НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Танцюра Максим Вікторович

УДК 519.21

Граничні теореми для зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук
Пилипенко Андрій Юрійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук
Шевченко Георгій Михайлович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри теорії ймовірностей,
статистики та актуарної математики;

кандидат фізико-математичних наук
Осипчук Михайло Михайлович,
завідувач кафедри статистики і вищої математики
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника.

Захист відбудеться "11" квітня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "7" березня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г. П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. У даній дисертаційній роботі розглядаються мірозначні випадкові процеси – важливий та актуальний розділ теорії випадкових процесів. Як правило, вони отримуються зі скінченних чи зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь, а також як границі таких систем. А саме: розглядається послідовність систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі, в яких кількість частинок зростає, а маса кожної частинки прямує до нуля, та за певних умов доводиться існування границі відповідних мірозначних процесів. Питаннями побудови та існування мірозначних процесів займалися багато математиків з різних точок зору, зокрема Дж. В. Гібс, М. Кац, Г. П. Маккін, Д. А. Доусон, Г. Гартнер, А. С. Шнітман, Д. П. Рюель, Р. Л. Добрушин, М. М. Боголюбов, А. А. Дороговцев, А. Ю. Пилипенко, Д. Я. Петрина, О. Л. Ребенко, В. В. Герасименко та інші. Для побудови мірозначних процесів використовувались різні методи, зокрема методи стохастичних диференціальних рівнянь, побудова гібсових мір, ланцюжків рівнянь Боголюбова, форм Діріхле та інші.

Різноманітні моделі систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі плідно вивчались у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України. Зокрема, А. В. Скороход[1] запропонував опис мірозначної дифузії за допомогою проблеми мартингалів. А. Ю. Пилипенко[2] показав, що ця мірозначна дифузія описується стохастичними диференціальними рівняннями зі взаємодією. А. А. Дороговцев [3] увів клас стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією та дослідив властивості розв'язків таких рівнянь, зокрема навів достатні умови існування стаціонарних розв'язків. Учні А. А. Дороговцева, зокрема М. П. Карликова, Т. В. Маловичко, В. В. Конаровський отримали багато важливих результатів з цієї теми.

[1]Skorokhod A. V. Measure-valued diffusion // Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – **49**., 3. – Pp. 458-464.

[2]Pilipenko A. Yu. Measure-valued diffusions and continual systems of interacting particles in a random medium // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – **57**., 9. – Pp. 1507–1521.

[3]Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки / А. А. Дороговцев. – Киев, 2007. – 289 с. – (Інститут математики НАН України).

Одним з питань, що розглядаються у дисертаційній роботі, є рівняння Маккіна-Власова

$$\begin{cases} dX_t = dw_t + a(X_t, \nu_t)dt, \\ \nu_t = distr(X_t), \\ X|_{t=0} = x_0. \end{cases} \qquad (*)$$

Рівняння подібного типу одними з перших почали вивчати М. Кац та Г. П. Маккін. Рівняння (*) отримується як граничне рівняння для послідовності систем взаємодіючих частинок, в яких кількість частинок зростає до нескінченності, а маса кожної частинки прямує до нуля, а саме:

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = dw_t^i + a(X_t^{i,N}, \mu_t^N)dt, \ i = 1, ..., N, \ t \in [0, T] \\ \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}, \\ X_0^{i,N} = x_0^i. \end{cases}$$

Рівняння типу (*) узагальнювались на різноманітні випадки взаємодії, неоднорідні за часом коефіцієнти тощо, див., наприклад, роботи Г. Гартнера[4], А. С. Шнітмана [5] та Х. Танаки[6].

У даній дисертаційній роботі узагальнено рівняння Маккіна-Власова на випадок, коли розподіл мас частинок є локально скінченною мірою. Отримання такого рівняння ускладнюється тим, що сукупна маса частинок є нескінченною. Зокрема, для нескінченних мір відсутня метрика Васерштейна, а також потрібно доводити, що розподіл мас частинок залишиться локально скінченною мірою. Для отримання такого рівняння як границі зліченних систем доводиться розглядати нескінченні системи стохастичних диференціальних рівнянь.

Існування та єдиність розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь є важливим питанням теорії випадкових процесів. І. І. Гіх-

[4]Gartner J. On the McKean-Vlasov limit for interacting diffusion // Math Nachr. – 1988. – 137 p.

[5]Sznitman A. S. Topics in propagation of chaos // Ecole d'ete de probabilites de Saint-Flour XIX. – Springer Berlin Heidelberg. – 1991. – Pp. 165-251.

[6]Tanaka H. Limit theorems for certain diffusion processes with interaction // Taniguchi Symp. SA Katata / H. Tanaka., 1982. – Pp. 469–488.

ман[7],[8] довів існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння з ліпшицевими коефіцієнтами. У той же час К. Іто незалежно від І. І. Гіхмана побудував подібну теорію стохастичних диференціальних рівнянь, засновану на понятті стохастичного інтегралу. Великий внесок у теорію стохастичних диференціальних рівнянь зробив А. В. Скороход. Зокрема, він довів існування слабкого розв'язку для стохастичного диференціального рівняння з неперервними коефіцієнтами, теорему про існування та єдиність сильного розв'язку, теореми про залежність розв'язків стохастичного диференціального рівняння від початкових даних та інші важливі результати[9]. А. К. Звонкін[10] довів існування та єдиність сильного розв'язку одновимірного стохастичного диференціального рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами. Результат А. К. Звонкіна був узагальнений на багатовимірний випадок у роботі А. Ю. Веретенникова[11]. У роботі Дж. Да Прато[12] доведено існування та єдиність сильного розв'язку нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь. Відмітимо, що припущення цієї роботи не виконані для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь, що розглядаються у дисертації.

Рівняння Маккіна-Власова не вивчалось для випадку, коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною. В даній роботі доведено теорему існування слабкого розв'язку та теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння Маккіна-Власова для систе-

---

[7]Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман. // ДАН СССР. – 1947. – №58. – С. 961–964.

[8]Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман. // Укр. мат. журн. – 1950. – №2. – С. 45–69.

[9]Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов / А. В. Скороход. – К.: Изд-во Киевского университета, 1961. – 216 с.

[10]Звонкин А. К. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос / А. К. Звонкин. // Матем. сб. – 1974. – **93(135)**., 1. – С. 129–149.

[11]Veretennikov A. Y. On strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations / A. Yu. Veretennikov. // Mat. Sb. – 1980. – **111(153)**., 3. – Pp. 434–452.

[12]Da Prato G. Strong uniqueness for stochastic evolution equations in Hilbert spaces perturbed by a bounded measurable drift / G. Da Prato, F. Flandoli, E. Priola, M. Rockner. // Ann. Probab. – 2013. – **41**., 5. – Pp. 3306–3344.

ми взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою. Доведено теореми існування та єдиності сильного та слабкого розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь за припущення, що коефіцієнти системи задовольняють умову скінченності радіусу взаємодії. Також доведено, що рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою є граничним для послідовності рівнянь, що задають рух зліченних систем взаємодіючих частинок, якщо густота розподілу частинок зростає до нескінченності, а маса частинок прямує до нуля.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики Національної академії наук України у відділі теорії випадкових процесів у рамках державної бюджетної науково-дослідної теми "Аналіз складних систем," державний реєстраційний номер 0111U001002.

Мета та завдвння дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв'язання наступних задач.

- Доведення теорем існування та єдиності розв'язку зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими коефіцієнтами.

- Встановлення теорем існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь типу середнього поля з нескінченною масою.

- Доведення граничних теорем для послідовності зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою. Також об'єктом дослідження є рівняння типу Маккіна-Власова для випадку, коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є існування слабкого розв'язку та існування та єдиність сильного розв'язку рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою та рівняння типу Маккіна-Власова для випадку, коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною. Також предметом дослідження є гранична поведінка послідовності рівнянь руху зліченної системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою.

Методика досліджень. У роботі використовуються методи теорії ймовірностей, стохастичних диференціальних рівнянь, стохастичного аналізу та теорії мартингалів.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну роботи, наступні.

1. Доведено теорему існування слабкого розв'язку зліченної системи стохастичних диференціальних рівнянь для обмежених неперервних коефіцієнтів дифузії та переносу.

2. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку зліченної системи стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевим обмеженим коефіцієнтом переносу, який задовольняє умову скінченності радіусу взаємодії та сталого коефіцієнта дифузії.

3. Доведено існування та єдиність сильного розв'язку зліченної системи стохастичних диференціальних рівнянь для ліпшицевого додатньо визначеного коефіцієнта дифузії і неперервного обмеженого коефіцієнта переносу, який задовольняє умову скінченності радіуса взаємодії.

4. Доведено теорему існування слабкого розв'язку рівняння руху континуальної системи взаємодіючих частинок для обмеженого неперервного коефіцієнта переносу та постійного коефіцієнта дифузії.

5. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку континуальної системи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією для обмеженого локально ліпшицевого коефіцієнта переносу та постійного коефіцієнта дифузії.

6. Доведено теорему існування слабкого розв'язку та теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння руху контину-

альної системи взаємодіючих частинок для випадку, коли перенос має вигляд інтеграла за розподілом мас частинок і постійного коефіцієнта дифузії.

7. Доведено слабку збіжність послідовності мірозначних випадкових процесів, що визначаються з рівнянь руху зліченних систем взаємодіючих частинок до розв'язку рівняння типу Маккіна-Власова у випадку нескінченної сукупної маси частинок.

8. Доведено сильну збіжність розв'язків (тобто мірозначних процесів та траєкторій окремих частинок) рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок до розв'язку рівняння типу Маккіна-Власова для випадку нескінченної сукупної маси частинок.

Практичне значення отриманих результатів. Усі отримані у дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальше застосування у різних розділах теорії випадкових процесів.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, представлені у дисертаційній роботі, отримані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові.

Апробація результатів. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- міжнародній науковій конференції “Young Researchers in Stochastic analysis with applications in Biology, Physics and Finance”, Берлін, Потсдам, 2014;
- міжнародній науковій конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”, Київ, 2015;
- міжнародній науковій конференції “Stochastic Processes in Abstract Spaces”, Київ, 2015;
- XVII Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука, Київ, 2016;

- всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано-Франківськ, 2012, 2013, 2014, 2016;

- науковому семінарі "Числення Маллявена та його застосування" відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2010, 2012, 2014, 2015, 2016 (науковий керівник – професор, доктор фізико-математичних наук Андрій Анатолійович Дороговцев).

- науковому семінарі "Forschungseminar, PU", Потсдам, 2013 (науковий керівник – професор, доктор Сільвія Роеллі);

- науковому семінарі "Стохастика та її застосування" факультету кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 (науковий керівник – професор, доктор фізико-математичних наук Олександр Маратович Іксанов);

- науковому семінарі "Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів" при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ "КПІ", Київ, 2016 (наукові керівники – професор, доктор фізико-математичних наук Клесов Олег Іванович та професор, доктор фізико-математичних наук Іванов Олександр Володимирович);

- науковому семінарі "Теорія ймовірностей та математична статистика" кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 (наукові керівники – професор, доктор фізико-математичних наук Юлія Степанівна Мішура та професор, доктор фізико-математичних наук Юрій Васильович Козаченко).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 статтях, опублікованих у фахових виданнях, 3 з яких у журналі, що індексується у науковометричній базі Scopus. Результати роботи також додатково відображено у семи збірниках тез конференцій, три з яких є міжнародними.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та переліку використаних джерел, який містить 73 найменування. Повний обсяг роботи становить 125 сторінок.

Основний зміст дисертації

Перший розділ дисертації містить огляд літератури за тематикою дисертації.

У другому розділі розглядається рівняння руху у випадковому середовищі зліченної системи взаємодіючих частинок.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ простір локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ з топологією грубої збіжності τ :

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\nu, n \to \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ – множина неперервних функцій з компактним носієм. Нехай $a,\ b : \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ – вимірні функції. Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu(t))dt + b(X_k(t), \mu(t))dw_k(t),\ k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

де $\{u_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ – неспадна числова послідовність така, що

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = +\infty,\ \lim_{k\to-\infty} u_k = -\infty.$$

Випадкові процеси $w_k(\cdot)$ є незалежними вінерівськими процесами. Тут $X_k(t)$ будемо інтерпретувати як положення k-ої частинки у момент часу t, міру $\mu(t)$ – як розподіл мас частинок у момент часу t, u_k – як початкове положення k-ої частинки. Функції a та b відповідають за взаємодію частинок.

Позначимо

$$p_w(t, x) = P(\sup_{s\in[0,t]} w(s) \geq x) = 2 \int_{x\vee 0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-y^2/2t) dy,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.2.2}$$

де w – вінерівський процес.

Теорема 2.2.1. *Нехай a та b – обмежені та неперервні за сукупністю змінних функції. Припустимо, що існує стала $L > 0$ така, що початкова міра $\mu(0)$ задовольняє співвідношення*

$$\limsup_{m\to\infty} \mu(0, [-m, m])/m^L < \infty. \tag{2.2.1}$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (2.1.1).

Розглянемо рівняння (2.1.1), в якому $b(x, \mu) \equiv 1$.

$$\begin{cases} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu_t)dt + dw_k(t),\ k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \hfill \mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ \hfill X_k(0) = u_k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Має місце наступна теорема існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (2.1.1).

Теорема 2.3.1. *Припустимо, що:*

1. функція a є вимірною та обмеженою:

$$\|a\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\nu\in\mathfrak{M}} |a(x, \nu)| < \infty;$$

2. функція a має властивість скінченності радіусу взаємодії:

$$\exists d > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \nu \in \mathfrak{M} : a(x, \nu) = a(x, \nu \mathbb{1}_{(x-d,x+d)}),$$

де $(\nu \mathbb{1}_B)(A) = \nu(A \cap B),\ A, B \in B(\mathbb{R})$;

3. з імовірністю 1 існує випадкова послідовність $\{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\forall n \in \mathbb{Z} :$$

$$\inf_{i:u_i\ge y_n} \inf_{t\in[0,T]} (u_i + w_i(t) \wedge 0) - \sup_{i:u_i<y_n} \sup_{t\in[0,T]} (u_i + w_i(t) \vee 0) \ge 2\|a\|_\infty T + d.$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (2.3.1).

З усіх припущень теореми 2.3.1 найскладніше перевірити припущення 3. Наступна теорема дає достатні умови виконання цього припущення.

Теорема 2.3.2. *Припустимо, що існує невипадкова зростаюча послідовність* $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ *така, що:*

1. $\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty,\ \lim_{n\to-\infty} z_n = -\infty$;

2. $\exists\varepsilon_1 > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}:\ \prod_{i\in\mathbb{Z}}\big(1 - p_w(T, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)\big) > \varepsilon_1$.

Тоді виконується припущення 3 теореми 2.3.1.

Для локально скінченної міри ν позначимо

$$\Lambda(\nu) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu([-n, n])}{2n}.$$

Показник $\Lambda(\nu)$ є верхньою оцінкою для "середньої густини" атомів міри ν.

Для довільного $\lambda > 0$ покладемо

$$M_\lambda = \{\nu | \Lambda(\nu) \le \lambda\}.$$

Наступні результати вказують на широкий клас мір $\mu(0)$, для яких виконується припущення 2 теореми 2.3.2.

Теорема 2.3.4. Нехай $\mu_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{u_k} \in M_\lambda,\ \lambda d < 1$. Припустимо, що виконуються умови 1 та 2 теореми 2.3.1. Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.3.1) для довільного $T > 0$.

Теорема 2.3.3. Нехай μ_0 – незалежна від $\{w_k | k \in \mathbb{Z}\}$ пуасонівська точкова міра з інтенсивністю m. Припустимо, що

$$\exists C_m\ \forall[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}:\ m([\alpha, \beta]) \le C_m(\beta - \alpha + 1),$$

і виконуються припущення 1 та 2 теореми 2.3.1. Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.3.1) для довільного $T > 0$.

Наступна теорема дає достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку у випадку неадитивного дифузійного коефіцієнту.

Теорема 2.4.1. *Припустимо, що:*

1. функція a є неперервною та обмеженою:

$$\|a\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\nu\in\mathfrak{M}} |a(x, \nu)| < \infty;$$

2. функція b неперервна, обмежена та відділена від нуля:

$$\|b\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\nu\in\mathfrak{M}} |b(x, \nu)| < \infty, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} \inf_{\nu\in\mathfrak{M}} |b(x, \nu)| > 0;$$

3. існує константа $C_{b,n}$ така, що для довільного натурального n і довільних $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ має місце нерівність

$$|b(x, \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}) - b(y, \sum_{k=1}^{n} \delta_{y_k})| \le C_{b,n}|x-y| + C_{b,n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|;$$

4. функції a та b мають властивість скінченності радіуса взаємодії:

$$\exists d > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall \nu \in \mathfrak{M}:$$

$$a(x,\nu) = a(x, \nu 1\!\!1_{(x-d,x+d)}), \ \ b(x,\nu) = b(x, \nu 1\!\!1_{(x-d,x+d)});$$

5. міра $\mu(0)$ задовольняє наступне припущення: існує невипадкова зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty, \ \ \lim_{n\to-\infty} z_n = -\infty$$

і

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} \sup_{n\in\mathbb{N}} p_w(T\|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2) < \frac{1}{2},$$

$$\exists r > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}: \ \prod_{i\in\mathbb{Z}} \bigl(1 - p_w(T\|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)\bigr) > r.$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (2.1.1).

Зауваження. Прологарифмувавши нескінченні добутки та скориставшись оцінками виду $-Cx < \ln(1-x) < -x, \ x \in (0, 1-\varepsilon)$, легко отримати, що припущення 5 теореми 2.4.1. рівносильне наступній умові: існує невипадкова зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty, \ \ \lim_{n\to-\infty} z_n = -\infty$$

і

$$\exists r > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}: \ \prod_{i\in\mathbb{Z}} \bigl(1 - 2p_w(T\|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)\bigr) > r.$$

У третьому розділі доведено теорему існування та єдиності розв'язку для стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{cases} dX(u,t) = a(X(u,t),\mu(t))dt + dw(t),\ u \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \\ \mu(t) = E\big(m \circ X(\cdot,t)^{-1}\big), \\ X(u,0) = u,\ u \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

де m – локально скінченна міра, w – вінерівський процес.

Рівняння (3.2.1) рівносильне рівнянню Маккіна-Власова у випадку, коли m – ймовірнісна міра, але рівняння (3.2.1) має сенс і для локально скінченної міри m.

Введемо наступні підмножини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_C = \{\mu \in \mathfrak{M} :\ \forall[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R} : \mu([\alpha,\beta]) \leq C(\beta-\alpha+1)\},\ \mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{C>0} \mathfrak{M}_C.$$

Нехай w – вінерівський процес, що породжує фільтрацію $\{\Im_t, t \in [0,T]\}$.

Означення 3.2.1. Сильним розв'язком рівняння (3.2.1) будемо називати $\Im_t$-узгоджену вимірну за (u,t,ω) випадкову функцію $\{X(u,t),\, u \in \mathbb{R}, t \in [0,T]\}$ та $\Im_t$-узгоджений випадковий мірозначний процес $\mu(\cdot)$ такі, що при підстановці у рівняння (3.2.1) з імовірністю 1 отримаємо рівності для всіх $u \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]$.

Означення 3.2.2. Нехай задано функцію $a(\cdot,\cdot)$ та локально скінченну міру m. Ймовірнісний простір з фільтрацією $(\Omega,\Im,(\Im_t, t \geq 0),P)$, $\Im_t$-узгоджені випадкові функції $\{X(u,t), u \in \mathbb{R}, t \in [0,T]\}$, $\Im_t$-узгоджений вінерівський процес w та $\Im_t$-узгоджений мірозначний процес $\mu(\cdot)$ називаються слабким розв'язком рівняння (3.2.1), якщо при підстановці у (3.2.1) з імовірністю 1 отримуємо рівності для всіх $u \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]$.

Теорема 3.3.1. *Припустимо, що:*

1. функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M},\rho)$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;

2. $\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C :\ |a(x_1,\mu) - a(x_2,\mu)| \leq L_C|x_1 - x_2|$;

3. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (3.2.1).

Введемо клас функцій

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} f \subset [-1,1],\ \|f\|_\infty \le 1,\ \|f'\|_\infty \le 1\} \qquad (3.4.1)$$

Введемо метрику на $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\rho_\infty(\mu,\nu) = \sup_{r\in\mathbb{R}} \sup_{f\in F} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+r)(\mu(dx) - \nu(dx)) \right|.$$

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що:*

1. функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M}, \rho)$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних.

2. $\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ |a(x_1,\mu) - a(x_2,\mu)| \le L_C|x_1 - x_2|$.

3. $\exists K > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \mu,\nu \in \mathfrak{M}_\infty\ |a(x,\mu) - a(x,\nu)| \le K\rho_\infty(\mu,\nu)$.

4. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (3.2.1).

Наступні результати дають достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку для випадку, коли функція взаємодії $a(x,\mu)$ є інтегралом за розподілом мас, тобто

$$a(x,\mu) = \int_{\mathbb{R}} b(y-x)\mu(dy). \qquad (3.2.7)$$

Функція a, взагалі кажучи, не буде обмеженою, якщо вона задана рівністю (3.2.7) і, отже, не задовольняє умови теореми 3.4.1. Проте завдяки лінійності взаємодії відносно міри μ теорему існування та єдиності сильного розв'язку та теорему існування слабкого розв'язку можна довести без припущення обмеженості функції a. Рівняння (3.2.1) для випадку, коли функція a відповідає інтегральній взаємодії (3.2.7), можна переписати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} dX(u,t,\omega) = dw_t(\omega) + \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\Omega} b(X(v,t,\widetilde{\omega}) - X(u,t,\omega))P(d\widetilde{\omega})m(dv)dt, \\ X(u,0) = u. \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

Зробимо наступні припущення щодо міри m та функції b:

(A1) існує константа $C_m > 0$ така, що для довільного відрізка $[\alpha, \beta]$ на дійсній прямій

$$m([\alpha,\beta]) \le C_m(\beta - \alpha + 1);$$

(A2) $b \in C^1(\mathbb{R})$;

(A3) існує функція $R : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, R монотонно неспадна на $(-\infty, 0]$ та монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$, така, що $|b(z)| \le R(z)$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, та $C_R := 2\sup_{a\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} R(z+a)m(dz) < +\infty$;

(A4) існує функція $Q : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, Q монотонно неспадна на $(-\infty, 0]$ та монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$, така, що $|b'(z)| \le Q(z)$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, та $C_Q := 2\sup_{a\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Q(z+a)m(dz) < +\infty$.

Нехай $\{X(u,t),\ \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0,T]\}$ – розв'язок рівняння (3.2.8). Позначимо

$$M(t) = \sup_{s\le t}\sup_{u\in\mathbb{R}} |X(u,s) - u|. \tag{3.2.9}$$

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що виконані умови (A1)-(A4). Тоді існує розв'язок (3.2.8) такий, що*

$$\forall \alpha > 0\ E\exp(\alpha M_T) < +\infty.$$

Розв'язок (3.2.8) є единим у такому сенсі: якщо $X(u,t) = X(u,t,\omega)$ *і* $Y(u,t) = Y(u,t,\omega)$ *– два розв'язки (3.2.8) такі, що*

$$E \sup_{u\in\mathbb{R}, s\in[0,T]} |X_s(u,\omega) - u| < +\infty,\ E \sup_{u\in\mathbb{R}, s\in[0,T]} |Y(u,s,\omega) - u| < +\infty,$$

то

$P(\forall t \in [0,T]\ \forall u \in \mathbb{R} :\ X(u,t) = Y(u,t)) = 1.$

У четвертому розділі розглядається гранична поведінка послідовності розв'язків рівнянь руху систем взаємодіючих частинок, коли густота частинок зростає, а маса кожної частинки прямує до нуля.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t),\ t \in [0,T],\ i \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)},\ t \in [0,T], \\ \mu^n(0) = \frac{1}{n}\mu^n. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Тут для довільного $n \in \mathbb{N}$ міра $\{\mu^n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{u_i^n} | n \in \mathbb{N}\}$ є пуасонівською точковою мірою з інтенсивністю $n\ m(dx)$, де m – деяка σ-скінченна міра, вінерівські процеси $\{w_i(\cdot),\ i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні у сукупності і незалежні від $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Ми розглядаємо слабкі розв'язки (4.1.1) і не припускаємо, що розв'язок єдиний. Якщо функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, то існування слабкого розв'язку випливає з теореми 2.2.1.

Теорема 4.3.1. *Припустимо, що функція* a *обмежена та неперервна за сукупністю змінних,* $m \in \mathfrak{M}_\infty$. *Нехай* $\mu(\cdot)$ *– довільна слабка гранична точка послідовності* $\{\mu^n(\cdot),\ n \geq 1\}$, *що розглядається як послідовність випадкових елементів простору* $C([0,T], \mathfrak{M})$. *Тоді для довільної* $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$

$$\langle \mu(t), f(\cdot,t) \rangle = \langle \mu(0), f(\cdot,0) \rangle +$$

$$+ \int_0^t \left\langle \left(f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\mu(s)) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\cdot,s) + f'_s(\cdot,s) \right), \mu(s) \right\rangle ds,\ t \in [0,T]. \tag{4.3.8}$$

Нехай $\varphi_{st}(x),\ s \leq t,\ x \in \mathbb{R}$ – розв'язок рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_{st}(x) = a(\varphi_{st}(x), \mu(t))dt + dw(t),\ t \in [s,T], \\ \varphi_{ss}(x) = x, \end{cases} \tag{4.3.9}$$

де $\mu(\cdot)$ з теореми 4.3.1, $w(\cdot)$ – незалежний від $\mu(\cdot)$ вінерівський процес.

Позначимо $A(x,t) = a(x, \mu(t))$, E_w – інтеграл за вінерівською мірою.

Лема 4.3.4. *Нехай* $(\mu(t), t \geq 0)$ *визначено у теоремі 4.3.1. Припустимо, що функція* $A(x,t)$ *є диференційовною за* x*, причому функція* $A'_x(x,t)$ *обмежена. Якщо функція* $g \in C^2_c(\mathbb{R})$*, а функція* $A(x,t)$ *є неперервною за* t*, то для довільного фіксованого* $S \in [0,T]$ *функція* f *виду*

$$f(t,x) = E_w g(\varphi_{tS}(x)), \ t \in [0,S] \tag{4.3.10}$$

задовольняє співвідношення

$$\forall \ t \in [0,S] \ \langle \mu(t), f(\cdot,t)\rangle = \langle \mu(0), f(\cdot,0)\rangle.$$

Теорема 4.3.2. *Нехай* $\mu(\cdot)$ *– довільна слабка гранична точка послідовності* $\{\mu^n(\cdot), \ n \geq 1\}$*, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору* $C([0,T],\mathfrak{M})$*. Припустимо, що виконуються умови теореми 4.3.1 та леми 4.3.4. Тоді*

$$\forall t \in [0,T] \ \mu(t) = E_w \left(m \circ \varphi_{0t}(\cdot)^{-1} \right). \tag{4.3.23}$$

Доведення теорем 3.3.1 та 3.4.1 справедливі і для рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x), \nu(t))dt + dw(t), \ x \in \mathbb{R}, \ t \in [0,T], \\ \hfill \nu(t) = E_w m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}, \\ \hfill \varphi_0(x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Отже, за припущень теореми 4.4.1 існують єдині сильні розв'язки рівнянь (3.2.1) та (4.4.1). Процес $\{X(u,t), u \in \mathbb{R}, \ t \in [0,T]\}$ з (3.2.1) є вимірним відносно вінерівської фільтрації, отже, пара $\{(X(u,t), \mu(t)), u \in \mathbb{R}, \ t \in [0,T]\}$ також задовольняє рівняння (4.4.1). З єдиності розв'язків випливає, що вони співпадають, і з теореми 4.3.2 випливає, що довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), \ n \geq 1\}$ є невипадковою. Таким чином, з теорем 4.3.2 та 3.4.1 випливає наступний результат.

Теорема 4.4.1. *Нехай* $\{\mu^n(\cdot), \ X^n_i(\cdot), \ i \in \mathbb{Z}\}$ *– довільні розв'язки рівнянь (4.2.1). Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1. функція $a : \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;*

2. функція $a = a(x,\mu)$ є неперервно диференційовною за x, причому

$$\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x \in \mathbb{R}\ |a'_x(x,\mu)| \le L_C;$$

3. $\exists K > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \mu,\nu \in \mathfrak{M}_\infty\ |a(x,\mu) - a(x,\nu)| \le K\rho_\infty(\mu,\nu);$

4. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді послідовність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot),\ n \ge 1\} \subset C([0,T],\mathfrak{M})$ *слабко збігається до мірозначного процесу* $\mu(\cdot)$, *який единим чином визначається з рівняння*

$$\begin{cases} dX(u,t) = a(X(u,t),\mu(t))dt + dw(t),\ u \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \\ \mu(t) = Em \circ X(\cdot,t)^{-1}, \\ X(u,0) = u,\ u \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (4.1.2)$$

З теореми 4.4.1 випливає, що мірозначний процес $\mu(\cdot)$ з рівняння (3.2.1) є слабкою границею послідовності мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot),\ n \ge 1\}$ з рівнянь (4.2.1). Для теореми про збіжність траєкторій окремих частинок потрібні будуть деякі додаткові умови.

Нехай $\{\mu_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{u_{i,j}}\}$ – незалежні пуасонівські точкові міри з інтенсивністю m. Нехай $\mu^n = \sum_{i=1}^n \mu_i$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тоді μ^n є пуасонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$. Нехай $\{w_{i,j}(\cdot),\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ – незалежні вінерівські процеси, причому $\{w_{i,j}(\cdot),\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ незалежні від $\{\mu_i,\ i \ge 1\}$. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} dX^n_{i,j}(t) = a(X^n_{i,j}(t),\mu^n(t))dt + dw_{i,j}(t),\ t \in [0,T],\ i = \overline{1,n},\ j \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{X^n_{i,j}(t)},\ t \in [0,T], \\ X^n_{i,j}(0) = u_{i,j},\ \ i = \overline{1,n},\ j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad (4.4.3)$$

Відмітимо, що якщо існує єдиний розв'язок рівнянь (4.4.3) та (4.2.1), то мірозначний процес $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (4.4.3) має такий же розподіл, як $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (4.2.1). Достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (4.4.3) дає, наприклад, теорема 2.3.1.

Теорема 4.4.2. *Припустимо, що виконані умови теореми 4.4.1 та для довільного $n \ge 1$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (4.4.3). Тоді*

1. $\mu^n(\cdot) \xrightarrow{P} \mu(\cdot),\ n \to \infty$ *в* $C([0,T], \mathfrak{M})$.

2. для довільних цілих i *та* j

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} E(X^n_{i,j}(t) - X_{i,j}(u_{i,j}, t))^2 = 0,$$

де $X_{i,j}(\cdot,\cdot)$ *– розв'язок рівняння*

$$\begin{cases} dX_{i,j}(u,t) = a(X_{i,j}(u,t), \mu(t))dt + dw_{i,j}(t),\ u \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \\ \mu(t) = Em \circ X_{i,j}(\cdot, t)^{-1}, \\ X_{i,j}(u,0) = u,\ u \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Приклад 4.4.1. Нехай

$$a(x,\mu) = q\left(\int_{\mathbb{R}} g_1(y-x)\mu(dy), ..., \int_{\mathbb{R}} g_m(y-x)\mu(dy),\right.$$

$$\left.\int_{\mathbb{R}} h_1(y)\mu(dy), ..., \int_{\mathbb{R}} h_k(y)\mu(dy)\right),$$

де

1. функція $q \in C^1(\mathbb{R}^{m+k})$, функції $q,\ q'$ є обмеженими;
2. функції $g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_k \in C^1_c(\mathbb{R})$.

Для такої функції a виконані всі припущення теореми 4.4.2.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові Пилипенку Андрію Юрійовичу за цінні поради та постійну підтримку на всіх етапах виконання даної роботи.

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню питання існування та єдиності розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, а також дослідженню граничної поведінки розв'язків таких систем.

У роботі доведено існування та єдиність сильного розв'язку нескінченної системи стохастичних диференціальних рівнянь з вимірним обмеженим коефіцієнтом переносу, що задовольняє умову скінченності радіуса взаємодії, та сталим коефіцієнтом дифузії. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку нескінченної системи стохастичних диференціальних рівнянь з неперервними обмеженими коефіцієнтами переносу та дифузії, що задовольняють умову скінченності радіуса взаємодії. Отримано існування слабкого розв'язку для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь з неперервними обмеженими коефіцієнтами дифузії та переносу.

Рівняння Маккіна-Власова перетворено таким чином, що воно має сенс і для випадку, коли початковий розподіл мас частинок є локально скінченною мірою. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння Маккіна-Власова для випадку, коли сукупна маса частинок є нескінченною.

Розглянуто послідовність нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь, в яких маса частинок прямує до нуля, а густота частинок зростає до нескінченності. Доведено збіжність траєкторій окремих частинок, а також відповідних мірозначних процесів до розв'язку рівняння Маккіна-Власова для випадку нескінченної сукупної маси частинок.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Пилипенко А. Ю., Танцюра М. В. Гранична теорема для зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн., 2016. – **68**, 10. – С. 1380-1402.

2. Танцюра М. В. Аналог рівняння Маккіна-Власова як границя розв'язків зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука: матеріали конференції. – 2016. – Т. 3. – С. 157-159.

3. Танцюра М. В. Гранична теорема для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. – 2016. – С. 47.

4. Танцюра М. В. Про існування та єдиність сильного розв'язку рівняння, що задає рух системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою // Сучасні проблеми теорії ймовірно-

стей та математичного аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. – 2014. – С. 34.

5. Танцюра М. В. Про рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою // Доп. НАН України. – 2016. – №8. – С. 19-25.

6. Танцюра М. В. Про рівняння руху зі взаємодією для системи частинок з нескінченною сукупною масою // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 30.

7. Танцюра М. В. Про узагальнення рівняння Маккіна-Власова на системи частинок з нескінченною сукупною масою // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 25.

8. Pilipenko A., Tantsiura M. On the strong existence and uniqueness to an SDE that describes countable interacting particle system // International conference "Probability, reliability and stochastic optimization". 7-10 April, 2015, Kyiv, Ukraine. – P. 79.

9. Pilipenko A., Tantsiura M. On the strong existence and uniqueness to a countable systems of SDEs with measurable drift // Theory of Stochastic processes. – 2014. – **19(35)**. – Pp. 53–63.

10. Tantsiura M. A limit theorem for infinite systems of stochastic differential equations // International conference "Stochastic processes in abstract spaces". 14-16 October 2015, Kyiv, Ukraine. – P. 66.

11. Tantsiura M. On strong solutions to countable systems of SDEs with interaction and non-Lipschitz drift // Theory of Stochastic processes. – 2016. – **21(37)**., 1. – Pp. 91-101.

12. Tantsiura M. On the generalization of the McKean-Vlasov equation to the case where the total mass of particles is infinite // Theory of Stochastic Processes. – 2012. – **18 (34)**., 1. – Pp. 119–127.

Анотації

Танцюра М. В. Граничні теореми для зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі вивчається питання існування та єдиності розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, а також гранична поведінка розв'язків таких систем.

Доведені теореми існування слабкого розв'язку та теореми існування та єдиності сильного розв'язку нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими коефіцієнтами.

Доведені теореми існування слабкого розв'язку та теореми існування та єдиності сильного розв'язку аналогу рівняння Маккіна-Власова для випадку, коли розподіл мас частинок є локально скінченною мірою. Доведено, що розв'язок такого рівняння є границею послідовності розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь, в яких маса кожної частинки прямує до нуля, а густота частинок зростає до нескінченності.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, сильний розв'язок, слабкий розв'язок, мірозначні процеси, рівняння Маккіна-Власова.

Танцюра М. В. Предельные теоремы для счётных систем стохастических дифференциальных уравнений со взаимодействием. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

В диссертационной работе изучается вопрос существования и единственности решений бесконечных систем стохастических дифферен-

циальных уравнений со взаимодействием, а также предельное поведение решений таких систем.

Доказаны теоремы существования слабого решения а также теоремы существования и единственности сильного решения бесконечных систем стохастических дифференциальных уравнений с нелипшицевыми коэффициентами.

Доказаны теоремы существования слабого решения, а также теоремы существования и единственности сильного решения уравнения Маккина-Власова для случая, когда распределение масс частиц является локально конечной мерой. Доказано, что решение такого уравнения является пределом последовательности решений бесконечных систем стохастических дифференциальных уравнений, в которых масса каждой частицы стремится к нулю, а плотность частиц возрастает к бесконечности.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, сильное решение, слабое решение, мерозначные процессы, уравнение Маккина-Власова.

Tantsiura M. V. Limit theorems for countable systems of stochastic differential equations with interaction. – Manuscript.

Candidate of Science thesis, Probability Theory and Mathematical Statistics – 01.01.05. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to infinite systems of stochastic differential equations and the limit behavior of solutions of such systems. The main result of the work is construction of an analogue of the McKean-Vlasov equation that gives motion of interacting particles in a random medium if the mass distribution is a locally finite measure.

A countable system of stochastic differential equations is considered that describes motion of an infinite system of particles in a random environment. A theorem on existence and uniqueness of a strong solution is proved if diffusion coefficient is a constant and the drift term is a bounded measurable function that satisfies a finite radius interaction condition. Existence and uniqueness of a strong solution is also proved if drift and diffusion coefficients are bounded continuous functions that satisfy finite radius interaction condition. Existence of a weak solution is proved if drift and diffusion coefficients are bounded continuous functions.

The McKean–Vlasov equation describing the motion of a system of particles with infinite total mass is considered. A theorem on existence of a weak solution is proved if the interaction coefficient is a continuous bounded and locally Lipschitz function. A theorem on existence and uniqueness of a strong solution is proved if the interaction coefficient is a bounded Lipschitz function. The solution is constructed by passing to the limit from the systems of interacting particles having a finite total mass. Theorems on existence of a weak solution and existence and uniqueness of a strong solution are also proved without boundedness assumption if interaction coefficient is an integral by the mass distribution.

A sequence of infinite systems of stochastic differential equations is considered where the mass of every particle tends to zero and density of particles grows to infinity. It is proved that corresponding measure-valued processes and trajectory of each particle converge to the solution of the McKean-Vlasov equation.

Key words: stochastic differential equations, strong solution, weak solution, measure-valued processes, McKean-Vlasov equation.

Підп. до друку 06.03.2017. Формат 60 × 84/16.
Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 1,5.
Ум. друк. арк. 1,3. Тираж 100 пр. Зам. №26.

Інститут математики НАН України,
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3