Boundary Value Poblem / P. R. Beesack // Pac. J. of Math. — 1962. — Vol. 12, № 3. — P. 801 – 812.

3. *Boichuk A. A.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 p.

4. *Goriunov A. S.* Resolvent convergence of Sturm-Liouville operators with singular potentials / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Math. Notes. — 2010. — Vol. 87, № 2. — P. 287–292.

5. *Goriunov A. S.* Regularization of singular Sturm-Liouville equations / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Meth. Funk. Analis and Top. — 2010. — Vol. 16, № 2. — P. 120–130.

6. *Goriunov A. S.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Ukr. Math. J. — 2012. — Vol. 63, № 9. — P. 1361–1378.

7. *Goriunov A. S.* Fomally self-adjoint quasidifferential operators and boundary-value problems / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, K. Pankrashkin // Electron. J. Diff. Equ. — 2013. — № 101. — P. 1–16.

8. *Graves L. M.* Theory of function of real variables / L. M. Graves // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Voi. 54, № 5. — P. 487–489.

9. *Grimm L. J.* Multipoint BVP for ODE / L. P. Grimm, P. W. Eloe // Differential Equations and Applications (I): Proc. of the 2 Conference, "Rousse 81". — Bulgaria, 1981.

10. *Hnyp Ye. V.* On the Fredholm boundary-value problems with a parameter on Slobodetsky space / Ye. V. Hnyp// Міжнародна коференція з диференціальних рівнянь, присвячена 110-й річниці Я. Б. Лопатинського, 20–24 вересня, 2016р., Львів, Україна. Тези доповідей. – С. 67

11. *Jackson L. K.* Existense and uniqueness of solutions of boundary value problems for Lipschitz equations / L. K. Jackson // J. Differential Equations. — 1979. — Vol. 32. — P. 76–90.

12. *Kodlyuk T. I.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces / T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets // J. Math. Sciences. — 2013. — Vol. 190, № 4. — P. 589–599.

13. *Kodlyuk T. I.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems / T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, N. V. Reva // Ukr. Math. J. — 2013. — Vol. 65, № 1. — P. 77–90.

14. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1957. — Vol. 7, № 3. — P. 418–449.

15. *Kurzweil J.* Addition to my paper "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter"/ J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1959. — Vol. 9, № 4. — P. 564 – 573.

16. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations / Z. Opial // J. Diff. Equat. — 1967. — № 3. — P. 571–579.

17. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // J. Diff. Equat. — 1967. — Vol. 3, № 3. — P. 423–439.

18. *Tamarkin Y. D.* A lemma of the theory of linear differential systems / Y. D. Tamarkin // Bull. Am. Math. Sos. – 1930. — № 36. — P. 99–102.

19. *Банах С.* Курс функціонального аналізу / С. Банах. — Київ: Рад. шк. — 1948. — 216 с.

20. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский // Москва: Физматгиз. — 1955. — 410 с.

21. *Гамкрелидзе Р. В.* Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах / Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили // ИАН СССР. — 1969. — Т. 33, № 4. — С. 781-839.

22. *Гельфанд И.М.* Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов // Москва: Гос. изд.-во физ.-мат лит.-ры. — 1960. — 316 с.

23. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова / И. И. Гихман // УМЖ. – 1952. — № 4. — С. 215–219.

24. *Гнип Є. В.* Критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва. / Є. В. Гнип, В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. – т. 13, № 2. – С. 111–124.

25. *Гнип Є. В.* Неперервність за пераметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Слободецького. / Є. В. Гнип // Укр. мат. журн. – 2016. – т. 68, № 6. – С. 746–756.

26. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових на просторах Соболєва. / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12. — № 2. — С. 101–112.

27. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Слободецького. / Є. В. Гнип // Матеріали XIV Міжнародної найково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016 6-8 квітня 2016, Київ, Україна. – Київ: "Київський університет 2016. – С. 16-18.

28. *Гнип Є. В.* Про фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Соболєва. / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015, Київ: тези доповідей – Київ: Інститут математики НАН України, 2015.– С. 141.

29. *Гнип Є. В.* Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького. / Є. В. Гнип, В. А. Михайлець // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – т. 13, № 1. – С. 76-87.

30. *Гнып Е. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева. / Е. В. Гнып, Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Укр. мат. журн. – 2015. – т. 67, № 5. – С. 584-591, англ. перевод в Ukrainian Math. J. – 2015. – vol. 67, № 5. – P. 658–667.

31. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — Из-во иностранной л-ры. — Москва, 1962. — 895 с.

32. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — Москва: Наука. — 1967. — 472 с.

33. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — Москва: Наука. — 1965. — 703 с.

34. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных диференциальних уравнений / И. Т. Кигурадзе // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. — Москва, 1987. — Т. 30. — С. 3–103.

35. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе. — Тбилиси: Из-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.

36. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями / И. Т. Кигурадзе // Диф. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 198–209.

37. *Клоков Ю. А.* Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка / А. Ю. Клоков // ДАН СССР. 1967. — Т. 176, № 3. — С. 512–514.

38. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — Из-во иностранной л-ры. — Москва, 1958. — 474 с.

39. *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач / Т. И. Кодлюк // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 203–216.

40. *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 11. – С. 15–19.

41. *Кодлюк Т. І.* Одновимірні крайові задачі з параметром в просторах Соболєва. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Т. І. Кодлюк. — Київ, 2013. — 157 с.

42. *Красносельский М. А.* О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // УМН. — 1955. — Т. 3, № 10. — С. 147–153.

43. *Курцвейль Я.* О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра / Я. Курцвейль, З. Ворель // Чех. матем. ж. — 1957. — Т. 7, №4. — С. 568–583.

44. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774–777.

45. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального рівнянняи / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского ун-та. — 1973. — № 5. — С. 105–132.

46. *Левин А. Ю.* О многоточечной краевой задаче / А. Ю. Левин // Науч. доклад. Высшая школа. — 1985. — № 5. — С. 34–37.

47. *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи / А. Ю. Левин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 136. — № 5. — С. 1022–1025.

48. *Левитан Б. М.* Ведение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы) / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — Москва: Наука, 1970. — 671 с.

49. *Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 227–239.

50. *Михайлец В. А.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді НАН України. — 2008. — № 9. — С. 23–27.

51. *Михайлец В. А.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді НАН України. — 2008. — № 8. — С. 28–30.

52. *Михайлец В. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке / В. А. Михайлец, Г. А. Чеханова // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11. — № 2. — С. 268–274.

53. *Михайлец В. А.* Предельные теоремы для общих одномерных краевых задач / В. А. Михайлец, Г. А. Чеханова // Український математичний вісник. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 227–239.

54. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — Москва: Наука, 1954. — 526 с.

55. *Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a, b]$ / В. А. Михайлец, Г. А. Чеханова // Дововіді НАН України. — 2014. — № 7. — С. 24–28.

56. *Мурач О. О.* Критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків / О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – 2016. – т. 13, № 2. – С. 229–240.

57. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений / Нгуен Тхе Хоан // Дифф. уравнения. — 1993. — Т. 29, №6. — С. 970–975.

58. *Никольский С. М.* Курс математического анализа / С. М. Никольский. — Т. 2. — Издание четвертое, Москва: Наука, 1975 (1991). — 544 с.

59. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференцильных уравнений / И. Г. Петровский. — Москва: Наука, 1970. — 296 с.

60. *Покорный Ю. М.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи / Ю. А. Покорный // Матем. Заметки. — 1968. — Т. 4, № 5. — С. 533–540.

61. *Покорный Ю. М.* О неклассической задаче Валле-Пуссена / Ю. А. Покорный // Диф. уравнения. — 1978. — Т. 14. — С. 1018–1027.

62. *Покорный Ю. М.* Вопросы качественной теории краевой задачи Валле-Пуссена: Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук. — Ленинград, 1980.

63. *Пономарев В. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / В. Д. Пономарев // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, № 5. — С. 929–932.

64. *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Н. В. Рева. — Київ, 2009. — 148 с.

65. *Рид М.* Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. — Москва: Мир. – 1977. – 357 с.

66. *Садовничий В. А.* Теория операторов / В. А. Садовничий. — М.: Высшая школа, 1999. — 386 с.

67. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра / А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. — 1962. — Т. 14, № 3. — С. 289–298.

68. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра / А. М. Самойленко // Доповіді АН УРСР. Сер. А. — 1962. — № 10. — С. 1290–1293.

69. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К.: Вища школа, 1976. — 223 с.

70. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.

71. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. — Москва: ИЛ, 1953. — 346 с.

72. *Смогоржевський О. С.* Функції Гріна лінійних диференціальних систем в одновимірній області / О. С. Смогоржевський // Наук. записки Укр. Наук.-дослідного ін-ту педагогіки. — 1940. — № 2. — С. 5–118.

73. *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ / В.О. Солдатов // Укр. мат. журн. – 2015. – т. 67, № 5. – С. 692–700.

74. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — Москва: Физмат, 1958. — 468 с.

75. *Султанов М. Р.* Об одной разрешимости одной краевой задачи / М. Р. Султанов // Сборник аспирантских работ (точные науки). — Казань, 1970. — С. 260–262.

76. *Треногин В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — Москва: Наука, 1980. — 495 с.

77. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1980. — 664 с.

78. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1986. — 448 с.

79. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — Москва: Мир, 1970. — 720 с.

80. *Хасеинов К. А.* Начальная и многоточечная задачи для линейных дифференциальных уравнений и характеристические уравнения типа Риккати: Автореф. дис. канд. фiз.-мат. наук / К. А. Хасеинов. — Москва, 1984. — 223 с.

81. *Хасеинов К. А.* Сопряженная линейная задача и функции Грина: Методы оптимизации и их приложения / К. А. Хасеинов // Тематич. сб. науч. тр. ВЦСО АНСССР, Иркутск. — 1988. — С. 238–243.

82. *Хасеинов К. А.* Построение сопряженной задачи к линейной многоточечной / К. А. Хасеинов // Матер. 10-ой межвуз. конф. по математике и механике, Т. 2. — Алматы, 2005. — С. 317–322.

83. *Чеханова Г.* Граничний перехiд в однорiжних лiнiйних крайових задачах з параметром: Дисертацiя на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук: 01.01.02 / Г.В. Чеханова. — Київ— Київ, 2014. — 122 с.

84. *Чичкин Е. С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач / Е. С. Чичкин // Изв. вузов Математика. — 1962. — Т. 27, № 2. — С. 170–179.

85. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэфициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — Москва: Наука, 1972. — 718 с.