ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертацію Кузнецова Василя Олександровича

«Геометричні властивості стохастичних потоків»,

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Актуальність теми дисертації

У класичній монографії М. А. Красносельський та ін. (1963) вивчаються геометричні властивості *детермінованих* векторних полів на площині, зокрема, поведінка фазового потоку в околі особливої точки. Подібні питання виникають у якісній теорії диференціальних рівнянь, а також у гідродинаміці. У монографії Р. Адлер, Дж. Тейлор (2007) вивчені певні геометричні властивості *випадкових* векторних полів.

При дослідженні стохастичних динамічних систем виникає поняття *стохастичного потоку*, зокрема, як потоку розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Розвиток теорії стохастичних потоків стимулювався дослідженнями турбулентного руху рідини, а також задачами магнітної гідродинаміки. Спочатку досліджувалися *гладкі* стохастичні потоки, але потім і *негладкі*, зокрема, потоки зі слеюванням. У зв'язку з цим слід згадати роботи М. Дарлінга (1986), Р. Арратья (1979), А. Дороговцева та П. Котеленця (1997), а також численні роботи А. Дороговцева та його учнів.

Вищевказані результати мотивують вивчення геометричних властивостей траєкторій у броунівських стохастичних потоках, поведінки кутів обходу частинок у стохастичному потоці та інших пов'язаних питань стохастичної геометрії. Саме таким тонким і нетривіальним, а інколи вельми технічним питанням присвячена дана робота.

Зміст роботи

Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У вступі зроблено огляд літератури з тематики дисертації, а також у стислій формі викладений основний зміст дисертації.

В I розділі спочатку обговорюються відомі геометричні властивості детермінованих векторних полів. Далі наводиться відома теорема про математичне сподівання кількості таких точок t векторного поля f, що

$f(t) = u$, за додаткової умови $g(t) \in B$. Ця теорема застосовується для знаходження перших двох моментів кількості обертань випадкового поля вздовж плоскої кривої (теорема 1.3.1), тобто отримано аналог формули Райса. В останньому параграфі розділу вивчається ізотропне гауссівське поле з некорельованими компонентами, отримано формулу для дисперсії кількості обертань поля вздовж кусково-гладкої кривої (теорема 1.4.1), при цьому істотно використовуються нетривіальні властивості функцій Бесселя (твердження 1.4.6 – 1.4.8).

У II розділі вивчаються інваріанти Васильєва для випадкових кіс. Спочатку наводяться відомі факти для гладких кіс і визначаються інтеграли Концевича для кіс. Далі ці факти розповсюджуються на неперервні коси, які взагалі кажучи не є кусково-гладкими (теореми 2.2.1 та 2.2.2). Це дозволяє знайти інтегральне подання інваріантів Васильєва для кіс, складених із неперервних семімартингалів (теорема 2.3.1); при цьому істотно, що траєкторії неперервних семімартингалів у загальному випадку не є гладкими, тож для них формули Концевича не можна застосовувати безпосередньо, а потрібні саме теореми 2.2.1 та 2.2.2.

У III розділі досліджується найпростіший інваріант Васильєва, кут обходу, для кіс, утворених траєкторіями частинок в ізотропних броунівських потоках. Спочатку наводяться відомі факти про броунівські потоки. Далі, у теоремі 3.2.1 доведено аналог закону Спіцера для броунівських потоків, при цьому йдеться про граничну поведінку кута обходу траєкторії $F(b)$ навколо $F(a)$. Проте це не визначає сумісної асимптотичної поведінки кутів обходу однієї частинки навколо іншої. Це питання розв'язано в теоремі 3.3.1.

Останній розділ роботи вивчає великі відхилення для кута обходу двовимірного броунівського руху навколо початку координат O (рух стартує не з O). Теорема 4.1.1 стверджує слабкий принцип великих відхилень для такого руху, а теорема 4.2.1 доводить подібний принцип на класі циліндричних множин. Теорема 4.3.1 показує, що повний принцип великих відхилень для двовимірного броунівського руху не виконується з жодною функцією швидкості.

Отримані нові наукові результати

Наводжу перелік основних нових результатів.

1) Для перших двох моментів індекса обертання випадкового поля на площині вздовж замкненої кривої отримано формули через двовимірні маргінальні умовні щільності поля.
2) Подібні формули отримані для ізотропного гауссівського поля в термінах коваріаційною функції компонентів поля.
3) Інваріанти Васильєва для кіс, утворених неперервними семімартингалами, виражені через кратні інтеграли Стратоновича.
4) Знайдено сумісний асимптотичний розподіл взаємних кутів обходу в броунівському стохастичному потоці, коли час необмежено зростає.
5) Для кута обходу двовимірного броунівського руху навколо початку координат встановлений слабкий принцип великих відхилень і показано відсутність повного принципу великих відхилень.

Обґрунтування отриманих результатів

Теоретичні результати роботи містяться у перелічених вище теоремах і твердженнях, а також у багатьох лемах. Усі математичні твердження строго доведені з використанням нетривіальних методів теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу і топології.

Зауваження

Зроблю наступні зауваження за текстом роботи.

1. На с. 11 після теореми 2.2.1 варто писати просто «кривыми» замість «непрерывными кривыми», бо *крива* є неперервним відображенням відріка за означенням. Подібне зауваження можна зробити ще в декількох місцях тексту.
2. Виклад у вступі не завжди є замкненим. Так, на с.14 в теоремі 4.1.1 незрозуміло, що таке I від множини: адже визначено лише $I(x)$. Означення I від множини з'явиться значно пізніше, в розділі 4. Це сааме стосується $J(A)$ в теоремі 4.2.1 на с. 15.
3. На с. 17 після формули (1.1) пропущено рядок із текстом про те, що U в (1.1) є мартингалом.
4. В твердженні 1.2.1 на с. 23-24 треба вимагати існування та неперервність сумісної умовної щільності визначника та $g(t)$ за умови $f(t)=x$, тобто умови г) недостатньо – інакше умовне математичне сподівання в формулі перед зауваженням 1.2.1 може не існувати.
5. На с. 54 при означенні набору P_{mn} слід сказати, що кожен рядок матриці є невпорядкованим – інакше формула для $|P_{mn}|$ стає хибною.
6. На с. 81 твердження 3.2.5 краще формулювати як збіжність за ймовірністю до нуля.

7. На с. 8 та в інших місцях при вживанні модуля неперервності краще писати $\eta \to 0$ з горизонтальною стрілкою.
8. На с. 11 та в інших місцях правильно писати «диаметры разбиений» замість «мелкости разбиений».
9. На с. 13 умову на 2-у похідну краще писати так: $\int_0^\infty r^2 \, |b_L''(r)| dr < \infty$.
10. Ось поодинокі граматичні та синтаксичні помилки в цій у загалому дуже грамотній роботі: на с. 2, -7 р. потрібна кома після «проводились», на

с. 4 замість «приведённые» треба «приведенные», на с. 8 в п.п. б), в)

замість «при» треба «в точке», на с. 71, 9 р. треба «которого».

Наведені зауваги мають редакторський характер і аж ніяк не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Викладення результатів в опублікованих працях і авторефераті

Результати роботи з достатньою повнотою викладено в 5 наукових статтях у фахових виданнях (із них 4 в журналах, що входять до науко-метричних баз даних), а також у 5 тезах конференцій (4 з них міжнародні).

Результати дисертації належним чином подані в авторефераті. Проте місцями виклад незамкнений (див. зауваження 2 вище, воно також стосується і автореферату; на с. 14 слід було пояснити, що це інтеграл Стратоновича); зустрічаються і поодинокі мовні огріхи: на с. 11 в теоремі 1.4.1 треба писати «компонентів» (чол. рід), на с. 15 зайва кома після «Однак».

Наведені зауваження щодо автореферату носять редакційний характер і не впливають на загальну позитивну оцінку викладу матеріалу в авторефераті.

Висновки

Дисертація В. О. Кузнецова є завершеною працею, що містить істотно нові, детально обґрунтовані математичні результати в галузі геометричних властивостей стохастичних потоків.

Теоретичні результати роботи можуть бути застосовані, зокрема, для вивчення властивостей турбулентних потоків рідини чи в магнітній гідродинаміці. Деякі результати автора можна використовувати для читання спеціальних курсів з теорії стохастичних потоків та стохастичної геометрії в університетах України та за кордоном.

Результати дисертації з достатньою повнотою викладено в публікаціях автора. Зміст автореферату ідентичний змісту дисертації.

Вважаю, що дисертація Кузнецова Василя Олексійовича „Геометричні властивості стохастичних потоків”, подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, відповідає вимогам щодо змісту кандидатських дисертацій „Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами), а її автор заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент

доктор фіз.-мат. наук

професор О. Г. Кукуш

29 березня 2017 р.

Підпис О. Г. Кукуша засвідчую

Вчений секретар НДЧ Київського національного

університету імені Тараса Шевченка Н. В. Караульна

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР НДЧ
КАРАУЛЬНА Н. В.
30.03.2017р.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 30.03.2017р.
секретар ради (Артеменко Ж. Я.)

Інститут математики Академії наук України * Канцелярія