

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Танцюра Максим Вікторович

УДК 519.21

**Граничні теореми для злічених систем
стохастичних диференціальних рівнянь зі
взаємодією**

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук
Пилипенко Андрій Юрійович

Київ – 2017

Зміст

Вступ	4
1 Огляд літератури за темою дисертації	21
1.1 Існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь	21
1.2 Рух системи взаємодіючих частинок у випадковому середовищі	25
2 Слабкі та сильні розв'язки злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь	30
2.1 Вступ	30
2.2 Існування слабого розв'язку	30
2.3 Існування та єдиність сильного розв'язку для систем з однорідною дифузією	41
2.4 Існування та єдиність сильного розв'язку для систем з неконстантним дифузійним коефіцієнтом	56
2.5 Висновки	63
3 Рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою	65
3.1 Вступ	65
3.2 Априорні оцінки на розв'язки рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою	68
3.3 Існування слабких розв'язків	76
3.4 Існування та єдиність сильного розв'язку	88
3.5 Висновки	93
4 Рівняння Маккіна-Власова як границя злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь	94
4.1 Вступ	94

4.2	Передкомпактність послідовності розв'язків злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь	95
4.3	Характеризація граничних точок послідовності розв'язків	99
4.4	Граничні теореми	109
4.5	Висновки	115
	Висновки	116
	Список використаних джерел	117

Вступ

Актуальність теми

У даній дисертаційній роботі розглядаються мірозначні випадкові процеси – важливий та актуальний розділ теорії випадкових процесів. Як правило, вони отримуються зі скінченних чи злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь, а також як границі таких систем. А саме: розглядається послідовність систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі, в яких кількість частинок зростає, а маса кожної частинки прямує до нуля, та за певних умов доводиться існування границі відповідних мірозначних процесів. Питаннями побудови та існування мірозначних процесів займалися багато математиків з різних точок зору, зокрема Дж. В. Гібс, М. Кац, Г. П. Маккін, Д. А. Доусон, Г. Гартнер, А. С. Шнітман, Д. П. Рюель, Р. Л. Добрушин, М. М. Боголюбов, А. А. Дороговцев, А. Ю. Пилипенко, Д. Я. Петрина, О. Л. Ребенко, В. В. Герасименко та інші. Для побудови мірозначних процесів використовувались різні методи, зокрема методи стохастичних диференціальних рівнянь, побудова гібсових мір, ланцюжків рівнянь Боголюбова, форм Діріхле та інші.

Різноманітні моделі систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі багато вивчались у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України. Зокрема, А. В. Скороход [60] запропонував опис мірозначної дифузії за допомогою проблеми мартингалів. А. Ю. Пилипенко [57] показав, що ця мірозначна дифузія описується стохастичними диференціальними рівняннями зі взаємодією. А. А. Дороговцев [7] увів клас стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією та дослідив властивості розв’язків таких рівнянь, зокрема навів достатні умови існування стаціонарних розв’язків. Учні А. А. Дороговцева, зокрема М. П. Карликова, Т. В. Маловичко, В. В. Конаровський отримали багато важливих результатів з цієї теми.

Одним з питань, що розглядаються у дисертаційній роботі, є рівняння Маккіна-Власова

$$\begin{cases} dX_t = dw_t + a(X_t, \nu_t)dt, \\ \nu_t = \text{distr}(X_t), \\ X|_{t=0} = x_0. \end{cases} \quad (*)$$

Рівняння подібного типу одними з перших почали вивчати М. Кац та Г. П. Маккін. Рівняння (*) отримується як граничне рівняння для послідовності систем взаємодіючих частинок, в яких кількість частинок зростає до нескінченності, а маса кожної частинки прямує до нуля, а саме

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = dw_t^i + a(X_t^{i,N}, \mu_t^N)dt, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T] \\ \mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}, \\ X_0^{i,N} = x_0^i. \end{cases}$$

Рівняння типу (*) узагальнювались на різноманітні випадки взаємодії, неоднорідні за часом коефіцієнти, тощо, див. наприклад роботи Г. Гартнера [39], А. С. Шнітмана [63] та Х. Танаки [64].

В даній дисертаційній роботі узагальнено рівняння Маккіна-Власова на випадок, коли розподіл мас частинок є локально скінченною мірою. Отримання такого рівняння ускладнюється тим, що сукупна маса частинок є нескінченною. Зокрема, для нескінченних мір відсутня метрика Васерштейна, а також потрібно доводити, що розподіл мас частинок залишиться локально скінченною мірою. Для отримання такого рівняння як границі злічених систем доводиться розглядати нескінченні системи стохастичних диференціальних рівнянь.

Існування та єдиність розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь є важливим питанням теорії випадкових процесів. І. І. Гіхман [3, 4] довів існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння з ліпшицевими коефіцієнтами. В той же час К. Іто незалежно від І. І. Гіхмана побудував подібну теорію стохастичних диференціальних рівнянь, основу на понятті стохастичного інтегралу. Великий внесок в тео-

рію стохастичних диференціальних рівнянь зробив А. В. Скороход. Зокрема, він довів існування слабкого розв'язку для стохастичного диференціального рівняння з неперервними коефіцієнтами, теорему про існування та єдиність сильного розв'язку, теореми про залежність розв'язків стохастичного диференціального рівняння від початкових даних та інші важливі результати [14]. В роботі А. К. Звонкіна [8] доведено існування та єдиність сильного розв'язку одновимірного стохастичного диференціального рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами. Результат А. К. Звонкіна був узагальнений на багатовимірний випадок в роботі А. Ю. Веретенникова [69]. В роботі [27] доведено існування та єдиність сильного розв'язку нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь. Відмітимо, що припущення цієї роботи не виконані для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь що розглядаються у дисертації.

Рівняння Маккіна-Власова не вивчалось для випадку, коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною. В даній роботі доведено теорему існування слабкого розв'язку та теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння Маккіна-Власова для системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою. Доведено теореми існування та єдиності сильного та слабкого розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь за припущення, що коефіцієнти системи задовольняють умову скінченності радіусу взаємодії. Також доведено, що рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою є граничним для послідовності рівнянь що задають рух злічених систем взаємодіючих частинок якщо густина розподілу частинок зростає до нескінченності а маса частинок прямує до нуля.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Робота виконана в Інституті математики Національної академії наук України у відділі теорії випадкових процесів у рамках державної бюджетної науково-дослідної теми “Аналіз складних систем,” державний реєстраційний номер 0111U001002.

Мета та задачі дослідження

Метою дисертаційної роботи є розв'язання наступних задач.

- Доведення теорем існування та єдиності розв'язку злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими коефіцієнтами.
- Встановлення теорем існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь типу середнього поля з нескінченною масою.
- Доведення граничних теорем для послідовності злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією.

Об'єкт дослідження

Об'єктом дослідження є рівняння руху зліченої системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою. Також об'єктом дослідження є рівняння типу Маккіна-Власова для випадку, коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною.

Предмет дослідження

Предметом дослідження є існування слабкого розв'язку та існування та єдиність сильного розв'язку рівняння руху зліченої системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою та рівняння типу Маккіна-Власова для випадку, коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною. Також предметом дослідження є гранична поведінка послідовності рівнянь руху зліченої системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою.

Методика досліджень

У роботі використовуються методи теорії ймовірностей, стохастичних диференціальних рівнянь, стохастичного аналізу та теорії мартингалів.

Наукова новизна отриманих результатів

Основні результати, які визначають наукову новизну роботи, наступні.

1. Доведено теорему існування слабкого розв'язку зліченої системи сто-

хастичних диференціальних рівнянь для обмежених неперервних коефіцієнтів дифузії та зносу.

2. Доведено теореми існування та єдиності сильного розв'язку зліченної системи стохастичних диференціальних рівнянь з непліщицевим обмеженим коефіцієнтом переносу, який задовольняє умову скінченності радіусу взаємодії.
3. Доведено теорему існування слабкого розв'язку рівняння руху континуальної системи взаємодіючих частинок для обмеженого неперервного коефіцієнту зносу та постійного коефіцієнту дифузії.
4. Доведено теореми існування та єдиності сильного розв'язку континуальної системи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією.
5. Доведено слабку збіжність послідовності мірозначних випадкових процесів, що визначаються з рівнянь руху злічених систем взаємодіючих частинок до розв'язку рівняння типу Маккіна-Власова у випадку нескінченної сукупної маси частинок.
6. Доведено сильну збіжність розв'язків (тобто мірозначних процесів та траєкторій окремих частинок) рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок до розв'язку рівняння типу Маккіна-Власова для випадку нескінченної сукупної маси частинок.

Практичне значення отриманих результатів

Усі отримані у дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальше застосування у різних розділах теорії випадкових процесів.

Особистий внесок здобувача

Всі результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував п'ять робіт [58], [68], [13],

[67], [19], з них [58], [13] у співавторстві з науковим керівником Пилипенком А. Ю., в яких науковому керівнику належить постановка задачі.

Апробація результатів

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- міжнародній науковій конференції “Young Researchers in Stochastic analysis with applications in Biology, Physics and Finance”, Берлін, Потсдам, 2014.
- міжнародній науковій конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”, Київ, 2015.
- міжнародній науковій конференції “Stochastic Processes in Abstract Spaces”, Київ, 2015.
- XVII міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука, Київ, 2016.
- всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано-Франківськ, 2012, 2013, 2014, 2016.
- науковому семінарі “Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2010, 2012, 2014, 2015, 2016 (науковий керівник професор, доктор фізико-математичних наук Андрій Анатолійович Дороговцев).
- науковому семінарі “Forschungseminar, PU”, Потсдам, 2013 (науковий керівник професор, доктор Сільвія Роееллі).
- науковому семінарі “Стохастика та її застосування” факультету кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 (науковий керівник професор, доктор фізико-математичних наук Олександр Маратович Іксанов).

- науковому семінарі “Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів” при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ “КПІ”, Київ, 2016 (наукові керівники професор, доктор фізико-математичних наук Клесов Олег Іванович та професор, доктор фізико-математичних наук Іванов Олександр Володимирович).
- науковому семінарі “Теорія ймовірностей та математична статистика” кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 (наукові керівники професор, доктор фізико-математичних наук Юлія Степанівна Мішура та професор, доктор фізико-математичних наук Юрій Васильович Козаченко).

Публікації

Основні результати роботи викладено у 5 статтях [13, 19, 58, 67, 68], опублікованих у фахових виданнях, та додатково відображено в матеріалах 7 конференцій [16, 17, 18, 20, 21, 56, 66].

Структура та обсяг дисертації

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та переліку використаних джерел, який містить 73 найменування. Повний обсяг роботи становить 125 сторінок.

Перший розділ дисертації містить огляд літератури за тематикою дисертації.

У другому розділі розглядаються стохастичні диференціальні рівняння що описують зліченні системи взаємодіючих частинок.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ простір локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ з топологією грубої збіжності τ :

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu, n \rightarrow \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ - множина неперервних функцій з компактним носієм. Нехай $a, b : \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірні функції. Розглянемо нескінченну систему стохастичних

диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu(t))dt + b(X_k(t), \mu(t))dw_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

де $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$ – неспадна числова послідовність така, що $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow -\infty} u_k = -\infty$, $w_k(\cdot)$ – незалежні вінерівські процеси. Тут $X_k(t)$ будемо інтерпретувати як положення k -ої частинки в момент часу t , міру $\mu(t)$ – як розподіл мас частинок в момент часу t , u_k – як початкове положення k -ої частинки. Функції a та b відповідають за взаємодію частинок.

Позначимо

$$p_w(t, x) = P(\sup_{s \in [0, t]} w(s) \geq x) = 2 \int_{x \vee 0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-y^2/2t) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

де w – вінерівський процес.

Теорема 2.2.1. *Нехай a та b – обмежені та неперервні за сукупністю змінних функції. Припустимо, що існує стала $L > 0$ така, що початкова міра $\mu(0)$ задовольняє співвідношення*

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(0, [-m, m])/m^L < \infty. \quad (2.2.1)$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (2.1.1).

Розглянемо рівняння (2.1.1) в якому $b(x, \mu) \equiv 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu_t)dt + dw_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

Має місце наступна теорема існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (2.1.1).

Теорема 2.3.1. *Припустимо, що:*

1. функція a є вимірною та обмеженою:

$$\|a\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\nu \in \mathfrak{M}} |a(x, \nu)| < \infty;$$

2. функція a має властивість скінченності радіусу взаємодії:

$$\exists d > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \nu \in \mathfrak{M} : a(x, \nu) = a(x, \nu \mathbf{1}_{(x-d, x+d)}),$$

$$de (\nu \mathbf{1}_B)(A) = \nu(A \cap B), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});$$

3. з імовірністю 1 існує випадкова послідовність $\{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \inf_{i: u_i \geq y_n} \inf_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t) \wedge 0) - \sup_{i: u_i < y_n} \sup_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t) \vee 0) \geq 2\|a\|_\infty T + d.$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (2.3.1).

З усіх припущень теореми 2.3.1 найскладніше перевірити припущення

3. Наступна теорема дає достатні умови виконання цього припущення.

Теорема 2.3.2. Припустимо, що існує невідпадаюча зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} z_n = -\infty;$$

$$2. \exists \varepsilon_1 > 0 \forall n \in \mathbb{Z} : \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) > \varepsilon_1.$$

Тоді виконується припущення 3 теореми 2.3.1.

Для локально скінченної міри ν позначимо

$$\Lambda(\nu) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu([-n, n])}{2n}.$$

Показник $\Lambda(\nu)$ є верхньою оцінкою для “середньої густини” атомів міри ν .

Для довільного $\lambda > 0$ покладемо

$$M_\lambda = \{\nu | \Lambda(\nu) \leq \lambda\}.$$

Наступні результати вказують широкий клас мір $\mu(0)$, для яких виконується припущення 2 теореми 2.3.2.

Теорема 2.3.4. Нехай $\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{u_k} \in M_\lambda$, $\lambda d < 1$. Припустимо, що виконуються умови 1 та 2 теореми 2.3.1. Тоді існує єдиний сильний розв'язок

рівняння (2.3.1) для довільного $T > 0$.

Теорема 2.3.3. Нехай μ_0 - незалежна від $\{w_k | k \in \mathbb{Z}\}$ пуасонівська точкова міра з інтенсивністю m . Припустимо, що

$$\exists C_m \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} : m([\alpha, \beta]) \leq C_m(\beta - \alpha + 1),$$

і виконуються припущення 1 та 2 теореми 2.3.1. Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.3.1) для довільного $T > 0$.

Наступна теорема дає достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку у випадку неадитивного дифузійного коефіцієнту.

Теорема 2.4.1. Припустимо, що:

1. функція a є неперервною та обмеженою:

$$\|a\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\nu \in \mathfrak{M}} |a(x, \nu)| < \infty;$$

2. функція b неперервна, обмежена та відділена від нуля:

$$\|b\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\nu \in \mathfrak{M}} |b(x, \nu)| < \infty, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \inf_{\nu \in \mathfrak{M}} |b(x, \nu)| > 0;$$

3. існує константа $C_{b,n}$ така, що для довільного натурального n і довільних $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ має місце нерівність

$$|b(x, \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}) - b(y, \sum_{k=1}^n \delta_{y_k})| \leq C_{b,n}|x - y| + C_{b,n} \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|;$$

4. функції a та b мають властивість скінченності радіусу взаємодії:

$$\exists d > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \nu \in \mathfrak{M} : a(x, \nu) = a(x, \nu \mathbf{1}_{(x-d, x+d)}), \quad b(x, \nu) = b(x, \nu \mathbf{1}_{(x-d, x+d)});$$

5. міра $\mu(0)$ задовольняє наступне припущення: існує не випадкова зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} z_n = -\infty$$

і

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \sup_{n \in \mathbb{N}} p_w(T \|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2) < \frac{1}{2},$$

$$\exists r > 0 \forall n \in \mathbb{Z} : \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T \|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) > r.$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (2.1.1).

У третьому розділі доведено теорему існування та єдиності розв'язку для стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & u \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = E(m \circ X(\cdot, t)^{-1}), \\ X(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

де m – локально скінченна міра, w – вінерівський процес.

Рівняння (3.2.1) рівносильне рівнянню Маккіна-Власова у випадку, коли m – ймовірнісна міра, але рівняння (3.2.1) має сенс і для локально скінченної міри m .

Введемо наступні підмножини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_C = \{\mu \in \mathfrak{M} : \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} : \mu([\alpha, \beta]) \leq C(\beta - \alpha + 1)\}, \quad \mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{C>0} \mathfrak{M}_C.$$

Нехай w – вінерівський процес, що породжує фільтрацію $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$.

Означення 3.2.1. Сильним розв'язком рівняння (3.2.1) будемо називати $\mathfrak{F}_t$ -узгоджену вимірну за (u, t, ω) випадкову функцію $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ та $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений випадковий мірозначний процес $\mu(\cdot)$ такі, що при підстановці в рівняння (3.2.1) з імовірністю 1 отримаємо рівності для всіх $u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$.

Означення 3.2.2. Нехай задано функцію $a(\cdot, \cdot)$ та локально скінченну міру m . Ймовірнісний простір з фільтрацією $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t, t \geq 0), P)$, $\mathfrak{F}_t$ -узгоджені випадкові функції $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$, $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений вінерівський процес w та $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений мірозначний процес $\mu(\cdot)$ називаються слабким розв'язком рівняння (3.2.1) якщо при підстановці в (3.2.1) з імовірністю 1 отримуємо рівності для всіх $u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$.

Теорема 3.3.1. Припустимо, що:

1. функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M}, \rho)$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;

2. $\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C : |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leq L_C |x_1 - x_2|;$

3. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (3.2.1).

Введемо клас функцій

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \text{supp } f \subset [-1, 1], \|f\|_\infty \leq 1, \|f'\|_\infty \leq 1\} \quad (3.4.1)$$

Введемо метрику на $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\rho_\infty(\mu, \nu) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+r)(\mu(dx) - \nu(dx)) \right|.$$

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що:*

1. *функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M}, \rho)$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних.*

2. $\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leq L_C |x_1 - x_2|.$

3. $\exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}_\infty |a(x, \mu) - a(x, \nu)| \leq K \rho_\infty(\mu, \nu).$

4. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (3.2.1).

Наступні результати дають достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку для випадку, коли функція взаємодії $a(x, \mu)$ є інтегралом за розподілом мас, тобто

$$a(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}} b(y-x) \mu(dy). \quad (3.2.7)$$

Функція a , взагалі кажучи, не буде обмеженою, якщо вона задана рівністю (3.2.7), і, отже, не задовольняє умовам теореми 3.4.1. Проте завдяки лінійності взаємодії відносно міри μ теорему існування та єдиності сильного розв'язку та теорему існування слабого розв'язку можна довести без припущення обмеженості.

Рівняння (3.2.1) для випадку, коли функція a відповідає інтегральній взаємодії (3.2.7) можна переписати в наступному вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} dX(u, t, \omega) = dw_t(\omega) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} b(X(v, t, \tilde{\omega}) - X(u, t, \omega)) P(d\tilde{\omega}) m(dv) dt, \\ X(u, 0) = u. \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

Зробимо наступні припущення щодо міри m та функції b :

(A1) існує константа $C_m > 0$ така, що для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$m([\alpha, \beta]) \leq C_m(\beta - \alpha + 1);$$

(A2) $b \in C^1(\mathbb{R})$;

(A3) існує функція $R : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, R монотонно неспадна на $(-\infty, 0]$ та монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$, така, що $|b(z)| \leq R(z)$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, та $C_R := 2 \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} R(z + a) m(dz) < +\infty$;

(A4) існує функція $Q : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, Q монотонно неспадна на $(-\infty, 0]$ та монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$, така, що $|b'(z)| \leq Q(z)$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, та $C_Q := 2 \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Q(z + a) m(dz) < +\infty$.

Нехай $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ – розв’язок рівняння (3.2.8).

Позначимо

$$M(t) = \sup_{s \leq t} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - u|. \quad (3.2.9)$$

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що виконані умови (A1)-(A4). Тоді існує розв’язок (3.2.8) такий, що*

$$\forall \alpha > 0 \ E \exp(\alpha M_T) < +\infty.$$

Розв’язок (3.2.8) є єдиним в такому сенсі: якщо $X(u, t) = X(u, t, \omega)$ і $Y(u, t) = Y(u, t, \omega)$ – два розв’язки (3.2.8) такі, що

$$E \sup_{u \in \mathbb{R}, s \in [0, T]} |X_s(u, \omega) - u| < +\infty, \quad E \sup_{u \in \mathbb{R}, s \in [0, T]} |Y(u, s, \omega) - u| < +\infty,$$

то

$$P(\forall t \in [0, T] \forall u \in \mathbb{R} : X(u, t) = Y(u, t)) = 1.$$

У четвертому розділі розглядається гранична поведінка послідовності розв'язків рівнянь руху систем взаємодіючих частинок, коли густота частинок зростає, а маса кожної частинки прямує до нуля.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)}, \quad t \in [0, T], \\ \mu^n(0) = \frac{1}{n} \mu^n. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Тут для довільного $n \in \mathbb{N}$ міра $\{\mu^n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{u_i^n} | n \in \mathbb{N}\}$ є пуасонівською точковою мірою з інтенсивністю $n m(dx)$, де m – деяка σ -скінченна міра, вінерівські процеси $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні в сукупності і незалежні від $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Ми розглядаємо слабкі розв'язки (4.1.1) і не припускаємо, що розв'язок єдиний. Якщо функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, то існування слабого розв'язку впливає з теореми 2.2.1.

Теорема 4.3.1. *Припустимо, що функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, $m \in \mathfrak{M}_\infty$. Нехай $\mu(\cdot)$ – довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0, T], \mathfrak{M})$. Тоді для довільної $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$*

$$\begin{aligned} \langle \mu(t), f(\cdot, t) \rangle &= \langle \mu(0), f(\cdot, 0) \rangle + \\ &+ \int_0^t \left\langle \left(f'_x(\cdot, s) a(\cdot, \mu(s)) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\cdot, s) + f'_s(\cdot, s) \right), \mu(s) \right\rangle ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Нехай $\varphi_{st}(x)$, $s \leq t$, $x \in \mathbb{R}$ – розв'язок рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi_{st}(x) = a(\varphi_{st}(x), \mu(t))dt + dw(t), \quad t \in [s, T], \\ \varphi_{ss}(x) = x, \end{array} \right. \quad (4.3.9)$$

де $\mu(\cdot)$ з теореми 4.3.1, $w(\cdot)$ – незалежний від $\mu(\cdot)$ вінерівський процес.

Позначимо $A(x, t) = a(x, \mu(t))$, E_w – інтеграл за вінерівською мірою.

Лема 4.3.4. *Нехай $(\mu(t), t \geq 0)$ визначено в теоремі 4.3.1. Припустимо, що функція $A(x, t)$ є диференційовною за x , причому функція $A'_x(x, t)$ обмежена. Якщо функція $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ а функція $A(x, t)$ є неперервною за t , то для довільного фіксованого $S \in [0, T]$ функція f виду*

$$f(t, x) = E_w g(\varphi_{tS}(x)), \quad t \in [0, S] \quad (4.3.10)$$

задовольняє співвідношення

$$\forall t \in [0, S] \quad \langle \mu(t), f(\cdot, t) \rangle = \langle \mu(0), f(\cdot, 0) \rangle.$$

Теорема 4.3.2. *Нехай $\mu(\cdot)$ – довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0, T], \mathfrak{M})$. Припустимо, що виконуються умови теореми 4.3.1 та лема 4.3.4. Тоді*

$$\forall t \in [0, T] \quad \mu(t) = E_w (m \circ \varphi_{0t}(\cdot)^{-1}). \quad (4.3.23)$$

Доведення теорем 3.3.1 та 3.4.1 справедливі і для рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x), \nu(t))dt + dw(t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \\ \nu(t) = E_w m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}, \\ \varphi_0(x) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Отже, за припущень теореми 4.4.1 існують єдині сильні розв'язки рівнянь (3.2.1) та (4.4.1). Процес $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ з (3.2.1) є вимірним відносно вінерівської фільтрації, отже, пара $\{(X(u, t), \mu(t)), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ також задовольняє рівняння (4.4.1). З єдиності розв'язків випливає, що вони співпадають, і з теореми 4.3.2 випливає, що довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ є не випадковою. Таким чином, з теорем 4.3.2

та 3.4.1 впливає наступний результат.

Теорема 4.4.1. *Нехай $\{\mu^n(\cdot), X_i^n(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ – довільні розв’язки рівнянь (4.2.1). Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1. *функція $a : \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;*

2. *функція $a = a(x, \mu)$ є неперервно диференційовною за x , причому*

$$\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C \forall x \in \mathbb{R} |a'_x(x, \mu)| \leq L_C;$$

3. $\exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}_\infty |a(x, \mu) - a(x, \nu)| \leq K \rho_\infty(\mu, \nu);$

4. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді послідовність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\} \subset C([0, T], \mathfrak{M})$ слабо збігається до мірозначного процесу $\mu(\cdot)$, який єдиним чином визначається з рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & u \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X(\cdot, t)^{-1}, & \\ X(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

З теореми 4.4.1 випливає, що мірозначний процес $\mu(\cdot)$ з рівняння (3.2.1) є слабою границею послідовності мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ з рівнянь (4.2.1). Для теореми про збіжність траєкторій окремих частинок потрібні будуть деякі додаткові умови.

Нехай $\{\mu_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{u_{i,j}}\}$ – незалежні пуасонівські точкові міри з інтенсивністю m . Нехай $\mu^n = \sum_{i=1}^n \mu_i$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тоді μ^n є пуасонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$. Нехай $\{w_{i,j}(\cdot), i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ – незалежні вінерівські процеси, причому $\{w_{i,j}(\cdot), i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ незалежні від $\{\mu_i, i \geq 1\}$. Розглянемо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_{i,j}^n(t) = a(X_{i,j}^n(t), \mu^n(t))dt + dw_{i,j}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{X_{i,j}^n(t)}, \quad t \in [0, T], \\ X_{i,j}^n(0) = u_{i,j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (4.4.3)$$

Відмітимо, що якщо існує єдиний розв'язок рівнянь (4.4.3) та (4.2.1), то мірозначний процес $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (4.4.3) має такий же розподіл як $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (4.2.1). Достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (4.4.3) дає, наприклад, теорема 2.3.1.

Теорема 4.4.2. *Припустимо, що виконані умови теореми 4.4.1 та для довільного $n \geq 1$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (4.4.3). Тоді*

1. $\mu^n(\cdot) \xrightarrow{P} \mu(\cdot)$, $n \rightarrow \infty$ в $C([0, T], \mathfrak{M})$.
2. для довільних цілих i та j

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} E(X_{i,j}^n(t) - X_{i,j}(u_{i,j}, t))^2 = 0,$$

де $X_{i,j}(\cdot, \cdot)$ – розв'язок рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_{i,j}(u, t) = a(X_{i,j}(u, t), \mu(t))dt + dw_{i,j}(t), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X_{i,j}(\cdot, t)^{-1}, \\ X_{i,j}(u, 0) = u, \quad u \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (4.4.4)$$

Приклад 4.4.1. Нехай

$$a(x, \mu) = q \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(y - x) \mu(dy), \dots, \int_{\mathbb{R}} g_m(y - x) \mu(dy), \int_{\mathbb{R}} h_1(y) \mu(dy), \dots, \int_{\mathbb{R}} h_k(y) \mu(dy) \right),$$

де

1. функція $q \in C^1(\mathbb{R}^{m+k})$, функції q, q' є обмеженими;
2. функції $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_k \in C_c^1(\mathbb{R})$.

Для такої функції a виконані всі припущення теореми 4.4.2.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові Пилипенку Андрію Юрійовичу за цінні поради та постійну підтримку на всіх етапах виконання даної роботи.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

1.1 Існування та єдиність розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь

Стохастичні диференціальні рівняння є важливим розділом теорії випадкових процесів. І. І. Гіхман в роботах [3, 4] ввів загальне поняття стохастичного диференціального рівняння та довів теорему існування та єдиності сильного розв’язку стохастичного диференціального рівняння з ліпшицевими коефіцієнтами. У той же час К. Іто [40, 43, 44, 41, 42] незалежно від І. І. Гіхмана побудував теорію стохастичних диференціальних рівнянь, основу на понятті стохастичного інтегралу. Великий внесок в теорію стохастичних диференціальних рівнянь зробив А. В. Скороход. Зокрема, він довів [14] існування слабкого розв’язку для стохастичного диференціального рівняння з неперервними коефіцієнтами.

В кінці 60-х – початку 70-х років 20 століття стало зрозуміло, що слід розрізняти поняття сильного та слабкого розв’язків стохастичного диференціального рівняння.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t), t \in [0, T], \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Тут $w(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ -значним вінерівським процесом, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ є вимірними функціями.

Означення 1.1.1. Нехай $\{\mathfrak{F}_t^w, t \in [0, T]\}$ – фільтрація, породжена вінерівським процесом. Сильним розв’язком стохастичного диференціального рівняння (1.1.1) називається $\mathfrak{F}_t^w$ -узгоджений випадковий процес $\{X(t), t \in [0, T]\}$ такий, що з імовірністю 1 рівність (1.1.1) виконується одразу для всіх $t \in [0, T]$.

Означення 1.1.2. Слабким розв'язком стохастичного диференціального рівняння (1.1.1) називаються ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ та пара $\mathfrak{F}_t$ -узгоджених випадкових процесів $(X(t), w_t)$ такі, що $(w_t, \mathfrak{F}_t)$ є вінерівським процесом і з імовірністю 1 рівність (1.1.1) виконується одразу для всіх $t \in [0, T]$.

Означення 1.1.3. Кажуть, що розв'язок рівняння (1.1.1) є потраєкторно єдиним, якщо для довільних двох розв'язків $(X'(t), w'_t)$ та $(X''(t), w''_t)$ з рівності м. н. $X'(0) = X''(0)$ та $w'_t = w''_t$, $t \geq 0$ випливає, що

$$P(\max_{t \in [0, T]} |X(t) - Y(t)| > 0) = 0.$$

Означення 1.1.4. Кажуть, що розв'язок рівняння є слабо єдиним якщо для довільних двох розв'язків $(X'(t), w'_t)$ та $(X''(t), w''_t)$ рівняння (1.1.1) у цих пар процесів співпадають всі скінченновимірні розподіли.

Питання існування та єдиності сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння вивчали багато математиків, зокрема Т. Ямада, Ш. Ватанабе, С. Накао, Н. В. Крилов, А. К. Звонкін, А. Ю. Веретенников та ін. Наприклад, Т. Ямада та Ш. Ватанабе встановили зв'язок між сильним та слабким розв'язком. А саме, вони довели [73], що якщо слабкий розв'язок є потраєкторно єдиним, то він є сильним розв'язком. Доведення цієї теореми універсальне і легко переноситься практично на будь який вид стохастичних диференціальних рівнянь. У роботі А. К. Звонкіна [8] доведено існування та єдиність сильного розв'язку одновимірного стохастичного диференціального рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами. Для доведення даного результату А. К. Звонкін використав перетворення, що знищує коефіцієнт переносу. Результат А. К. Звонкіна був узагальнений на багатовимірний випадок у роботі А. Ю. Веретенникова [69].

Теорема 1.1.1 ([69]). *Нехай b та σ – обмежені борелеві функції. Припустимо, що*

$$\exists \lambda > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall t \geq 0 : \sigma(t, x) \sigma^T(t, x) \geq \lambda |x|^2,$$

функція $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x)$ неперервна, для довільного $t > 0$ функція $\sigma(s, \cdot)$ на довільному компактi $K \subset \mathbb{R}^n$ неперервна рівномірно по $s \in [0, t]$ і функція σ має вигляд

$$\sigma(s, x) = \sigma_L(s, \sigma^n(x), \sigma^{n+1}(s, x)),$$

де σ^n та σ^{n+1} – k -вимірні борелеві вектор-функції, $\sigma^n \in W_{2n,loc}^1(\mathbb{R}^n)$, $\sigma^{n+1} \in W_{2n+2,loc}^{0,1}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$, функція $\sigma_L(s, z, v) = \sigma_L(s, z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_k)$ є борелевою і задовольняє умову Ліпшиця по (z, v) рівномірно за $s \in [0, t]$ для довільного $t > 0$. Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1.1.1).

Питання існування та єдиності слабкого розв'язку вивчали Н. В. Крилов, М. І. Портенко, А. В. Скороход, Д. В. Струк, С. Р. С. Варадан, та ін. Приклад стохастичного диференціального рівняння, яке має слабкий розв'язок, але не має сильного розв'язку, було наведено Х. Танакою. Скороход [14] запропонував метод доведення існування слабкого розв'язку користуючись теоремою про спільний імовірнісний простір.

Теорема 1.1.2. *Припустимо, що коефіцієнти b та σ неперервні за сукупністю змінних і*

$$\exists K > 0 \forall t, x \quad \|a(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2).$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (1.1.1).

Дуже ефективний метод доведення існування слабкого розв'язку запропонували Д. В. Струк та С. Р. С. Варадан [62]. Вони звели питання існування слабкого розв'язку до певної проблеми мартингалів. Наприклад, за допомогою цієї методики було доведено наступний результат

Теорема 1.1.3 ([62]). *Припустимо, що коефіцієнти b та σ рівняння (1.1.1) задовольняють наступні умови:*

1. *матриця $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x)$ неперервна за сукупністю змінних;*
2. *існує $C > 0$ таке, що*

$$\forall e \in \mathbb{R}^d \quad e^T a(t, x) e \geq C \|e\|^2;$$

3. коефіцієнти b та σ є обмеженими.

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (1.1.1) і цей розв'язок є слабо єдиним. Більш того, цей розв'язок є (неоднорідним) строго марковським процесом.

У 70-х – 80-х роках 20 століття почалося дослідження питання існування та єдиності розв'язків нескінченновимірних стохастичних диференціальних рівнянь. Якщо коефіцієнти нескінченновимірного стохастичного диференціального рівняння є ліпшицевими, то доведення існування та єдиності розв'язку в гільбертовому просторі проводиться аналогічно скінченновимірному випадку. Широкий клас рівнянь в нескінченновимірному просторі не має скінченновимірного аналогу, а саме, рівняння з необмеженими лінійними операторами, зокрема стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних.

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір. Розглянемо нескінченновимірне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_t = (AX_t + B(X_t))dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in H, \quad (1.1.2)$$

де $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ є генератором сильно неперервної напівгрупи $S(t) = e^{tA}$, функція $B : H \rightarrow H$ борелівська та обмежена, W_t є циліндричним вінерівським процесом.

Нетривіальним є навіть випадок, коли $B = 0$, σ – лінійна функція. Розв'язок (1.1.2) природньо називати лінійними стохастичними напівгрупами. Відповідне означення було введено А. В. Скороходом в [15] та доведено теорему існування та єдиності розв'язку.

Можна порізному вводити означення розв'язку рівняння (1.1.2). Зокрема, можна припускати, що для кожного t випадковий елемент X_t належить $D(A)$ і виконується рівність (1.1.2), або припускати, що рівність (1.1.2) виконується в слабкому сенсі, тобто для довільного $\zeta \in D(A^*)$

$$\langle X_t, \zeta \rangle = \langle X_0, \zeta \rangle + \int_0^t \left(\langle X_s, A^* \zeta \rangle + \langle B(X_s), \zeta \rangle \right) ds + \int_0^t \langle \sigma(X_s), \zeta \rangle dW(s).$$

В наступному означенні вводиться поняття м'якого розв'язку рівняння (1.1.2).

Означення 1.1.5. Будемо називати м'яким розв'язком задачі Коші (1.1.2) неперервний $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений H -значний процес $X = (X_t)$, якщо

$$X_t = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}B(X_s)ds + \int_0^t e^{(t-s)A}\sigma(X_s)dW_s.$$

Питання існування та єдиності розв'язків нескінченновимірних стохастичних диференціальних рівнянь вивчали А. В. Скороход, Ю. Л. Далецький, Дж. Да Прато, Є. Забчик, Е. Парду, Н. В. Крилов, Б. Л. Розовський та ін. [15, 28, 55, 48, 29]

1.2 Рух системи взаємодіючих частинок у випадковому середовищі

Рівняння, що задають рух систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі, широко вивчалися багатьма математиками з різних точок зору. Такі моделі мають застосування в фізиці, хімії, біології і т. д.

Рівняння Маккіна-Власова є одним із типів рівнянь, що задають динаміку руху взаємодіючих частинок у випадковому середовищі. Рівняння Маккіна-Власова вивчали з різних точок зору багато математиків, зокрема Г. П. Маккін, Р. Л. Добрушин, М. Кац, Х. Танака, Ю. Гартнер, А. Шнітман, Д. Доусон та інші.

М. Кац та Г. П. Маккін отримали рівняння Маккіна-Власова наступним чином [45, 46, 50]. Припустимо, що рух N взаємодіючих частинок, кожна з яких має масу $1/N$, задається наступною системою стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^{i,N} = dw_t^i + a(X_t^{i,N}, \mu_t^N)dt, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T] \\ \mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}, \\ X_0^{i,N} = x_0^i. \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

Тут w_t^i – незалежні вінерівські процеси, x_0^i – однаково розподілені випадкові величини, причому $\{\{w_t^i, t \geq 0\}, x_0^i, i = 1, \dots, N\}$ – незалежні в сукупності. Випадкову величину $X_t^{i,N}$ можна інтерпретувати як положення i -тої частинки в момент часу t , μ_t^N – як розподіл мас частинок в момент часу t . Функція a відповідає за взаємодію між частинками.

За природніх припущень [63, 39] послідовність розв’язків $\{X_t^{i,N}\}_{N \geq 1}$ рівнянь (1.2.1) збігається при $n \rightarrow \infty$ до розв’язку рівняння

$$\begin{cases} dX_t^i = dw_t^i + a(X_t^i, \nu_t)dt, \\ \nu_t = \text{distr}(X_t^i), \\ X_0^i = x_0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

де $\text{distr}(X_t^i)$ – розподіл випадкової величини X_t^i .

Це рівняння можна розглядати як рівняння руху системи взаємодіючих частинок у випадковому середовищі, інтерпретуючи міру ν_t як розподіл мас частинок в момент часу t , а для довільного фіксованого $\omega \in \Omega$ функцію $X_\cdot(\omega)$ – як траєкторію одної частинки.

Рух системи взаємодіючих частинок у випадковому середовищі також може бути заданий зліченною системою стохастичних диференціальних рівнянь. Зліченні системи стохастичних диференціальних рівнянь вивчали С. Албеверіо, Ю. Г. Кондратьєв, А. В. Скороход, Р. Л. Добрушин, Й. Фріц, С. Роеллі, П. Даї Пра та інші [61, 23, 26, 36]. В основному результати стосуються слабких, а не сильних розв’язків.

У відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України багато і плідно працювали над різноманітними моделями руху систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі.

В [7] А. А. Дороговцев довів існування та єдиність розв’язку для широкого класу систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, навів достатні умови існування стаціонарних розв’язків та отримав багато інших важливих результатів. Нехай γ – метрика Васерштейна на просторі $\mathfrak{M}$ ймовірнісних мір на $\mathbb{R}^d$. В [7] А. А. Дороговцев, зокрема, довів наступну

теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (1.2.3).

Теорема 1.2.1. *Припустимо, що коефіцієнти a та b задовольняють наступну умову Ліпшиця відносно просторової та мірозначної змінних*

$$\exists C > 0 \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d, \nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M} \forall t \geq 0 : \|a(u_1, \nu_1, t) - a(u_2, \nu_2, t)\| + \\ + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|b(u_1, \nu_1, t, q) - b(u_2, \nu_2, t, q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\|u_1 - u_2\| + \gamma(\nu_1, \nu_2)).$$

Припустимо, що функції a та b неперервні за змінними (x, μ, t) (в нормі простору L_2 на R^d .) Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu_t, t)dt + \int_{\mathbb{R}^d} b(X(u, t), \mu_t, t, q)W(dt, dq) \\ X(u, 0) = u, \\ \mu_t = \mu_0 \circ X(\cdot, t)^{-1}. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

М. П. Карликова [10] довела наступну теорему про існування слабкого розв'язку для системи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 1.2.2. *Припустимо, що виконані наступні умови*

$$\exists C > 0 \forall u \in \mathbb{R}^d \forall \mu \in \mathfrak{M} \|a(u, \mu)\| + \|b(u, \mu)\| \leq C(1 + \|u\|),$$

$$\exists \{L_N, N \geq 1\} \forall u, v \in B(0, N) \forall \mu, \lambda \in \mathfrak{M}$$

$$\|a(u, \mu) - a(v, \lambda)\| + \|b(u, \mu) - b(v, \lambda)\| \leq L_N(\|u - v\| + \gamma(\mu, \lambda)).$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu_t, t)dt + b(X(u, t), \mu_t)dw(t) \\ X(u, 0) = u, \\ \mu_t = \mu_0 \circ X(\cdot, t)^{-1}. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

В роботі [37] А. А. Дороговцев та М. П. Карликова отримали достатні умови існування та єдиності стаціонарного розв'язку системи

$$\begin{cases} dX(u, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(X(u, t), v)\mu_t(dv)dt + b(X(u, t))dw(t) \\ X(u, 0) = u, \\ \mu_t = \mu_0 \circ X(\cdot, t)^{-1}. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Т. В. Маловичко [12] довела аналог теореми Гірсанова для наступної системи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією

$$\begin{cases} dX(u, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b(X(v, t), p) \mu(dv) f(X(u, t) - p) dp dt + \\ \quad + \int_{\mathbb{R}} f(X(u, t) - p) W(dp, dt), \\ X(u, 0) = u. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

В. В. Конаровський [11] сконструював математичну модель нескінченної системи взаємодіючих дифузійних частинок. Особливістю його моделі є наявність маси у частинок, що впливає на дифузію. При зіткненні частинки склеюються, а їхня маса сумується.

А. В. Скороход [60] запропонував опис мірозначної дифузії за допомогою проблеми мартингалів. В роботі [57] А. Ю. Пилипенко довів, що ця мірозначна дифузія описується наступною системою стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією

$$\begin{cases} dX_t(u) = a_0(X_t(u), \mu_t) dt + \sum_{k=1}^n a_k(X_t(u), \mu_t) dw_k(t), \\ d\rho_t(u) = (b_0(X_t(u), \mu_t) dt + \sum_{k=1}^n b_k(X_t(u), \mu_t) dw_k(t)) \rho_t(u), \\ \mu_t = (\rho_t \mu) \circ X_t^{-1}. \\ X_0(u) = u, \rho_0(u) = 1, \end{cases} \quad (1.2.7)$$

де μ є довільною скінченною мірою. В роботі [57] доведено наступну теорему існування та єдиності розв'язку рівняння (1.2.7).

Теорема 1.2.3. *Припустимо, що функції a_k та b_k задовольняють наступні умови:*

- 1) a_k та b_k є обмеженими;
- 2) існує $L > 0$ така, що для довільного $k = \overline{0, n}$, довільних $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$ та довільних скінченних мір μ_1, μ_2

$$|a_k(u_1, \mu_1) - a_k(u_2, \mu_2)| + |b_k(u_1, \mu_1) - b_k(u_2, \mu_2)| \leq$$

$$L \left(\sup_{K \in \mathfrak{K}} \left| \int K(u_1, v) \mu_1(dv) - \int K(u_2, v) \mu_2(dv) \right| + |u_1 - u_2| \right),$$

де $\mathfrak{K}$ – множина функцій $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, обмежених одиницею, які задовольняють умову Ліпшиця з константою не більше 1.

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (1.2.7).

Розділ 2

Слабкі та сильні розв'язки злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь

2.1 Вступ

Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu(t))dt + b(X_k(t), \mu(t))dw_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Будемо інтерпретувати $X_k(t)$ як положення k -ої частинки в момент часу t , міру $\mu(t)$ як розподіл мас частинок в момент часу t , u_k як початкове положення k -ої частинки, функції a та b відповідають за взаємодію частинок. Тут δ_x – це міра на $\mathbb{R}$ з одиничним атомом в точці x , тобто $\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \delta_x(A) = \mathbf{1}_{x \in A}$. Будемо вважати, що $\{u_k | k \in \mathbb{Z}\}$ – неспадна числова послідовність така, що $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow -\infty} u_k = -\infty$.

В першому підрозділі даного розділу буде доведена теорема існування слабого розв'язку системи (2.1.1). В другому підрозділі буде доведена теорема існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (2.1.1) у випадку $b(x, \mu) \equiv 1$. В третьому підрозділі буде доведена теорема існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (2.1.1).

2.2 Існування слабого розв'язку

Позначимо через $\mathfrak{M}$ простір локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ з топологією грубої збіжності τ :

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu, n \rightarrow \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ - множина неперервних функцій з компактним носієм.

Означення 2.2.1. Нехай задано функції $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ та числову послідовність $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Ймовірнісний простір з фільтрацією $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t, t \geq 0), P)$, $\mathfrak{F}_t$ -узгоджені випадкові процеси $\{X_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathfrak{F}_t$ -узгоджені незалежні вінерівські процеси $\{w_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений мірозначний процес $\mu(\cdot)$ називаються слабким розв'язком рівняння (2.1.1), якщо при підстановці в (2.1.1) з імовірністю 1 отримуємо рівності.

Теорема 2.2.1. Нехай a та b – обмежені та неперервні за сукупністю змінних функції. Припустимо, що існує стала $L > 0$ така, що початкова міра $\mu(0)$ задовольняє співвідношення

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(0, [-m, m]) / m^L < \infty. \quad (2.2.1)$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (2.1.1).

Ідея доведення полягає в наступному. Рівняння (2.1.1) апроксимується послідовністю систем зі скінченною початковою мірою $\mu(0)$. Після цього перевіряється передкомпактність послідовності розподілів розв'язків цих систем. Застосувавши теорему Скорохода про спільний ймовірнісний простір та перейшовши до границі у системі (2.1.1), можна отримати слабкий розв'язок рівняння (2.1.1).

Для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ та числа $x \in \mathbb{R}$ будемо позначати $d([\alpha, \beta], x)$ евклідову відстань від точки x до відрізка $[\alpha, \beta]$. Позначимо

$$\|a\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} |a(x, \mu)|, \quad \|b\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} |b(x, \mu)|,$$

$$p_w(t, x) = P(\sup_{s \in [0, t]} w(s) \geq x) = 2 \int_{x \vee 0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-y^2/2t) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

де w – вінерівський процес.

У доведенні теореми 2.2.1 буде використовуватись наступна лема, яка дає апріорну оцінку на ймовірність потрапляння траєкторії частинки в заданий відрізок:

Лема 2.2.1. *Припустимо, що для довільного $t \in [0, T]$*

$$Z(t) = Z_0 + \int_0^t a_1(s)ds + \int_0^t b_1(s)dw(s), \quad (2.2.3)$$

причому

$$\forall t \in [0, T] \quad |a_1(s)| \leq \|a\|_\infty, \quad |b_1(s)| \leq \|b\|_\infty.$$

Тоді для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$P(\exists t \in [0, T] : Z(t) \in [\alpha, \beta]) \leq p_w(T\|b\|_\infty^2, d([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T], Z_0)).$$

Доведення леми 2.2.1. З рівняння (2.2.3) випливає, що

$$M(t) := Z(t) - Z_0 - \int_0^t a_1(s)ds = \int_0^t b_1(s)dw(s),$$

тобто $M(\cdot)$ є неперервним мартингалом. Тому існує вінерівський процес $B(\cdot)$ такий, що

$$\forall t \in [0, T] \quad M(t) = B(\langle M \rangle(t)).$$

Оскільки для довільного $t \in [0, T]$

$$\left| \int_0^t a_1(s)ds \right| \leq \|a\|_\infty t \leq \|a\|_\infty T,$$

то

$$\begin{aligned} & P(\exists t \in [0, T] : Z(t) \in [\alpha, \beta]) \leq \\ & \leq P\left(\sup_{t \in [0, T\|b\|_\infty^2]} B(t) \geq d([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T], Z_0)\right) = \\ & = p_w(T\|b\|_\infty^2, d([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T], Z_0)). \end{aligned}$$

Лема доведена.

Для довільного $n \geq 1$ розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k^n(t) = a(X_k^n(t), \mu^n(t))dt + b(X_k^n(t), \mu^n(t))dw_k(t), \quad k = \overline{-n, n}, t \in [0, T], \\ \mu_t^n = \sum_{i=-n}^n \delta_{X_i^n(t)}, \\ X_k^n(0) = u_k, \quad k = \overline{-n, n}, \\ X_k^n(t) = u_k, \quad |k| > n, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Система (2.2.4) рівносильна

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k^n(t) = a(X_k^n(t), \sum_{i=-n}^n \delta_{X_i^n(t)})dt + b(X_k^n(t), \sum_{i=-n}^n \delta_{X_i^n(t)})dw_k(t), \\ k = \overline{-n, n}, t \in [0, T], \\ X_k^n(0) = u_k, \quad k = \overline{-n, n}, \\ X_k^n(t) = u_k, \quad |k| > n, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

Система (2.2.5) для $-n \leq k \leq n$ є замкненою системою стохастичних диференціальних рівнянь. Вирази $a(X_k^n(t), \sum_{i=-n}^n \delta_{X_i^n(t)})$ та $b(X_k^n(t), \sum_{i=-n}^n \delta_{X_i^n(t)})$ є неперервними функціями від вектора $(X_{-n}^n(t), X_{-n+1}^n(t), \dots, X_{n-1}^n(t), X_n^n(t))$. Тому за теоремою Скорохода [14] існує слабкий розв'язок системи (2.2.5) а, отже, і системи (2.2.4).

Має місце наступна лема про передкомпактність.

Лема 2.2.2. *За припущень теореми 2.2.1 для довільного $i \in \mathbb{Z}$ послідовність розподілів процесів $\{X_i^n(\cdot), n \geq 1\}$ як випадкових елементів в $C([0, T])$ є передкомпактною.*

Доведення леми 2.2.2. Для доведення передкомпактності послідовності розподілів $\{X_i^n(\cdot), n \geq 1\}$ як випадкових елементів в $C([0, T])$ достатньо перевірити (див. [49], теорема 1.4.7) що існує константа $C > 0$ така що:

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t_0, t_1 \in [0, T] : E(X_i^n(t_1) - X_i^n(t_0))^4 \leq C|t_1 - t_0|^{3/2} \quad (2.2.6)$$

та

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \in [0, T] : E(X_i^n(t))^4 \leq C. \quad (2.2.7)$$

Перевіримо умову (2.2.7).

$$\begin{aligned}
E(X_i^n(t))^4 &= E\left(u_i + \int_0^t a(X_i^n(s), \mu^n(s))ds + \int_0^t b(X_i^n(s), \mu^n(s))dw_i(s)\right)^4 \leq \\
&\leq 27u_i^4 + 27E\left(\int_0^t a(X_i^n(s), \mu^n(s))ds\right)^4 + 27E\left(\int_0^t b(X_i^n(s), \mu^n(s))dw_i(s)\right)^4 \leq \\
&\leq 27(u_i^4 + t^4\|a\|_\infty^4 + 3t^2\|b\|_\infty^4).
\end{aligned}$$

Отже, умова (2.2.7) виконана. Перевіримо умову (2.2.6). Застосувавши формулу Іто до виразу $(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^4$, отримаємо

$$\begin{aligned}
d(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^4 &= \\
&= 4(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^3\left(a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + b(X_i^n(t), \mu^n(t))dw_i(t)\right) + \\
&\quad + 6(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^2b^2(X_i^n(t), \mu^n(t))dt.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Взявши математичне сподівання від обох частин рівності (2.2.8), отримаємо

$$\begin{aligned}
E(X_i^n(t_1) - X_i^n(t_0))^4 &= 4 \int_{t_0}^{t_1} E\left((X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^3 a(X_i^n(t), \mu^n(t)) + \right. \\
&\quad \left. + 6(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^2 b^2(X_i^n(t), \mu^n(t))\right) dt.
\end{aligned}$$

З нерівності Гельдера випливає, що

$$\begin{aligned}
E(X_i^n(t_1) - X_i^n(t_0))^4 &\leq 4 \int_{t_0}^{t_1} \left(E(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^4\right)^{3/4} \left(Ea^4(X_i^n(t), \mu^n(t))\right)^{1/4} dt + \\
&\quad + 6 \int_{t_0}^{t_1} \left(E(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^4\right)^{1/2} \left(Eb^4(X_i^n(t), \mu^n(t))\right)^{1/2} dt \leq \\
&4\|a\|_\infty \int_{t_0}^{t_1} \left(E(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^4\right)^{3/4} dt + 6\|b\|_\infty^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(E(X_i^n(t) - X_i^n(t_0))^4\right)^{1/2} dt.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

З (2.2.7) та (2.2.9) випливає, що

$$E(X_i^n(t_1) - X_i^n(t_0))^4 \leq 4\|a\|_\infty |t_1 - t_0| C^{3/4} + 6\|b\|_\infty^2 |t_1 - t_0| C^{1/2} =: C_1 |t_1 - t_0|. \tag{2.2.10}$$

Підставивши оцінку (2.2.10) в праву частину (2.2.9), отримаємо

$$E(X_i^n(t_1) - X_i^n(t_0))^4 \leq 4\|a\|_\infty \int_{t_0}^{t_1} \left(C_1|t-t_0|\right)^{3/4} dt + 6\|b\|_\infty^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(C_1|t-t_0|\right)^{1/2} dt,$$

звідки і випливає умова (2.2.6). Лема доведена.

Будемо позначати через $\omega_f(\cdot)$ модуль неперервності функції f , а саме

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Позначимо

$$\langle f, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx).$$

Лема 2.2.3. *За припущень теореми 2.2.1 для довільної неперервної функції f з компактним носієм послідовність розподілів $\{\langle f, \mu^n(t) \rangle\}_{n \geq 1}$ є передкомпактною.*

Доведення леми 2.2.3. Достатньо перевірити дві умови:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 \forall n \geq 1 P(|\langle f, \mu^n(0) \rangle| > C) < \varepsilon, \quad (2.2.11)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, 1) \forall n \geq 1 P(\omega_{\langle f, \mu^n(\cdot) \rangle}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (2.2.12)$$

Оскільки

$$\langle f, \mu^n(0) \rangle = \sum_{|i| \leq n} f(X_i^n(0)) = \sum_{|i| \leq n} f(u_i) \rightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(u_i), \quad n \rightarrow \infty,$$

то послідовність $\{\langle f, \mu^n(0) \rangle, n \geq 1\}$ обмежена і умова (2.2.11) виконана.

Перевіримо умову (2.2.12). Легко бачити, що для довільного $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(\omega_{\langle f, \mu^n(\cdot) \rangle}(\delta) \geq \varepsilon) &\leq P(\exists |i| > M \exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in \text{supp } f) + \\ &+ \sum_{|i| \leq M} P\left(\omega_{f(X_i^n(\cdot))}(\delta) \geq \frac{\varepsilon}{2M+1}\right). \end{aligned}$$

Нехай $\text{supp } f \subset [-m, m]$. Тоді

$$P(\exists |i| > M \exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in [-m, m]) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|i|>M} P(\exists t \in [0, T] : X_n^i(t) \in [-m, m]) \leq \\
&\leq \sum_{i:i>M} p_w(T\|b\|_\infty^2, u_i - \|a\|_\infty T - m) + \sum_{i:i<-M} p_w(T\|b\|_\infty^2, -u_i - \|a\|_\infty T - m).
\end{aligned}$$

Позначимо S_M праву частину останньої нерівності. Користуючись (2.2.1), легко отримати, що $S_M < \infty$. З леми 2.2.2 та з [1, теорема 8.2] випливає, що

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(i, \varepsilon) \in (0, 1) \quad \forall n \geq 1 : P(|\omega_{X_i^n}(\delta)| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Виберемо M таке, що $S_M < \varepsilon/2$. Нехай $\varepsilon_1 \in (0, \frac{\varepsilon}{4M+2})$ таке, що $\omega_f(\varepsilon_1) < \varepsilon/(4M+2)$. Оскільки для модуля неперервності суперпозиції функцій маємо

$$\omega_{f(g)}(\delta) \leq \omega_f(\omega_g(\delta)),$$

то для

$$\delta = \min_{-M-1 \leq i \leq M+1} \delta(i, \varepsilon_1)$$

маємо

$$\begin{aligned}
P(\omega_{\langle f, \mu^n(\cdot) \rangle}(\delta) > \varepsilon) &\leq P(\exists |i| \geq M \exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in [-m, m]) + \\
&\sum_{|i| \leq M} P(\omega_{f(X_i^n(\cdot))}(\delta) > \varepsilon/(4M+2)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Лема доведена.

Лема 2.2.4. *За припущень теореми 2.2.1 послідовність розподілів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ як випадкових елементів в $C([0, T], \mathfrak{M})$ є передкомпактною.*

Доведення леми 2.2.4. Нехай $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ – всюди щільна множина в $C_c(\mathbb{R})$. Тоді топологія збіжності в $\mathfrak{M}$ породжується метрикою

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2^n \left(\left| \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu - \int_{\mathbb{R}} f_n d\nu \right| \wedge 1 \right) \quad (2.2.13)$$

і $(\mathfrak{M}, \rho)$ є повним сепарабельним метричним простором [31].

Позначимо

$$M(C_m, m \geq 1) = \{\mu \in \mathfrak{M} | \forall m \geq 1 \quad \mu((-m, m)) \leq C_m\}.$$

Зауваження 2.2.1. Якщо множина G відкрита і $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$, то $\nu(G) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n(G)$ [1, теорема 1.2.1]. В означенні $M(C_m, m \geq 1)$ інтервал $(-n, n)$ береться відкритим для того, щоб множина $M(C_m, m \geq 1)$ була замкненою.

Перевіримо що для довільної послідовності $\{C_m, m \in \mathbb{N}\}$ множина $M(C_m, m \geq 1)$ є компактом в $\mathfrak{M}$. Достатньо довести, що якщо $\{\nu_n, n \geq 1\} \subset M(C_m, m \geq 1)$, то існує підпослідовність $\{\nu_{n_k}, k \geq 1\}$ така, що $\nu_{n_k} \rightarrow \nu \in M(C_m, m \geq 1)$.

З теореми Прохорова випливає, що множина $\{\mathbf{I}_{(-l,l)}(x)\nu(dx) | \nu \in M(C_m, m \geq 1)\}$ є передкомпактною. Отже, для довільного $l \in \mathbb{N}$ з послідовності $\{\mathbf{I}_{(-l,l)}(x)\nu_n(dx)\}_{n \geq 1}$ можна вибрати збіжну підпослідовність. Діагональним методом виберемо підпослідовність $\{\nu_{n_k}, k \geq 1\}$ таку, що для довільного $l \in \mathbb{N}$ послідовність $\{\mathbf{I}_{(-l,l)}(x)\nu_n(dx)\}_{n \geq 1}$ є збіжною. Нехай

$$\mathbf{I}_{(-l,l)}(x)\nu_n(dx) \rightarrow \nu^l, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.2.14)$$

Тоді для довільних $l_1 < l_2$ і довільної функції $f \in C_c(\mathbb{R})$ такої, що $\text{supp } f \subset (-l_1, l_1)$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu^{l_1}, \quad \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu^{l_2}.$$

Отже,

$$\mathbf{I}_{(-l_1,l_1)}(x)\nu^{l_1}(dx) = \mathbf{I}_{(-l_1,l_1)}(x)\nu^{l_2}(dx),$$

тому існує міра $\nu \in M(C_m, m \geq 1)$ така, що

$$\forall l \geq 1 \quad \mathbf{I}_{(-l,l)}(x)\nu^l(dx) = \mathbf{I}_{(-l,l)}(x)\nu(dx).$$

Тепер з (2.2.14) випливає, що

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu.$$

Отже, $\nu_{n_k} \rightarrow \nu$. Компактність множини $\{M(C_m), m \geq 1\}$ доведена.

Для доведення леми достатньо перевірити дві умови [38, теорема 3.7.2]:

1. для довільних $\varepsilon > 0$ та $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$ існує компакт $\Gamma_{\varepsilon, t} \subset \mathfrak{M}$ такий, що

$$\sup_n P(\mu^n(t) \in \Gamma_{\varepsilon, t}) \geq 1 - \varepsilon;$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sup_n P(\omega_{\mu^n(\cdot)}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$.

Перевіримо умову 1. Для цього оцінимо

$$\begin{aligned} E \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\exists t \in [0, T]: X_i^n(t) \in [-m, m]} &\leq |\{i : u_i \in [-m - \|a\|_\infty T, m + \|a\|_\infty T]\}| + \\ &\sum_{i: u_i < -m - \|a\|_\infty T} p_w(T \|b\|_\infty^2, -m - \|a\|_\infty T - u_i) + \\ &\sum_{i: u_i > m + \|a\|_\infty T} p_w(T \|b\|_\infty^2, u_i - m - \|a\|_\infty T). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Позначимо C_m праву частину нерівності (2.2.15). З (2.2.1) і з того, що

$$p_w(t, x) \sim \frac{2}{x\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, x \rightarrow \infty,$$

випливає, що

$$\begin{aligned} &\sum_{i: u_i > m + \|a\|_\infty T} p_w(T \|b\|_\infty^2, u_i - m - \|a\|_\infty T) \leq \\ &\sum_{k \geq m + \|a\|_\infty T} |\{i : |u_i| < k\}| p_w(T \|b\|_\infty^2, k - m - \|a\|_\infty T) < \infty. \end{aligned}$$

Аналогічно можна перевірити що і інша сума в (2.2.15) скінченна, отже, $C_m < \infty$.

З (2.2.15) та з нерівності Чебишова випливає, що

$$\begin{aligned} &P(\mu^n(t) \notin M(2^m C_m / \varepsilon, m \geq 1)) \leq \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}} P(\mu^n(t)([-m, m]) \geq 2^m C_m / \varepsilon) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon / 2^m = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, умова 1 виконана. Перевіримо умову 2.

$$\rho(\mu^n(t_1), \mu^n(t_2)) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 1/2^m (|\langle f_m, \mu^n(t_1) \rangle - \langle f_m, \mu^n(t_2) \rangle| \wedge 1) \leq$$

$$\leq \sum_{m \in \mathbb{N}} 1/2^m (\omega_{\langle f_m, \mu^n(\cdot) \rangle}(|t_1 - t_2|) \wedge 1).$$

Тепер умова 2 впливає з (2.2.12). Лема доведена.

З лем 2.2.3, 2.2.4 та діагонального методу Кантора впливає, що існує деяка підпослідовність $\{n_k, k \geq 1\}$ така, що послідовність $(X_i^{n_k}(\cdot), i \in \mathbb{Z}, \mu^{n_k}(\cdot)), k \geq 1$ є слабо збіжною як послідовність випадкових елементів в $C([0, T], \mathbb{R}^\infty) \times C([0, T], \mathfrak{M})$.

Отже, за теоремою Скорохода про спільний імовірнісний простір існує ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ і випадкові процеси на ньому $\{\tilde{X}_i^{n_k}(\cdot), \tilde{w}_i^{n_k}(\cdot), \tilde{\mu}^{n_k}(\cdot)\}_{i \in \mathbb{Z}, k \geq 1}$ та $\tilde{X}_i(\cdot), \tilde{w}_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}, \tilde{\mu}(\cdot)$ такі, що $\tilde{X}_i^{n_k} \xrightarrow{P1} \tilde{X}_i, \tilde{w}_i^{n_k} \xrightarrow{P1} \tilde{w}_i$ як випадкові елементи в $C([0, T])$, і $\tilde{\mu}^{n_k}(\cdot) \rightarrow \tilde{\mu}(\cdot), k \rightarrow \infty$ як випадкові елементи в $C([0, T], \mathfrak{M})$, причому

$$\forall k \geq 1 (\tilde{X}_i^{n_k}(\cdot), \tilde{w}_i^{n_k}(\cdot), \tilde{\mu}^{n_k}(\cdot))_{i \in \mathbb{Z}} \stackrel{d}{=} (X_i^{n_k}(\cdot), w_i^{n_k}(\cdot), \mu^{n_k}(\cdot))_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Надалі для спрощення позначень будемо вважати, що

$$\forall i X_i^n(\cdot) \xrightarrow{P1} X_i(\cdot), w_i^n(\cdot) \xrightarrow{P1} w_i(\cdot) \text{ та } \mu^n(\cdot) \xrightarrow{P1} \mu(\cdot) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Лема 2.2.5. *За припущень теореми 2.2.1*

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) E \sup_{t \in [0, T]} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |f(X_i^n(t)) - f(X_i(t))| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Доведення лема 2.2.5. Нехай $f \in C_c(\mathbb{R})$, число $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\text{supp } f \subset (-l, l)$. Тоді

$$\begin{aligned} E \sup_{t \in [0, T]} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |f(X_i^n(t)) - f(X_i(t))| &\leq E \sup_{t \in [0, T]} \sum_{|i| \leq N} |f(X_i^n(t)) - f(X_i(t))| \\ &+ \|f\|_\infty \sum_{|i| > N} (P(\exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in (-l, l)) + P(\exists t \in [0, T] : X_i(t) \in (-l, l))) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

З лема 2.2.1 (застосованої до X_i^n) та умови (2.2.1) аналогічно оцінюванню (2.2.15) впливає, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|i| > N} P(\exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in (-l, l)) = 0.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Виберемо $N \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{|i|>N} P(\exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in (-l, l)) < \varepsilon.$$

Оскільки з леми Фату

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|i|>N} P(\exists t \in [0, T] : |X_i^n(t)| > l) \geq \sum_{|i|>N} P(\exists t \in [0, T] : |X_i(t)| > l),$$

маємо, що права частина (2.2.16) не перевищує 3ε для $N \geq N_0$. Лема доведена.

З леми 2.2.5 випливає, що

$$\forall j \in \mathbb{N} \sup_{t \in [0, T]} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |f_j(X_i^n(t)) - f_j(X_i(t))| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

де функції f_j з означення метрики (2.2.13). А отже, $\mu^n(\cdot) \rightarrow \mu(\cdot)$ за ймовірністю. Перейшовши до підпослідовності, не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $\mu^n(\cdot) \rightarrow \mu(\cdot)$ майже напевно. Перейшовши тепер до границі при $n \rightarrow \infty$ в системі

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k^n(t) = a(X_k^n(t), \mu^n(t))dt + b(X_k^n(t), \mu^n(t))dw_k^n(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu^n(t) = \sum_{i=-n}^n \delta_{X_i^n(t)}, \\ X_k^n(0) = u_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \quad (2.2.17)$$

отримаємо, що $(X_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}, \mu(\cdot))$ є слабким розв'язком рівняння (2.1.1). Збіжність інтегралів Лебега випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність. Збіжність стохастичних інтегралів перевіряється як у доведенні теореми Скорохода про слабе існування розв'язку стохастичного диференціального рівняння (див. [14], параграф 3.3). Теорема 2.2.1 доведена.

2.3 Існування та єдиність сильного розв'язку для систем з однорідною дифузією

Розглянемо рівняння (2.1.1) в якому $b(x, \mu) \equiv 1$.

$$\begin{cases} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu_t)dt + dw_k(t), & k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Нехай $\mathfrak{F}_t$ – фільтрація, породжена початковою умовою μ_0 та вінерівськими процесами $w_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}$.

Означення 2.3.1. Сильним розв'язком рівняння (2.3.1) називаються $\mathfrak{F}_t$ -узгоджені випадкові процеси $\{X_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$ та випадковий мірозначний процес $\mu(\cdot)$ що мають майже напевно неперервні траєкторії і при підстановці в (2.3.1) з імовірністю 1 отримуємо рівність.

Має місце наступна теорема існування та єдиності.

Теорема 2.3.1. *Припустимо, що:*

1. *функція a є вимірною та обмеженою:*

$$\|a\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\nu \in \mathfrak{M}} |a(x, \nu)| < \infty;$$

2. *функція a має властивість скінченності радіусу взаємодії:*

$$\exists d > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \nu \in \mathfrak{M} : a(x, \nu) = a(x, \nu \mathbf{I}_{(x-d, x+d)}),$$

$$de(\nu \mathbf{I}_B)(A) = \nu(A \cap B), \quad A, B \in B(\mathbb{R});$$

3. *з імовірністю 1 існує випадкова послідовність $\{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \inf_{i: u_i \geq y_n} \inf_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t) \wedge 0) - \sup_{i: u_i < y_n} \sup_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t) \vee 0) \geq 2\|a\|_\infty T + d.$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (2.3.1).

Зауваження 2.3.1. Умова 2 означає, що частинки, які знаходяться на відстані більше d , не взаємодіють між собою.

Зауваження 2.3.2. З умови 3 слідує, що систему частинок можна розбити на зліченну кількість скінченних підсистем, відстань між якими більша за d для довільного $t \in [0, T]$. Тому, згідно з умовою 2, ці підсистеми не взаємодіють між собою.

Зауваження 2.3.3. З усіх припущень теореми 2.3.1 найскладніше перевірити припущення 3. Теорема 2.3.2 (див. далі) дає достатні умови виконання цього припущення.

Приклад 2.3.1. Нехай функція f обмежена вимірна, а функція g вимірна і має компактний носій. Тоді функція

$$a(x, \mu) = f \left(\int_{\mathbb{R}} g(y - x) \mu(dy) \right)$$

задовольняє припущення 1 та 2 теореми 2.3.1, при цьому умова 2 виконується з довільним d таким, що $\text{supp } g \subset (-d, d)$.

Доведення теореми 2.3.1 З теореми Веретенникова [69] випливає, що якщо функція $b : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ є обмеженою та вимірною функцією, то стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} dY(t) = b(t, Y(t))dt + dW(t), t \in [0, T], \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

має єдиний сильний розв'язок. Тут $W(t), t \in [0, T]$ - вінерівський процес в $\mathbb{R}^d$.

Розбиття з умови 3, взагалі кажучи, є випадковим і упереджувачим. Тому безпосередньо теорему Веретенникова використати неможливо. Для доведення існування та єдиності розв'язку (2.3.1) розглянемо послідовність систем

$$\begin{cases} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu_t)dt + dw_i(t), \quad -n \leq i \leq n, \quad t \in [0, T], \\ dX_i^n(t) = 0, \quad |i| > n, \\ \mu_t^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k^n(t)}, \\ X_i^n(0) = u_i, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Підставивши друге та третє рівняння в перше рівняння системи, отримаємо, що (2.3.3) рівносильно скінченній системі стохастичних диференціальних рівнянь. Отже, за теоремою Веретенникова, існує єдиний розв'язок (2.3.3).

Позначимо через τ_{n_1, n_2} інфімум тих $t \in [0, T]$, для яких існують індекси $k_1 \in (n_1, n_2]$ та $k_2 \notin (n_1, n_2]$ такі, що

$$\begin{aligned} & |u_{k_1} + w_{k_1}(t) - u_{k_2} - w_{k_2}(t)| \vee |u_{k_1} - u_{k_2} - w_{k_2}(t)| \vee \\ & \vee |u_{k_1} + w_{k_1}(t) - u_{k_2}| \leq 2\|a\|_\infty T + d. \end{aligned}$$

Доведемо, що м. н.

$$\forall t \in [0, \tau_{n_1, n_2}] \quad \forall n \geq |n_1| \vee |n_2| : X_i^{|n_1| \vee |n_2|}(t) = X_i^n(t). \quad (2.3.4)$$

Дійсно, для $n \geq |n_1| \vee |n_2|$, $t \leq \tau_{n_1, n_2}$, $k \in (n_1, n_2]$ маємо

$$\begin{aligned} X_k^n(t) &= u_k + w_k(t) + \int_0^t a(X_k^n(s), \mu_s^n) ds = \\ &= u_k + w_k(t) + \int_0^t a(X_k^n(s), \mu_s^n \mathbf{I}_{[X_k^n(s)-d, X_k^n(s)+d]}) ds. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

З означення τ_{n_1, n_2} випливає, що

$$\forall j \notin (n_1, n_2] \quad \forall s \in [0, \tau_{n_1, n_2}] : |X_j^n(s) - X_k^n(s)| \geq d.$$

Тому

$$\mu_s^n \mathbf{I}_{[X_k^n(s)-d, X_k^n(s)+d]} = \sum_{n_1 < j \leq n_2} \delta_{X_j^n(s)} \mathbf{I}_{[X_k^n(s)-d, X_k^n(s)+d]}, \quad s \in [0, \tau_{n_1, n_2}].$$

Отже,

$$X_k^n(t) = u_k + w_k(t) + \int_0^t a(X_k^n(s), \sum_{n_1 < j \leq n_2} \delta_{X_j^n(s)}) ds, \quad t \in [0, \tau_{n_1, n_2}].$$

Тому $X_k^n(t)$, $t \in [0, \tau_{n_1, n_2}]$, $k \in (n_1, n_2]$ та $X_k^{|n_1| \vee |n_2|}(t)$, $t \in [0, \tau_{n_1, n_2}]$, $k \in (n_1, n_2]$, є розв'язками одної й тої ж системи рівнянь. Звідси

$$X_k^{|n_1| \vee |n_2|} = X_k^n(t), t \in [0, \tau_{n_1, n_2}] \text{ м. н.} \quad (2.3.6)$$

З припущення 3 теореми випливає, що м. н.

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists n_1 < k \quad \exists n_2 \geq k : \tau_{n_1, n_2} = T. \quad (2.3.7)$$

З (2.3.6) та (2.3.7) випливає, що з імовірністю 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язки $X_k^n(t)$, $t \in [0, T]$ співпадають, починаючи з деякого n_0 .

Позначимо

$$X_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_k^n(t). \quad (2.3.8)$$

Отже,

$$X_k(t) = u_k + w_k(t) + \int_0^t a(X_k(s), \sum_{n_1 < j \leq n_2} \delta_{X_j(s)}) ds, k \in (n_1, n_2], t \in [0, \tau_{n_1, n_2}]. \quad (2.3.9)$$

Тепер, враховуючи (2.3.7), легко бачити, що $X_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, T]$ є розв'язком (2.3.1). Існування сильного розв'язку (2.3.1) доведено.

Нехай $\{Y_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$ - інший розв'язок (2.3.1). Тоді з теореми Веретенникова для довільних $n_1 < n_2$ маємо

$$X_k(s) = Y_k(s), k \in (n_1, n_2], s \in [0, \tau_{n_1, n_2}].$$

Знову враховуючи (2.3.7), отримаємо, що розв'язки $\{X_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{Y_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$ співпадають. Теорема доведена.

Наступна теорема дає достатні умови виконання припущення 3 теореми 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Припустимо, що існує не випадкова зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} z_n = -\infty$;
2. $\exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} : \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) > \varepsilon_1$.

Тоді виконується припущення 3 теореми 2.3.1.

Зауваження 2.3.4. Теореми 2.3.1 та 2.3.2 справедливі і у випадку, якщо початковий розподіл мас

$$\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_{u_k},$$

а не

$$\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{u_k},$$

де $\{u_k, k \geq 1\}$ - неспадна числова послідовність така, що

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty.$$

Доведення теореми 2.3.2 Спочатку доведемо, що

$$\forall k \geq 1 \quad P\left(\sup_{i: u_i < z_k} \sup_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t)) < \infty\right) = 1. \quad (2.3.10)$$

Зафіксуємо довільне $k \geq 1$. З припущення 2 теореми випливає, що

$$\sum_{i: u_i < z_k} p_w(T, |z_k - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2) < +\infty, \quad (2.3.11)$$

тобто

$$\sum_{i: u_i < z_k} P\left(\sup_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t)) \geq z_k - \|a\|_\infty T - d/2\right) < +\infty. \quad (2.3.12)$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі, кількість цілих i таких, що $u_i < z_k$ та $\sup_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t)) \geq z_k - \|a\|_\infty T - d/2$ є скінченною. Звідси випливає (2.3.10).

Аналогічно,

$$\forall k \geq 1 \quad P\left(\inf_{i: u_i > z_k} \inf_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t)) > -\infty\right) = 1.$$

Позначимо

$$\xi_k = \max_{t \in [0, T]} (u_k + w_k(t)), \quad (2.3.13)$$

$$\eta_k = \min_{t \in [0, T]} (u_k + w_k(t)). \quad (2.3.14)$$

Для доведення теореми достатньо довести, що події

$$A_k = \left\{ \sup_{i: u_i < z_k} \xi_i \leq z_k - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i: u_i > z_k} \eta_i \geq z_k + d/2 + \|a\|_\infty T \right\} \quad (2.3.15)$$

м. н. відбуваються нескінченно часто при $k \rightarrow +\infty$ та при $k \rightarrow -\infty$. Доведення цих тверджень є аналогічними, тому доведемо що події A_k відбуваються нескінченно часто при $k \rightarrow +\infty$.

Безпосередньо другу частину леми Бореля-Кантеллі не можна застосовувати до подій A_k , оскільки вони є залежними. Ідея доведення полягає в наближенні подій деякої підпослідовності A_{k_n} подіями A'_{k_n} , в яких максимум та мінімум в означенні подій A_k заміняється, відповідно, максимумом та мінімумом за скінченними неперетинними множинами індексів. Таким чином отримана послідовність подій A'_{k_n} буде послідовністю незалежних подій.

Аналогічно доведенню (2.3.10) можна перевірити, що для довільного цілого k кількість цілих i таких, що $u_i > z_k$ та $\eta_i \leq z_k + \|a\|_\infty T + d/2$ є скінченною м. н. Звідси

$$\eta_n \xrightarrow{P1} +\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$$

і значить

$$\xi_n \xrightarrow{P1} +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Отже, для довільних $n \in \mathbb{Z}$ та $\varepsilon > 0$ існує $l(n, \varepsilon)$ таке, що

$$\forall l \geq l(n, \varepsilon) : P\left(\sup_{n < k \leq n+l} \xi_k \neq \sup_{k \leq n+l} \xi_k\right) < \varepsilon, \quad P\left(\inf_{k > n} \eta_k \neq \inf_{n+l \leq k < n} \eta_k\right) < \varepsilon. \quad (2.3.16)$$

Нехай $\{m_k | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$ - деяка строго зростаюча послідовність. Позначимо

$$i(k) = \max\{i | u_i \leq z_{m_k}\}.$$

Побудуємо послідовність $\{m_k\}$ так, щоб

$$\forall k \geq 1 \quad i(k+1) - i(k) \geq \max\{l(i(k)), 1/2^k, 2\}. \quad (2.3.17)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
& P(\forall M \exists k > M : \sup_{i \leq i(k)} \xi_i \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i > i(k)} \eta_i \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T) \geq \\
& P(\forall M \exists k > M : \sup_{i \leq i(k)} \xi_i = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i, \inf_{i > i(k)} \eta_i = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i, \\
& \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T) \geq \\
& P(B_1 \cap B_2), \tag{2.3.18}
\end{aligned}$$

де

$$B_1 = \{\exists M \forall k > M : \sup_{i \leq i(k)} \xi_i = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i, \inf_{i > i(k)} \eta_i = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i\}, \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = \{\forall M \exists k > M : \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \\
\inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T\}. \tag{2.3.20}
\end{aligned}$$

Подія B_1 полягає в тому, що починаючи з деякого номера виконуються всі події

$$\{\sup_{i \leq i(k)} \xi_i = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i, \inf_{i > i(k)} \eta_i = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i\},$$

подія B_2 полягає в тому, що події

$$\{\sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T\}$$

виконуються нескінченно часто при $n \rightarrow \infty$.

З (2.3.17) та (2.3.16) випливає, що

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 1} P(\{\sup_{i \leq i(k)} \xi_i \neq \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i\} \cup \{\inf_{i > i(k)} \eta_i \neq \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i\}) \leq \\
& \leq \sum_{k \geq 1} (1/2^k + 1/2^k) < +\infty.
\end{aligned}$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі, P -м. н. для всіх k окрім, можливо, скінченної кількості, має місце подія

$$\{\sup_{i \leq i(k)} \xi_i = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i, \inf_{i > i(k)} \eta_i = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i\},$$

тобто $P(B_1) = 1$.

Позначимо

$$C_k = \left\{ \begin{array}{l} \sup_{i(2k-1) < i \leq i(2k)} \xi_i \leq z_{m_{2k}} - d/2 - \|a\|_\infty T, \\ \inf_{i(2k+1) \geq i > i(2k)} \eta_i \geq z_{m_{2k}} + d/2 + \|a\|_\infty T \end{array} \right\}$$

Події $C_k, k \geq 1$ є незалежними. Для встановлення $P(B_2) = 1$ за лемою Бореля-Кантеллі достатньо перевірити, що

$$\sum_{k \geq 1} P(C_k) = +\infty. \quad (2.3.21)$$

Оцінимо ймовірність $P(C_k)$ знизу:

$$\begin{aligned} P(C_k) &= P \left(\bigcap_{i=i(2k-1)+1}^{i(2k)} \{ \max_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t)) \leq z_{m_k} - d/2 - T\|a\|_\infty \} \cap \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{i=i(2k)+1}^{i(2k+1)} \{ \min_{t \in [0, T]} (u_i + w_i(t)) \geq z_{m_k} + d/2 + T\|a\|_\infty \} \right) = \\ &\quad \prod_{i=i(2k-1)+1}^{i(2k+1)} (1 - p_w(T, |z_{m_k} - u_i| - d/2 - T\|a\|_\infty)) \geq \\ &\quad \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T, |z_{m_k} - u_i| - d/2 - T\|a\|_\infty)) > \varepsilon_1, \end{aligned}$$

тут $\varepsilon_1 > 0$ з припущення 2 даної теореми. Звідси випливає (2.3.21), значить $P(B_2) = 1$. Отже, $P(B_1 \cap B_2) = 1$, і з (2.3.18) випливає, що події A_k , визначені в (2.3.15), м.н. відбуваються нескінченно часто при $k \rightarrow +\infty$ та при $k \rightarrow -\infty$. Теорема доведена.

Теорема 2.3.3. *Нехай μ_0 - незалежна від $\{w_k | k \in \mathbb{Z}\}$ пуассонівська точкова міра з інтенсивністю m . Припустимо, що*

$$\exists C_m \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} : m([\alpha, \beta]) \leq C_m(\beta - \alpha + 1),$$

і виконуються припущення 1 та 2 теореми 2.3.1. Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.3.1) для довільного $T > 0$.

Доведення теореми 2.3.3 Якщо інтенсивність пуасонівської точкової міри m є скінченною мірою, то міра μ майже напевно має скінченну кількість атомів і існування та єдиність сильного розв'язку (2.3.1) випливає з теореми Веретенникова. Надалі розглядаємо випадок, коли $m([0, +\infty)) = +\infty$ і $m((-\infty, 0]) = +\infty$. Випадок, коли одна з величин $m([0, +\infty))$ і $m((-\infty, 0])$ є скінченною розглядається аналогічно. Нехай $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{u_k}$. Без втрати загальності будемо вважати, що послідовність $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$ впорядкована за зростанням. Оскільки $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{w_i, i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні, то достатньо побудувати цілочисельну вимірну відносно $\sigma(u_k, k \in \mathbb{Z})$ послідовність $\{z_n | n \geq 0\}$ таку що м. н. задовольняє припущення теореми 2.3.2. Для від'ємних n послідовність $\{z_n\}$ будується аналогічно.

Позначимо

$$\begin{aligned} A &= d/2 + \|a\|_\infty T, \\ D_1(x, r) &= \prod_{|u_i - x| > r} (1 - p_w(T, |x - u_i| - A)), \\ D_2(x, r) &= \prod_{|u_i - x| \leq r} (1 - p_w(T, |x - u_i| - A)), \\ D(x) &= \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T, |x - u_i| - A)). \end{aligned}$$

Лема 2.3.1. *Нехай μ - пуасонівська точкова міра, що задовольняє припущення теореми 2.3.3. Тоді для всіх $B > 0$, $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} p_w(T, |x - u_i| - B) < +\infty \text{ м. н.}$$

Доведення леми 2.3.1. Позначимо $f(y) = m([0, y)) \mathbf{1}_{y \geq 0} - m([y, 0)) \mathbf{1}_{y < 0}$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$\mu([y_1, y_2)) = \Pi([f(y_1), f(y_2))), \quad [y_1, y_2) \subset \mathbb{R},$$

де Π – пуасонівська точкова міра з інтенсивністю 1. Тому з посиленого закону великих чисел випливає, що

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu([x - n, x + n])/2n \leq C_m) = 1.$$

Отже,

$$P(\exists Q > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad \mu([x - n, x + n]) \leq Qn) = 1.$$

Тоді з імовірністю 1

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_w(T, |x - u_i| - B) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i: |x - u_i| \in [k-1, k)} p_w(T, |x - u_i| - B) \leq \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} |\{i : |x - u_i| \in [k-1, k)\}| p_w(T, k-1-B) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} Qk p_w(T, k-1-B) < +\infty, \end{aligned}$$

оскільки

$$p_w(t, x) \sim \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi x}} \exp(-x^2/2t), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Лема доведена.

Для довільного $x \in \mathbb{N}$ визначимо пуасонівську точкову міру $\mu_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{v_k(x)}$ з інтенсивністю $2C_m (\delta_x + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k)$ таким чином, щоб

$$\forall r > 0 \quad \mu([x - r, x + r]) \leq \mu_x([x - r, x + r]).$$

А саме, позначимо

$$I_x(k) = \begin{cases} [x + k, x + k + 1), & k \geq 1, \\ (x - 1, x + 1), & k = 0, \\ (x + k - 1, x + k], & k \leq -1, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

і $\mu_x(k) = \mu(I_x(k)) + \xi_k$, де $\{\xi_k | k \in \mathbb{Z}\}$ - незалежні пуасонівські випадкові величини, незалежні від μ , причому $\xi_k \sim Pois(2C_m - m(I_x(k))), k \in \mathbb{Z}$.

Позначимо

$$D_1^v(x, r) = \prod_{i: |v_i(x) - x| > r} (1 - p_w(T, |x - v_i(x)| - A)),$$

$$D_2^v(x, r) = \prod_{i: |v_i(x) - x| \leq r} (1 - p_w(T, |x - v_i(x)| - A)),$$

$$D^v(x) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T, |x - v_i(x)| - A))$$

Розподіл $D_1^v(x, r)$, $D_2^v(x, r)$ та $D^v(x)$ однаковий для всіх $x \in \mathbb{N}$. Крім того,

$$\forall x \in \mathbb{Z} \forall r > 0 : D_1(x, r) \geq D_1^v(x, r), D_2(x, r) \geq D_2^v(x, r), D(x) \geq D^v(x). \quad (2.3.23)$$

З леми 2.3.1 випливає, що $D_1^v(x, r) \rightarrow 1$, $r \rightarrow +\infty$ з імовірністю 1, тому

$$\forall i \in \mathbb{N} \exists r_i \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{Z} : P(D_1^v(x, r_i) < 1/2) < 1/2^i. \quad (2.3.24)$$

З (2.3.23) та (2.3.24) випливає, що

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{Z} : P(D_1(x, r_i) < 1/2) < 1/2^i.$$

Виберемо послідовність $\{x_i | i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$ наступним чином:

$$x_1 = 0, x_{k+1} = x_k + r_k + r_{k+1} + 1, k \geq 1.$$

Тоді з леми Бореля-Кантеллі випливає, що

$$P(\exists k_0 \forall k > k_0 : D_1(x_k, r_k) > 1/2) = 1.$$

Виберемо $A_2 > \|a\|_\infty T + d$ так, щоб $p_w(T, A_2 - A) < 1/2$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\{r_k, k \geq 1\}$ вибрані таким чином, що $A_2 < r_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Оцінимо ймовірність

$$\begin{aligned} & P(\mu([x_k - A_2, x_k + A_2]) = 0, D_2(x_k, r_k) > 1/2) \geq \\ & P(\mu([x_k - A_2, x_k + A_2]) = 0) P\left(\prod_{A_2 < |v_i(x) - x| < r_k} (1 - p_w(T, |x - v_i(x)| - A)) > 1/2\right) \geq \\ & \exp(-C_m(2A_2 + 1)) P(D_1^v(x, A_2) > 1/2). \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Оскільки міри в послідовності $\{\mu \mathbf{I}_{[x_k - r_k, x_k + r_k]}, k \geq 1\}$ є незалежними, і оцінка ймовірності (2.3.25) рівномірна за k , то з імовірністю 1 існує підпослідовність $\{x_{n_k} | k \geq 1\} \subset \{x_k | k \geq 1\}$ така, що

$$\forall k \geq 1 : \mu([x_{n_k} - A_2, x_{n_k} + A_2]) = 0, D_2(x_{n_k}, r_{n_k}) > 1/2.$$

Отже, при $n_k > k_0$ маємо $\mu([x_{n_k} - A_2, x_{n_k} + A_2]) = 0$, $D_2(x_{n_k}, r_{n_k}) > 1/2$, $D_1(x_{n_k}, r_{n_k}) > 1/2$. Звідси

$$D(x_{n_k}) = D_1(x_{n_k}, r_{n_k})D_2(x_{n_k}, r_{n_k}) > 1/4,$$

тобто послідовність $z_k = x_{n_k}$, $k \geq 1$, задовольняє припущення теореми 2.3.2. Теорема доведена.

Для локально скінченної міри ν позначимо

$$\Lambda(\nu) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu([-n, n])}{2n}.$$

Показник $\Lambda(\nu)$ є верхньою оцінкою для “середньої густини” атомів міри ν .

Для довільного $\lambda > 0$ покладемо

$$M_\lambda = \{\nu | \Lambda(\nu) \leq \lambda\}.$$

Теорема 2.3.4. *Нехай $\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{u_k} \in M_\lambda$, $\lambda d < 1$. Припустимо, що виконуються умови 1 та 2 теореми 2.3.1. Тоді існує єдиний сильний розв’язок рівняння (2.3.1) для довільного $T > 0$.*

Доведення теореми 2.3.4 Перевіримо, що виконуються умови теореми 2.3.2 для деякого T_0 . Позначимо $A_T = \|a\|_\infty T + d/2$, $f_T(x) = p_w(T, |x| - A_T) \wedge 1/2$.

З (2.2.2) випливає, що

$$I(T) := \int_{\mathbb{R}} f_T(x) dx < +\infty, \quad I_n(T) := \int_{|x| > n} f_T(x) dx < +\infty.$$

Позначимо

$$S_T(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_T(x - u_i).$$

Оцінимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n S_T(x) dx &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{-n}^n f_T(x - u_i) dx \leq \sum_{i: u_i \in [-n, n]} \int_{\mathbb{R}} f_T(x - u_i) dx + \\ &\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i: |u_i| \in (k+n-1, k+n]} \int_{|x-u_i| \geq k} f_T(x - u_i) dx \leq \end{aligned}$$

$$|\{i : u_i \in [-n, n]\}|I(T) + \sum_{k \in \mathbb{N}} |\{i : |u_i| \leq k + n\}|I_k(T).$$

Виберемо $\varepsilon > 0$ таким чином, щоб $\lambda(1 + \varepsilon) < 1/d$. Оскільки $\mu(0) \in M_\lambda$, то існує $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$|\{i : u_i \leq n\}| \leq 2n\lambda(1 + \varepsilon).$$

Звідси

$$\int_{-n}^n S_T(x) dx \leq 2n\lambda(1 + \varepsilon)I(T) + \sum_{k \in \mathbb{N}} 2(k + n)\lambda(1 + \varepsilon)I_k(T) < +\infty. \quad (2.3.26)$$

Скінченність правої частини нерівності випливає з означення $I(T)$, $I_k(T)$ та з (2.2.2).

Позначимо

$$f(x) := \lim_{T \rightarrow 0} f_T(x) = \begin{cases} 0, & |x| > d/2, \\ 1/2, & |x| \leq d/2. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Помітимо, що $I(T) \rightarrow d$ та $I_k(T) \rightarrow (d - 2k)\mathbf{1}_{k < d/2}$ при $T \rightarrow 0 +$.

Позначимо $S(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x - u_i)$.

Використавши (2.3.26), (2.3.27) та теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо, що

$$\int_{-n}^n S(x) dx = \lim_{T \rightarrow 0} \int_{-n}^n S_T(x) dx.$$

Доведемо, що

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-n}^n (S_T(x) - S(x)) dx}{2n} = 0. \quad (2.3.28)$$

Позначимо

$$K(T) = \int_{\mathbb{R}} (f_T(x) - f(x)) dx, \quad K_n(T) = \int_{|x| \in [n, n+1)} (f_T(x) - f(x)) dx.$$

Аналогічно до оцінювання $\int_{-n}^n S_T(x) dx$ маємо

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n (S_T(x) - S(x)) dx \leq \frac{1}{2n} |\{i : u_i \in [-n, n]\}| K(T) +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i: u_i \in (k+n-1, k+n]} \sum_{j \geq k} K_j(T) \leq \frac{1}{2n} \lambda(1+\varepsilon) n K(T) + \\
& \frac{1}{2n} \sum_{j \in \mathbb{N}} K_j(T) \sum_{0 \leq k \leq j} |\{i : |u_i| \in (k+n-1, k+n]\}| = \\
& \frac{1}{2n} \lambda(1+\varepsilon) n K(T) + \frac{1}{2n} \sum_{j \in \mathbb{N}} K_j(T) |\{i : |u_i| \in (n-1, j+n]\}| \leq \\
& \frac{1}{2n} \lambda(1+\varepsilon) n K(T) + \frac{1}{2n} \sum_{j \in \mathbb{N}} K_j(T) |\{i : |u_i| \leq j+n\}| \leq \\
& \leq \frac{1}{2n} \lambda(1+\varepsilon) n K(T) + \frac{1}{2n} \sum_{j \in \mathbb{N}} 2\lambda(1+\varepsilon)(j+n) K_j(T), \quad n \geq n_0(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n} \int_{-n}^n (S_T(x) - S(x)) dx \leq \lambda \frac{1+\varepsilon}{2} \left(K(T) + \sum_{j \in \mathbb{N}} K_j(T) \right) + \\
& \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{n} \sum_{j \in \mathbb{N}} j K_j(T) = \lambda(1+\varepsilon) K(T) + \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{n} \sum_{j \in \mathbb{N}} j K_j(T), \quad n \geq n_0(\varepsilon).
\end{aligned}$$

За теоремою Лебега про монотонну збіжність $K(T) \rightarrow 0, T \rightarrow 0$. З означення $K_j(T)$ легко бачити, що $\sum_{j \in \mathbb{N}} j K_j(T) < +\infty$. Звідси випливає (2.3.28). Легко бачити, що

$$\frac{\int_{-n}^n S(x) dx}{2n} \rightarrow \lambda d/2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.3.29)$$

Позначимо $H(x) = \sup\{T > 0 : K(T) < x\}$. Враховуючи, що $\lambda d < 1$ з (2.3.28) та (2.3.29) отримаємо, що

$$\forall T_0 < H\left(\frac{1-\lambda d}{2\lambda(1+\varepsilon)}\right) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-n}^n S_{T_0}(x) dx}{2n} < 1/2. \quad (2.3.30)$$

Покладемо

$$T_0 = \frac{1}{2} H\left(\frac{1-\lambda d}{2\lambda(1+\varepsilon)}\right).$$

Тоді

$$\forall n_0 \exists x, |x| > n_0 : S_{T_0}(x) < 1/2.$$

З означення $S_T(x)$ випливає, що якщо $S_T(x) < 1/2$, то

$$\forall i \geq 1 \ p_w(T, |x - u_i| - A_T) < 1/2.$$

Для довільного $y \in [0, 1/2]$ має місце нерівність $\ln(1 - y) \geq -2y$.

Звідси якщо $S_{T_0}(x) < 1/2$, то

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \ln(1 - p_w(T_0, |u_i - x| - A_{T_0})) \geq - \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2p_w(T_0, |u_i - x| - A_{T_0}) = -2S_{T_0}(x) \geq -1.$$

Позначимо z_0 довільне число з множини $\{z \in \mathbb{R} | S_{T_0}(z) < 1/2\}$, при $n \geq 0$ позначимо z_{n+1} довільне число з множини $\{z \geq z_n + 1 | S_{T_0}(z) < 1/2\}$, аналогічно $z_{n-1} \in \{z \leq z_n - 1 | S_{T_0}(z) < 1/2\}$ для $n < 0$. Тоді

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) \geq e^{-1}.$$

Тому за теоремою 2.3.2 існує єдиний сильний розв'язок (2.3.1) на відрізьку $t \in [0, T_0]$.

Лема 2.3.2. Нехай $\{X_k(t) | t \in [0, T], k \in \mathbb{Z}\}$ - розв'язок (2.3.1), $\Lambda(\mu_0) < +\infty$. Тоді

$$\forall t \in [0, T] : \Lambda(\mu_0) = \Lambda(\mu_t).$$

Доведення леми 2.3.2. З того, що $\Lambda(\mu_0) < +\infty$ випливає, що

$$\liminf_{|k| \rightarrow +\infty} \frac{u_k}{k} = \liminf_{|k| \rightarrow +\infty} \frac{X_k(0)}{k} \geq \frac{2}{\Lambda(\mu_0)}.$$

Звідси

$$\forall \delta > 0 \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} P \left(\sup_{t \in [0, T]} |w_k(t)| > \delta |X_k(0)| \right) < +\infty.$$

Отже, з леми Бореля-Кантеллі випливає, що м. н. для всіх k окрім, можливо, скінченної кількості

$$\sup_{t \in [0, T]} |w_k(t)| \leq \delta |X_k(0)|.$$

Звідси м. н. для всіх k окрім, можливо, скінченної кількості

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_k(t) - X_k(0)| \leq \|a\|_\infty T + \sup_{t \in [0, T]} |w_k(t)| \leq \|a\|_\infty T + \delta |X_k(0)|.$$

Тому з імовірністю 1 існує n_0 таке, що при $n \geq n_0$

$$\left\{ k : |X_k(0)| \leq \frac{n}{1+2\delta} \right\} \subset \{k : |X_k(t)| \leq n\} \subset \{k : |X_k(0)| \leq n(1+2\delta)\}$$

Отже, з імовірністю 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_t([-n, n])}{2n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0([-n(1+2\delta), n(1+2\delta)])}{2n} = \Lambda(\mu_0)(1+2\delta).$$

Аналогічно

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_t([-n, n])}{2n} \geq \frac{\Lambda(\mu_0)}{1+2\delta} \text{ м. н.}$$

Спрямувавши $\delta \rightarrow 0$, отримаємо $\Lambda(\mu_t) = \Lambda(\mu_0)$ м. н.

Лема доведена.

З леми 2.3.2 випливає, що $\mu_{T_0} \in M_\lambda$. Тому розв'язок (2.3.1) можна єдиним чином продовжити на $t \in [T_0, 2T_0]$, потім на $t \in [2T_0, 3T_0]$, і так далі. Отже, існує єдиний розв'язок (2.3.1) для довільного $T > 0$. Теорема доведена.

2.4 Існування та єдиність сильного розв'язку для систем з неконстантним дифузійним коефіцієнтом

В даному підрозділі доведена наступна теорема існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (2.1.1).

Теорема 2.4.1. *Припустимо, що:*

1. *функція a є неперервною та обмеженою:*

$$\|a\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\nu \in \mathfrak{M}} |a(x, \nu)| < \infty;$$

2. *функція b неперервна, обмежена та відділена від нуля:*

$$\|b\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\nu \in \mathfrak{M}} |b(x, \nu)| < \infty, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \inf_{\nu \in \mathfrak{M}} |b(x, \nu)| > 0;$$

3. існує константа $C_{b,n}$ така, що для довільного натурального n і довільних $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ має місце нерівність

$$|b(x, \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}) - b(y, \sum_{k=1}^n \delta_{y_k})| \leq C_{b,n}|x - y| + C_{b,n} \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|;$$

4. функції a та b мають властивість скінченності радіусу взаємодії:

$$\exists d > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \nu \in \mathfrak{M} : a(x, \nu) = a(x, \nu \mathbf{I}_{(x-d, x+d)}), \quad b(x, \nu) = b(x, \nu \mathbf{I}_{(x-d, x+d)}).$$

5. міра $\mu(0)$ задовольняє наступне припущення: існує не випадкова зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} z_n = -\infty$$

i

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \sup_{n \in \mathbb{N}} p_w(T \|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2) < \frac{1}{2},$$

$$\exists r > 0 \forall n \in \mathbb{Z} : \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - p_w(T \|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) > r.$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (2.1.1).

Зауваження 2.4.1. Умова 4 означає, що частинки, які знаходяться на відстані більше d , не взаємодіють між собою.

Зауваження 2.4.2. Прологарифмувавши нескінченні добутки та скориставшись оцінками виду $-Cx < \ln(1-x) < -x$, $x \in (0, 1-\varepsilon)$, легко отримати, що припущення 5 теореми 2.4.1 рівносильне наступній умові: існує не випадкова зростаюча послідовність $\{z_n | n \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} z_n = -\infty$$

i

$$\exists r > 0 \forall n \in \mathbb{Z} : \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - 2p_w(T \|b\|_\infty^2, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) > r.$$

Зауваження 2.4.3. У випадку $b(\cdot, \cdot) \equiv 1$ для розбиття системи на скінченні підсистеми достатньо знати лише траєкторії вінерівських процесів. Зараз же стохастичні інтеграли

$$\int_0^t b(X_i(s), \mu(s)) dw_i(s)$$

залежать також від самого розв'язку. Тому не вдається отримати існування розв'язку, розбиваючи систему рівнянь на зліченну кількість скінченних підсистем та застосовуючи теорему Веретенникова. І, на відміну від випадку $b(\cdot, \cdot) \equiv 1$, потрібне припущення неперервності коефіцієнтів для доведення існування слабкого розв'язку. Для доведення потраєкторної єдиності також потрібне більш сильне припущення на $\mu(0)$, щоб довести, що для довільних двох розв'язків система рівнянь може бути однаковою чином розбита на зліченну кількість скінченних підсистем.

Доведення теореми 2.4.1 В першому підрозділі даного розділу доведено існування слабкого розв'язку рівняння (2.1.1) за більш слабких припущень (теорема 2.2.1). Тому для доведення теореми достатньо перевірити потраєкторну єдиність розв'язку рівняння (2.1.1). Тоді існування та єдиність розв'язку рівняння (2.1.1) буде впливати з теореми Ямада-Ватанабе.

Ідея доведення потраєкторної єдиності розв'язку рівняння (2.1.1) полягає в наступному. Користуючись умовою 5 теореми 2.4.1 ми доводимо, що для довільних двох сильних розв'язків (2.1.1) систему частинок майже напевно можна однаково розбити на зліченну кількість скінченних підсистем, відстань між якими більша за d для довільного $t \in [0, T]$. Тому, згідно з умовою 4, ці підсистеми не взаємодіють між собою. Отже, систему стохастичних диференціальних рівнянь (2.1.1) можна розбити на зліченну кількість окремих скінченних підсистем, для яких виконуються умови теореми Веретенникова про існування та єдиність розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь [69]. Взагалі кажучи, розбиття на підсистеми є випадковим та упереджуваним, тому потраєкторна єдиність не впливає безпосередньо з теореми Веретенникова і потрібні деякі додаткові міркування.

Припустимо, що $(X_k^1(t), \mu^1(t), k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T])$ та $(X_k^2(t), \mu^2(t), k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T])$ - розв'язки (2.1.1). Доведемо, що

$$P(\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n : \forall j \in \{1, 2\} \sup_{k \leq m} \sup_{t \in [0, T]} X_k^j(t) + d \leq \inf_{k > m} \inf_{t \in [0, T]} X_k^j(t)) = 1 \quad (2.4.1)$$

Для довільних $k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2\}$ функція

$$M_k^i(t) = \int_0^t b(X_k^i(s), \mu^i(s)) dw_k(s)$$

є мартингалом, причому для довільних $i, j \in \{1, 2\}$ та різних $k, l \in \mathbb{Z}$ має місце $\langle M_k^i, M_l^j \rangle = 0$. Існує послідовність (див. [2], теорема 2.7.3) незалежних пар вінерівських процесів $\{(B_k^1(\cdot), B_k^2(\cdot)) | k \in \mathbb{Z}\}$ (всередині пари B_k^1, B_k^2 можуть бути залежними) таких, що

$$\forall t \in [0, T] \forall k \in \mathbb{Z} \forall i \in \{1, 2\} : M_k^i(t) = B_k^i(\langle M_k^i \rangle(t)). \quad (2.4.2)$$

Позначимо

$$\xi_k^i = u_k + \|a\|_\infty T + \sup_{t \in [0, T \|b\|_\infty^2]} B_k^i(t), \quad \eta_k^i = u_k - \|a\|_\infty T + \inf_{t \in [0, T \|b\|_\infty^2]} B_k^i(t),$$

Перевіримо, що

$$\forall k \geq 1 \quad P(\sup_{i: u_i < z_k} \xi_k^i < \infty) = 1. \quad (2.4.3)$$

Зафіксуємо довільне $k \geq 1$. З припущення 5 теореми 2.4.1 випливає, що

$$\sum_{i: u_i < z_k} p_w(T \|b\|_\infty^2, |z_k - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2) < +\infty, \quad (2.4.4)$$

тобто

$$\forall q \in \{1, 2\} \quad \sum_{i: u_i < z_k} P(\xi_k^q \geq z_k - \|a\|_\infty T - d/2) < +\infty. \quad (2.4.5)$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі, для довільного $q \in \{1, 2\}$ кількість цілих i таких, що $u_i < z_k$ та $\xi_k^q(t) \geq z_k - \|a\|_\infty T - d/2$ є скінченною. Звідси випливає (2.4.3).

Аналогічно,

$$\forall q \in \{1, 2\} \forall k \geq 1 \quad P(\inf_{i: u_i > z_k} \eta_i^q > -\infty) = 1.$$

Для доведення (2.4.1) достатньо довести, що події

$$A_k = \{\forall q \in \{0, 1\} \sup_{i: u_i < z_k} \xi_i^q \leq z_k - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i: u_i > z_k} \eta_i^q \geq z_k + d/2 + \|a\|_\infty T\} \quad (2.4.6)$$

м. н. відбуваються нескінченно часто при $k \rightarrow +\infty$ та при $k \rightarrow -\infty$. Доведення цих тверджень є аналогічними, тому доведемо що події A_k відбуваються нескінченно часто при $k \rightarrow +\infty$.

Безпосередньо другу частину леми Бореля-Кантеллі не можна застосовувати до подій A_k , оскільки вони є залежними. Ідея доведення полягає в наближенні подій деякої підпослідовності A_{k_n} подіями A'_{k_n} , в яких максимум та мінімум в означенні подій A_k заміняється, відповідно, максимумом та мінімумом за скінченними неперетинними множинами індексів. Таким чином отримана послідовність подій A'_{k_n} буде послідовністю незалежних подій.

Аналогічно доведенню (2.4.3) можна перевірити, що для довільного цілого k кількість цілих i таких, що $u_i > z_k$ та $\eta_i^q \leq z_k + \|a\|_\infty T + d/2$ для всіх $q \in \{1, 2\}$ є скінченною м. н. Отже,

$$\forall q \in \{1, 2\} \quad \eta_n^q \xrightarrow{P1} +\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$$

і значить

$$\forall q \in \{1, 2\} \quad \xi_n^q \xrightarrow{P1} +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Отже, для довільних $n \in \mathbb{Z}$ та $\varepsilon > 0$ існує $l(n, \varepsilon)$ таке, що

$$\begin{aligned} \forall l \geq l(n, \varepsilon) : \quad & P(\forall q \in \{1, 2\} \sup_{n < k \leq n+l} \xi_k^q \neq \sup_{k \leq n+l} \xi_k^q) < \varepsilon, \\ & P(\forall q \in \{1, 2\} \inf_{k > n} \eta_k^q \neq \inf_{n+l \leq k > n} \eta_k^q) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Нехай $\{m_k | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$ — деяка строго зростаюча послідовність. Позначимо

$$i(k) = \max\{i | u_i \leq z_{m_k}\}.$$

Побудуємо послідовність $\{m_k\}$ так, щоб

$$\forall k \geq 1 \quad i(k+1) - i(k) \geq \max\{l(i(k), 1/2^k), 2\}. \quad (2.4.8)$$

Тоді

$$\begin{aligned} P(\forall M \exists k > M : \forall q \in \{1, 2\} \sup_{i \leq i(k)} \xi_i^q \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \\ \inf_{i > i(k)} \eta_i^q \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T) \geq \\ P(\forall M \exists k > M : \forall q \in \{1, 2\} \sup_{i \leq i(k)} \xi_i^q = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q, \inf_{i > i(k)} \eta_i^q = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q, \\ \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T) \geq \\ P(B_1 \cap B_2), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

де

$$B_1 = \{\exists M \forall k > M : \forall q \in \{1, 2\} \sup_{i \leq i(k)} \xi_i^q = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q, \inf_{i > i(k)} \eta_i^q = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q\}, \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} B_2 = \{\forall M \exists k > M : \forall q \in \{1, 2\} \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \\ \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T\}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Подія B_1 полягає в тому, що починаючи з деякого номера виконуються всі події

$$\{\forall q \in \{1, 2\} \sup_{i \leq i(k)} \xi_i^q = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q, \inf_{i > i(k)} \eta_i^q = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q\},$$

подія B_2 полягає в тому, що події

$$\{\forall q \in \{1, 2\} \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q \leq z_{m_k} - d/2 - \|a\|_\infty T, \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q \geq z_{m_k} + d/2 + \|a\|_\infty T\}$$

виконуються нескінченно часто при $n \rightarrow \infty$.

З (2.4.8) та (2.4.7) випливає, що

$$\sum_{k \geq 1} P(\forall q \in \{1, 2\} \{ \sup_{i \leq i(k)} \xi_i^q \neq \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q \} \cup$$

$$\cup \{\forall q \in \{1, 2\} \inf_{i > i(k)} \eta_i^q \neq \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q\} \leq \sum_{k \geq 1} (1/2^k + 1/2^k) < +\infty.$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі, P -м. н. для всіх k окрім, можливо, скінченної кількості, має місце подія

$$\{\forall q \in \{1, 2\} \sup_{i \leq i(k)} \xi_i^q = \sup_{i(k-1) < i \leq i(k)} \xi_i^q, \inf_{i > i(k)} \eta_i^q = \inf_{i(k+1) \geq i > i(k)} \eta_i^q\},$$

тобто $P(B_1) = 1$.

Позначимо

$$C_k = \{\forall q \in \{1, 2\} \sup_{i(2k-1) < i \leq i(2k)} \xi_i^q \leq z_{m_{2k}} - d/2 - \|a\|_\infty T, \\ \inf_{i(2k+1) \geq i > i(2k)} \eta_i^q \geq z_{m_{2k}} + d/2 + \|a\|_\infty T\}$$

Події $C_k, k \geq 1$ є незалежними. Для встановлення $P(B_2) = 1$ за лемою Бореля-Кантеллі достатньо перевірити, що

$$\sum_{k \geq 1} P(C_k) = +\infty. \quad (2.4.12)$$

Оцінимо ймовірність $P(C_k)$ знизу:

$$P(C_k) = P \left(\bigcap_{i=i(2k-1)+1}^{i(2k)} \{\forall q \in \{1, 2\} \xi_i^q \leq z_{m_k} - d/2 - T\|a\|_\infty\} \cap \right. \\ \left. \bigcap_{i=i(2k)+1}^{i(2k+1)} \{\forall q \in \{1, 2\} \eta_i^q \geq z_{m_k} + d/2 + T\|a\|_\infty\} \right) = \\ \prod_{i=i(2k-1)+1}^{i(2k+1)} (1 - 2p_w(T\|b\|_\infty^2, |z_{m_k} - u_i| - d/2 - T\|a\|_\infty)) \geq \\ \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - 2p_w(T\|b\|_\infty^2, |z_{m_k} - u_i| - d/2 - T\|a\|_\infty)) > r,$$

тут $r > 0$ з зауваження 2.4.2. Звідси випливає (2.4.12), значить, $P(B_2) = 1$. Отже, $P(B_1 \cap B_2) = 1$, і з (2.4.9) випливає, що події A_k , визначені в (2.4.6), м.н. відбуваються нескінченно часто при $k \rightarrow +\infty$ та при $k \rightarrow -\infty$.

Отже, (2.4.1) доведено. Подальше доведення теореми (2.4.1) проводиться аналогічно доведенню теореми (2.2.1). Теорема доведена.

Наступні результати дають приклади широких класів мір $\mu(0)$ що задовольняють припущення 5 теореми 2.4.1.

Теорема 2.4.2. *Нехай μ_0 - незалежна від $\{w_k | k \in \mathbb{Z}\}$ пуассонівська точкова міра з інтенсивністю m . Припустимо, що*

$$\exists C_m \forall [a, b] \subset \mathbb{R} : m([a, b]) \leq C_m(b - a + 1).$$

Тоді для довільного $T > 0$ виконується припущення 5 теореми 2.4.1. Зокрема, якщо додатково виконані припущення 1-4 теореми 2.4.1 то для довільного $T > 0$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.1.1).

Теорема 2.4.3. *Нехай $\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{u_k} \in M_\lambda$, $2\lambda d < 1$. Припустимо, що виконуються припущення 1-4 теореми 2.4.1. Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.1.1) для довільного $T > 0$.*

Теореми 2.4.2 та 2.4.3 доводяться аналогічно випадку однорідної дифузії.

2.5 Висновки

В даному розділі розглянуто питання існування слабкого розв'язку та існування та єдиності сильного розв'язку нескінченної системи стохастичних диференціальних рівнянь що задають рух зліченної системи взаємодіючих частинок.

1. Доведено теорему існування слабкого розв'язку рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок для обмежених неперервних коефіцієнтів дифузії та зносу (теорема 2.2.1).

2. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок для обмеженого вимірною коефіцієнту зносу та постійного коефіцієнту дифузії (теореми 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.4.3).

3. Доведено існування та єдиність сильного розв'язку рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок для ліпшицевого невиродженого коефіцієнту дифузії і неперервного обмеженого коефіцієнту зносу (теорема 2.4.1).

Основні результати даного розділу опубліковано в роботах [58], [67].

Розділ 3

Рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою

3.1 Вступ

Розглянемо динаміку N взаємодіючих частинок масою $1/N$ кожна, рух яких задається наступною системою стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^{i,N} = dw_t^i + a(X_t^{i,N}, \mu_t^N)dt, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T] \\ \mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}, \\ X_0^{i,N} = x_0^i. \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Тут $X_t^{i,N}$ – це положення i -тої частинки в момент часу t , μ_t^N – розподіл мас частинок в момент часу t , w_t^i – вінерівські процеси, x_0^i – однаково розподілені випадкові величини, причому $\{\{w_t^i, t \geq 0\}, x_0^i, i = 1, \dots, N\}$ – незалежні в сукупності, функція a відповідає за взаємодію між частинками.

В [39] доведено, що за певних природніх умов на коефіцієнти має місце (для довільного фіксованого $i \in \mathbb{N}$) збіжність послідовності випадкових елементів $\{(X_t^{i,N}, \mu_t^N, t \in [0, T]), N \geq 1\}$ до єдиного розв'язку $(X_t^i, \nu_t^i, t \in [0, T])$ наступного рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^i = dw_t^i + a(X_t^i, \nu_t^i)dt, \\ \nu_t^i = \text{distr}(X_t^i), \\ X^i|_{t=0} = x_0^i, \end{array} \right. \quad (3.1.2)$$

де $\text{distr}(X_t^i)$ – розподіл випадкової величини X_t^i .

Відмітимо, що ν_t^i не залежить від i . Позначимо $\nu_t(dy) = \nu_t^i(dy)$. Отже,

рівняння

$$\begin{cases} dX_t = dw_t + a(X_t, \nu_t)dt, \\ \nu_t = \text{distr}(X_t), \\ X|_{t=0} = x_0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

можна розглядати як рівняння руху системи частинок зі взаємодією, інтерпретуючи міру ν_t як розподіл мас частинок в момент часу t , а для довільного фіксованого $\omega \in \Omega$ функцію $X.(\omega)$ – як траєкторію одної частинки.

Таким чином, (3.1.3) є рівнянням руху системи взаємодіючих частинок з сукупною масою 1. Якщо ж сукупна маса частинок рівна M , то, аналогічно, розглянемо N частинок в $\mathbb{R}$ з масою M/N кожна та припустимо, що їх рух задається рівнянням

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = dw_t^i + a(X_t^{i,N}, \mu_t^N)dt, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [0, T] \\ \mu_t^N = \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}, \\ X_0^{i,N} = x_0^i. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

З аналогічних міркувань випливає, що послідовність випадкових елементів $\{(X_t^{i,N}, \mu_t^N, t \in [0, T]), \quad N \geq 1\}$ збігається до єдиного розв'язку $(X_t^i, \mu_t^i, t \in [0, T])$ наступного рівняння

$$\begin{cases} dX_t = dw_t + a(X_t, \mu_t(dy))dt, \\ \mu_t = M \text{distr}(X_t), \\ X_0 = x_0^i. \end{cases}$$

Якщо сукупна маса частинок нескінченна, то аналогічні міркування не проходять, тому що ми не можемо пронормувати міру μ_t щоб отримати ймовірнісну міру ν_t . Щоб усунути це обмеження, перетворимо рівняння (3.1.3) наступним чином. Позначимо через m розподіл випадкової величини x_0 (тобто початковий розподіл мас частинок), $\Omega_1 = C[0, T]$. Нехай P_1 – розподіл вінерівського процесу в $C[0, T]$. Припустимо, що ймовірнісний простір є прямим добутком $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega_1$ з продакт мірою $m \otimes P_1$, тоді довільне $\omega \in \Omega$ має вигляд

$\omega = (u, \omega_1)$. Припустимо, що випадкова величина x_0 з (3.1.3) задана рівністю $x_0(\omega) = x_0(u, \omega_1) = u$, а вінерівський процес є функцією від ω_1 , тобто $w(\cdot, \omega) = w(\cdot, (u, \omega_1)) = w(\cdot, \omega_1)$. Для довільних $u \in \mathbb{R}$ та $t > 0$ будемо розглядати $X_t(u) = X_t(u, \omega_1)$ як випадкові величини на новому ймовірнісному просторі (Ω_1, P_1) . Отже, рівняння (3.1.3) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & u \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X(\cdot, t)^{-1}, \\ X(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Тут $m \circ X(\cdot, t)^{-1}$ – це образ міри m при випадковому відображенні $X(\cdot, t)$, число $X(u, t)$ можна інтерпретувати як положення в момент часу t частинки що стартувала з точки u , міру $\mu(t)$ – як розподіл мас частинок в момент часу t .

Рівняння (3.1.5) має сенс і для локально скінченної міри m , тобто рівняння (3.1.5) можна інтерпретувати як рівняння що задає рух системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою.

Якщо міра m – локально скінченна, то міра $Em \circ X(\cdot, t)^{-1}$, взагалі кажучи, не є локально скінченною. Тому при доведенні теорем щодо рівняння (3.1.5) потрібно буде перевіряти локальну скінченність міри $Em \circ X(\cdot, t)^{-1}$.

Функція взаємодії $a(x, \mu)$ може бути інтегралом за розподілом мас, тобто

$$a(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}} b(y - x) \mu(dy). \quad (3.1.6)$$

У цьому випадку рівняння (3.1.5) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} dX_t(u, \omega_1) = dw_t(\omega_1) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_1} b(X_t(v, \omega_1) - X_t(u, \tilde{\omega}_1)) P(d\tilde{\omega}_1) m(dv) dt, \\ X_0(u) = u. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

У даному розділі буде розглядатися питання існування та єдиності слабкого та сильного розв'язку рівнянь (3.1.5) та (3.1.7). Для доведення локаль-

ної скінченності мір $\mu(t)$ з рівняння (3.1.5) буде потрібне припущення обмеженості функції взаємодії $a(x, \mu)$. Для випадку, коли функція $a(x, \mu)$ має вигляд (3.1.6), аналогічні результати будуть доведені без припущення обмеженості функції $a(x, \mu)$.

У другому підрозділі буде наведено апріорні оцінки на розв'язок рівняння (3.1.5). У третьому підрозділі буде доведено теореми існування слабкого розв'язку рівняння (3.1.5). У четвертому підрозділі буде доведено теореми існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (3.1.5).

3.2 Апріорні оцінки на розв'язки рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою

Розглянемо рівняння, що задає рух системи взаємодіючих частинок

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & u \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = E(m \circ X(\cdot, t)^{-1}), \\ X(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Нагадаємо (див. підрозділ 2.2), що на просторі $\mathfrak{M}$ локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ розглядається топологія грубої збіжності τ :

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu, n \rightarrow \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ - множина неперервних функцій з компактним носієм. Введемо наступні підмножини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_C = \{\mu \in \mathfrak{M} : \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} : \mu([\alpha, \beta]) \leq C(\beta - \alpha + 1)\}, \quad \mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{C>0} \mathfrak{M}_C.$$

Нехай w – вінерівський процес, що породжує фільтрацію $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$.

Означення 3.2.1. Сильним розв'язком рівняння (3.2.1) будемо називати $\mathfrak{F}_t$ -узгоджену вимірну за (u, t, ω) випадкову функцію $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ та $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений випадковий мірозначний процес $\mu(\cdot)$ такі, що при

підстановці в рівняння (3.2.1) з імовірністю 1 отримаємо рівності для всіх $u \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$.

Означення 3.2.2. Нехай задано функцію $a(\cdot, \cdot)$ та локально скінченну міру m . Ймовірнісний простір з фільтрацією $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t, t \geq 0), P)$, $\mathfrak{F}_t$ -узгоджені випадкові функції $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$, $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений вінерівський процес w та $\mathfrak{F}_t$ -узгоджений мірозначний процес $\mu(\cdot)$ називаються слабким розв'язком рівняння (3.2.1) якщо при підстановці в (3.2.1) з імовірністю 1 отримуємо рівності для всіх $u \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$.

Нехай $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ – розв'язок рівняння 3.2.1, a – обмежена функція. Позначимо

$$M(t) = \sup_{s \leq t} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - u|. \quad (3.2.2)$$

Легко бачити, що

$$M(t) \leq \sup_{s \leq t} |w(s)| + t \|a\|_\infty. \quad (3.2.3)$$

Наступна лема дає апріорні оцінки на міри $\{\mu(t), t \in [0, T]\}$ з рівняння (3.2.1).

Лема 3.2.1. Нехай функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, $m \in \mathfrak{M}_\infty$. Якщо $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ – розв'язок (3.2.1), то існує константа $N = N(\|a\|_\infty, T, C_m)$, яка залежить лише від $\|a\|_\infty, T, C_m$, така, що

$$\forall t \in [0, T] \quad \mu(t) \in \mathfrak{M}_N. \quad (3.2.4)$$

Доведення лемми 3.2.1. Оскільки $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ – розв'язок (3.2.1), то для довільного відрізка $[\alpha, \beta]$

$$\mu(t, [\alpha, \beta]) = \int_{\mathbb{R}} P(X(u, t) \in [\alpha, \beta]) m(du).$$

З (3.2.3) випливає, що для $u \notin [\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]$

$$P(X(u, t) \in [\alpha, \beta]) \leq p_w(T, d(u, [\alpha, \beta]) - \|a\|_\infty T),$$

де функція $p_w(t, x)$ визначена в (2.2.2) і рівна ймовірності того, що вінерівський процес досягає рівень x за проміжок часу $[0, t]$. Звідси

$$\begin{aligned} \mu(t, [\alpha, \beta]) &\leq m([\alpha - \|a\|_\infty T - 1, \beta + \|a\|_\infty T + 1]) + \\ &+ \sum_{n \geq 2} p_w(T, n - 1) m([\beta + \|a\|_\infty T + n - 1, \beta + \|a\|_\infty T + n]) + \\ &+ \sum_{n \geq 2} p_w(T, n - 1) m([\alpha - \|a\|_\infty T - n, \alpha - \|a\|_\infty T - n + 1]) \leq \\ &\leq C_m(\beta - \alpha + 2\|a\|_\infty T + 2) + 4 \sum_{n \geq 2} p_w(T, n - 1). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Отже, $\mu(t, [\alpha, \beta]) \leq N(\beta - \alpha + 1)$, де $N = N(\|a\|_\infty, T, C_m) = C_m(2\|a\|_\infty T + 3) + 4 \sum_{n \geq 2} p_w(T, n - 1)$. Лема доведена.

У наступній лемі доведено апріорну оцінку на коефіцієнт ліпшицевості за u функції $X(u, t)$.

Лема 3.2.2. *Нехай функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, $t \in \mathfrak{M}_\infty$. Припустимо, що*

$$\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leq L_C |x_1 - x_2|.$$

Тоді існує константа $D = D(\|a\|_\infty, T, C_m, L)$, яка залежить лише від $\|a\|_\infty, T, C_m, L_C$, така, що довільний розв'язок $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ рівняння (3.2.1) задовольняє співвідношення

$$\forall t \in [0, T] \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} |X(u_1, t) - X(u_2, t)| \leq D |u_1 - u_2|. \quad (3.2.6)$$

Доведення леми 3.2.2. З леми 3.2.1 випливає, що

$$\exists N = N(\|a\|_\infty, T, C_m) \forall s \in [0, T] \mu(s) \in \mathfrak{M}_N.$$

Звідси

$$\begin{aligned} |X(u_1, t) - X(u_2, t)| &\leq |u_1 - u_2| + \int_0^t |a(X(u_1, s), \mu(s)) - a(X(u_2, s), \mu(s))| ds \leq \\ &\leq |u_1 - u_2| + L_N \int_0^t |X(u_1, s) - X(u_2, s)| ds. \end{aligned}$$

Застосуємо тепер лему Гронуола-Белмана, а саме: якщо f, g – невід’ємні вимірні функції, f локально обмежена, g неспадна, $A \geq 0$ і

$$\forall t \geq 0 \quad f(t) \leq g(t) + \int_0^t A f(s) ds,$$

то

$$\forall t \geq 0 \quad f(t) \leq g(t) e^{At}.$$

Отримаємо

$$|X(u_1, t) - X(u_2, t)| \leq |u_1 - u_2| e^{L_N t} \leq |u_1 - u_2| e^{L_N T}.$$

Лема доведена.

Приклад 3.2.1. Нехай $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервні та обмежені. Припустимо, що функція g_2 має компактний носій. Тоді функція a , визначена рівністю

$$a(x, \mu) = g_1 \left(\int_{\mathbb{R}} g_2(y - x) \mu(dy) \right),$$

є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних.

Апріорні оцінки з лем 3.2.1 та 3.2.2 дозволять довести існування та єдиність сильного розв’язку рівняння 3.2.1 (див. підрозділи 3.3 та 3.4) за припущення, що коефіцієнт a є обмеженим. Якщо

$$a(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}} b(y - x) \mu(dy), \quad (3.2.7)$$

то умова обмеженості функції a , взагалі кажучи, не виконується. Проте завдяки лінійності взаємодії відносно міри μ теорему існування та єдиності сильного розв’язку та теорему існування слабкого розв’язку можна довести без припущення про обмеженість функції a . Якщо a визначається рівністю (3.2.7) то рівняння (3.2.1) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} dX(u, t, \omega) = dw_t(\omega) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} b(X(v, t, \tilde{\omega}) - X(u, t, \omega)) P(d\tilde{\omega}) m(dv) dt, \\ X(u, 0) = u. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Зробимо наступні припущення щодо міри m та функції b :

(A1) існує константа $C_m > 0$ така, що для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$m([\alpha, \beta]) \leq C_m(\beta - \alpha + 1);$$

(A2) $b \in C^1(\mathbb{R})$;

(A3) існує функція $R : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, R монотонно неспадна на $(-\infty, 0]$ та монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$, така, що $|b(z)| \leq R(z)$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, та $C_R := 2 \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} R(z + a)m(dz) < +\infty$;

(A4) існує функція $Q : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, Q монотонно неспадна на $(-\infty, 0]$ та монотонно незростаюча на $[0, +\infty)$, така, що $|b'(z)| \leq Q(z)$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, та $C_Q := 2 \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Q(z + a)m(dz) < +\infty$.

Зауваження. Для скінченності C_R та C_Q достатньо, щоб R та Q були інтегровними за мірою Лебега на $\mathbb{R}$.

Введемо позначення

$$M(t, \omega) = \sup_{u \in \mathbb{R}, s \in [0, t]} |X_s(u, \omega) - u|. \quad (3.2.9)$$

Наступна лема дає оцінку відхилень від початкового положення

Лема 3.2.3. *Припустимо, що виконані припущення (A1)-(A4). Тоді існує функція $C(t) = C(C_m, C_R, R(0), t)$ така, що для довільного розв'язку $X_t(u, \omega)$ рівняння (3.2.8), що задовольняє нерівність $EM(T) < +\infty$, має місце співвідношення*

$$\forall t \in [0, T] : EM(t) \leq C(t). \quad (3.2.10)$$

Доведення лемми 3.2.3. З рівняння (3.2.8) випливає, що

$$|X(u, t, \omega) - u| \leq |w_t(\omega)| + \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} R(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega))m(dv)P(d\tilde{\omega})ds \quad (3.2.11)$$

Оцінимо різницю

$$X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega) = (X(v, s, \tilde{\omega}) - v) - (X(u, s, \omega) - u) + v - u \geq$$

$$\geq v - u - M(s, \omega) - M(s, \tilde{\omega}).$$

Розіб'ємо внутрішній інтеграл у правій частині (3.2.11) на три інтеграли: за проміжками $[u - M(t, \omega) - M(t, \tilde{\omega}), u + M(t, \omega) + M(t, \tilde{\omega})]$, $(-\infty, u - M(t, \omega) - M(t, \tilde{\omega}))$ та $(u + M(t, \omega) + M(t, \tilde{\omega}), +\infty)$. З останньої нерівності випливає, що при оцінці підінтегральної функції на $(u + M(t, \omega) + M(t, \tilde{\omega}), +\infty)$ можна скористатися монотонністю R на $[0, +\infty)$. Отримаємо $R(X_s(v, \tilde{\omega}) - X_s(u, \omega)) \leq R(v - u - M(s, \omega) - M(s, \tilde{\omega}))$ при $v \geq u + M(s, \omega) + M(s, \tilde{\omega})$

Аналогічно при $v \leq u - M(s, \omega) - M(s, \tilde{\omega})$ має місце нерівність $R(X_s(v, \tilde{\omega}) - X_s(u, \omega)) \leq R(v - u + M(s, \omega) + M(s, \tilde{\omega}))$. Для $v \in [u - M(t, \omega) - M(t, \tilde{\omega}), u + M(t, \omega) + M(t, \tilde{\omega})]$ оцінимо

$$R(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) \leq R(0),$$

бо з припущення (A3) випливає, що

$$R(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} R(x).$$

Скориставшись вказаними оцінками, нерівністю (3.2.11) та умовами (A1)-(A3), отримаємо нерівність

$$|X(u, t, \omega) - u| \leq |w_t(\omega)| + \int_0^t (2R(0)C_m(EM(s) + M(s, \omega) + 1) + C_Q)ds. \quad (3.2.12)$$

Взявши математичне сподівання та супремум за $u \in \mathbb{R}$, $s \in [0, t]$ від обох частин (3.2.12), отримаємо

$$EM(t) \leq E|w_t| + \int_0^t (2R(0)C_m(2EM(s) + 1) + C_R)ds.$$

Оскільки $E|w_t| \leq \sqrt{t}$, за нерівністю Гронуола-Белмана отримаємо

$$EM(t) \leq (\sqrt{t} + (2C_m R(0) + C_R)t)e^{4C_m R(0)t} =: C(t),$$

що і треба було довести.

Наступна лема є аналогом леми 3.2.2 для випадку, коли функція a має вигляд (3.2.7).

Лема 3.2.4. Нехай виконані припущення (A1)-(A4). Тоді для довільного $T > 0$ існує константа $C_4 = C_4(C_Q, C_m, Q(0), T)$ така, що для довільного розв'язку $X(u, t, \omega)$ рівняння (3.2.8) що задовольняє нерівність $EM(T) < +\infty$, має місце співвідношення

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} : \quad |X(u_1, t) - X(u_2, t)| \leq C_4 |u_1 - u_2|.$$

Доведення лема 3.2.4. Позначимо

$$\tilde{b}(s, u) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} b(X(v, s, \tilde{\omega}) - u) m(dv) P(d\tilde{\omega}).$$

Тоді рівняння (3.2.8) можна переписати у вигляді

$$X(u, t, \omega) = u + w_t + \int_0^t \tilde{b}(s, X(u, s, \omega)) ds \quad (3.2.13)$$

Якщо ми доведемо, що

$$\exists C_5 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall u_1, u_2 : \quad |\tilde{b}(t, u_1) - \tilde{b}(t, u_2)| \leq C_5 |u_1 - u_2|,$$

то, віднявши рівняння (3.2.13) для $X(u_1, t, \omega)$ та $X(u_2, t, \omega)$ та скориставшись лемою Гронуола-Белмана ми завершимо доведення лема.

З означення $\tilde{b}(s, u)$ маємо

$$|\tilde{b}(s, u_1) - \tilde{b}(s, u_2)| \leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} |b(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_1) - b(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_2)| m(dv) \quad (3.2.14)$$

За теоремою Лагранжа

$$\begin{aligned} & |b(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_1) - b(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_2)| = \\ & = |b'(\theta(u_1, u_2, v, s, \tilde{\omega}))| \cdot |(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_1) - (X(v, s, \tilde{\omega}) - u_2)| \leq \\ & \leq Q(\theta(u_1, u_2, v, s, \tilde{\omega})) |u_1 - u_2|. \end{aligned}$$

Тут $\theta(u_1, u_2, v, s, \tilde{\omega})$ - точка між $(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_1)$ та $(X(v, s, \tilde{\omega}) - u_2)$. Застосуємо для оцінки правої частини (3.2.14) метод, аналогічний доведенню лема 3.2.3.

Не обмежуючи загальності можемо вважати, що $u_1 \leq u_2$. Тоді

$$v - u_2 - M(s, \tilde{\omega}) \leq \theta(u_1, u_2, v, s, \tilde{\omega}) \leq v - u_1 + M(s, \tilde{\omega})$$

Розіб'ємо внутрішній інтеграл у правій частині (3.2.14) на три інтеграли по проміжкам $[u_1 - M(s, \tilde{\omega}), u_2 + M(s, \tilde{\omega})]$, $(-\infty, u_1 - M(s, \tilde{\omega}))$ та $(u_2 + M(s, \tilde{\omega}), +\infty)$. В першому з них оцінимо підінтегральну функцію $|b(X_s(v, \tilde{\omega}) - u_1) - b(X_s(v, \tilde{\omega}) - u_2)| \leq Q(0)|u_1 - u_2|$. Аналогічно доведенню леми 3.2.3, скористаємось монотонністю Q на $(-\infty, 0]$ та $[0, +\infty)$ для оцінювання підінтегральної функції в другому та третьому інтегралах. Тоді з (3.2.14) отримаємо

$$|\tilde{b}(s, u_1) - \tilde{b}(s, u_2)| \leq C_m(1 + |u_2 - u_1| + 2EM(s))Q(0)|u_2 - u_1| + C_Q|u_2 - u_1|. \quad (3.2.15)$$

Тому, якщо $|u_1 - u_2| \leq 1$, то з (3.2.15) випливає, що

$$|\tilde{b}(s, u_1) - \tilde{b}(s, u_2)| \leq C_5|u_1 - u_2|, \quad (3.2.16)$$

де $C_5 = C_Q + (2 + 2EM(T))Q(0)C_m$. Очевидно, що якщо (3.2.16) виконано для всіх u_1, u_2 таких, що $|u_1 - u_2| \leq 1$, то (3.2.16) справедливо і для всіх u_1, u_2 . Звідси $|X(u_1, t) - X(u_2, t)| \leq |u_1 - u_2| + \int_0^t |\tilde{b}(s, X(u_1, s)) - \tilde{b}(s, X(u_2, s))| ds \leq |u_1 - u_2| + C_5 \int_0^t |X(u_1, s) - X(u_2, s)| ds$. Тому, за лемою Гронуола-Белмана, $|X(u_1, t) - X(u_2, t)| \leq |u_1 - u_2| \exp(C_5 T)$, тобто $C_4 = \exp(C_5 T)$. Лема доведена.

Лема 3.2.5. Нехай $X(\cdot, \cdot)$ - розв'язок (3.2.8), $EM_T < \infty$. Припустимо, що виконані припущення (A1)-(A4). Тоді

$$\forall t \in [0, T] \quad M(t) \leq \left(\sup_{s \in [0, t]} |w_s| + TC_m R(0)(C(T) + 1) + TC_R \right) e^{C_m R(0)t}.$$

Доведення леми 3.2.5. Аналогічно доведенню леми 3.2.3 можна отримати оцінку

$$|X(u, t, \omega) - u| \leq |w_t| + \int_0^t (C_m R(0)(EM_s + M_s(\omega) + 1) + C_R) ds \leq$$

$$\leq \sup_{s \in [0, t]} |w_s| + TC_m R(0)(C_T + 1) + TC_R + \int_0^T C_m R(0) M_s(\omega) ds \quad (3.2.17)$$

Взявши супремум за t, u від обох частин нерівності (3.2.17), отримаємо

$$M_t(\omega) \leq \left(\sup_{s \in [0, t]} |w_s| + TC_1 R(0)(C(T) + 1) + TC_R \right) + C_m R(0) \int_0^t M_s(\omega) ds.$$

Тоді за лемою Гронуола-Белмана

$$M_t(\omega) \leq \left(\sup_{s \in [0, t]} |w_s| + TC_m R(0)(C(T) + 1) + TC_R \right) e^{C_m R(0)t}.$$

Лема доведена.

3.3 Існування слабких розв'язків

В даному підрозділі буде розглянуто питання існування слабких розв'язків рівнянь (3.2.1) та (3.2.8). Наступна теорема дає умови існування слабого розв'язку рівняння (3.2.1).

Теорема 3.3.1. *Припустимо, що:*

1. *функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M}, \rho)$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;*

2. $\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C : |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leq L_C |x_1 - x_2|;$

3. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (3.2.1).

Для доведення теореми потрібно буде кілька допоміжних лем.

Лема 3.3.1. *Припустимо, що:*

1. *функція a неперервна та обмежена за сукупністю змінних;*

2. $\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C : |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leq L_C |x_1 - x_2|;$

3. *міра m є скінченною.*

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & u \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X(\cdot, t)^{-1}, \\ X(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Доведення леми 3.3.1 Доведемо спочатку існування слабого розв'язку для випадку, коли міра m дискретна, тобто $m = \sum_{k=1}^r m_k \delta_{u_k}$. Визначимо $X^n(u_k, 0) = u_k$, і для довільного $i \geq 0$

$$\begin{aligned} X^n(u_k, T(i+1)/n) &= \\ &= X^n(u_k, Ti/n) + w(T(i+1)/n) - w(Ti/n) + a(X^n(u_k), \mu^n(Ti/n)) \frac{T}{n}, \\ \mu^n(Ti/n) &= \sum_{k=1}^r m_k \delta_{X^n(u_k, Ti/n)}; \end{aligned}$$

між точками вигляду $\frac{T}{n}i$ інтерполюємо $X^n(u_k, \cdot)$ лінійно. Довизначимо мірозначний процес для всіх $t \in [0, T]$

$$\mu^n(t) = E(m \circ X^n(\cdot, t)^{-1}) = E \sum_{k=1}^r m_k \delta_{X^n(u_k, t)}.$$

Користуючись обмеженістю коефіцієнта a , можна перевірити, що послідовність $\{(X^n(u_k, \cdot)), k = \overline{1, r}\}_{n \geq 1}$ є слабо відносно компактною як послідовність випадкових елементів в $C([0, T], \mathbb{R}^r)$. Для спрощення позначень будемо вважати що послідовність $\{(X^n(u_k, \cdot)), k = \overline{1, r}\}_{n \geq 1}$ є слабо збіжною. Тоді за теоремою Скорохода існує ймовірнісний простір і визначені на ньому випадкові процеси $\{\tilde{X}^n(u_k, \cdot), \tilde{X}(u_k, \cdot), k = \overline{1, r}, \tilde{w}^n(\cdot), w(\cdot), n \geq 1\}$ такі, що $(\tilde{X}^n(u_k, \cdot), k = \overline{1, r}, \tilde{w}^n(\cdot))$ мають такий же розподіл як $(\tilde{X}(u_k, \cdot), k = \overline{1, r}, \tilde{w}(\cdot))$ і $X^n(u_k, \cdot) \xrightarrow{P1} X(u_k, \cdot), w^n(\cdot) \xrightarrow{P1} w(\cdot), n \rightarrow \infty$.

Визначимо

$$\mu(t) = Em \circ X(\cdot, t)^{-1}.$$

Доведемо, що $\mu^n(t) \rightarrow \mu(t), n \rightarrow \infty$ в $(\mathfrak{M}, \rho)$ для довільного $t \in [0, T]$. Нехай $f \in C_c(\mathbb{R})$. Маємо

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f d\mu^n(t) - \int_{\mathbb{R}} f d\mu(t) \right| = \left| \sum_{k=1}^r \left(f(X^n(u_k, t)) - f(X(u_k, t)) \right) \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Отже, $\mu^n(t) \rightarrow \mu(t)$, і, перейшовши до границі $n \rightarrow \infty$, отримаємо, що $\{X(u_k, \cdot), \mu(\cdot), k = \overline{1, r}\}$ задовольняють рівняння

$$\begin{cases} dX(u_k, t) = a(X(u_k, t), \mu(t))dt + dw(t), & k = \overline{1, r}, \quad t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X(\cdot, t)^{-1}, \\ X(u_k, 0) = u_k, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Для довільного $u \notin \{u_k | k = \overline{1, r}\}$ довізнаємо $X(u, t)$ з рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & t \in [0, T], \\ X(u, 0) = u. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Існування та єдиність сильного розв'язку рівняння (3.3.3) випливає з теореми Веретенникова. Отже, $\{X(u, t), \mu(t), w(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ є слабким розв'язком рівняння (3.3.1).

Нехай тепер m є довільною скінченною мірою. Визначимо

$$m_n = m((-\infty, -n])\delta_{-n} + \sum_{k=-n^2+1}^{n^2} m\left(\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right)\delta_{\frac{k}{n}} + m((n, +\infty))\delta_n,$$

Нехай $\{X^n(u, t), \mu^n(t)\}$ – слабкий розв'язок рівняння

$$\begin{cases} dX^n(u, t) = a(X^n(u, t), \mu^n(t))dt + dw^n(t), & u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \\ \mu^n(t) = Em_n \circ X^n(\cdot, t)^{-1}, \\ X^n(u, 0) = u, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$. Перевіримо що виконуються припущення теореми 8.2[1]:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall n \geq 1 P(|X^n(0, 0)| \geq R) \leq \varepsilon,$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, 1) \exists n_0 \forall n \geq n_0 P(\omega_{X^n(\cdot, \cdot)}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon,$ де $\omega_{X^n(\cdot, \cdot)}(\delta) = \sup_{|u_1 - u_2| \leq \delta} \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} |X^n(u_1, t_1) - X^n(u_2, t_2)|$ – модуль неперервності. З (3.1.5) маємо $X(0, 0) = 0$, отже, умова 1 виконана.

Аналогічно доведенню леми 3.2.2 можна перевірити, що $X^n(u, t)$ ліпшицева за u з коефіцієнтом D що не залежить від n . Звідси

$$|X^n(u_1, t_1) - X^n(u_2, t_2)| \leq |X^n(u_1, t_1) - X^n(u_2, t_1)| + |X^n(u_2, t_1) - X^n(u_2, t_2)| \leq$$

$$\leq D|u_1 - u_2| + |w^n(t_1) - w^n(t_2)| + \|a\|_\infty |t_1 - t_2|. \quad (3.3.5)$$

З [1, теорема 1.4] випливає, що

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in (0, 1) : P(\omega_w(\delta_1) > \varepsilon/3) < \varepsilon.$$

Тому для

$$\delta = \min \left(\frac{\varepsilon}{3D}, \delta_1(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{3\|a\|_\infty} \right)$$

з (3.3.5) випливає, що

$$P \left(\sup_{|t_1 - t_2| < \delta, |u_1 - u_2| < \delta} |X^n(u_1, t_1) - X^n(u_2, t_2)| > \varepsilon \right) < \varepsilon.$$

Отже, умова 2 виконана. Тому [1, теорема 8.2] послідовність $\{X^n(\cdot, \cdot), n \geq 1\}$ є слабо відносно компактною як послідовність випадкових елементів в $C(\mathbb{R} \times [0, T])$ з топологією рівномірної збіжності на компактних множинах. Аналогічно випадку дискретної міри m можна вибрати слабо збіжну підпослідовність, застосувати теорему Скорохода про спільний імовірнісний простір та перейти до границі і отримати слабкий розв'язок рівняння (3.3.1).

Лема доведена.

Для доведення теореми 3.3.1 потрібна буде наступна лема в якій буде-ється послідовність випадкових процесів, що мають збігатись до розв'язку (3.2.1), і доводиться передкомпактність послідовності розподілів цих процесів.

Лема 3.3.2. *Нехай $\{X^n(u, t), \mu^n(t), t \in [0, T], u \in \mathbb{R}\}$ – розв'язки рівнянь*

$$\begin{cases} dX^n(u, t) = a(X^n(u, t), \mu^n(t))dt + dw^n(t), & u \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \mu^n(t) = Em_n \circ X^n(\cdot, t)^{-1}, & \\ X^n(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.3.6)$$

де $m_n(dx) = \mathbf{I}_{[-n, n]}(x)m(dx)$. Припустимо, що функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, $m \in \mathfrak{M}_\infty$. Позначимо λ_i^n розподіл зруження $X^n(u, t)$ на $[-i, i] \times [0, T]$, що розглядається як випадковий елемент у $C([-i, i] \times [0, T])$. Тоді для довільного $i \in \mathbb{N}$ множина ймовірнісних мір λ_i^n , $n \geq 1$ є щільною в $C([-i, i] \times [0, T])$.

Зауваження 3.3.1. З леми 3.3.1 випливає, що існує слабкий розв'язок рівняння (3.3.6). В лемі 3.3.2 ми не припускаємо єдиності розв'язку (3.3.6).

Зауваження 3.3.2. Не обмежуючи загальності можна вважати, що для рівняння (3.3.6) константи D та N з лем 3.2.1 та 3.2.2 такі ж, як для рівняння (3.2.1).

Доведення леми 3.3.2. Для доведення передкомпактності λ_i^n , $n \geq 1$ достатньо перевірити дві умови [1, теорема 8.2]:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall n \geq 1 P(|X^n(0, 0)| \geq R) \leq \varepsilon$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, 1) \exists n_0 \forall n \geq n_0 P(\omega_{X^n(\cdot, \cdot)}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$.

З (3.1.5) маємо $X(0, 0) = 0$, отже, умова 1 виконана. З леми 3.2.2 випливає, що

$$\begin{aligned} |X^n(u_1, t_1) - X^n(u_2, t_2)| &\leq |X^n(u_1, t_1) - X^n(u_2, t_1)| + |X^n(u_2, t_1) - X^n(u_2, t_2)| \leq \\ &\leq D|u_1 - u_2| + |w^n(t_1) - w^n(t_2)| + \|a\|_\infty |t_1 - t_2|, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

отже, умова 2 виконана. Лема доведена.

Доведення теореми 3.3.1. З леми 3.3.2 випливає, що існує підпослідовність $X^{n_1(k)}(\cdot, \cdot)$, $k \geq 1$, яка є слабо збіжною в $C([-1, 1] \times [0, T])$. Аналогічно, існує підпослідовність $X^{n_2(k)}(\cdot, \cdot)$, $k \geq 1$, яка є слабо збіжною в $C([-2, 2] \times [0, T])$, і так далі. Діагональним методом виберемо підпослідовність $X^{n(k)}(\cdot, \cdot)$, $k \geq 1$, яка є слабо збіжною в $C([-i, i] \times [0, T])$ для довільного $n \geq 1$, тобто $X^{n(k)}(\cdot, \cdot)$, $k \geq 1$ є збіжною в топології рівномірної збіжності на компактних множинах. За теоремою Скорохода про спільний імовірнісний простір, існує ймовірнісний простір і випадкові елементи $(w^{n(k)}(\cdot), X^{n(k)}(\cdot, \cdot))$, $k \geq 1$ на ньому такі, що ця пара випадкових елементів збігається майже напевно до $(w(\cdot), X(\cdot, \cdot))$. Оскільки

$$\forall k \geq 1 \sup_{s \leq t} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X^{n(k)}(u, s) - u| \leq \|a\|_\infty t + \sup_{s \leq t} |w^{n(k)}(s)|,$$

то

$$\sup_{s \leq t} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - u| \leq \|a\|_\infty t + \sup_{s \leq t} |w(s)|.$$

Звідси, аналогічно доведенню леми 3.2.1, для довільного $t \in [0, T]$ міра

$$\mu(t) = E(m \circ X(\cdot, t)^{-1}) \in \mathfrak{M}_N,$$

де число N з леми 3.2.1. Доведемо, що

$$\forall t \in [0, T] \quad \mu^{n(k)}(t) \rightarrow \mu(t), \quad k \rightarrow \infty$$

в просторі $(\mathfrak{M}, \rho)$. Для цього достатньо перевірити, що

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(u) \mu^{n(k)}(t, du) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(u) \mu(t, du), \quad k \rightarrow \infty.$$

Оцінимо різницю

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} f(u) \mu^{n(k)}(t, du) - \int_{\mathbb{R}} f(u) \mu(t, du) \right| = \\ &= E \left| \int_{\mathbb{R}} f(X^{n(k)}(u, t)) m_{n(k)}(du) - \int_{\mathbb{R}} f(X(u, t)) m(du) \right| \leq \\ &\leq E \int_{\mathbb{R}} |f(X^{n(k)}(u, t)) \mathbf{1}_{|u| < n(k)} - f(X(u, t))| m(du). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Нехай $\text{supp } f \subset [-R, R]$. Тоді якщо $|u| \geq R + \|a\|_{\infty} T + \sup_{s \in [0, T]} |w(s)| + 1$, то існує k_0 (взагалі кажучи, випадкове) таке, що для довільного $k \geq k_0$ маємо $X^{n(k)}(u, t) \notin \text{supp } f$, отже, $f(X^{n(k)}(u, t)) = 0$, і, аналогічно, $f(X(u, t)) = 0$. Звідси для $k \geq k_0$

$$|f(X^{n(k)}(u, t)) \mathbf{1}_{|u| < n(k)} - f(X(u, t))| \leq 2\|f\|_{\infty} \mathbf{1}_{|u| \leq R + \|a\|_{\infty} T + \sup_{s \in [0, T]} |w(s)|}.$$

Отже, функція

$$Z(u) = 2\|f\|_{\infty} \mathbf{1}_{|u| \leq R + \|a\|_{\infty} T + \sup_{s \in [0, T]} |w(s)| + 1}$$

є інтегровною мажорантою, і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\xi_k := \int_{\mathbb{R}} |f(X^{n(k)}(u, t)) \mathbf{1}_{|u| < n(k)} - f(X(u, t))| m(du) \xrightarrow{P1} 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.3.9)$$

Оскільки для всіх k та майже всіх ω

$$\xi_k \leq \int_{\mathbb{R}} 2\|f\|_{\infty} \mathbf{1}_{|x| \leq R + \|a\|_{\infty} T + \sup_{s \in [0, T]} |w(s)| + \sup_{s \in [0, T]} |w^{n(k)}(s)|} m(dx),$$

то, $\sup_{k \geq 1} E\xi_k^2 < \infty$. Отже, послідовність $\{\xi_k, k \geq 1\}$ є рівномірно інтегрованою і

$$E \int_{\mathbb{R}} |f(X^{n(k)}(u, t)) \mathbf{1}_{|u| < n(k)} - f(X(u, t))| m(du) = E\xi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Отже, права частина (3.3.8) прямує до 0 при $k \rightarrow \infty$, тобто $\mu^{n(k)}(t) \rightarrow \mu(t)$, $k \rightarrow \infty$. Тепер за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_0^t a(X^{n(k)}(u, s), \mu^{n(k)}(s)) ds \rightarrow \int_0^t a(X(u, s), \mu(s)) ds, k \rightarrow \infty.$$

Тому, перейшовши до границі $k \rightarrow \infty$ в рівнянні (3.3.6), записаному в інтегральній формі, отримаємо, що $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ є слабким розв'язком (3.2.1). Теорема 3.3.1 доведена.

Доведемо тепер теорему існування слабого розв'язку для випадку, коли функція взаємодії є інтегралом за розподілом мас частинок, тобто

$$a(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}} b(y - x) \mu(dy). \quad (3.3.10)$$

Теорема 3.3.2. *Припустимо, що виконані умови (A1)-(A4). Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (3.2.8) такий, що*

$$\forall \alpha > 0 \quad Ee^{\alpha M_T} < +\infty.$$

Для доведення теореми потрібна буде наступна лема про передкомпактність:

Лема 3.3.3. *Нехай $\{X_t^n(u, \omega), n \geq 1\}$ – розв'язки рівнянь*

$$X_t^n(u, w) = u + w_t(\omega) +$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} b(X_s^n(v, \tilde{\omega}) - X_s^n(u, \omega)) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) ds, \quad t \in [0, T], \quad (3.3.11)$$

де $m_n(dx) = \mathbf{1}_{[-n, n]}(x) m(dx)$. Припустимо, що виконані умови (A1)-(A4). Тоді для всіх $i \in \mathbb{N}$ сім'я розподілів звужень на $[0, T] \times [-i, i]$ випадкових елементів $X^n(\cdot, \omega)$ є щільною в $C([0, T] \times [-i, i])$.

Зауваження 3.3.3. Оскільки для довільного n міра m_n є скінченною, то рівняння (3.3.11) рівносильне рівнянню Маккіна-Власова, і має єдиний сильний розв'язок (див. [63]).

Зауваження 3.3.4. Оскільки m_n задовольняє нерівностям з умов (A1)-(A4) (див. підрозділ 3.2) з тими ж константами, що і m , то, не обмежуючи загальності можна вважати, що константи з лем 3.2.3 та 3.2.4 для m_n такі ж як і для m .

Доведення леми 3.3.3. Для доведення леми достатньо перевірити дві умови (див. [1]):

$$(B1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \geq 1 P(|X_0^n(0)| > \delta) < \varepsilon,$$

$$(B2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, 1) \exists n_0 \forall n \geq n_0 P(\omega_{X^n}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon,$$

де

$$\omega_{X^n}(\delta) = \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta, |u_1 - u_2| \leq \delta} |X_{t_1}^n(u_1) - X_{t_2}^n(u_2)|$$

- модуль неперервності.

Умова (B1) виконана, оскільки з (3.3.11) маємо, що $X_0^n(0) = 0$. Доведемо, що умова (B2) виконана. Для цього запишемо ланцюжок нерівностей

$$|X_{t_1}^n(u_1, \omega) - X_{t_2}^n(u_2, \omega)| \leq |X_{t_1}^n(u_1, \omega) - X_{t_1}^n(u_2, \omega)| + |X_{t_1}^n(u_2, \omega) - X_{t_2}^n(u_2, \omega)| \leq$$

$$C_4|u_1 - u_2| + |w_{t_1} - w_{t_2}| + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} R(X_s^n(v, \tilde{\omega}) - X_s^n(u_2, \omega)) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) ds.$$

З доведення леми 3.2.3 випливає, що

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} R(X_s^n(v, \tilde{\omega}) - X_s^n(u_2, \omega)) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) \leq$$

$$2R(0)C_m(EM_n(s) + M_n(s, \omega) + 1) + C_R.$$

Звідси

$$|X_{t_1}^n(u_1, \omega) - X_{t_2}^n(u_2, \omega)| \leq C_4|u_1 - u_2| + |w_{t_1} - w_{t_2}| +$$

$$(C_R + 2R(0)C_m(EM(T) + M(t, w)))|t_1 - t_2|.$$

Якщо $|u_1 - u_2| \leq \delta_1 := \varepsilon/(3C_4)$, то $C_4|u_1 - u_2| < \varepsilon/3$. З [1, теорема 1.4] випливає, що

$$\exists \delta_2 \in (0, 1) : P(\omega_w(\delta_2) \geq \varepsilon/3) \leq \varepsilon/2.$$

З леми 3.2.3 випливає, що

$$\forall n \geq 1 \quad EM^n(t) \leq C(t),$$

тому за нерівністю Чебишова

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta_3} (C_R + 2R(0)C_m(EM_n(T) + M_n(T, \omega)))|t_1 - t_2| \geq \varepsilon/3\right) &\leq \\ &\leq (C_R + 4R(0)C_m C_T \delta_3)/(\varepsilon/3) \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

при $\delta_3 = \varepsilon^2/(6(C_R + 4R(0)C_m C_T))$. Отже, при $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ маємо

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta, |u_1 - u_2| \leq \delta} |X_{t_1}^n(u_1, \omega) - X_{t_2}^n(u_2, \omega)| \geq \varepsilon\right) &\leq P\left(\sup_{|u_1 - u_2| \leq \delta_1} C_4|u_1 - u_2| \geq \varepsilon/3\right) \\ &+ P\left(\sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta_2} |w_{t_1} - w_{t_2}| \geq \varepsilon/3\right) + P\left(\sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta_3} (C_R + 2R(0)C_1(EM_n(T) + \right. \\ &\left. M_n(T, \omega)))|t_1 - t_2| \geq \varepsilon/3\right) \leq 0 + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Лема доведена.

Доведення теореми 3.3.2. З леми 3.3.3 випливає, що існує підпоследовність $X_t^{n_1(k)}(u, \omega)$, що є слабо збіжною на $[-1, 1] \times [0, T]$, з неї можна вибрати підпоследовність $X_t^{n_2(k)}(u, \omega)$, що є слабо збіжною на $[-2, 2] \times [0, T]$, і так далі. Діагональним методом Кантора виберемо підпоследовність $X^{n(k)}(u, t, \omega)$, що є слабо збіжною на $[-i, i] \times [0, T]$ для довільного $i \geq 1$. Тоді, за теоремою Скорохода про єдиний імовірнісний простір (див. [14]), існує ймовірнісний простір, на якому пара $(w^{n(k)}(\cdot), X^{n(k)}(\cdot, \cdot))$ є збіжною з імовірністю 1 до $(w(\cdot), X(\cdot, \cdot))$. Щоб не ускладнювати позначення, будемо позначати отриману последовність $X^n(u, t)$. За лемою Фату маємо

$$\forall i > 0 \quad E \sup_{u \in [-i, i]} |X(u, t, \omega) - u| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E \sup_{u \in [-i, i]} |X^n(u, t, \omega) - u| \leq C(t).$$

Тоді за теоремою Бепо Леві

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, t, \omega) - u| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} E \sup_{u \in [-i, i]} |X(u, t, \omega) - u| \leq C(t).$$

Позначимо

$$M_t^n(\omega) = \sup_{u \in \mathbb{R}, s \in [0, t]} |X^n(u, s, \omega) - u|,$$

$$A^n = A_T^n(\omega, \tilde{\omega}) = M_T(\omega) + M_T(\tilde{\omega}) + M_T^n(\omega) + M_T^n(\tilde{\omega}).$$

Доведемо тепер, що

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} b(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) m(dv) P(d\tilde{\omega}) ds - \\ & \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} b(X^n(v, s, \tilde{\omega}) - X^n(u, s, \omega)) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Розбивши перший інтеграл в (3.3.12) на дві частини : за відрізком $[-n, n]$ та доповненням до $[-n, n]$, отримаємо, що ліва частина (3.3.12) рівна

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} b(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) \mathbf{1}_{|v| > n} m(dv) P(d\tilde{\omega}) ds - \\ & \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (b(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) - b(X^n(v, s, \tilde{\omega}) - X^n(u, s, \omega))) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) ds. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

В першого інтеграла в (3.3.13) є інтегрована мажоранта $R(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega))$, тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність перший інтеграл в (3.3.13) прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$. З умови (A4) випливає, що

$$\begin{aligned} & |b(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) - b(X^n(v, s, \tilde{\omega}) - X^n(u, s, \omega))| = \\ & = |b'(\theta(s, u, v, \omega, \tilde{\omega})) (X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega) - X^n(v, s, \tilde{\omega}) + X^n(u, s, \omega))| \leq \\ & \leq Q(\theta(s, u, v, \omega, \tilde{\omega})) |X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega) - X^n(v, s, \tilde{\omega}) + X^n(u, s, \omega)|. \end{aligned}$$

З леми 3.2.5 випливає, що

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall n \geq 1 : M(t, \omega) \leq C_2 \left(\sup_{s \in [0, t]} |w(s, \omega)| + 1 \right),$$

$$M^n(t, \omega) \leq C_2 \left(\sup_{s \in [0, t]} |w^n(s, \omega)| + 1 \right).$$

Позначимо

$$F(t, \omega) = 1 + C_2 \left(\sup_{s \in [0, t]} |w(s, \omega)| + 1 \right), \quad F^n(t, \omega) = C_2 \left(\sup_{s \in [0, t]} |w^n(s, \omega)| + 1 \right).$$

Оскільки послідовність випадкових процесів $(w^n(\cdot))_{n \geq 1}$ збігається майже напевно до $w(\cdot)$ у просторі $C([0, T])$, то

$$\exists n_0 = n_0(\omega) \quad \forall n \geq n_0 \quad F^n(t, \omega) \leq F(t, \omega).$$

Тоді для $v \geq u + 2F(t, \omega) + 2F(t, \tilde{\omega})$ та $n \geq n_0(\omega) \vee n_0(\tilde{\omega})$ можна оцінити $Q(\theta(t, u, v, \omega, \tilde{\omega})) \leq Q(v - u - 2F(t, \omega) - 2F(t, \tilde{\omega}))$, для $v \leq u - 2F(t, \omega) - 2F(t, \tilde{\omega})$ та $n \geq n_0(\omega) \vee n_0(\tilde{\omega})$ можна оцінити $Q(\theta(t, u, v, \omega, \tilde{\omega})) \leq Q(v - u + 2F(t, \omega) + 2F(t, \tilde{\omega}))$.

Позначимо

$$D^n(t, u, v, \omega, \tilde{\omega}) = |X(v, s, \tilde{\omega}) - X^n(v, s, \tilde{\omega}) + X^n(u, s, \omega) - X(u, s, \omega)|.$$

Для довільного $n \geq n_0(\omega) \vee n_0(\tilde{\omega})$ маємо

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-n}^n (b(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) - b(X^n(v, s, \tilde{\omega}) - X^n(u, s, \omega))) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) ds \right| \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} D^n(s, u, v, \omega, \tilde{\omega}) Q(v - u - 2F(T, \omega) - 2F(T, \tilde{\omega})) m(dv) P(d\tilde{\omega}) ds + \\ & + \int_{\mathbb{R}} D^n(s, u, v, \omega, \tilde{\omega}) Q(v - u + 2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})) m(dv) P(d\tilde{\omega}) ds + \\ & + \int_{u-2F(T, \omega)-2F(T, \tilde{\omega})}^{u+2F(T, \omega)+2F(T, \tilde{\omega})} 2R(0) D^n(s, u, v, \omega, \tilde{\omega}) m(dv) P(d\tilde{\omega}) ds. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Зі збіжності $X^n(\cdot, \cdot)$ до $X(\cdot, \cdot)$ випливає, що підінтегральні вирази в усіх трьох інтегралах правої частини (3.3.14) прямують до 0. Для довільного $n \geq n_0(\omega) \vee n_0(\tilde{\omega})$ функція

$$(2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})) Q(v - u - 2F(T, \omega) - 2F(T, \tilde{\omega}))$$

є інтегровною мажорантою для першого інтеграла в правій частині (3.3.14).

Справді, з умови (A4) випиває, що

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})) Q(v - u - 2F(T, \omega) - 2F(T, \tilde{\omega})) m(dv) &\leq \\ &\leq C_Q(2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})) < +\infty. \end{aligned}$$

Аналогічно, для довільного $n \geq n_0(\omega) \vee n_0(\tilde{\omega})$ функція

$$(2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})) Q(v - u + 2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega}))$$

є інтегровною мажорантою для другого інтеграла в правій частині (3.3.14).

Для довільного $n \geq n_0(\omega) \vee n_0(\tilde{\omega})$ функція

$$f(u, v, \omega, \tilde{\omega}) = 2R(0)(2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})) \mathbf{1}_{[u - 2F(T, \omega) - 2F(T, \tilde{\omega}), u + 2F(T, \omega) + 2F(T, \tilde{\omega})]}(v)$$

є інтегровною мажорантою для третього інтеграла в правій частині (3.3.14).

Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність права частина (3.3.14) прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$.

Позначимо

$$\begin{aligned} \xi^n(s, \omega, \tilde{\omega}) &= \\ \int_{-n}^n (b(X(v, s, \tilde{\omega}) - X(u, s, \omega)) - b(X^n(v, s, \tilde{\omega}) - X^n(u, s, \omega))) m_n(dv) P(d\tilde{\omega}) ds, \\ G^n(s, \omega, \tilde{\omega}) &= F(s, \omega) + F(s, \tilde{\omega}) + F^n(s, \omega) + F^n(s, \tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} |\xi^n(s, \omega, \tilde{\omega})| &\leq \int_{\mathbb{R}} D^n(s, u, v, \omega, \tilde{\omega}) Q(v - u - G(T, \omega, \tilde{\omega})) m(dv) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} D^n(s, u, v, \omega, \tilde{\omega}) Q(v - u + G(T, \omega, \tilde{\omega})) m(dv) + \\ &+ \int_{u - G^n(T, \omega, \tilde{\omega})}^{u + G^n(T, \omega, \tilde{\omega})} 2R(0) D^n(s, u, v, \omega, \tilde{\omega}) m(dv). \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Легко бачити, що

$$D^n(t, u, v, \omega, \tilde{\omega}) \leq G^n(s, \omega, \tilde{\omega}) \leq G^n(T, \omega, \tilde{\omega}).$$

Отже,

$$\begin{aligned}
|\xi^n(s, \omega, \tilde{\omega})| &\leq \int_{\mathbb{R}} G^n(T, \omega, \tilde{\omega}) Q(v - u - G^n(T, \omega, \tilde{\omega})) m(dv) + \\
&\int_{\mathbb{R}} G^n(T, \omega, \tilde{\omega}) Q(v - u + G^n(T, \omega, \tilde{\omega})) m(dv) + \\
&+ \int_{u-G^n(T, \omega, \tilde{\omega})}^{u+G^n(T, \omega, \tilde{\omega})} 2R(0) G^n(T, \omega, \tilde{\omega}) m(dv) \leq \\
&\leq 2C_Q G^n(T, \omega, \tilde{\omega}) + 2R(0) G^n(T, \omega, \tilde{\omega}) C_m (2G^n(T, \omega, \tilde{\omega}) + 1).
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
G^n(t, \omega, \tilde{\omega}) = 2 + C_2 \left(\sup_{s \in [0, t]} |w(s, \omega)| + \sup_{s \in [0, t]} |w(s, \tilde{\omega})| + \sup_{s \in [0, t]} |w^n(s, \omega)| + \right. \\
\left. + \sup_{s \in [0, t]} |w(s, \tilde{\omega})| + 4 \right),
\end{aligned}$$

то з імовірністю 1

$$\sup_{n \geq 1} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\xi^n(s, \omega, \tilde{\omega}) \right)^2 P(d\tilde{\omega}) ds < +\infty.$$

Отже, за теоремою про граничний перехід для рівномірно інтегрованої послідовності маємо

$$\int_0^t \int_{\Omega} \xi^n(s, \omega, \tilde{\omega}) P(d\tilde{\omega}) ds \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

для майже всіх ω . Перейшовши до границі в рівнянні (3.3.11), отримаємо, що $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ є слабким розв'язком рівняння (3.2.8). Теорема доведена.

3.4 Існування та єдиність сильного розв'язку

В попередньому підрозділі були доведені теореми існування слабких розв'язків рівнянь (3.2.1) та (3.2.8), тому для доведення теорем існування та єдиності сильних розв'язків достатньо перевірити потраєкторну єдиність розв'язків та застосувати теорему Ямада-Ватанабе. Розглянемо спочатку рівняння (3.2.1).

Введемо клас функцій

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \text{supp } f \subset [-1, 1], \|f\|_\infty \leq 1, \|f'\|_\infty \leq 1\} \quad (3.4.1)$$

Введемо метрику на $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\rho_\infty(\mu, \nu) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+r)(\mu(dx) - \nu(dx)) \right|.$$

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що:*

1. Функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M}, \rho)$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних.
2. $\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leq L_C |x_1 - x_2|$.
3. $\exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}_\infty |a(x, \mu) - a(x, \nu)| \leq K \rho_\infty(\mu, \nu)$.
4. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (3.2.1).

Доведення теореми 3.4.1. Доведемо потраєкторну єдиність розв'язку рівняння (3.2.1). Нехай $\{X(u, t), \mu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ та $\{Y(u, t), \nu(t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ – два розв'язки рівняння (3.2.1). Віднявши відповідні рівняння (3.2.1) та скориставшись лемою 3.2.1, отримаємо

$$\begin{aligned} |X(u, t) - Y(u, t)| &= \left| \int_0^t (a(X(u, s), \mu(s)) - a(Y(u, s), \nu(s))) ds \right| \leq \\ &\leq L_N \int_0^t |X(u, s) - Y(u, s)| ds + K \int_0^t \rho_\infty(\mu(s), \nu(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

де N – константа з леми 3.2.1. Оцінимо $\rho_\infty(\mu(s), \nu(s))$:

$$\begin{aligned} \rho_\infty(\mu(s), \nu(s)) &= \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+r)(\mu(s, dx) - \nu(s, dx)) \right| \leq \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in F} E \int_{\mathbb{R}} |f(X(u, s) + r) - f(Y(u, s) + r)| m(du). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

З теореми Лагранжа маємо оцінку

$$|f(X(u, s) + r) - f(Y(u, s) + r)| \leq \|f'\|_\infty |X(u, s) - Y(u, s)|.$$

З того, що $\text{supp } f \subset [-1, 1]$ та з (3.2.3) випливає, що

$$|f(X(u, s) + r) - f(Y(u, s) + r)| \leq \|f'\|_\infty |X(u, s) - Y(u, s)| \mathbf{1}_{|u+r| \leq \|a\|_\infty T + \sup_{[0, T]} |w| + 1}. \quad (3.4.4)$$

Звідси і з означення метрики ρ_∞ маємо

$$\begin{aligned} \rho_\infty(\mu(s), \nu(s)) &\leq E \sup_{r \in \mathbb{R}} \int_{-r - \|a\|_\infty T - \sup_{[0, T]} |w| - 1}^{-r + \|a\|_\infty T + \sup_{[0, T]} |w| + 1} |X(u, s) - Y(u, s)| m(du) \leq \\ &\leq E \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - Y(u, s)| C_m (2\|a\|_\infty T + 2 \sup_{[0, T]} |w| + 3). \end{aligned}$$

Застосувавши нерівність Коші, отримаємо

$$\begin{aligned} &(\rho_\infty(\mu(s), \nu(s)))^2 \leq \\ &C_m^2 E \left(\sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - Y(u, s)| \right)^2 E \left(2\|a\|_\infty T + 2 \sup_{[0, T]} |w| + 3 \right)^2. \end{aligned}$$

Позначимо $V = (CN \vee K)^2$, $C_2 = E (2\|a\|_\infty T + 2 \sup_{[0, T]} |w| + 3)^2$. Тепер з (3.4.2) випливає, що

$$\begin{aligned} E \sup_{s \in [0, t]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - Y(u, s)|^2 &\leq 2VT \int_0^t E \sup_{s_1 \in [0, s]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s_1) - Y(u, s_1)|^2 ds + \\ &+ 2VT \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \sup_{u \in \mathbb{R}} (\rho_\infty(\mu(s_1), \nu(s_1)))^2 ds \leq \\ &\leq 2VT(1 + C_2 C_m^2) \int_0^t E \sup_{s_1 \in [0, s]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s_1) - Y(u, s_1)|^2 ds. \end{aligned}$$

З (3.2.3) випливає, що

$$\begin{aligned} E \sup_{s \in [0, t]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - Y(u, s)|^2 &= E \sup_{s \in [0, t]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |(X(u, s) - u) + (u - Y(u, s))|^2 \leq \\ &\leq E(2 \sup_{s \leq t} |w(s)| + 2t\|a\|_\infty)^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Отже, за лемою Гронуола-Белмана

$$\forall t \in [0, T] \quad E \sup_{s \in [0, t]} \sup_{u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - Y(u, s)|^2 = 0,$$

тобто розв'язок (3.2.1) є потраєкторно єдиним. З теореми Ямада-Ватанабе випливає існування та єдиність сильного розв'язку. Теорема доведена.

В наступній теоремі доведено існування та єдиність в деякому класі функцій розв'язку рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t, \omega) = dw_t(\omega) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} b(X(v, t, \tilde{\omega}) - X(u, t, \omega)) P(d\tilde{\omega}) \mu(dv) dt, \\ X(u, 0) = u, \end{cases} \quad (3.4.5)$$

тобто коли функція взаємодії має вигляд

$$a(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}} b(y - x) \mu(dy).$$

Цей випадок відрізняється від попереднього тим, що не виконується припущення обмеженості функції взаємодії a , але існування та єдиність розв'язку можна довести, користуючись лінійністю взаємодії відносно міри μ .

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що виконані умови (A1)-(A4). Тоді існує розв'язок (3.2.8) такий, що*

$$\forall \alpha > 0 \quad E \exp(\alpha M_T) < +\infty.$$

Розв'язок (3.2.8) є єдиним в такому сенсі: якщо $X(u, t) = X(u, t, \omega)$ і $Y(u, t) = Y(u, t, \omega)$ - два розв'язки (3.2.8),

$$E \sup_{u \in \mathbb{R}, s \in [0, T]} |X(u, s, \omega) - u| < +\infty, \quad E \sup_{u \in \mathbb{R}, s \in [0, T]} |Y(u, s, \omega) - u| < +\infty,$$

то

$$P(\forall t \in [0, T] \quad \forall u \in \mathbb{R} : X(u, t) = Y(u, t)) = 1.$$

Доведення теореми 3.4.2. Існування слабкого розв'язку було доведено в теоремі 3.3.2. Тому доведення буде впливати з теореми Ямада-Ватанабе та леми 3.2.5 якщо перевірити потраєкторну єдиність розв'язку.

Позначимо

$$A_t(\omega) = \sup_{s \leq t, u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - u| + \sup_{s \leq t, u \in \mathbb{R}} |Y(u, s) - u|,$$

$$g_t(\omega) = \sup_{s \leq t, u \in \mathbb{R}} |X(u, s) - Y(u, s)|.$$

Віднявши рівняння (3.2.8) для X та Y , аналогічно доведенню леми 3.2.1 отримаємо

$$\begin{aligned} & |X(u, t, \omega) - Y(u, t, \omega)| \leq \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} (C_{\mu}(A_s(\omega) + A_s(\tilde{\omega}) + 1)Q(0) + C_Q)(g_s(\omega) + g_s(\tilde{\omega}))P(d\tilde{\omega})ds. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Позначимо $C_7 = \max(C_{\mu}, Q(0), C_{\mu}Q(0), C_Q)$. Тоді, взявши супремум за $u \in \mathbb{R}$, $s \in [0, t]$ від обох частин (3.4.6), отримаємо

$$\begin{aligned} g_t(\omega) \leq C_7 \int_0^t \int_{\Omega} (A_s(\omega)g_s(\omega) + A_s(\omega)g_s(\tilde{\omega}) + A_s(\tilde{\omega})g_s(\omega) + A_s(\tilde{\omega})g_s(\omega) + \\ g_s(\tilde{\omega}) + g_s(\omega))P(d\tilde{\omega})ds. \end{aligned}$$

Позначимо $B_s(\omega) = A_s(\omega) + 1$. Тоді з останньої нерівності випливає, що

$$g_t \leq C_7 \int_0^t (B_s g_s + B_s E g_s + g_s E B_s + E(g_s B_s))ds.$$

Домноживши обидві частини цієї нерівності на B_t а також деякі доданки в правій частині на B_s , отримаємо

$$B_t g_t \leq C_7 B_t \int_0^t (B_s g_s + B_s E(g_s B_s) + B_s g_s E B_s + E B_s g_s)ds.$$

Позначимо $\xi_t = B_t g_t$. Тоді останню нерівність можна переписати у вигляді

$$\xi_t \leq C_8 B_t \int_0^t (B_s E \xi_s + \xi_s E B_s)ds.$$

Застосувавши нерівність Гронуола-Белмана до функції ξ_t , отримаємо

$$\begin{aligned} \xi_t & \leq C_8 B_t \int_0^t B_s E \xi_s ds \exp(c_8 B_t \int_0^t E B_s ds) \leq \\ & \leq C_8 B_t \int_0^t B_s E \xi_s ds \exp(c_8 B_t T(C_T + 1)). \end{aligned}$$

Взявши математичне сподівання від обох частин нерівності та застосувавши нерівність Гронуола-Белмана до функції $E\xi_t$, отримаємо $E\xi_t = 0$, тобто розв'язок є потраєкторно єдиним. Тепер з теореми 3.3.2, леми 3.2.5 та теореми Ямада-Ватанабе випливає твердження теореми. Теорема доведена.

3.5 Висновки

В даному розділі розглянуто питання існування слабкого розв'язку та існування та єдиності сильного розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь, що задають рух континуальної системи взаємодіючих частинок.

1. Доведено теорему існування слабкого розв'язку рівняння руху континуальної системи взаємодіючих частинок для обмеженого неперервного за сукупністю змінних та ліпшицевого за положенням частинки коефіцієнту зносу та постійного коефіцієнту дифузії (теорема 3.3.1).

2. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння руху континуальної системи взаємодіючих частинок для обмеженого ліпшицевого коефіцієнту зносу та постійного коефіцієнту дифузії (теорема 3.4.1).

3. Доведено теорему існування слабкого розв'язку та теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння руху континуальної системи взаємодіючих частинок для випадку, коли знос має вигляд інтегралу за розподілом мас частинок, а коефіцієнт дифузії постійний (теореми 3.3.2 та 3.4.2).

Основні результати даного розділу опубліковано в роботах [68], [13], [19].

Розділ 4

Рівняння Маккіна-Власова як границя злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь

4.1 Вступ

Для кожного $n \geq 1$ розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), & t \in [0, T], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)}, & t \in [0, T], \\ \mu^n(0) = \frac{1}{n} \mu^n. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Тут для довільного $n \in \mathbb{N}$ міра $\{\mu^n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{u_i^n} | n \in \mathbb{N}\}$ є пуасонівською точковою мірою з інтенсивністю $n \, m(dx)$, де m – деяка σ -скінченна міра, вінерівські процеси $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні в сукупності і незалежні від $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Таким чином, коли n зростає, маса кожної частинки в (4.1.1) прямує до нуля, а інтенсивність пуасонівської точкової міри, що задає початковий розподіл мас, прямує до нескінченності. В даному розділі буде доведено, що рівняння

$$\begin{cases} dX(u, t) = a(X(u, t), \mu(t))dt + dw(t), & u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X(\cdot, t)^{-1}, \\ X(u, 0) = u, \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

є граничним рівнянням для послідовності рівнянь (4.1.1). Тобто рівняння, що вивчається в розділі 3, є граничним для послідовності рівнянь з розділу 2.

Теореми існування та єдиності слабких та сильних розв'язків рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu(t))dt + b(X_k(t), \mu(t))dw_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, T], \\ \mu(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

були доведені в розділі 2. Теореми існування та єдиності сильного та слабого розв'язку рівняння (4.1.2) були доведені в розділі 3.

Даний розділ має наступну структуру. В другому підрозділі даного розділу доведено, що послідовність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ є слабо передкомпактною. В третьому підрозділі даного розділу доведено, що довільна слабка гранична точка $\mu(\cdot)$ послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ задовольняє певне рівняння в частинних похідних (теорема 4.3.1) та є в деякому сенсі розподілом розв'язку стохастичного диференціального рівняння (теорема 4.3.2). В четвертому підрозділі буде доведена гранична теорема про слабку збіжність послідовності мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ до мірозначного процесу $\nu(\cdot)$, який єдиним чином визначається з рівняння (4.1.2). Також буде доведено збіжність траєкторій розв'язків модифікованої послідовності систем (4.1.1).

4.2 Передкомпактність послідовності розв'язків злічених систем стохастичних диференціальних рівнянь

В даному підрозділі буде доведено слабку передкомпактність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, які визначаються з нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)}, \quad t \in [0, T], \\ \mu^n(0) = \frac{1}{n} \mu^n. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Тут випадкові величини $\{u_i^n, i \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ такі, що для кожного натурального n міра $\mu^n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{u_i^n}$ є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю

n $m(dx)$, де m – деяка σ -скінченна міра, вінерівські процеси $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні в сукупності та незалежні від $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Надалі скрізь будемо припускати, що m – така міра на $\mathbb{R}$, що

$$\exists C_m > 0 \forall [a, b] \subset \mathbb{R} : m([a, b]) \leq C_m(b - a + 1). \quad (4.2.2)$$

Для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ та числа $x \in \mathbb{R}$ будемо позначати $d([\alpha, \beta], x)$ евклідову відстань від точки x до відрізка $[\alpha, \beta]$.

Нагадаємо (див. підрозділ 2.2) що на просторі $\mathfrak{M}$ локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ розглядається топологія грубої збіжності τ :

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\nu, n \rightarrow \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ - множина неперервних функцій з компактним носієм.

Теорема 4.2.1. *Припустимо, що функція $a : \mathbb{R} \times (\mathfrak{M}, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних і виконано співвідношення (4.2.2). Тоді послідовність $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ є слабо відносно компактною як послідовність випадкових елементів в $C([0, T], \mathfrak{M})$.*

Зауваження 4.2.1. Для довільного $n \geq 1$ існування слабого розв'язку рівняння (4.2.1) випливає з теореми 2.2.1. Ми розглядаємо слабкі розв'язки (4.2.1) і не припускаємо, що розв'язок єдиний. Взагалі кажучи, при різних n випадкові процеси $\{X_i^n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ задані на різних імовірнісних просторах, і вінерівські процеси $w_i(\cdot)$ залежать від номеру серії n .

Доведення теореми 4.2.1. Для доведення теореми достатньо перевірити наступні дві умови (див. [38], наслідок 3.7.4):

1. для довільного $\varepsilon > 0$ та $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$ існує компакт $\Gamma_{\varepsilon, t} \subset \mathfrak{M}$ такий, що

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P(\mu^n(t) \in \Gamma_{\varepsilon, t}) \geq 1 - \varepsilon; \quad (4.2.3)$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sup_{n \in \mathbb{N}} P(\omega_{\mu^n(\cdot)}(\delta) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (4.2.4)$$

Щоб перевірити умову (4.2.3), нам потрібна наступна лема.

Лема 4.2.1. *Для довільного відрізка математичне сподівання значень міри $\mu^n(t)$ цього відрізка є обмеженим рівномірно за $n \in \mathbb{N}$ та $t \in [0, T]$. Більш того,*

$$\begin{aligned} & \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \forall t \in [0, T] \forall n \geq 1 : E\mu^n(t, [\alpha, \beta]) \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} p_w(T, d([\alpha - \|a\|_{\infty}T, \beta + \|a\|_{\infty}T], x))m(dx). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Доведення лема 4.2.1. Міра $\mu^n(0)$ є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю nm . Позначимо $\mathfrak{S}_0 = \sigma(\mu^n(0), n \geq 1)$. Легко бачити, що для довільних i, n та довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$P(\exists t \in [0, T] : X_i^n(t) \in [\alpha, \beta] | \mathfrak{S}_0) \leq p_w(T, d([\alpha - \|a\|_{\infty}T, \beta + \|a\|_{\infty}T], X_i^n(0))).$$

Тому

$$\begin{aligned} E\mu^n(t, [\alpha, \beta]) &= \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} E\left(P(X_i^n(t) \in [\alpha, \beta] | \mathfrak{S}_0)\right) \leq \\ &\leq E \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} p_w(T, d([\alpha - \|a\|_{\infty}T, \beta + \|a\|_{\infty}T], X_i^n(0))) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} p_w(T, d([\alpha - \|a\|_{\infty}T, \beta + \|a\|_{\infty}T], x))m(dx) < +\infty. \end{aligned}$$

З (4.2.2) випливає, що права частина (4.2.5) скінченна. Лема доведена.

З лема 4.2.1 випливає, що для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$E\mu^n(t, [-k, k]) \leq \int_{\mathbb{R}} p_w(T, d([-k - \|a\|_{\infty}T, k + \|a\|_{\infty}T], x))\mu(dx) =: C_k < +\infty. \quad (4.2.6)$$

Позначимо $M_{\varepsilon} = \{\mu \mid \forall k \geq 1 \mu([-k, k]) \leq 2^k C_k / \varepsilon\}$. З доведення лема 2.2.4 отримаємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ множина M_{ε} є компактом в $\mathfrak{M}$. Тепер з (4.2.6) та з нерівності Чебишова випливає, що

$$P(\mu^n(t) \notin M_{\varepsilon}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} P(\mu^n(t, [-k, k]) \geq 2^k C_k / \varepsilon) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Отже, умова (4.2.3) виконана.

Для довільної міри λ та функції f будемо позначати

$$\langle f, \lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda(dx). \quad (4.2.7)$$

Для перевірки умови (4.2.4) потрібна наступна лема.

Лема 4.2.2. *Нехай $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ – двічі неперервно диференційовна функція з компактним носієм. Тоді послідовність розподілів $\langle f, \mu^n(\cdot) \rangle$ як випадкових елементів в $C([0, T])$ є передкомпактною.*

Доведення лемми 4.2.2. Нехай $0 \leq t_0 \leq t \leq T$. З оцінки лемми 4.2.1 випливає допустимість застосування формули Іто до $\langle f, \mu(t) \rangle = \sum_i f(X_i^n(t))$. Маємо

$$\begin{aligned} d(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^4 &= d \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(X_i^n(t)) - f(X_i^n(t_0))) \right)^4 = \\ &= 4(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^3 \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f'(X_i^n(t)) a(X_i^n(t), \mu^n(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f''(X_i^n(t)) \right) dt + 6(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^2 \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f'(X_i^n(t))^2 dt + \\ &\quad + 4(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^3 \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f'(X_i^n(t)) dw_i(t) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Отже,

$$\begin{aligned} E(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^4 &= \\ &= E \int_{t_0}^t 4(\langle f, \mu^n(s) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^3 \left\langle f'(\cdot) a(\cdot, \mu^n(s)) + \frac{1}{2} f''(\cdot), \mu^n(s) \right\rangle ds + \\ &\quad + E \int_{t_0}^t 6(\langle f, \mu^n(s) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^2 \left\langle (f'(\cdot))^2, \mu^n(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Застосувавши нерівність Гельдера, отримаємо:

$$\begin{aligned} E(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^4 &\leq \int_{t_0}^t 4 (E(\langle f, \mu^n(s) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^4)^{3/4} \cdot \\ &\quad \cdot \left(E \left\langle f'(\cdot) a(\cdot, \mu^n(s)) + \frac{1}{2} f''(\cdot), \mu^n(s) \right\rangle^4 \right)^{1/4} ds + \end{aligned}$$

$$+6 \int_{t_0}^t (E(\langle f, \mu^n(s) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle))^4)^{1/2} \left(E \left\langle (f'(\cdot))^2, \mu^n(s) \right\rangle \right)^2)^{1/2} ds. \quad (4.2.9)$$

З міркувань, аналогічних доведенню леми 4.2.1, та припущень щодо функції f випливає, що всі доданки в правій частині (4.2.9) обмежені рівномірно за n . Тому з (4.2.9) отримаємо

$$E(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^4 \leq C_1 |t - t_0|, \quad (4.2.10)$$

де C_1 не залежить від t_0, t, n .

Підставивши (4.2.10) в праву частину (4.2.9), отримаємо, що

$$E(\langle f, \mu^n(t) \rangle - \langle f, \mu^n(t_0) \rangle)^4 \leq C_2 |t - t_0|^{3/2}.$$

Отже, за достатньою умовою передкомпактності Колмогорова послідовність розподілів $\langle f, \mu^n(\cdot) \rangle$ є передкомпактною. Лема доведена.

Щоб завершити доведення теореми, перевіримо умову (4.2.4).

$$\begin{aligned} \rho(\mu^n(t_1), \mu^n(t_2)) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \left(|\langle f_m, \mu^n(t_1) \rangle - \langle f_m, \mu^n(t_2) \rangle| \wedge 1 \right) \leq \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} (\omega_{\langle f_m, \mu^n(\cdot) \rangle}(|t_1 - t_2|) \wedge 1) \end{aligned}$$

Тепер умова (4.2.4) випливає з леми 4.2.2 і теореми 2.8.2 з [1]. Теорема доведена.

4.3 Характеризація граничних точок послідовності розв'язків

У даному підрозділі буде доведено, що довільна гранична точка $\mu(\cdot)$ послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ задовольняє певне рівняння в частинних похідних (теорема 4.3.1) та є в деякому сенсі розподілом розв'язку стохастичного диференціального рівняння (теорема 4.3.2).

Позначимо через $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$ множину функцій $f = f(x, t) : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм, що є неперервно диференційовними за t

і двічі неперервно диференційовними за x . Надалі для $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$ будемо позначати $\text{supp } f$ найменшу замкнену множину M таку, що

$$\forall x \notin M \quad \forall t \in [0, T] \quad f(x, t) = 0.$$

Лема 4.3.1. *Нехай виконані припущення теореми 4.2.1. Тоді*

$$\begin{aligned} d\langle f(\cdot, t), \mu^n(t) \rangle &= \left\langle f'_t(\cdot, t) + f'_x(\cdot, t)a(\cdot, \mu^n(t)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, t), \mu^n(t) \right\rangle dt + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f'_x(X_i^n(t), t) dw_i(t). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Доведення леми 4.3.1. Рівняння (4.3.1) рівносильне

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(X_i^n(t), t) &= \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(X_i^n(0), 0) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^t \left(f'_t(X_i^n(s), s) + f'_x(X_i^n(s), s)a(X_i^n(s), \mu^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(X_i^n(s), s) \right) ds + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^t f'_x(X_i^n(s), s) dw_i(s). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

З формули Іто випливає, що для довільного натурального m

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{|i| \leq m} f(X_i^n(t), t) &= \frac{1}{n} \sum_{|i| \leq m} f(X_i^n(0), 0) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{|i| \leq m} \int_0^t \left(f'_t(X_i^n(s), s) + f'_x(X_i^n(s), s)a(X_i^n(s), \mu^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(X_i^n(s), s) \right) ds + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{|i| \leq m} \int_0^t f'_x(X_i^n(s), s) dw_i(s). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

З міркувань, аналогічних доведенню леми 4.2.1, випливає, що

$$E \left(\frac{1}{n} \sum_{|i| > m} f(X_i^n(t), t) \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \|f\|_\infty^2 E |\{ |i| > m : X_i^n(t) \in \text{supp } f \}|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{n} \sum_{|i| \leq m} f(X_i^n(0), 0) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(X_i^n(0), 0), \quad m \rightarrow \infty.$$

Користуючись додатково обмеженістю похідних функції f , обмеженістю функції a та теоремою Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{|i| \leq m} \int_0^t \left(f'_t(X_i^n(s), s) + f'_x(X_i^n(s), s)a(X_i^n(s), \mu^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(X_i^n(s), s) \right) ds \xrightarrow{L^2} \\ & \xrightarrow{L^2} \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^t \left(f'_t(X_i^n(s), s) + f'_x(X_i^n(s), s)a(X_i^n(s), \mu^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(X_i^n(s), s) \right) ds \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$. З ізометрії стохастичного інтегралу випливає, що

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n} \sum_{|i| > m} \int_0^t f'_x(X_i^n(s), s) dw_i(s) \right)^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{|i| > m} \int_0^t E(f'_x(X_i^n(s), s))^2 ds \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} t \|f'_x\|_\infty^2 E|\{ |i| > m : X_i^n(t) \in \text{supp } f \}|^2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, перейшовши до границі $m \rightarrow \infty$ в (4.3.3), отримаємо (4.3.2). Лема доведена.

Лема 4.3.2. *Нехай виконані припущення теореми 4.2.1. Тоді для довільної $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$*

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^t f'_x(X_i^n(s), s) dw_i(s) \right) \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty.$$

Доведення леми 4.3.2. Оскільки вінерівські процеси $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ є незалежними, то

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^T f'_x(X_i^n(s), s) dw_i(s) \right)^2 &= E \frac{1}{n^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_0^T (f'_x(X_i^n(s), s))^2 ds \leq \\ &\leq \frac{\|f'_x\|_\infty^2}{n} E \frac{1}{n} \left| \{ i \in \mathbb{Z} | \exists s \in [0, T] : X_i^n(s) \in \text{supp } f \} \right|. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Аналогічно доведенню леми 4.2.1 можна перевірити, що послідовність

$$E \frac{1}{n} \left| \{ i \in \mathbb{Z} | \exists s \in [0, T] : X_i^n(s) \in \text{supp } f \} \right|, \quad n \geq 1$$

є обмеженою. Тепер лема випливає з (4.3.4) та нерівності Колмогорова для мартингалів. Лема доведена.

Нехай підпоследовність $\{n_k, k \geq 1\}$ і мірозначний процес $\{\mu(t), t \in [0, T]\}$ такі, що $\mu^{n_k}(\cdot)$ слабо збігається до $\mu(\cdot)$ як послідовність випадкових елементів в $C([0, T], \mathfrak{M})$. З теореми Скорохода про спільний імовірнісний простір випливає, що існує ймовірнісний простір і визначені на ньому випадкові елементи $\{\tilde{\mu}^{n_k}(t), \tilde{w}_i^{n_k}(t), k \geq 1, i \in \mathbb{Z}, t \in [0, T]\}$ і $\{\tilde{\mu}(t), t \in [0, T]\}$ такі, що для довільного $k \geq 1$ випадковий елемент $\{\tilde{\mu}^{n_k}(t), \tilde{w}_i^{n_k}(t), i \in \mathbb{Z}, t \in [0, T]\}$ має такий же розподіл як $\{\mu^{n_k}(t), w_i(t), i \in \mathbb{Z}, t \in [0, T]\}$, і має місце збіжність:

$$\tilde{\mu}^{n_k}(\cdot) \xrightarrow{P1} \tilde{\mu}(\cdot), k \rightarrow \infty, \quad (4.3.5)$$

як випадкових елементів в $C([0, T], \mathfrak{M})$, тобто

$$\sup_{t \in [0, T]} \rho(\tilde{\mu}^{n_k}(t), \tilde{\mu}(t)) \xrightarrow{P1} 0, k \rightarrow \infty.$$

Надалі для спрощення позначень будемо писати n замість n_k і w_i^n замість $\tilde{w}_i^{n_k}$.

Лема 4.3.3. *Нехай виконані припущення теореми 4.2.1. Тоді для довільного $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$ і довільного $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle \left(f'_s(\cdot, s) + f'_x(\cdot, s)a(\cdot, \tilde{\mu}^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, s) \right), \tilde{\mu}^n(s) \right\rangle ds \xrightarrow{P1} \\ & \xrightarrow{P1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle \left(f'_s(\cdot, s) + f'_x(\cdot, s)a(\cdot, \tilde{\mu}(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, s) \right), \tilde{\mu}(s) \right\rangle ds, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доведення леми 4.3.3. Оцінимо різницю

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle \left(f'_s(\cdot, s) + f'_x(\cdot, s)a(\cdot, \tilde{\mu}^n(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, s) \right), \tilde{\mu}^n(s) \right\rangle ds - \right. \\ & \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle \left(f'_s(\cdot, s) + f'_x(\cdot, s)a(\cdot, \tilde{\mu}(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, s) \right), \tilde{\mu}(s) \right\rangle ds \right| \leq \\ & \left| \int_0^t \left\langle (f'_x(\cdot, s)(a(\cdot, \tilde{\mu}^n(s)) - a(\cdot, \tilde{\mu}(s)))), \tilde{\mu}^n(s) \right\rangle ds \right| + \\ & + \left| \int_0^t \left\langle \left(f'_s(\cdot, s) + f'_x(\cdot, s)a(\cdot, \tilde{\mu}(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, s) \right), \tilde{\mu}^n(s) - \tilde{\mu}(s) \right\rangle ds \right|. \quad (4.3.6) \end{aligned}$$

Оскільки з імовірністю 1 має місце рівномірна збіжність

$$\tilde{\mu}^n(\cdot) \xrightarrow{[0,T]} \tilde{\mu}(\cdot), \quad n \rightarrow \infty,$$

то для майже кожного ω існує компакт $K(\omega) \subset \mathfrak{M}$ такий, що $\{\tilde{\mu}^n(t, \omega), \mu(t, \omega) | t \in [0, T], n \geq 1\} \subset K(\omega)$. Оскільки $\text{supp } f \times K(\omega)$ є компактом, то неперервна функція a є рівномірно неперервною на $\text{supp } f \times K(\omega)$. Отже, перший доданок в правій частині (4.3.6) не перевищує

$$\sup_{x \in \text{supp } f} \sup_{s \in [0, T]} |a(x, \tilde{\mu}^n(s)) - a(x, \tilde{\mu}(s))| \cdot \|f'_x\|_\infty \sup_{s \in [0, T]} \tilde{\mu}^n(s, \text{supp } f) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

бо

$$\sup_{x \in \text{supp } f} \sup_{s \in [0, T]} |a(x, \tilde{\mu}^n(s)) - a(x, \tilde{\mu}(s))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

і

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sup_{s \in [0, T]} \tilde{\mu}^n(s, \text{supp } f) \leq \sup_{s \in [0, T]} \tilde{\mu}(s, \text{supp } f). \quad (4.3.7)$$

Оскільки для довільного фіксованого $s \in [0, T]$

$$h(\cdot) = f'_x(\cdot, s)a(\cdot, \mu(s)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot, s) + f'_s(\cdot, s) \in C_c(\mathbb{R}),$$

то

$$\forall s \in [0, T] \quad \langle h, \tilde{\mu}^n(s) \rangle \rightarrow \langle h, \mu(s) \rangle, \quad n \rightarrow \infty,$$

причому

$$|\langle h, \mu(s) \rangle| \leq \left(\|f'_s\|_\infty + \|f'_x\|_\infty \|a\|_\infty + \frac{1}{2} \|f''_{xx}\|_\infty \right) \sup_{s \in [0, T]} \tilde{\mu}(s, \text{supp } f).$$

З (4.3.7) випливає, що $\{\sup_{s \in [0, T]} \tilde{\mu}^n(s, \text{supp } f), n \geq 1\}$ є обмеженою послідовністю. Тому, застосувавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо збіжність інтегралів у другому доданку з правої частини (4.3.6). Отже, права частина (4.3.6) прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$. Лема доведена.

З (4.3.1), лем 4.3.2, 4.3.3 та того, що $\mu^n(0) \xrightarrow{P} m$, $n \rightarrow \infty$, випливає наступний результат

Теорема 4.3.1. Припустимо, що функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних. Нехай $\mu(\cdot)$ – довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0, T], \mathfrak{M})$. Тоді для довільної $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$

$$\begin{aligned} \langle \mu(t), f(\cdot, t) \rangle &= \langle m, f(\cdot, 0) \rangle + \\ &+ \int_0^t \left\langle \left(f'_x(\cdot, s) a(\cdot, \mu(s)) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\cdot, s) + f'_s(\cdot, s) \right), \mu(s) \right\rangle ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Зауваження 4.3.1. Рівність (4.3.8) виконується м. н. також для випадкових елементів f в просторі $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$ з топологією збіжності

$$g_n \rightarrow g, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \exists K > 0 \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{supp } g_n \subset [-K, K], \|g_n - g\|_{\infty} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Справді, для довільної не випадкової функції f існує множина Ω_f міри 1 така, що для довільного $\omega \in \Omega_f$ виконується рівність (4.3.8). Нехай $\{f_n, n \geq 1\}$ – щільна підмножина в $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$. Позначимо $\Omega_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{f_n}$. Тоді Ω_1 є множиною міри 1, і для довільних $\omega \in \Omega_1$ і $n \in \mathbb{N}$ рівність (4.3.8) виконується для функції f_n . Нехай тепер f є випадковим елементом в просторі $C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$. Тоді для довільного фіксованого $\omega \in \Omega_1$ функція $f(\cdot, \omega)$ є границею деякої підпослідовності функцій $\{f_{n_k}, k \geq 1\}$, для яких (4.3.8) виконано. Перейшовши до границі $k \rightarrow \infty$, отримаємо, що (4.3.8) виконано для $\omega \in \Omega_1$.

Нашою подальшою метою є встановлення зв'язку (4.3.8) з певним стохастичним диференціальним рівнянням.

Нехай $\varphi_{st}(x)$, $s \leq t$, $x \in \mathbb{R}$ – розв'язок рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_{st}(x) = a(\varphi_{st}(x), \mu(t))dt + dw(t), & t \in [s, T], \\ \varphi_{ss}(x) = x, \end{cases} \quad (4.3.9)$$

де $w(\cdot)$ – незалежний від $\mu(\cdot)$ вінерівський процес. Тут $\mu(\cdot)$ з теореми 4.3.1.

Позначимо $A(x, t) = a(x, \mu(t))$, E_w – математичне сподівання за вінерівською мірою.

Лема 4.3.4. Припустимо, що функція a неперервна за сукупністю змінних i для майже всіх ω функція $A = A(x, t)$ є диференційовною за x , причому функція $A'_x(x, t)$ обмежена. Якщо $g \in C_c^2(\mathbb{R})$, то для довільного фіксованого $S \in [0, T]$ функція f вигляду

$$f(x, t) = E_w g(\varphi_{tS}(x)), \quad t \in [0, S] \quad (4.3.10)$$

задовольняє співвідношення

$$\forall t \in [0, S] \quad \langle \mu(t), f(\cdot, t) \rangle = \langle m, f(\cdot, 0) \rangle.$$

Зауваження 4.3.2. Далі буде доведено, що міри $\mu(t)$, $t \in [0, T]$ є не випадковими.

Зауваження 4.3.3. З [22, теорема 1.7.12] випливає, що існує розв'язок рівняння

$$\begin{cases} f'_t(x, t) + f'_x(x, t)A(x, t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(x, t) = 0, & t \in [s, S), \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x, S) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.3.11)$$

і з оберненого рівняння Колмогорова випливає, що розв'язок (4.3.11) задовольняє рівність (4.3.10). Однак функція f , що визначена в (4.3.10) не задовольняє умови теореми 4.3.1, оскільки не має компактного носія. Для доведення леми достатньо довести що (4.3.8) виконується також для функції f з (4.3.10).

Зауваження 4.3.4. Для виконання припущень щодо функції A достатньо, щоб функція a була неперервно диференційовною за x , неперервною за сукупністю змінних i

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} |a'_x(x, \mu)| < +\infty.$$

Доведення леми 4.3.4. Перевіримо збіжність інтегралу м. н.

$$\left\langle |f(\cdot, t)|, \mu(t) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x, t)| \mu(t, dx) < +\infty \quad (4.3.12)$$

для функції f з (4.3.10). Оцінимо

$$|f(t, x)| \leq E_w |g(\varphi_{tS}(x))| \leq \|g\|_{\infty} P(\varphi_{tS}(x) \in \text{supp } g). \quad (4.3.13)$$

Нехай $\text{supp } g \subset [-R, R]$. З (4.3.13) та нерівності Чебишова для довільного $|x| \geq R$ та $p \geq 1$ отримаємо

$$|f(x, t)| \leq \|g\|_\infty P(|\varphi_{tS}(x) - x| \geq |x| - R) \leq \|g\|_\infty \frac{E_w(R + 1 + |\varphi_{tS}(x) - x|)^p}{(1 + |x|)^p}. \quad (4.3.14)$$

Оскільки $|\varphi_{tS}(x) - x| \leq |w(S) - w(t)| + \|a\|_\infty |S - t|$, то

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq \|g\|_\infty \frac{E_w(R + 1 + |w(S) - w(t)| + \|a\|_\infty |S - t|)^p}{(1 + |x|)^p} = \\ &= \|g\|_\infty \frac{K(S, p, \|g\|_\infty)}{(1 + |x|)^p}, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

де функція K залежить лише від $S, p, \|g\|_\infty$. Оскільки

$$E \int_{\mathbb{R}} |f(x, t)| \mu(t, dx) = \int_{\mathbb{R}} |f(x, t)| (E\mu(t, dx)), \quad (4.3.16)$$

то з (4.2.5) і (4.3.15) випливає, що інтеграл в (4.3.16) скінченний. Тепер за теоремою Фубіні інтеграл в (4.3.12) є скінченним м. н.

Нехай, $q(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ – функція з носієм в $[-1, 1]$ така, що $q(0) = 1$. Визначимо послідовність функцій $\{h_n, n \geq 1\}$:

$$h_n(x) = \mathbf{1}_{|x| \leq n} + q(x - n) \mathbf{1}_{x > n} + q(x + n) \mathbf{1}_{x < -n} \quad (4.3.17)$$

і послідовність $\{f_n, n \geq 1\}$:

$$f_n(x, t) = h_n(x) f(x, t). \quad (4.3.18)$$

Для довільного натурального n функція $f_n \in C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$, тому (4.3.8) виконано для f_n . Оскільки функції f_n збігаються поточно до f , то достатньо обґрунтувати граничний перехід в (4.3.8).

З (4.3.12) та теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що

$$\langle \mu(t), f_n(\cdot, t) \rangle \xrightarrow{P1} \langle \mu(t), f(\cdot, t) \rangle, \quad n \rightarrow \infty$$

для довільного $t \in [0, S]$.

Користуючись (4.3.11) перетворимо підінтегральний вираз в правій частині (4.3.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial f_n(x, s)}{\partial x} A(x, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x, s)}{\partial x^2} &= h_n(x) f'_s(x, s) + \\ &+ (h_n(x) f'_x(x, s) + h'_n(x) f(x, s)) A(x, s) + \frac{1}{2} (h_n(x) f''_{xx}(x, s) + \\ &+ 2h'_n(x) f'_x(x, s) + h''_{xx}(x) f(x, s)) = h'_n(x) f(x, s) A(x, s) + \\ &+ h'_n(x) f'_x(x, s) + \frac{1}{2} h''_n(x) f(x, s). \end{aligned}$$

Оскільки функція $A(x, t)$ неперервно диференційовна за x , то функція $\varphi_{tT}(x)$ неперервно диференційовна за x в середньоквадратичному сенсі (див. [5], теорема 2.8.1), причому похідна $\frac{\partial \varphi_{tS}(x)}{\partial x}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \varphi_{tS}(x)}{\partial x} = 1 + \int_t^T A'_1(\varphi_{tu}(x), u) \frac{\partial \varphi_{tu}(x)}{\partial x} du.$$

Тепер з леми Гронуола-Белмана випливає, що

$$\left| \frac{\partial \varphi_{tS}(x)}{\partial x} \right| \leq e^{\|A'_x\|_\infty(S-t)} \leq e^{\|A'_x\|_\infty S},$$

де $\|A'_x\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t \in [0, T]} |A'_x(x, t)|$. Звідси

$$\begin{aligned} |f'_x(x, s)| &= \left| \frac{d}{dx} E_w g(\varphi_{sS}(x)) \right| = \left| E_w \left(g'(\varphi_{sS}(x)) \frac{\partial \varphi_{sS}(x)}{\partial x} \right) \right| \leq \\ &\leq E_w |g'(\varphi_{sS}(x))| e^{\|A'_x\|_\infty S}. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Аналогічно доведенню (4.3.15) можна перевірити, що

$$\forall p \geq 1 : E_w |g'(\varphi_{sS}(x))| \leq \|g'\|_\infty \frac{K(S, p, \|g\|_\infty)}{(1 + |x|)^p}. \quad (4.3.20)$$

Тому з (4.3.14), (4.3.16), (4.3.19), (4.3.20) випливає, що для довільного $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{|x| \in (n, n+1)} \left(h'_n(x) f(x, s) A(x, s) + h'_n(x) f'_x(x, s) + \frac{1}{2} h''_n(x) f(x, s) \right) \mu(s, dx) \right| &\leq \\ \|g'\|_\infty \int_0^t \int_{|x| \in (n, n+1)} \left(\|A'_x\|_\infty |f(x, s)| + e^{\|A'_x\|_\infty S} \|g'\|_\infty \frac{K(S, p, \|g\|_\infty)}{(1 + |x|)^p} \right) \mu(s, dx) ds &+ \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\|q''\|_{\infty} \int_0^t \int_{|x| \in (n, n+1)} |f(x, s)| \mu(s, dx) ds. \quad (4.3.21)$$

Аналогічно доведенню (4.3.12) можна перевірити, що для $p \geq 2$

$$E \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^p} \mu(s, dx) < +\infty. \quad (4.3.22)$$

З (4.3.12), (4.3.22) та теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що права частина (4.3.21) прямує до 0 м. н. при $n \rightarrow \infty$. Оскільки $f_n(x, s) = f(x, s)$ для $|x| \leq n$, то з (4.3.11) випливає, що

$$\int_{|x| \notin (n, n+1)} \left(\frac{\partial f_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial f_n(x, s)}{\partial x} A(x, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x, s)}{\partial x^2} \right) \mu^n(s, dx) = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle \left(\frac{\partial f_n(\cdot, s)}{\partial s} + \frac{\partial f_n(\cdot, s)}{\partial x} A(\cdot, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(\cdot, s)}{\partial x^2} \right), \mu(s) \right\rangle ds \xrightarrow{P_1} \\ & \int_0^t \left\langle \left(f'_s(\cdot, s) + f'_x(\cdot, s) A(\cdot, s) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\cdot, s) \right), \mu(s) \right\rangle ds, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Перейшовши до границі в рівнянні (4.3.8) для функції f_n отримаємо, що (4.3.8) виконано і для функції f . Лема доведена.

Теорема 4.3.2. *Нехай $\mu(\cdot)$ – довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0, T], \mathfrak{M})$. Припустимо, що виконуються умови теореми 4.3.1 та леми 4.3.4. Тоді*

$$\forall t \in [0, T] \quad \mu(t) = E_w \left(m \circ \varphi_{0t}(\cdot)^{-1} \right). \quad (4.3.23)$$

Зауваження 4.3.5. Функція $\varphi_{0t}(x)$ вимірна за (t, x, ω) .

Доведення теореми 4.3.2. Позначимо $\varphi_t(x) = \varphi_{0t}(x)$, де $\varphi_{0t}(x)$ – розв'язок рівняння (4.3.9). Зафіксуємо довільне $S \in [0, T]$. З леми 4.3.4 випливає, що для довільного $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ для $f(t, x) := E g(\varphi_{tS}(x))$, $t \in [0, S]$, має місце співвідношення

$$\langle \mu(S), g \rangle = \langle \mu(S), f(\cdot, S) \rangle = \langle \mu(0), f(\cdot, 0) \rangle = \langle m, f(\cdot, 0) \rangle = \langle m, E_w g(\varphi_S(x)) \rangle =$$

$$= E_w \int_{\mathbb{R}} g(\varphi_S(x)) m(dx) = E_w \int_{\mathbb{R}} g(y) (m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1})(dy) = \langle E_w m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1}, g(\cdot) \rangle. \quad (4.3.24)$$

Отже,

$$\forall g \in C_c^2(\mathbb{R}) \quad \langle \mu(S), g(\cdot) \rangle = \langle E_w m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1}, g(\cdot) \rangle.$$

Звідси $\mu(S) = E_w(m \circ \varphi_S(\cdot)^{-1})$. Теорема доведена.

4.4 Граничні теореми

Основними результатами даного підрозділу є граничні теореми про збіжність мірозначних процесів $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (4.2.1) до мірозначного процесу $\nu(\cdot)$ з рівняння (4.1.2) та про збіжність траєкторій випадкових процесів $\{X_i^n(\cdot)\}_{n \geq 1}$.

Теорема 4.4.1. *Нехай $\{\mu^n(\cdot), X_i^n(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ – довільні розв'язки рівнянь (4.2.1). Припустимо, що*

1. *функція $a : \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;*

2. *функція $a = a(x, \mu)$ є неперервно диференційовною за x , причому*

$$\forall C > 0 \exists L_C > 0 \forall \mu \in \mathfrak{M}_C \forall x \in \mathbb{R} |a'_x(x, \mu)| \leq L_C;$$

3. $\exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}_\infty |a(x, \mu) - a(x, \nu)| \leq K \rho_\infty(\mu, \nu);$

4. $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді послідовність мірозначних випадкових процесів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ слабо збігається в $C([0, T], \mathfrak{M})$ до невинадкового мірозначного процесу $\mu(\cdot)$, який єдиним чином визначається з рівняння (4.1.2).

Доведення теореми 4.4.1. Доведення теорем 3.3.1 та 3.4.1 справдливі і для рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x), \nu(t))dt + dw(t), & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ \nu(t) = E_w m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}, \\ \varphi_0(x) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Отже, за припущень теореми 4.4.1 існують єдині сильні розв'язки рівнянь (3.2.1) та (4.4.1). Процес $\{X(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ з (3.2.1) є вимірним відносно вінерівської фільтрації, отже, пара $\{(X(u, t), \mu(t)), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ також задовольняє рівняння (4.4.1). З єдиності розв'язків випливає що вони співпадають. Тепер теорема 4.4.1 випливає з теорем 4.3.2, 3.4.1 та наступної леми.

Лема 4.4.1. *Припустимо, що виконані умови теореми 4.4.1. Нехай $\mu(\cdot)$ – довільна слабка гранична точка послідовності випадкових елементів $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$ в просторі $C([0, T], \mathfrak{M})$. Тоді з імовірністю 1 для всіх $t \in [0, T]$ міра $\mu(t) \in \mathfrak{M}_C$, де*

$$C = C_m + 2\|a\|_\infty T + 2 \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^{\infty} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx).$$

Тут константа C_m з рівності (4.2.2).

Доведення леми 4.4.1. Зафіксуємо довільний відрізок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Легко бачити, що для довільного $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \mu^n(t, [\alpha, \beta]) &\leq \frac{1}{n} \mu^n([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n > \beta + \|a\|_\infty T} \mathbf{1}_{\inf_{[0, T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i^n} + \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n < \alpha - \|a\|_\infty T} \mathbf{1}_{\sup_{[0, T]} w_i(t) > \alpha - \|a\|_\infty T - u_i^n}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Оскільки μ^n є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$, то

$$\frac{1}{n} \mu^n([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]) \rightarrow m([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]).$$

Зафіксуємо довільне $B > \beta + \|a\|_\infty T$. Позначимо $I = [\beta + \|a\|_\infty T, B]$,

$$\rho(dx) = \frac{1}{m(I)} \mathbf{1}_I(x) m(dx).$$

Нехай, $\{u_i, i \geq 1\}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з розподілом ρ , а $N(\cdot)$ пуассонівський процес з інтенсивністю 1, незалежний

від $\{u_i, i \geq 1\}$ та $w(\cdot)$. Тоді [53, теорема 2.1.16]

$$S_n(I) := \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n \in I} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i^n} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N(nm(I))} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i}.$$

Отже, (див. [53, параграф 3.1.1])

$$\begin{aligned} ES_n(I) &= EN(nm(I)) E \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} = \\ &= \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^B p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^\infty p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx), B \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Оцінимо дисперсію, користуючись результатами з [53, параграф 3.1.1]

$$\begin{aligned} DS_n(I) &= EN(nm(I)) D \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} + \\ &+ DM(nm(I)) \left(E \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} \right)^2 = \\ &= nm(I) E \left(\frac{1}{n} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_1(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_1} \right)^2 = \\ &= \frac{m(I)}{n} \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^B p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{m(I)}{n} \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^{+\infty} p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx), B \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже, для довільного $n \geq 1$

$$E \frac{1}{n} \sum_{i: u_i^n > \beta + \|a\|_\infty T} \mathbf{1}_{\inf_{[0,T]} w_i(t) < \beta + \|a\|_\infty T - u_i^n} = \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^\infty p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx),$$

і

$$D \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^\infty p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Аналогічні співвідношення мають місце і для другої суми в правій частині рівності (4.4.2). Тому якщо $\mu(\cdot)$ є слабкою граничною точкою послідовності $\mu^n(\cdot)$, то

$$\mu(t, [\alpha, \beta]) \leq m([\alpha - \|a\|_\infty T, \beta + \|a\|_\infty T]) + 2 \int_{\beta + \|a\|_\infty T}^\infty p_w(T, x - \beta - \|a\|_\infty T) m(dx).$$

Лема доведена.

Для теореми про збіжність траєкторій окремих частинок потрібні будуть деякі додаткові умови.

Нехай $\{\mu_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{u_{i,j}}\}$ – незалежні пуасонівські точкові міри з інтенсивністю m . Нехай $\mu^n = \sum_{i=1}^n \mu_i$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тоді μ^n є пуасонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$. Нехай $\{w_{i,j}(\cdot), i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ – незалежні вінерівські процеси, причому $\{w_{i,j}(\cdot), i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ незалежні від $\{\mu_i, i \geq 1\}$. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} dX_{i,j}^n(t) = a(X_{i,j}^n(t), \mu^n(t))dt + dw_{i,j}(t), & t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{X_{i,j}^n(t)}, & t \in [0, T], \\ X_{i,j}^n(0) = u_{i,j}, & i = \overline{1, n}, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Відмітимо що розв'язок $\mu^n(\cdot)$ рівняння (4.4.3) має такий самий розподіл, як $\mu^n(\cdot)$ з рівняння (4.2.1), якщо має місце єдиність розв'язків рівнянь (4.4.3) та (4.2.1). Достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (4.4.3) дає, наприклад, теорема 2.3.1.

Наступна теорема дає достатні умови збіжності траєкторій окремих частинок.

Теорема 4.4.2. *Припустимо, що виконані умови теореми 4.4.1 та для довільного $n \geq 1$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (4.4.3). Тоді*

1. $\mu^n(\cdot) \xrightarrow{P} \mu(\cdot), \quad n \rightarrow \infty$ в $C([0, T], (\mathfrak{M}, \rho))$.
2. для довільних цілих i та j

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} E(X_{i,j}^n(t) - X_{i,j}(u_{i,j}, t))^2 = 0,$$

де $X_{i,j}(\cdot, \cdot)$ – розв'язок рівняння

$$\begin{cases} dX_{i,j}(u, t) = a(X_{i,j}(u, t), \mu(t))dt + dw_{i,j}(t), & u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \\ \mu(t) = Em \circ X_{i,j}(\cdot, t)^{-1}, & \\ X_{i,j}(u, 0) = u, & u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Доведення теореми 4.4.2. Нехай $\mu(\cdot)$ – довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geq 1\}$. З леми 4.3.4 та теорем 4.3.2, 4.2.1 випливає, що $\mu(\cdot)$ є розв'язком рівняння (4.1.2), а, отже, $\mu(\cdot)$ є не випадковим мірозначним процесом і $\mu^n(\cdot) \xrightarrow{P} \mu(\cdot), n \rightarrow \infty$ як випадкові елементи в $C([0, T], \mathfrak{M})$. Випадковий процес $X_{i,j}^n(\cdot)$ задовольняє рівність

$$X_{i,j}^n(t) = u_{i,j} + \int_0^t a(X_{i,j}^n(s), \mu^n(s)) ds + w_{i,j}(t),$$

а $X_{i,j}(u_{i,j}, \cdot)$ задовольняє

$$X_{i,j}(t) = u_{i,j} + \int_0^t a(X_{i,j}(s), \mu(s)) ds + w_{i,j}(t).$$

Отже, друга частина теореми випливає з [5, теорема 2.8.2]. Теорема доведена.

Приклад 4.4.1. Нехай

$$a(x, \mu) = q \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(y - x) \mu(dy), \dots, \int_{\mathbb{R}} g_m(y - x) \mu(dy), \int_{\mathbb{R}} h_1(y) \mu(dy), \dots, \int_{\mathbb{R}} h_k(y) \mu(dy) \right),$$

де

1. функція $q \in C^1(\mathbb{R}^{m+k})$, функції q, q' є обмеженими;
2. функції $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_k \in C_c^1(\mathbb{R})$.

Для такої функції a виконані всі припущення теореми 4.4.2.

Перевіримо, що виконуються умова 2 теореми 4.4.1. Позначимо

$$\vec{r}(x, \mu) = \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(y - x) \mu(dy), \dots, \int_{\mathbb{R}} g_m(y - x) \mu(dy), \int_{\mathbb{R}} h_1(y) \mu(dy), \dots, \int_{\mathbb{R}} h_k(y) \mu(dy) \right).$$

Продиференціювавши за параметром інтеграли в означенні $a(x, \mu)$, отримаємо

$$a'_x(x, \mu) = - \sum_{i=1}^m q'_i(\vec{r}(x, \mu)) \int_{\mathbb{R}} g'_i(y - x) \mu(dy).$$

Звідси

$$|a'_x(x, \mu)| \leq \sum_{i=1}^m \|q'_i\|_{\infty} \|g'_i\|_{\infty} \mu(\text{supp } g_i).$$

Отже, умова 2 теореми (4.4.1) виконана.

Перевіримо, що виконується умова 3 теореми (4.4.1). З теореми Лагранжа випливає оцінка

$$\begin{aligned}
 |a(x, \mu_1) - a(x, \mu_2)| &= |q(\vec{r}(x, \mu_1)) - q(\vec{r}(x, \mu_2))| \leq \\
 &\leq \|q'\|_\infty \sum_{i=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}} g_i(y - x)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right| + \\
 &\quad + \|q'\|_\infty \sum_{i=1}^k \left| \int_{\mathbb{R}} h_i(y)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right|. \tag{4.4.5}
 \end{aligned}$$

Нехай $\{l_i, 1 \leq i \leq n\} \subset C_c^1(\mathbb{R}, [0, 1])$ – такі функції, що

$$\forall y \in \bigcup_{i=1}^m \text{supp } g_i \cup \bigcup_{i=1}^k \text{supp } h_i : \sum_{i=1}^n l_i(y) = 1, \tag{4.4.6}$$

та

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists u \in \mathbb{R} : \text{supp } l_i \subset [u, u + 2].$$

Тоді з (4.4.5) і (4.4.6) випливає, що

$$\begin{aligned}
 |a(x, \mu_1) - a(x, \mu_2)| &\leq \|q'\|_\infty \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}} g_i(y - x) l_j(y)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right| + \\
 &\quad + \|q'\|_\infty \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \left| \int_{\mathbb{R}} h_i(y) l_j(y)(\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right|.
 \end{aligned}$$

Позначимо

$$H = \max\{\|l_i\|_\infty, \|l'_i\|_\infty, 1 \leq i \leq n\},$$

$$C = \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_i(x)| \vee |g'_i(x)| \vee \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_i(x)| \vee |h'_i(x)|.$$

Легко бачити, що для довільних i та j

$$|g_i(x - y) l_j(y)| \leq CH, \quad |(g_i(x - y) l_j(y))'_y| \leq 2CH,$$

$$|h_i(y) l_j(y)| \leq CH, \quad |(h_i(y) l_j(y))'_y| \leq 2CH.$$

Тепер з означення $\rho_\infty(\mu_1, \mu_2)$ випливає, що

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \left| \int_{\mathbb{R}} S(x, y) l_i(y) (\mu_1(dy) - \mu_2(dy)) \right| \leq 2nC(m+k)H\rho_\infty(\mu_1, \mu_2).$$

Отже,

$$|a(x, \mu_1) - a(x, \mu_2)| \leq 2nC(m+k)H\|g_1\|_\infty\rho_\infty(\mu_1, \mu_2).$$

Безпосередньо з означення функції $a(\cdot, \cdot)$ випливає, що виконані й інші припущення теореми 4.4.2.

4.5 Висновки

У даному розділі розглянуто граничні теореми про слабку та сильну збіжність розв'язків послідовності рівнянь що задають рух зліченної системи взаємодіючих частинок.

1. Доведено слабку збіжність послідовності мірозначних процесів що визначаються з рівнянь руху злічених систем взаємодіючих частинок до мірозначного процесу що визначається з рівняння Маккіна-Власова для випадку нескінченної сукупної маси частинок.

2. Доведено сильну збіжність розв'язків (тобто мірозначних процесів та траєкторій окремих частинок) рівняння руху зліченної системи взаємодіючих частинок до розв'язку рівняння Маккіна-Власова для випадку нескінченної сукупної маси частинок.

Основні результати даного розділу опубліковано в роботах [13], [19].

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню питання існування та єдиності розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, а також дослідженню граничної поведінки розв'язків таких систем.

У роботі доведено існування та єдиність сильного розв'язку нескінченної системи стохастичних диференціальних рівнянь з вимірним обмеженим коефіцієнтом переносу що задовольняє умову скінченності радіусу взаємодії та сталим коефіцієнтом дифузії. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку нескінченної системи стохастичних диференціальних рівнянь з неперервними обмеженими коефіцієнтами переносу та дифузії що задовольняють умову скінченності радіусу взаємодії. Отримано існування слабкого розв'язку для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь з неперервними обмеженими коефіцієнтами дифузії та переносу.

Рівняння Маккіна-Власова переписано таким чином, що воно має сенс і для випадку, коли початковий розподіл мас частинок є локально скінченною мірою. Доведено теорему існування та єдиності сильного розв'язку рівняння Маккіна-Власова для випадку, коли сукупна маса частинок є нескінченною.

Розглянуто послідовність нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь, в яких маса частинок прямує до нуля, а густота частинок зростає до нескінченності. Доведено збіжність траєкторій окремих частинок а також відповідних мірозначних процесів до розв'язку рівняння Маккіна-Власова для випадку нескінченної сукупної маси частинок.

Список використаних джерел

- [1] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. – Москва: Наука, 1977. – 352 с.
- [2] Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
- [3] Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман. // ДАН СССР. – 1947. – №58. – с. 961–964.
- [4] Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман. // УМЖ. – 1950. – №2. – с. 45–69.
- [5] Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – Киев, 1968. – 354 с.
- [6] Добрушин Р. Л. Уравнения Власова / Р. Л. Добрушин. // Функциональный анализ и его приложения. – 1979. – №2. – с. 48–58.
- [7] Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки / А. А. Дороговцев. – Киев, 2007. – 289 с. – (Институт математики НАН України).
- [8] Звонкин А. К. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос / А. К. Звонкин. // Матем. сб. – 1974. – 93(135). – №1. – с. 129–149.
- [9] Звонкин А. К. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений / А. К. Звонкин, Н. В. Крылов. – Труды школы-семинара по теории случайных процессов. – Вильнюс. – 1975. – с. 9–88.

- [10] Карликова М. П. О слабом решении уравнения для эволюционного потока со взаимодействием. / М. П. Карликова // Украинский математический журнал, 2005, т. 57, №7, 895-903.
- [11] Конаровський В. В. Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси. / В. В. Конаровський // Укр. мат. журн. - 2010. - 62, № 1. - С. 90 - 103.
- [12] Маловичко Т. В. Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием. / Т. В. Маловичко // Украинский математический журнал - 2009. - 61, № 3. - С. 384-390.
- [13] Пилипенко А. Ю. Гранична теорема для зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь / А. Ю. Пилипенко, М. В. Танцюра. // Український математичний журнал, 2016, т. 68, №10, с. 1380-1402.
- [14] Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов / А. В. Скороход., 1961. – 216 с.
- [15] Скороход А. В. Случайные линейные операторы // Киев: Наукова думка, 1978. 200 с.
- [16] Танцюра М. В. Аналог рівняння Маккіна-Власова як границя розв'язків зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією / М. В. Танцюра // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука: матеріали конференції. – 2016. – Т. 3. – с. 157-159.
- [17] Танцюра М. В. Гранична теорема для нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь / М. В. Танцюра // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – 2016. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. – с. 47.

- [18] Танцюра М. В. Про існування та єдиність сильного розв'язку рівняння що задає рух системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою / М. В. Танцюра // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – 2014. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. – с. 34.
- [19] Танцюра М. В. Про рівняння Маккіна-Власова з нескінченною масою / М. В. Танцюра // Доповіді Національної академії наук України. – 2016. – №8. – с. 19-25.
- [20] Танцюра М. В. Про рівняння руху зі взаємодією для системи частинок з нескінченною сукупною масою / М. В. Танцюра // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. – 2013. – с. 30.
- [21] Танцюра М. В. Про узагальнення рівняння Маккіна-Власова на системи частинок з нескінченною сукупною масою / М. В. Танцюра // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ. – 2012. – с. 25.
- [22] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
- [23] Alberverio S. Infinite systems of stochastic differential equations and some lattice models on compact riemannian manifolds / S. Alberverio, A. Y. Daletskii, Y. G. Kondrat'ev. // Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – 49. – №3. – pp. 360–372.
- [24] Bensoussan A. Equations aux derivees partielles stochastiques non lineaires / A. Bensoussan, R. Temam. // Israel J. Math. –1972. – 11. – pp. 95-121.

- [25] Bensoussan A. Equations stochastiques du type Navier-Stokes / A. Bensoussan, R. Temam. // J. Funct. Analysis. – 1973. – 13. – pp. 195-222.
- [26] Dai Pra P. An existence result for infinite-dimensional Brownian diffusions with non-regular and non-Markovian drift / P. Dai Pra, S. Roelly // Markov Process. Related fields. – 2004. – 10. – №1. – pp. 113-136.
- [27] Da Prato G. Strong uniqueness for stochastic evolution equations in Hilbert spaces perturbed by a bounded measurable drift / G. Da Prato, F. Flandoli, E. Priola, M. Rockner. // Ann. Probab. – 2013. – 41. – №5. – pp. 3306–3344.
- [28] Da Prato G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 454 p. – (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 44).
- [29] Daleckij J. L. Differential equations with partial derivatives and stochastic equations for generalized random processes / Ju. L. Daleckij. // Dokl. Acad. Nauk. SSSR. – 1966. – №166. – pp. 1035–38.
- [30] Dawson D. A. Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior / D. A. Dawson. // J. Statist. Phys. – 1983. – №31. – pp. 29-85.
- [31] Dawson, D. A. Measure-valued Markov processes. Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXI—1991, 1–260, Lecture Notes in Math., 1541, Springer, Berlin, 1993.
- [32] Dawson D. A. Stochastic evolution equations / D. A. Dawson. // Math. Biosci. – 1972. – 154. – №3-4. – pp. 187-316.
- [33] Dawson D. A. Stochastic evolution equations and related measures processes / D. A. Dawson. // J. Multivariate Anal. – 1975. – №5. – pp. 1-52.

- [34] Dawson D. A. Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions / D. A. Dawson, J. Gartner // *Stochastics*. – 1987. – №20. – pp. 247-308.
- [35] Dawson D. A. Large deviations, free energy functional and quasi-potential for a mean field model of interacting diffusions / D. A. Dawson, G. Gartner // *Memoirs of the American Mathematical Society*. – 1989. – 78. – №398. – 94 p.
- [36] Dobrushin R. L. Non-Equilibrium Dynamics of One-dimensional Infinite Particle Systems with a Hard-Core Interaction/ R. L. Dobrushin, J. Fritz // *Commun. math. Phys.* 55, 275–292 (1977).
- [37] Dorogovtsev A. A. Long-time behaviour of measure-valued processes correspondent to stochastic flows with interaction/ A. A. Dorogovtsev, M. P. Karlikova // *Theory of stochastic processes*. - 2003. - Vol. 9(25), №1-2. - P. 52-59.
- [38] Ethier S. N. Markov processes: characterization and convergence / S. N. Ethier, T. G. Kurtz., 2005. – (Wiley series in probability and mathematical statistics).
- [39] Gartner J. On the McKean-Vlasov limit for interacting diffusion / J. Gartner. // *Math Nachr.* – 1988. – 137 p.
- [40] Ito K. Stochastic integral / K. Ito. // *Proc. Imp. Acad. Tokyo*. – 1944. – 20. – pp. 519–524.
- [41] Ito K. On a stochastic integral equation / K. Ito. // *Proc. Japan Acad.* – 1946. – 22. – pp. 32–35.
- [42] Ito K. Stochastic differential equations in a differentiable manifold / K. Ito // *Nagoya Math. J.* – 1950. – 1. – pp. 35–47.

- [43] Ito K. On stochastic differential equations / K. Ito // Mem. Amer. Math. Soc. – 1951. – No. 4. – 51 pp.
- [44] Ito K. On a formula concerning stochastic differentials / K. Ito // Nagoya Math. J. – 1951. – 3. – pp. 55–65.
- [45] Kac M. Foundations of kinetic theory / M. Kac. // Proc. Third Berkeley Symp. on Math Stat. and Prob. – 1956. – №3. – pp. 171–197.
- [46] Kac M. Probability and related topics in the physical sciences / M. Kac. – New York: Interscience, 1958.
- [47] Kotelenetz P. A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean-Vlasov type with mass conservation / P. Kotelenetz. // Probab. Theory Related Fields. – 1995. – №2. – pp. 159–188.
- [48] Krylov N. V. Stochastic evolution equations / N. V. Krylov, B. L. Rozovskii. // J. Sov. Math. – 1981. – №16. – pp. 1233–277.
- [49] Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations / H. Kunita. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [50] McKean H. P. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations / H. P. McKean. // Proc. N.A.S. – 1966. – №56. – pp. 1907–1911.
- [51] McKean H. P. Fluctuations in the kinetic theory of gases / H. P. McKean. // Comm. Pure Appl. Math. – 1975. – №28. – pp. 435–455.
- [52] McKean H. P. Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations / H. P. McKean. – New York: Van Nostrand, Reinhold Co., 1969. – (Lecture Series in Differential equations; 2).
- [53] Mikosch T. Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process. // T. Mikosch, Springer, 2009, 241p.

- [54] Nagasawa M. Diffusion with interactions and collisions between coloured particles and the propagation of chaos / M. Nagasawa, H. Tanaka. // Probab. Theory related fields. – 1987. – №74. – pp. 161–198.
- [55] Pardoux E. Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes / E. Pardoux. // Stochastics. – 1979. – №3. – pp. 127–67.
- [56] Pilipenko A. On the strong existence and uniqueness to an SDE that describes countable interacting particle system / A. Pilipenko, M. Tantsiura // International conference "Probability, reliability and stochastic optimization". 7-10 April, 2015, Kyiv, Ukraine. P. 79.
- [57] Pilipenko A. Yu. Measure-valued diffusions and continual systems of interacting particles in a random medium / A. Yu. Pilipenko. // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – 57. – №9. – pp. 1507–1521.
- [58] Pilipenko A. On the strong existence and uniqueness to a countable systems of SDEs with measurable drift / A. Pilipenko, M. Tantsiura. // Theory of Stochastic processes. – 2014. – 19(35). – pp. 53–63.
- [59] Skorokhod A. V. Infinite systems of randomly interacting particles / A. V. Skorokhod. // Random Oper. Stochastic Equations. – 1993. – №1. – pp. 1–13.
- [60] Skorokhod A. V. Measure-valued diffusion / A. V. Skorokhod. // Ukrainian Mathematical Journal. – 1997. – 49. – №3. – pp. 458–464.
- [61] Skorokhod A. V. On infinite systems of stochastic differential equations / A. V. Skorokhod. // Methods of functional analysis and topology. – 1999. – Vol. 5. – №4. – pp. 54–61.
- [62] Stroock D. W. Diffusion processes with continuous coefficients / D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. // Comm. Pure Appl. Math. – 1969. – №22. – pp. 345–400, 479–530.

- [63] Sznitman A. S. Topics in propagation of chaos / A. S. Sznitman. // Ecole d'ete de probabilites de Saint-Flour XIX. – Springer Berlin Heidelberg. – 1991. – pp. 165-251.
- [64] Tanaka H. Limit theorems for certain diffusion processes with interaction / H. Tanaka // Taniguchi Symp. SA Katata / H. Tanaka., 1982. – pp. 469–488.
- [65] Tanaka H. Propagation of chaos for certain Markov processes of jump type with nonlinear generators / H. Tanaka. // Proc. Japan Acad.. – 1969. – №45.
- [66] Tantsiura M. A limit theorem for infinite systems of stochastic differential equations / M. Tantsiura // International conference "Stochastic processes in abstract spaces". 14-16 October 2015, Kyiv, Ukraine. P. 66.
- [67] Tantsiura M. On strong solutions to countable systems of SDEs with interaction and non-Lipschitz drift / M. Tantsiura. // Theory of Stochastic processes. – 2016. – 21(37). – no. 1. – pp. 91-101.
- [68] Tantsiura M. On the generalization of the McKean-Vlasov equation to the case where the total mass of particles is infinite / M. Tantsiura. // Theory of Stochastic Processes. – 2012. – 18 (34). – no. 1. – pp. 119–127.
- [69] Veretennikov A. Y. On strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations / A. Yu. Veretennikov. // Mat. Sb.. – 1980. – Vol. 111(153). – №3. – pp. 434–452.
- [70] Viot M. Solution en lois d'une equationaux derivees partielles non lineaire: Methodes de compacite / M. Viot. // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. – 1974. – №278.

- [71] Viot M. Solution en lois d'une equationaux derivees partielles non lineaire: methode de monotonie / M. Viot. // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. – 1974. – №278.
- [72] Viot M. Solution faibles d'equations aux derivees partielles non lineaires / M. Viot. – Paris, 1974. – (Universite Pierre et Marie Curie).
- [73] Yamada T. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations / T. Yamada, S. Watanabe. // J. Math. Kyoto Univ.. – 1971. – №11. – C. 155–167.