

## ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертацію **Кузнецова Василя Олексійовича** „Геометричні властивості стохастичних потоків”,

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

### **Актуальність теми дисертації.**

Дисертацію присвячено дослідженню геометричних властивостей випадкових полів та стохастичних потоків. Серед книжок із теорій випадкових полів, надрукованих за останні 50 років, дві присвячено вивченню їх геометричних характеристик, а саме: монографія Р. Дж. Адлера (1981), яка має 2266 цитувань у Google Scholar, та монографія Р. Дж. Адлера й Дж. Е. Тейлора (2007) із 955 цитуваннями. Це свідчить про стійкий інтерес фахівців до даної проблематики. Крім цього, у вступі до дисертації викладено серйозну мотивацію розвитку теорії стохастичних потоків у зв'язку з задачами статистичної фізики, турбулентного руху рідини, моделювання випадкового середовища, магнітної гідродинаміки тощо та надано достатньо повний огляд літератури з теорії стохастичних потоків, що не залишає сумнівів у безперечній актуальності розвитку цього напрямку стохастичного аналізу.

Важливим класом стохастичних потоків є потоки розв'язків у сенсі Х. Куніта (1997) стохастичних диференціальних рівнянь, керованих мартингалом, залежним від просторової змінної. У свою чергу, дуже цікавим прикладом потоків із цього класу є однорідні ізотропні броунівські потоки, які виникають при вивченні найпростішої моделі турбулентності, що є ізотропною. У цій моделі розподіл поля швидкостей рідини інваріантний відносно паралельних переносів, поворотів та відбиттів, а просторовий мартингал є центрованим гауссівським векторним випадковим полем із коваріаційною матрицею спеціального вигляду.

За аналогією з детермінованими векторними полями – див. класичну монографію М. О. Красносельського та ін. (1963) – важливу роль у вивченні броунівських стохастичних потоків відіграє дослідження геометричних характеристик їхніх траєкторій, а також суміжних питань стохастичної геометрії: геометричних характеристик векторних випадкових полів, кутів обходу двовимірних випадкових процесів тощо.

Враховуючи теоретичну та практичну важливість вивчення геометричних властивостей випадкових полів та стохастичних потоків, розглянутих у даній роботі, слід визначити тему дисертації, безсумнівно, актуальною.



## **Зміст роботи.**

Робота складається із вступу, чотирьох розділів (глав), висновків та списку використаних джерел.

Вступ містить огляд літератури з тематики дослідження, формулювання основних результатів роботи та технічні відомості про дисертацію.

У 1-му розділі розглянуто коло питань про обертання гауссівських векторних полів. Підрозділ 1.1 містить ряд понять теорії детермінованих векторних полів, дотичних до теореми Пуанкаре про обертання поля вздовж гладкої замкненої кривої. У підрозділі 1.2 сформульовано одне модифіковане твердження з монографії Р. Дж. Адлера й Дж. Е. Тейлора (2007), на яке спирається доведення теореми 1.3.1 з підрозділу 1.3 про вирази для перших двох моментів індексу замкненої кривої відносно двовимірного випадкового поля, заданого на площині. Ці вирази виявилися складними, але, за припущенням, що поле є однорідним ізотропним гауссівським векторним полем, у підрозділі 1.4. автору вдалось отримати теорему 1.4.1, в якій дисперсію індексу обертання цього поля записано в явному вигляді через коваріаційну функцію поля та її похідні. Доведення теореми є складним (воно складається з тверджень 1.4.2 – 1.4.10 та лем 1.4.1 – 1.4.12) і навіть містить деякі нові нерівності для бессельових функцій.

Переходячи до викладення результатів 2-го розділу, зауважимо, що для ізотропних броунівських стохастичних потоків траєкторії частинок у них є семімартингалами, а для характеристики  $n$ -точкових рухів у потоці, природно розглядати косу, утворену декількома траєкторіями частинок. У даному розділі розглянуто інтегральне представлення інваріантів Васильєва для кіс, утворених неперервними семімартингалами у вигляді кратних інтегралів Стратоновича.

У підрозділі 2.1 наведено відомості про інтеграл Концевича для кусково гладких кіс та приклади інваріантів Васильєва. У підрозділі 2.2 містяться результати про апроксимацію інваріантів Васильєва для негладких кіс інваріантами Васильєва для вписаних у них ломаних (теорема 2.2.1, твердження 2.2.1, теорема 2.2.2). Із використанням цих результатів у підрозділі 2.3 отримано представлення гомотопічних інваріантів Васильєва для неперервних семімартингалів відносно спільної фільтрації у вигляді кратних стохастичних інтегралів Стратоновича (лема 2.3.1, теорема 2.3.1).

У найбільшому, 3-му розділі досліджено сумісну асимптотичну поведінку взаємних кутів обходу траєкторій декількох частинок у деякому класі броунівських стохастичних потоків. Для незалежних броунівських рухів відповідну задачу було розв'язано М. Йором (1991).

Підрозділ 3.1. містить попередні відомості про броунівські потоки. У підрозділі 3.2 доведено теорему 3.2.1, яка є аналогом закону Ф. Спіцера (1958)



для кута обходу в однорідному ізотропному броунівському стохастичному потоці з нульовим старшим показником Ляпунова, керованому гауссівським випадковим векторним полем із коваріаційною функцією, що задовольняє ряд умов регулярності. Доведення вказаної теореми спирається на допоміжні твердження 3.2.1 – 3.2.4 та лему 3.2.1. Її зміст полягає в тому, що розподіл неперервної версії кута обходу однієї траєкторії потоку навколо іншої траєкторії, нормованої логарифмом часу обходу, збігається, коли час прямує до нескінченності, до стандартного розподілу Коші.

У підрозділі 3.3. досліджено сумісний асимптотичний розподіл кутів обходу в броунівському потоці, який задовольняє умовам теореми 3.2.1 попероднього підрозділу. Основний результат підрозділу отримано в теоремі 3.3.1, що є багатовимірним узагальненням теореми 3.2.1 на  $n$  траєкторій потоку та спирається на деякі факти з роботи Дж. Пітмана, М. Йора (1986). Доведення теореми наведено для випадку  $n=3$  і є, на нашу думку, дуже складним. Достатньо відмітити, що для отримання теореми знадобилось довести допоміжні твердження 3.3.1 – 3.3.33.

У 4-му розділі розглянуто можливість отримання принципу великих відхилень кута обходу двовимірного броунівського руху навколо початку координат. У підрозділі 4.1 доведено виконання, так званого, слабкого принципу великих відхилень кута обходу із деякою функцією швидкості (теорема 4.1.1, леми 4.1.1 – 4.1.3, твердження 4.1.1, 4.1.2). У підрозділі 4.2 отримано верхню оцінку принципу великих відхилень кута обходу з тієї ж функцією швидкості для замкнених циліндричних множин у  $C([0,1])$  (теорема 4.2.1, леми 4.2.1 – 4.2.4).

У підрозділі 4.3 показано, що для кута обходу повний принцип великих відхилень з розглянутою вище функцією швидкості відсутній, а саме: доведено, що існує замкнена підмножина в  $C([0,1])$ , для якої потрібну нерівність не виконано (твердження 4.3.1, лема 4.3.1). Далі показано, що повний принцип великих відхилень для кута обходу не виконано для будь-якої функції швидкості (теорема 4.3.1, леми 4.3.2 – 4.3.7).

#### **Отримані нові наукові результати.**

У дисертації отримано такі основні результати:

- досліджено розподіл індексу випадкового двовимірного поля відносно кривої;
- для ізотропного двовимірного гауссівського випадкового поля знайдено явні вирази для першого і другого моментів індексу поля відносно кривої;
- для інваріантів Васильєва кіс, утворених неперервними семімартингалами відносно спільної фільтрації, знайдено вираз у вигляді



кратних інтегралів Стратоновича, аналогічний інтегральному представленню Концевича цих інваріантів для гладких кіс;

- знайдено сумісний асимптотичний розподіл взаємних кутів обходу частинок у броунівському ізотропному стохастичному потоці з нульовим старшим показником Ляпунова;

- отримано слабкий принцип великих відхилень кута обходу двовимірного броунівського руху навколо початку координат на малих інтервалах часу; показано, що оцінки принципу великих відхилень виконуються також для класу циліндричних множин;

- встановлено відсутність повного принципу великих відхилень кута обходу броунівського руху.

### **Обґрунтування отриманих результатів.**

Теоретичні результати роботи містяться у перелічених вище теоремах, твердженнях та лемах, строго доведених із кропітким та винахідливим використанням сучасної математичної техніки.

### **Зауваження.**

За текстом дисертації потрібно зробити деякі зауваження.

1. Стор. 17. Після формули (1.1) пропущено частину тексту.

2. Стор. 18, 19, 52. Коефіцієнт зачеплення не означено, і тому подальший текст залишається незрозумілим. Зокрема, в зауваженні 1.1.3 слово «ясно» - недоречне. Коефіцієнт зачеплення також з'являється на початку 2-го розділу і знову – без означення.

3. Стор. 69. Означення 3.1.3 співпадає з означенням 1.1.2 стор. 17.

4. Стор. 70. Не дуже добре написане означення 3.1.5 фактично співпадає з текстом після формули (1.1) на стор. 17.

5. Стор. 74, - 3. У запису коваріаційної функції пропущено важливі дужки.

6. Стор. 81. У формулюванні твердження 3.2.5 і тексті перед ним використано невведене позначення, сенс якого стає зрозумілим лише із доведення на с. 82.

7. Стор. 113. На початку 4-го розділу або в означенні 4.0.1 було б варто послатися хоча б на одне з численних літературних джерел, в яких наведено формулювання принципу великих відхилень у потрібній автору формі.

8. Текст роботи містить ряд описок, на які автору було вказано усно.

Наведені зауваження мають редакторський характер і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

### **Викладення результатів у опублікованих працях та авторефераті.**

Результати дисертації опубліковано у 5 статтях у фахових виданнях, із них 4 статті у журналах, що входять до науко-метричних баз даних. Результати дисертації доповідались на 5-ти конференціях, 3 з яких – міжнародні.



Результати дослідження належним чином представлено в авторефераті, зміст якого ідентичний з основними положеннями дисертації.

### Висновки.

Дана дисертація є самостійним, логічно завершеним, методологічно і теоретично обґрунтованим, виконаним на високому фаховому рівні науковим дослідженням, яке містить суттєві нові результати в галузі дослідження геометричних характеристик випадкових полів та стохастичних потоків.

Теоретичні результати роботи мають великий потенціал практичних застосувань, наприклад, для виявлення властивостей турбулентних потоків рідини. Результати автора можна використовувати для читання сучасних курсів лекцій з теорії випадкових полів та стохастичних потоків у провідних університетах України та за кордоном.

Результати дисертації з достатньою повнотою викладено в публікаціях автора.

Вважаю, що дисертація Кузнецова Василя Олексійовича „Геометричні властивості стохастичних потоків”, подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, відповідає вимогам щодо змісту кандидатських дисертацій „Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами), а її автор, безсумнівно, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика.

Офіційний опонент  
доктор фіз.-мат. наук  
професор

О. В. Іванов

27 березня 2017 р.

Підпис О. В. Іванова ЗАСВІДЧУЮ  
Учений секретар НТУУ  
„КПІ ім. І. Сікорського”



А. А. Мельниченко

Кадішова  
вченої ради  
секретар  
до спец. комісії  
Жанцелярія  
Р. 26. 206. 02  
28. 03. 2017р.  
/ Артемюк О. Я. /

