НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кузнецов Василь Олексійович

УДК 519.21

Геометричні властивості стохастичних потоків

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Дороговцев Андрій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Іванов Олександр Володимирович,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»,
професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей
фізико-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
Кукуш Олександр Георгійович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри математичного аналізу
механіко-математичного факультету.

Захист відбудеться "11"квітня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "9"березня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г. П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Значну роль у теорії динамічних систем грає поняття фазового потоку, що породжений векторним полем (див., зокрема, монографії Ж. Паліс, В. Дімелу[1], В. Арнольда і Б. Хесіна[2]). Дослідження стохастичних динамічних систем призводить до близького поняття стохастичного потоку, що являє собою сім'ю узгоджених випадкових відображень. Важливим прикладом стохастичного потоку є потік розв'язків стохастичного диференційного рівняння, див. монографію Х. Куніта[3].

У зв'язку із задачами статистичної фізики у теорії випадкових процесів розпочалося дослідження систем взаємодіючих частинок. Одними з перших робіт за даною тематикою були роботи Ф. Спіцера[4] і Р. Добрушина[5].

У роботі Т. Харріса[6] стохастичні потоки з'явилися як слабкі границі процесів випадкового перемішування в $\mathbb{R}^d$.

Розвиток теорії стохастичних потоків було частково стимульовано дослідженнями турбулентного руху рідини. Застосування апарату теорії ймовірностей у вивченні цих питань було розпочато у роботі А. Колмогорова[7], у якій було запропоновано описувати поняття швидкості, тиску, температури тощо у потоці рідини як випадкові поля. Досить численні теоретичні результати у теорії турбулентності з'являються за допомогою аналізу спрощених моделей[8]. Одною з таких спрощених моделей є ансамбль швидкостей Крайчнана, що

---

[1] Палис Ж., Димелу В. Геометрическая теория динамических систем. — М.: Мир, 1986. — 301 с.

[2] Арнольд В., Хесин Б. Топологические методы в гидродинамике.— М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.

[3] Kunita H. Stochastic flows and stochastic differential equations. — Cambridge: Univ. Press, 1997. — 346 p.

[4] Spitzer F. Interaction of Markov processes // Advances in mathematics. — 1970. — **5**, 2. — Pp. 246–290.

[5] Добрушин Р. Л. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент— существование предельного процесса и его эргодичность // Пробл. передачи информ. — 1971. — **7**, 2. — С. 70–87.

[6] Harris T. E. Brownian motions on the homeomorphisms of the plane // Ann. Probab. — 1981. — **9**, 2. — Pp. 232–254.

[7] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. — 1941. — **30**, 4. — С. 299–303.

[8] Falkovich G., Gawędzki K., Vergassola M. Particles and fields in fluid turbulence // Rev. Mod. Phys. — 2001. — **73**, 4. — Pp. 913–975.

отримується за допомогою перемасштабування зі швидкостей у турбулентному потоці. Ансамбль Крайчнана добре описує поведінку рідини на великих проміжках часу і застосовується для дослідження багаточастинкових рухів[8]. У математичній літературі поняттю ансамблю Крайчнана відповідає броунівський стохастичний потік. Найбільш простою моделлю турбулентності є ізотропна турбулентність, у якій розподіл швидкостей рідини інваріантний відносно паралельних перенесень, поворотів і відбиттів. Перемасштабовані турбулентні потоки призводять до поняття броунівських стохастичних потоків, які вивчалися у роботах Ле Жана[9], П. Баксендаля[10], К. Зірбеля і В. Войчинського [11], [12]. Основною задачею теорії турбулентності є пояснення явища переміжності[13]. Це явище, яке характеризується тим, що основний внесок у середнє значення випадкового поля вносять рідкі області з високою інтенсивністю, обговорюється в огляді Я. Зельдовича, С. Молчанова та ін.[14]. У цій роботі стохастичні потоки з'являються як модель випадкового середовища.

У зв'язку із задачами магнітної гідродинаміки у книзі В. Арнольда і Б. Хесіна[15] розглядалася задача про мінімізацію енергії векторного поля в області під дією дифеоморфізмів, що зберігають об'єм. Згідно з цією роботою спіральність $H(\xi)$ векторного поля ξ обмежує знизу його енергію $E(\xi)$:

$$E(\xi) \geq C|H(\xi)|$$

для деякої сталої C, що залежить від області M. У цитованій книзі показано, що спіральність характеризує зачеплення траєкторій фазового потоку векторного поля. Так, для майже всіх пар точок $x_1, x_2 \in$

---

[9] Le Jan Y. On isotropic Brownian motions // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. — 1985. —**70**, 1. — Pp. 609–620.

[10] Baxendale P. H. The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms // Lyapunov Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1186. — Springer, New York, 1986. — Pp. 322–337.

[11] Zirbel C. L. Mean occupation times of continuous one-dimensional Markov processes // Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **69**, 2. — Pp. 161–178.

[12] Zirbel C. L., Woyczyński W. A. Rotation of particles in polarized Brownian flows // Stochastics and Dynamics. — 2002. — **2**, 1. — Pp. 109–129.

[13] Falkovich G., Gawędzki K., Vergassola M. Particles and fields in fluid turbulence // Rev. Mod. Phys. — 2001. — **73**, 4. — Pp. 913–975.

[14] Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. — 1987. — 152. — С. 3–32.

[15] Арнольд В., Хесин Б. Топологические методы в гидродинамике.— М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.

M має місце співвідношення

$$\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{lk_\xi(T_1,T_2)}{T_1T_2}=H(\xi),$$

де $lk_\xi(T_1,T_2)$ — число зачеплення відрізків траєкторій на інтервалах часу $[0,T_1]$ і $[0,T_2]$ фазового потоку поля ξ. Отже, з'являється можливість робити висновки про фізичні характеристики системи (такі, як енергія). У зв'язку з цим інтерес являє дослідження коефіцієнта зачеплення траєкторій у стохастичних потоках.

Двоточкові рухи у броунівських стохастичних потоках вивчалися, зокрема, у роботах Ле Жана[16], П. Баксендаля[17], К. Зірбеля[18]. Характер цих двоточкових рухів залежить від показників Ляпунова досліджуваного потоку. Одною з характеристик двоточкових рухів є взаємні кути обходу частинок. Деякі результати про кути обходу в стохастичих потоках отримані К. Зірбелем і В. Войчинським[19]. Кути обходу траєкторій двовимірних випадкових процесів досліджувалися також поза контекстом стохастичних потоків. Такі дослідження проводилися, починаючи з роботи Ф. Спіцера[20]. Досліджувалися також кути обходу на поверхнях[21]. Роботи Ж. Франкі[22] [23] присвячені асимптотичній поведінці обертання тривимірного броунівського руху навколо вузлів.

Багаточастинковий рух і, більш широко, дисперсія маси, що переноситься броунівським потоком, розглядалися у роботах К. Зірбе-

[16]Le Jan Y. On isotropic Brownian motions // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. — 1985. — **70**, 1. — Pp 609–620.

[17]Baxendale P. H. The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms // Lyapunov Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1186. — Springer, New York, 1986. — Pp. 322–337.

[18]Zirbel C. L. Mean occupation times of continuous one-dimensional Markov processes // Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **69**, 2. — Pp. 161–178.

[19]Zirbel C. L., Woyczyński W. A. Rotation of particles in polarized Brownian flows // Stochastics and Dynamics. — 2002. — **2**, 1. — Pp. 109–129.

[20]F. Spitzer. Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — **87**, 1. — Pp. 187–197.

[21]Manabe S. Stochastic intersection number and homological behaviors of diffusion processes on Riemannian manifolds // Osaka journal of mathematics. — 1982. — **19**, 2. — Pp. 429–457.

[22]Franchi J. Asymptotic singular homology of a complete hyperbolic 3-manifold of finite volume // Proc. London Math. Soc. — 1999. — **79**, 2. — Pp. 451–480.

[23]Franchi J. Asymptotic windings over the trefoil knot // Rev. Mat. Iberoamericana. — 2005. — **21**, 3. — Pp. 729–770.

ля[24], К. Зірбеля і Є. Цинлара[25]. Ці питання пов'язані з моделюванням турбулентної дифузії, тобто, пасивного руху частинок (наприклад, частинок домішок) у рідині під дією турбулентного потоку. Подібні задачі розглядалися у монографії А. Моніна і І. Яглома[26], а також у роботі Г. Кестена і Г. Папаніколау[27]. Характерною рисою турбулентного руху є хаотичне перемішування, що призводить до того, що навіть маленька крапля швидко деформується потоком і через деякий час виявляється розподіленою у великому об'ємі рідини. Для дослідження аналогічних властивостей у броунівському потоці декількома авторами розглядалася еволюція області під дією потоку. У роботах М. Кранстона і Ле Жана[28], Г. Дімітрова і М. Шойцова[29] вивчалася зміна головних кривин гіперповерхні і еволюція об'єму під дією ізотропного броунівського потоку.

Вивчення багаточастинкового руху в потоці рідини може бути використано для виявлення властивостей потоку на основі спостереженя траєкторій частинок, що поміщені у рідину. Так, метод пасивних маркерів застосовується при дослідженні океанічних течій[30]. У роботі Жан-Люка Тіффо[31] запропоновані оцінки ентропії потоку на основі аналізу кіс, породжених траєкторіями маркерів. Ці роботи мотивують дослідження властивостей кіс, утворених траєкторіями у потоці.

Розглянуті результати відносяться, в основному, до дослідження гладких стохастичних потоків. У той же час, починаючи з робіт

---

[24]Zirbel C. L. Translation and dispersion of mass by isotropic Brownian flows// Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **70**, 1. — Pp. 1–29.

[25]Zirbel C. L., Cinlar E. Mass transport by Brownian flows // Stochastic Models in Geosystems (series The IMA Volumes in Mathematics and its Applications). — 1997. — **85**. — Pp. 459–492.

[26]Монин А. С., Яглом И. М. Статистическая гидромеханика: В 2-х ч. — М.: Наука, 1967. — Часть 2. — 720 с.

[27]Kesten H., Papanicolaou G. A limit theorem for turbulent diffusion // Commun. Math. Phys. — 1979. — Vol. 65, no. 2. — Pp. 97–128.

[28]Cranston M., Le Jan Y. Geometric evolution under isotropic stochastic flow // Electronic Journal of Probability. — 1998. — **3**. — Pp. 1–36.

[29]Dimitroff G., Scheutzow M. Dispersion of volume under the action of isotropic Brownian flows // Stochastic Processes and their Applications. — 2009. — **119**, 2. — Pp. 588–601.

[30]Stevens I. G, Stevens D. P. Passive tracers in a general circulation model of the Southern Ocean // Ann. Geophysicae 17. — 1999. — **17**, 7. — Pp. 971–982.

[31]Jean-Luc Thiffeault. Braids of entangled particle trajectories // Chaos. — 2010. — 20, 017516.

М. Дарлінга[32], Р. Арратья[33], активно досліджувалися і негладкі потоки, зокрема, потоки зі склеюванням. У роботі А. Дороговцева[34] отримано представлення Кларка, у статті А. Дороговцева і Є. Остапенко[35] отримано принцип великих відхилень для потоку Арратья. У роботі А. Дороговцева, А. Гнедіна і М. Вовчанського[36] отримана асимптотика кластерів у потоці Арратья при $t \to 0$. Потоки зі склеюванням, у яких швидкість дифузії залежить від маси частинок, вивчалися у роботі В. Конаровського[37]

Узагальненням потоку Арратья є клас одновимірних потоків Харріса. Такі потоки вивчалися, починаючи з роботи Т. Харріса[38], де були наведені умови їх належності до одного з класів: гладкі потоки або потоки зі склеюванням, у яких образом $\mathbb{R}$ у будь-який момент часу $t > 0$ є злічувана множина без граничних точок.

Важливий клас питань стосується наближення потоку Арратья за допомогою гладких потоків. Так, часто негладкі стохастичні потоки виникають як границі гладких потоків. Відповідні результати для збіжності до потоку Арратья були отримані, зокрема, у роботах А. Дороговцева[39], Т. Маловічко[40]. У зв'язку з цими результатами виникає також питання про швидкість апроксимації потоку Арратья дограничними потоками. У роботі А. Дороговцева і В. Фомічова[41] было отримано оцінки на відхилення потоку Харріса від потоку Ар-

[32] Darling R. W. R. Constructing nonhomeomorphic stochastic flows. 1986.

[33] Arratia R. A. Coalescing Brownian motions on the line, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1979.

[34] Dorogovtsev A. A. One version of the Clark representation theorem for Arratia flow // Theory of Stochastic Processes. — 2005. — **11(27)**, 3–4. — Pp. 63–70.

[35] Dorogovtsev A. A., Ostapenko O. V. Large deviations for flows of interacting Brownian motions // Stochastics and Dynamics. — 2010. — **10**, 3. — Pp. 315–339. https://http://arxiv.org/abs/0907.3207v1

[36] Dorogovtsev A. A., Gnedin A. V., Vovchanskii M. B. Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow // Theory of Stochastic Processes. — 2012. — **18**, 2. — Pp. 1–7.

[37] Конаровський В. В. Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, 1. — С. 90 – 103.

[38] Harris T. E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}^1$ // Stochastic Processes and their Applications. — 1984. — **17**, 2. — Pp. 187–210.

[39] Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow // Theory of Stochastic Processes. — 2004. — **10(26)**, 3-4. — Pp. 21–25.

[40] Маловичко Т.В. О сходимости решений стохастических дифференциальных уравнений к потоку Арратья // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, 11. — С. 1529–1538.

[41] Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V. The rate of weak convergence for n-point motions of Harris flows // Dynamic Systems & Applications. — 2016. — Vol. 25.

ратья. У роботі І. Ніщенко[42] побудовано клас дискретних апроксимацій потоку Арратья. Такі апроксимації можуть мати властивості, що відсутні у граничному потоці. Так, зокрема, у потоці Арратья частинки зберігають порядок, а у дискретних наближеннях цього потоку вони можуть проводити деякий час у зворотньому порядку. У статті Є. Глиняної[43] отримано оцінки на швидкість спадання до нуля часу, який дві частинки дограничного потоку проводять у зворотньому порядку.

У роботах А. Пилипенка[44] [45] вивчалися стохастичні потоки з відбиттям. Таким потокам присвячена монографія[46].

У роботах А. Дороговцева і П. Котеленця[47] [48] [49] досліджувалися стохастичні потоки зі взаємодією. Рух окремої частинки у таких потоках залежить і від руху усієї сукупності частинок. Цьому типу потоків присвячена монографія А. Дороговцева[50]. У роботі Т. Маловічко[51] було отримано аналог теореми Гірсанова для стохастичних потоків зі взаємодією.

Наведені результати мотивують дослідження геометричних характеристик траєкторій у броунівських стохастичних потоках, а також суміжних питань стохастичної геометрії: геометричних характеристик випадкових полів, кутів обходу двовимірних випадкових про-

---

[42] Nishchenko I. I. Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory of Stochastic Processes. — 2011. — **17(33)**, 1. — Pp. 70–78.

[43] Glinyanaya E. V. Asymptotics of disordering in the discrete approximation of an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes. — 2012. — **18 (34)**, 2. — Pp. 8–14.

[44] Pilipenko A. Yu. Flows generated by stochastic equations with reflection // Random Oper. and Stoch. Equ. — 2004. — **12**, 4. — Pp. 389–396.

[45] Pilipenko A. Yu. Functional central limit theorem for flows generated by stochastic equations with reflection // Nonlinear Oscillations. — 2006. — **9**, 1. — Pp. 85–97.

[46] Pilipenko A. Yu. An introduction to stochastic differential equations with reflection. — Potsdam: Universitätsverlag, 2014. — 75 p.

[47] Dorogovtsev A. A., Kotelenez P. Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic partial differential equations: 1. Finite Mass. — Preprint No. 97-145 Dept. of Mathematics CWRU, Cleveland: Ohio, 1997. — 19 p.

[48] Kotelenez P. A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean-Vlasov type with mass conservation // Probab. Theory Related Fields. — 1995. — **102**, 2. — Pp. 159–188.

[49] Dorogovtsev A. A. Stochastic flows with interaction and measure-valued processes // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2003. — **2003**, 63. — Pp. 3963–3977.

[50] Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 290 с.

[51] Маловичко Т. В. Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, 3. — С. 384–390.

цесів. У даній роботі розглядалася поведінка кутів обходу частинок у стохастичному потоці, досліджувалися інваріанти кіс, утворених траєкторіями стохастичних потоків. У зв'язку з тим, що властивості випадкового поля, що керує броунівським стохастичним потоком, визначають поведінку цього потоку, розглядалася задача про число обертань двовимірного випадкового поля вздовж плоского контура. Досліджувалася можливість отримання принципу великих відхилень для кута обходу броунівського руху навколо початку координат.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Работу виконано в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів у рамках держбюджетної теми "Аналіз складних систем", державний реєстраційний номер 0111U001002. Також частина роботи виконана у рамках спільного наукового проекту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень "Геометричні аспекти теорії нескінченновимірних динамічних систем", державний реєстраційний номер 0114U002965.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є вивчення геометричних властивостей випадкових полів і стохастичних потоків. Ця мета включає у себе такі задачі:

- дослідження розподілу індекса обертання випадкового поля вздовж кривої;
- дослідження взаємних кутів обходу частинок у броунівських стохастичних потоках;
- дослідження кіс, утворених траєкторіями випадкових процесів.

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є двовимірні випадкові векторні поля, броунівські стохастичні потоки. Предметом дослідження є геометричні властивості зазначених об'єктів: кути обходу траєкторій випадкових процесів, обертання випадкового поля, інваріанти Васильєва випадкових кіс.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу, топології.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну роботи, такі:

- отримано вираз для першого і другого моментів індекса обертання випадкового поля на площині вздовж замкненої кривої у термінах умовної щільності двоточкових розподілів поля;

- для ізотропного гауссівського випадкового поля перший і другий моменти індекса обертання знайдені у термінах коваріаційної функції компонент поля;

- встановлено представлення інваріантів Васильєва для кіс, утворених неперервними семимартингалами відносно спільної фільтрації, у вигляді кратних інтегралів Стратоновича;

- охарактеризовано сумісний асимптотичний розподіл взаємних кутів обходу у броунівському стохастичному потоці при $t \to \infty$;

- отримано слабкий принцип великих відхилень для кута обходу двовимірного броунівського руху навколо початку координат, встановлено відсутність повного принципу великих відхилень.

Практична значимість отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальше застосування у різних розділах теорії випадкових процесів і стохастичній геометрії.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач, вибір напрямків і методів дослідження і загальне керівництво роботою належать науковому керівнику здобувача доктору фізико-математичних наук, професору А. А. Дороговцеву. Усі результати, представлені у дисертаційній роботі, отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на таких конференціях і наукових семінарах:

- Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу" (Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня 2013 р.);

- 20 Міжнародній молодіжній конференції молодих учених "Ломоносов-2013" (Москва, 8 – 13 квітня 2013 р.);

- 11 Міжнародній Вільнюській конференції з теорії ймовірностей і математичної статистики (Вільнюс, Литва, 30 червня – 4 липня 2014 р.);

- науковій конференції пам'яті Ю. В. Лінніка "Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics" (Санкт-Петербург, 14 – 18 вересня 2015 р.);
- міжнародній конференції "Stochastic processess in abstract spaces" (Київ, 14 – 16 жовтня 2015 р.);
- науковому семінарі "Числення Маллявена і його застосування" Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора А. А. Дороговцева;
- науковому семінарі відділу топології Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, члена-кореспондента Національної академії наук України В. В. Шарка;
- науковому семінарі "Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів"при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора О. І. Клесова та доктора фіз.-мат. наук, професора О. В. Іванова.

Публікації. Результати дисертації опубліковані у п'яти статтях і п'яти збірках тез конференцій, три з яких є міжнародними.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів і висновків, а також списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи — 135 сторінок.

Основний зміст дисертації

У **першому розділі** дисертаційної роботи розглядаються геометричні властивості випадкових полів на площині. У §1.1 обговорюються особливі точки векторних полів. Наводиться означення індекса особливої точки, теорема Пуанкаре про індекс.

У §1.2 розглядається розподіл особливих точок випадкових полів. Наводиться теорема[52], що дозволяє знаходити математичне сподівання кількості точок t випадкового векторного поля f, таких, що $f(t) = u$, які лежать усередині даної області і задовольняють деяку

[52] Adler R. J., Taylor J. E. Random fields and geometry. —New York: Springer, 2007. — 448 p.

додаткову умову. Ця теорема є базою для подальших міркувань у розділі 1.

У §1.3 результати, наведені у §1.2, застосовуються для знаходження математичного сподівання і дисперсії кількості обертань випадкового поля вздовж плоскої кривої Γ. Доведено таку теорему, що є аналогом формули Райса для математичного сподівання кількості перетинів рівня знизу вверх випадковим полем.

Теорема 1.3.1. *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *— випадкове векторне поле на* $\mathbb{R}^2$*, і нехай* Γ *— фіксована кусково-гладка проста (тобто така, що не має самоперетинів) замкнена крива в* $\mathbb{R}^2$*, що обмежує деяку область* T*. Припустимо, що поле* f *задовольняє умови а)-д):*

а) f, $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$ *— неперервні на* T *з імовірністю 1 і мають обмежені моменти порядку* 4 *на* T*;*

б) для всіх $t \in T$ *щільність розподілу* $p_{f(t)}(x)$ *випадкового вектора* $f(t)$ *є неперервною в точці* $x = 0$*;*

б') для всіх $\tilde{t} \in \tilde{T} = \{(t^1, t^2) \in T^2 : t^1 \neq t^2\}$ *щільність розподілу* $p_{\tilde{f}(\tilde{t})}(x_1, x_2)$ *випадкового вектора* $\tilde{f}(\tilde{t}) = (f(t^1), f(t^2))$ *є неперервною в точці* $(x_1, x_2) = (0, 0)$*;*

в) для всіх $t \in T$ *умовна щільність розподілу* $p_t(x \mid \nabla f(t))$ *випадкового вектора* $f(t)$ *за умови* $\nabla f(t)$ *існує, обмежена і є неперервною в точці* $x = 0$*;*

в') для всіх $\tilde{t} \in \tilde{T}$ *умовна щільність розподілу* $p_{\tilde{t}}(\tilde{x} \mid \nabla \tilde{f}(\tilde{t}))$ *випадкового вектора* $\tilde{f}(\tilde{t})$ *за умови* $\nabla \tilde{f}(\tilde{t})$ *існує, обмежена і неперервна в* $\tilde{x} = (0, 0)$*;*

г) для всіх $t \in T$ *умовна щільність розподілу* $p_t(z \mid f(t) = x)$ *випадкової матриці* $\nabla f(t)$ *за умови* $f(t) = x$ *є неперервною за* z *і* x*;*

г') для всіх $\tilde{t} \in \tilde{T}$ *умовна щільність розподілу* $p_{\tilde{t}}(z \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = \tilde{x})$ *випадкової матриці* $\nabla \tilde{f}(\tilde{t})$ *за умови* $\tilde{f}(\tilde{t}) = \tilde{x}$ *неперервна за* z *і* $\tilde{x}$*;*

д) при кожному $\varepsilon > 0$ *модуль неперервності на* T *кожної компоненти* f, ∇f *задовольняє асимптотичнне співвідношення*

$$\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^4)$$

при $\eta \downarrow 0$.

Нехай $\operatorname{ind}_\Gamma f$ *— індекс кривої* Γ *відносно поля* f*. Тоді виконується* *таке співвідношення:*

$$\mathbb{E}(\mathrm{ind}_\Gamma f) = \int\limits_T \mathbb{E}\{\det \nabla f(t) \mid f(t) = 0\} p_t(0) dt,$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{ind}_\Gamma f)^2 =$$
$$= \int\limits_{T^2} \mathbb{E}\{\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0\} p_{(t^1,t^2)}(0) dt^1 dt^2 +$$
$$+ \int\limits_T \mathbb{E}\{|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0\} p_t(0) dt,$$

де $p_t(0)$ *— щільність розподілу* $f(t)$ *у точці* 0*, а* $p_{(t^1,t^2)}(0)$ *— щільність розподілу поля* $\tilde{f}(t^1,t^2) = (f(t^1), f(t^2))$ *у точці* 0*.*

У §1.4 теорема 1.3.1 застосовується до часткового випадку двовимірного гауссівського центрованого випадкового векторного поля з коваріаційною функцією компонент

$$b_{kl}(z) = \delta_{kl} b_N(\|z\|).$$

Це випадкове поле є найпростішим прикладом однорідного ізотропного гауссівського поля.

Теорема 1.4.1. *Нехай* f *— центроване гауссівське ізотропне векторне поле на* $\mathbb{R}^2$ *з коваріаційною функцією компонент* $b_{kl}(z) = \delta_{kl} b_N(\|z\|)$*, де* $b_N : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *має вид*

$$b_N(r) = \int\limits_0^\infty J_0(r\alpha) \Phi(d\alpha),$$

Φ *— скінченна міра на* $[0, \infty)$ *зі скінченним четвертим моментом, і* $\Phi \neq c\delta_0$*, тобто* Φ *не зосереджена у точці* $\{0\}$*. Тоді дисперсія кількості обертань* f *вздовж замкненої кусково-гладкої кривої* Γ*,* *що обмежує відкриту область T, дорівнює*

$$\mathbb{E}(\mathrm{ind}_\Gamma f)^2 = $$
$$= \int\limits_{T^2} \frac{2}{\|t^1-t^2\|} \left\{ \frac{b_N(\|t^1-t^2\|)b_N'(\|t^1-t^2\|)^3}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1-t^2\|)^2} + \right.$$
$$\left. + \quad b_N'(\|t^1-t^2\|)b_N''(\|t^1-t^2\|) \right\} p_{(t^1,t^2)}(0)dt^1dt^2 - b_N''(0)p(0)S(T),$$

де $S(T)$ — площа T.
Тут

$$p_{(t^1,t^2)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^2(b_N(0)^2 - b_N(\|t^1-t^2\|)^2)},$$

і $p_t(0) = p(0) \equiv \frac{1}{2\pi b_N(0)^2}$ для довільного $t \in T$.

Другий розділ дисертації присвячено інваріантам Васильєва для випадкових кіс. У §2.1 наведено основні факти про інваріанти Васильєва для гладких кіс і визначено інтеграли Концевича для кіс[52].

У §2.2 розглядаються інваріанти Васильєва неперервних кіс, що не обов'язково є гладкими чи кусково-гладкими. Так, траєкторії неперервних семимартингалів у типовому випадку не є гладкими, і для них формули Концевича не можна застосовувати безпосередньо. Для знаходження значення інваріанта Васильєва на неперервній косі ми застосовуємо наближення цієї коси за допомогою вписаних ламаних.

Теорема 2.2.1. *Будь-який інваріант Васильєва для неперервної коси Z є границею відповідних інваріантів для послідовності вписаних у неї кіс Z^{τ_l}, якщо дрібності розбиттів τ_l прямують до 0.*

Для оцінки інтеграла Концевича для вписаної ламаної ми робимо таким чином. Розглянемо косу Z, утворену неперервними кривими

$$Z_k(t), t \in [0,T], k = 1, \ldots, n,$$

і послідовність розбиттів $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T\}$ інтервала $[0,T]$ с $|\tau| \to 0$. Нехай $L(t)$—деякий інваріант порядку m для

[52]Mitchell A. Berger. Topological invariants in braid theory // Lett. Math. Phys. — 2001. — **55**, 3. — Pp. 181–192.

коси $Z(s), 0 \le s \le t$, утвореної кривими $Z_k(s), 0 \le s \le t$, $\lambda = \lambda_{kl}$ для деяких $k \ne l$. Розглянемо вписані у криві Z_k ламані Z_k^τ з вершинами $Z_k(t_0), \dots, Z_k(t_p)$, і нехай Z_τ — коса, утворена цими ламаними. Позначимо через $L_\tau(t)$ значення досліджуваного інваріанта на косі $Z_\tau(s), 0 \le s \le t$, і нехай $\lambda_\tau(t)$—відповідна $\lambda(t)$ функція для цієї ламаної. Зауважимо, що λ_τ є кусково-гладкою функцією. У цій ситуації має місце таке твердження.

Теорема 2.2.2. *Якщо при кожному k суми $\sum\limits_{i=0}^{p-1} |Z_k(t_{i+1}) - Z_k(t_i)|^2$ обмежені за τ, то має місце збіжність*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{L(t_i) + L(t_{i+1})}{2} (\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)) - \int\limits_0^T L_\tau(t) d\lambda_\tau(t) \xrightarrow[|\tau| \to 0]{} 0. \qquad (1)$$

Цей результат застосовується у наступному розділі для заходження інтегрального представлення інваріантів Васильєва кіс, що складені з неперервних семимартингалів.

У §2.4 ми доводимо основний результат про інтеграли Концевича для випадкових кіс.

Теорема 2.3.1. *Для неперервних семимартингалів $Z_k(t), t \in [0, T]$, $k = 1, \dots, n$ відносно спільної фільтрації $(\mathfrak{F}_t), t \in [0, T]$, таких, що з імовірністю одиниця*

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall k \ne l \quad Z_k(t) \ne Z_l(t),$$

інтеграли Концевича обчислюються як відповідні кратні інтеграли Стратоновича.

Приклад. *Прикладом інваріанта другого порядку є такий інваріант для гладкої коси з трьох ниток $(Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t)), t \in [0, T]$:*

$$\Psi_{123} = \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s) d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s) d\lambda_{12}(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^T (\lambda_{13}(s) d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s) d\lambda_{13}(s)) + \frac{1}{2} \int\limits_0^T (\lambda_{23}(s) d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s) d\lambda_{23}(s)),$$

де $\lambda_{kl}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^t \frac{dZ_k(t') - dZ_l(t')}{Z_k(t') - Z_l(t')}$. *Для кіс із неперервних семимартингалів цей інваріант тепер записується у вигляді*

$$\Psi_{123} = \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s) \circ d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s) \circ d\lambda_{12}(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^T (\lambda_{13}(s) \circ d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s) \circ \lambda_{13}(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^T (\lambda_{23}(s) \circ d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s) \circ d\lambda_{23}(s)).$$

Третій розділ дисертації присвячено поведінці найпростіших інваріантів Васильєва — кутів обходу — для кіс, утворених траєкторіями частинок у ізотропних броунівських потоках.

У §3.1 наведено необхідні відомості про броунівські потоки. У §3.2 ми отримуємо аналог закону Спіцера для броунівських потоків. Нехай F — броунівський стохастичний потік, $a, b \in \mathbb{R}^2, a \neq b$. Розглянемо траєкторії потоку $F_t(a), F_t(b)$, що виходять із точок a і b. Якщо ототожнити $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{C}$, можна написати

$$F_t(b) - F_t(a) = R_{ab}(t) e^{i\Phi_{ab}(t)} \frac{F_0(b) - F_0(a)}{\|F_0(b) - F_0(a)\|},$$

де $R_{ab}(t) = \|F_t(b) - F_t(a)\|$, $\Phi_{ab}(t)$ — неперервна версія кута обходу траєкторії $F(b)$ навколо $F(a)$.

Теорема 3.2.1. *Нехай F — однорідний ізотропний броунівський стохастичний потік, що заданий стохастичним диференціальним рівнянням у сенсі Х. Куніта*

$$dF_t(x) = U(F_t(x), dt),$$

$x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$, *де* $U = U(x,t)$ *— центроване гауссівське випадкове векторне поле,*

$$\mathbb{E}\, U_k(x,t) U_l(y,s) = b_{kl}(x-y) t \wedge s,$$

а матриця b *має вигляд* $b(z) = (b_{kl}(z)) = (\delta_{kl} b_L(\|z\|)), 1 \le k, l \le 2$, $b_L\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — *деяка функція, що задовольняє умови*

- $b_0 = b_L(0) = 1$;
- $b_L(r) < 1$ *при* $r > 0$;
- $b_L \in C^{(4)}([0,+\infty))$;
- $b_L(r) \to 0 (r \to \infty)$;
- $\int\limits_0^\infty r|b'_L(r)|dr < \infty$;
- $\int\limits_0^\infty r|b'_L(r) - r b''_L(r)|dr < \infty$;
- $b_L(r) = 1 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4), r \to 0+$, *для деякого* $\beta_L > 0$.

Тоді має місце співвідношення

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\frac{1}{2}\ln t} \xrightarrow{d} \xi,$$

де ξ — *випадкова величина, що має стандартний розподіл Коші.*

Однак, цей результат ще не визначає сумісної асимптотичної поведінки кутів обходу частинок одна навколо одної. Цьому питанню присвячено §3.3, де доведена така теорема.

Теорема 3.3.1. *Нехай* F — *броунівський стохастичний потік, що задовольняє умови теореми 3.2.1. Нехай* $F_t(x_1), \ldots F_t(x_n)$ — *траєкторії потоку* F, *що виходять із попарно різних точок площини* $x_1, \ldots, x_n$. *Тоді для кутів обходу* $\Phi_{kl}(t)$ *траєкторії* $F_t(x_k)$ *навколо траєкторії* $F_t(x_l)$ *виконується асимптотичне співвідношення*

$$\left(\frac{2}{\ln t}\Phi_{kl}(t), 1 \le k < l \le n\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \le k < l \le n).$$

Тут $\xi_{kl}, 1 \le k < l \le n$ — *незалежні у сукупності випадкові величини, що мають стандартний розподіл Коші.*

У **четвертому розділі** дисертації досліджується можливість отримання принципу великих відхилень для кута обходу двовимірного броунівського руху $(W_t, t \geq 0)$ з $W(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ навколо початку координат. У §4.1 показано виконання слабкого принципу великих відхилень для кута обходу. Визначимо випадкові елементи Φ_ε зі значеннями в $C([0,1])$. Поставимо у відповідність кожній неперервній функції $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 1$, що задовольняє умову $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для всіх $t \in [0,1]$, функцію $\Phi(f) \in C([0,1])$, що є неперервною версією кута обходу f навколо початку координат. Отже, ми ввели відображення

$$\Phi\colon \left\{ f \in C([0,1], \mathbb{R}^2) \mid f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in [0,1]\, f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to C([0,1]).$$

Нехай w — двовимірний вінерів процес, що виходить із точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Нехай w_ε — процес виду $w_\varepsilon(t) = w(\varepsilon t)$, $t \in [0,1]$ для $\varepsilon > 0$. Тепер ми можемо розглянути сім'ю випадкових елементів $\Phi_\varepsilon = \Phi(w_\varepsilon)$ зі значеннями в $C([0,1])$. Нехай $I(x)$ — функція швидкості для двовимірного броунівського руху, що виходить із точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \|x'(s)\|^2 ds,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \infty,\ x(0) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Теорема 4.1.1. *Для випадкових елементів $\Phi_\varepsilon \in C([0,1])$ виконується слабкий принцип великих відхилень із функцією швидкості*

$$J(\phi) = I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}).$$

Зауваження. *Ми позначаємо через $\overline{\Phi^{-1}(A)}$ замикання в $C([0,1], \mathbb{R}^2)$ множини*

$$\Phi^{-1}(A) = \{x \in C([0,1], \mathbb{R}^2) : x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in [0,1] \|x(t)\| > 0, \Phi(x) \in A\}.$$

Ми пишемо $\Phi^{-1}(\phi)$ замість $\Phi^{-1}(\{\phi\})$.

У §4.2 ми доводимо виконання оцінок принципу великих відхилень на класі циліндричних множин.

Теорема 4.2.1. *Нехай $B \subseteq \mathbb{R}^m$ — замкнена множина, $0 < t_1 < \ldots < t_m \leq 1$,*

$$A = \{\phi \in C([0,1])\colon (\phi(t_1), \ldots, \phi(t_m)) \in B\}.$$

Тоді виконується така оцінка:

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \leq -J(A).$$

У §4.3 ми доводимо, що повний принцип великих відхилень не виконаний для сукупності випадкових елементів Φ_ε.

Теорема 4.3.1. *Принцип великих відхилень для сім'ї (Φ_ε) не виконується ні з якою функцією швидкості $\tilde{I}$.*

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено вивченню геометричних характеристик випадкових полів та стохастичних потоків:

- досліджено розподіл індекса випадкового двовимірного поля відносно кривої;
- для ізотропного двовимірного гауссівського випадкового поля знайдено явні вирази для першого і другого моментів індекса поля відносно кривої;
- для інваріантів Васильєва кіс, утворених неперервними семимартингалами відносно спільної фільтрації, знайдено вираз у вигляді кратних інтегралів Стратоновича, аналогічний інтегральному представленню Концевича цих інваріантів для гладких кіс;
- знайдено сумісний асимптотичний розподіл взаємних кутів обходу частинок у броунівському ізотропному стохастичному потоці при $t \to \infty$;

- отримано слабкий принцип великих відхилень для кута обходу двовимірного броунівського руху навколо початку координат на малих інтервалах часу; показано, що оцінки принципу великих відхилень виконуються також для класу циліндричних множин;

- встановлено відсутність повного принципу великих відхилень для кута обходу броунівського руху.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Kuznetsov V. A. The variance of the number of windings of the random field along the planar curve // Theory of Stochastic Processes. — 2012. — **18(34)**, 2. — P. 33–53.

2. Кузнецов В. А. Интегральные инварианты Концевича для случайных траекторий // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, 1. — С. 57–67.

3. Kuznetsov V. A. The discussion of the large-deviation principle for the winding angle of the Brownian trajectory around the origin // Theory of Stochastic Processes. — 2015. — **20(36)**, 2. — Pp. 63–84.

4. Кузнецов В. А. Взаимные углы обхода частиц в броуновских стохастических потоках со старшим показателем Ляпунова, равным нулю // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, 9. — С. 1197–1228.

5. Кузнецов В. А. Предельное распределение взаимных углов обхода частиц в броуновских стохастических потоках со старшим показателем Ляпунова, равным нулю // Докл. НАН Украины. — 2016. — 9. — С. 14–22.

6. Кузнецов В. О. Інтегральні інваріанти Концевича для траєкторій випадкових процесів // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, Україна, 25 лютого—3 березня 2013): тези доповідей. — Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 17.

7. Кузнецов В. А. Интеграл Концевича для траекторий случайных процессов // Конференция "Ломоносов 2013" (Москва, 2013): тезисы докладов;
https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2190/61170_6ca8.pdf

8. Kuznetsov V. A. Vassiliev invariants for random braids // 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and // Mathematical Statistics (Vilnius, Lithuania, 30 June–4 July 2014): abstracts of communications. — Vilnius, 2014. — P. 160.

9. Kuznetsov V. A. Random braids formed by trajectories of stochastic flows // Yu. V. Linnik Centennial Conference "Analytical methods in number theory, probability theory and Mathematical Statistics" (St. Petersburg, 14 – 18 September 2015). — 2015. — Pp. 28–29; http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2015/Linnik/abstract_pt.pdf

10. Kuznetsov V. A. Random braids formed by trajectories of stochastic flows // International conference "Stochastic processes in Abstract Spaces" (Kyiv, Ukraine, 14–16 October, 2015): abstracts. — Київ, 2015. — Pp. 32–33.

Анотації

Кузнецов В. О. Геометричні властивості стохастичих потоків. — Рукопис.
Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей геометричних випадкових об'єктів: випадкових полів, стохастичних потоків, випадкових кіс.

Ізотропні випадкові поля з'являються як моделі поля швидкостей у турбулентному потоці рідини. У роботі розглядається розподіл індекса обертання двовимірного ізотропного випадкового поля відносно плоскої кривої. Отримано вираз для першого і другого моментів індекса обертання поля у термінах умовної щільності двоточкових розподілів. Для ізотропного гауссівського випадкового поля

перший і другий моменти індекса обертання знайдені у термінах коваріаційної функції компонентів поля.

У роботах В. А. Васильєва було побудовано систему інваріантів, яка дозволяє розрізняти коси з точністю до гомотопії, що зберігає початкові і кінцеві точки. М. Л. Концевичем було отримано представлення інваріантів Васильєва для гладких кіс у вигляді кратних інтегралів. У даній роботі отримано аналогічне представлення інваріантів Васильєва для кіс, утворених траєкторіями двовимірних неперервних семимартингалів відносно спільної фільтрації, у вигляді кратних интегралів Стратоновича.

Найбільш простими інваріантами Васильєва є взаємні кути обходу ниток коси. М. Йором досліджено сумісну асимптотичну поведінку взаємних кутів обходу незалежних двовимірних броунівських рухів, що узагальнює закон Спіцера. У даній роботі отримано аналог результатів Ф. Спіцера та М. Йора для взаємних кутів обходу частинок у ізотропних броунівських потоках.

Значна кількість досліджень присвячена поведінці кута обходу броунівського руху навколо початку координат при $t \to \infty$. У даній роботі розглядається принцип великих відхилень при $t \to 0$. Показано, що для кута обходу броунівського руху навколо початку координат виконується слабкий принцип великих відхилень, однак не виконується повний. Також показано виконання оцінок принципу великих відхилень на класі циліндричних множин у $C([0,1])$.

Ключові слова: броунівські стохастичні потоки, кути обходу, ізотропні випадкові поля, інваріанти Васильєва, інтеграл Концевича, принцип великих відхилень.

Кузнецов В. А. Геометрические свойства стохастических потоков. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена изучению свойств геометрических случайных объектов: случайных полей, стохастических потоков, случайных кос.

Изотропные случайные поля возникают как модели поля скоростей в турбулентном потоке жидкости. В работе рассматривается распределение индекса вращения двумерного изотропного случайного поля относительно плоской кривой. Получено выражение

для первого и второго моментов индекса вращения поля в терминах условной плотности двухточечных распределений. Для изотропного гауссовского случайного поля первый и второй моменты индекса вращения найдены в терминах ковариационной функции компонент поля.

В работах В. А. Васильева была построена система инвариантов, позволяющая различать косы с точностью до гомотопии, сохраняющей начальные и конечные точки. М. Л. Концевичем было получено представление инвариантов Васильева для гладких кос в виде кратных интегралов. В данной работе получено аналогичное представление инвариантов Васильева для кос, образованных траекториями двумерных непрерывных семимартингалов относительно общей фильтрации, в виде кратных интегралов Стратоновича. В частности, результат верен для кос из независимых двумерных броуновских движений и для кос, образованных траекториями частиц в изотропных броуновских потоках.

Наиболее простыми инвариантами Васильева являются взаимные углы обхода нитей косы. М. Йором получено асимптотическое поведение взаимных углов обхода двумерных броуновских движений, обобщающее закон Спицера. В настоящей работе получен аналог результатов Ф. Спицера и М. Йора для взаимных углов обхода частиц в изотропных броуновских потоках. Доказательство основано на мартингальной технике.

Значительное число исследований посвящено поведению угла обхода броуновского движения вокруг начала координат при $t \to \infty$. В данной работе рассматривается принцип больших уклонений при $t \to 0$. Показано, что для угла обхода броуновского движения вокруг начала координат выполнен слабый принцип больших уклонений, но не выполнен полный. Также показано выполнение оценок принципа больших уклонений на классе цилиндрических множеств в $C([0,1])$.

Ключевые слова: броуновские стохастические потоки, углы обхода, изотропные случайные поля, инварианты Васильева, интеграл Концевича, принцип больших уклонений.

Kuznetsov V. A. Geometrical properties of stochastic flows. – Manuscript.
Candidate of Science Thesis, Probability theory and Mathematical Statistics — 01.01.05. Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of geometrical properties of random objects: random fields, stochastic flows, random braids.

Isotropic random fields arise as the models of the velocity field in a turbulent flow of liquid. In the thesis we consider the distribution of the index of a two-dimensional isotropic random field along the planar curve. We obtain the expression for the first and the second index of the field in terms of the conditional density of two-point distributions. For an isotropic Gaussian random field the first and the second moments of the index are found in terms of the covariance function of the fields' components.

The system of invariants that distinguishes braids up to homotopy preserving starting and end points was built in the works of V. A. Vassilev. M. L. Kontsevich found the representation of Vassiliev's invariants in the form of multiple integrals. In our work we obtain the analogous representation of the Vassiliev's invariants for braids formed by trajectories of two-dimensional continuous semimartingales with respect to the common filtration in the form of multiple Stratonovich integrals.

The most simple Vassiliev's invariants are the mutual winding angles of the strands of a braid. M. Yor found an asymptotical distribution of the mutual winding angles of two-dimensional Brownian motions that generalizes the Spitzer's law. In this work we obtain the analog of Spitzer's and Yor's results for mutual winding angles in Brownian flows.

A large amount of investigations is devoted to the behaviour of the Brownian motion winding angle around the origin when $t \to \infty$. In this work we consider the large-deviation principle when $t \to 0$. We show that for the winding angle of the Brownian motion around the origin the weak large-deviation principle holds, but the full does not. Also, we show that the estimations of the large-deviation principle hold on the class of cylindrical sets in $C([0,1])$.

Key words: Brownian stochastic flows, winding angles, isotropic random fields, Vassiliev invariats, Kontsevich integral, large-deviation principle.

Підп. до друку 6.03.2017 р. Формат $60 \times 84/16$.
Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 1,5.
Ум. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. №28

Інститут математики НАН України,
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3