МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

Нейман Євген Вікторович

УДК 517.98 + 512.643

АБСТРАКТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ПРОБЛЕМА В УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСАХ НЕВАНЛІННИ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету імені Василя Стуса Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
Деркач Володимир Олександрович,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
провідний науковий співробітник відділу організації наукових досліджень.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, доцент
Дюкарев Юрій Михайлович,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико–математичних наук, професор
Дудкін Микола Євгенович,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний університет імені Ігоря Сікорського",
в.о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться *16 травня 2017* р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *10 квітня 2017*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради РОМАНЮК А. С.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню операторного методу розв'язку інтерполяційних проблем в узагальнених класах функцій. Теорія інтерполяції набула останнім часом широкого застосування в теорії систем і теорії H_∞-контролю. Головні проблеми теорії H_∞-контролю – це проблема редукції моделі без помітної зміни передавальної функції і проблема робастної (відмовостійкої) стабілізації, яка полягає в синтезі компенсатора в системах зворотного зв'язку таким чином, щоб система залишалась внутрішньо стабільною. В роботі Гловера 1984 року було показано, що проблема редукції моделі може бути зведена до інтерполяційної проблеми Нехарі-Такагі. Також Кімура і Вид'ясагар в 1986 році показали, що проблема робастної стабілізації є деякою інтерполяційною проблемою. Ці проблеми теорії H_∞-контролю інтенсивно досліджувались в останні три десятиліття в роботах Бхайя, Франсіса, Куртейн, МакФарлайна та багатьох інших. При дослідженні цих проблем широко використовувались методи теорії інтерполяційних матричних проблем, що розроблені в роботах Адамяна, Арова і Крейна, Болла і Хелтона, Болла, Гохберга і Родмана, Г. Діма. Підкреслимо, що дуже часто теорія H_∞-контролю потребує використання таких інтерполяційних задач, які є індефінітними за своєю суттю.

Операторний підхід до класичної інтерполяційної проблеми Неванлінни-Піка був розроблений в роботі Б.Секефальві-Надь і А. Кораньї. В 60-х роках минулого століття операторний підхід був застосований Адамяном, Аровим і Крейном до проблеми Нехарі і індефінітної проблеми Нехарі-Такагі. В 1986 році в роботі В.Е. Кацнельсона, О.Я. Хейфеца та П.М. Юдицького була запропонована нова схема розв'язку інтерполяційних проблем. В цій роботі було введено до розгляду абстрактну інтерполяційну проблему, як узагальнення підходу В.П. Потапова до інтерполяційних задач. Опис всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми було зведено до опису всіх матриць розсіювання унітарних розширень деякої часткової ізометрії. У подальшому П.М. Юдицьким, А.Я. Хейфецем, С. Купіним було показано, що багато задач аналізу, таких як дотична і бідотична проблеми, проблема ліфтинга комутанта, проблема моментів, та інших, можна включити в загальну схему абстрактної інтерполяційної проблеми. Паралельну версію абстрактної інтерполяційної проблеми в операторних класах Неванлінни було розглянуто В.О. Деркачем в 2009 році.

Індефінітний аналог абстрактної інтерполяційної проблеми в узагальнених класах Шура досліджувався В.О. Деркачем в 2001 році. Проте абстрактна інтерполяційна проблема в операторних класах Неванлінни залишалась відкритою. Розгляд цієї проблеми дозволив би отримати новий підхід до багатьох індефінітних інтерполяційних задач. Одна з таких задач – це індефінітна проблема моментів, яка була розглянута в роботах М.Г. Крейна і Г. Лангера методами теорії розширень симетричних операторів в просторах Понтрягіна. Інший підхід до цієї проблеми, який базується на алгоритмі Шура, було застосовано в роботі М.С. Дерев'ягіна і В.О. Деркача.

Інша проблема, яка вивчається в роботі – це проективний варіант дотичної інтерполяційної проблеми. Дотична інтерполяційна проблема, яка вперше була розглянута в роботі І.П. Федчіної в 1974 р., одразу знайшла застосування в теорії систем. Різні підходи до цієї проблеми було запропоновано А.А. Нудельманом, Д.З. Аровим, І.Ц. Гохбергом, Г. Дімом, Л.Ф. Сахновичем та іншими. Зокрема, в роботах О.Я. Хейфеца бідотична інтерполяційна проблема була розв'язана методами абстрактної інтерполяційної проблеми. В класичному випадку множина розв'язків дотичної інтерполяційної проблеми може бути описана як деяке дробово-лінійне перетворення $T_W[\varepsilon]$ від параметра ε, який пробігає матричний клас Шура, а матриця W цього дробово-лінійного перетворення будується за даними проблеми.

Індефінітний варіант дотичної і бідотичної інтерполяційної проблеми розглядався в роботах А.А. Нудельмана, Дж. Болла, І.Ц. Гохберга, Л. Родмана, А.А. Аміршадяна, В.О. Деркача, Г. Діма. Для індефінітної дотичної інтерполяційної проблеми загальна картина параметризації її розв'язків зберігається, але множиною параметрів є лише частина класу Шура. Ті матриці-функції ε, для яких дробово-лінійне перетворення $T_W[\varepsilon]$ не є розв'язком дотичної інтерполяційної проблеми, називають винятковими. У скалярному випадку множину виняткових параметрів індефінітної інтерполяційної проблеми Каратеодорі-Фейєра було описано В. Болотніковим, О. Хейфецем і Л. Родманом. Для індефінітної дотичної інтерполяційної проблеми задача опису множини виняткових параметрів залишалась відкритою.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені в дисертації, отримано в ході виконання науково-дослідницьких робіт "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій"(номер державної реєстрації 0115U000136), "Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь"(номер державної реєстрації 0115U000136), що виконувались відповідно до плану роботи Донецького національного університету; "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів"(номер державної реєстрації 0115U000556), що виконувалась відповідно до плану роботи Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Мета і задачі дослідження. Основною метою дисертації є впровадження нового підходу до інтерполяційних проблем в узагальнених класах неванліннівських функцій або неванліннівських пар. Задачі дослідження:

- побудова для кожної нормалізованої узагальненої неванліннівської пари (N_κ-пари) функціональної моделі самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром, такого що задана N_κ-пара є асоційованою з цим самоспряженим відношенням; побудова для кожної узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ функціональної моделі симетричного лінійного оператора в просторі де Бранжа-Ровняка і граничної трійки, таких що відповідна функція Вейля співпадає з функцією m; опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$ узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$.

- введення до розгляду абстрактної інтерполяційної проблеми в класі N_κ-пар, опис розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми в класі N_κ-пар.

- застосування абстрактної інтерполяційної проблеми в класі N_κ-пар до індефінітної проблеми моментів, побудова абстрактної інтерполяційної проблеми, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів.

- доведення аналогу теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

- опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі, розгляд і дослідження допоміжної проективної дотичної інтерполяційної проблеми, пов'язаної з резольвентною матрицею узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є інтерполяційні проблеми в узагальнених класах Неванлінни і Шура.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є функціональна модель самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром, абстрактна інтерполяційна проблема в класі узагальнених неванліннівських пар, індефінітна проблема моментів, проективна дотична інтерполяційна проблема, опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Методи дослідження. У дисертації використовується і розвивається метод абстрактної інтерполяційної проблеми Кацнельсона, Хейфеца і Юдицького, метод граничних трійок в теорії розширень симетричних операторів у просторі Понтрягіна, методи теорії матриць, методи просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримані такі нові результати:

- Введено поняття нормалізованої N_κ-пари. Для кожної узагальненої неванліннівської пари побудовано функціональну модель самоспряженого лінійного відношення у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром. Для узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ знайдено опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$, який є простором Понтрягіна з відтворюючим ядром.

- Розглянуто абстрактну інтерполяційну проблему в класі N_κ-пар. З кожною абстрактною інтерполяційною проблемою пов'язано деяке симетричне лінійне відношення у просторі Понтрягіна, таке що множина розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною самоспряжених розширень цього симетричного відношення. Знайдено вигляд резольвентної матриці оператора в термінах даних інтерполяції. За допомогою цієї матриці отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари.

- Метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Побудовано абстрактну інтерполяційну проблему, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів. Знайдено вигляд резольвентної матриці.

- Введено до розгляду новий клас мероморфних в $\mathbb{D}$ матрично-значних функцій, так званий узагальнений клас Смірнова з κ полюсами в $\mathbb{D}$, який у випадку $\kappa = 0$ співпадає з класичним класом Смірнова. Доведено аналог теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

- Знайдено опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі. Для цього розглянуто нову допоміжну проективну дотичну проблему, яка розв'язана методом абстрактної інтерполяційної проблеми. Множина розв'язків цієї проблеми описана у формі дробово-лінійного перетворення за допомогою резольвентної матриці. В скалярному випадку отриманий опис виняткових пар співпадає з результатами попередніх робіт В. Болотнікова, О. Хейфеца і Л. Родмана.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при дослідженні інших типів інтерполяційних проблем. Інтерполяційні проблеми в узагальнених операторно-значних класах виникають у теорії систем. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі - при викладанні спеціальних курсів по математичному аналізу.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та плану досліджень, постановка задач та формулювання основних гіпотез належить науковому керівнику. Остаточні формулювання та доведення результатів належать здобувачу. Результати розділів 2, 3, 4 та 5 опубліковано відповідно в роботах [2, 4], [3], [4] та [1, 5]

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на таких конференціях:

- Міжнародна конференція - VW Summer School 2010, Infinite Dimensional Operator Matrices — Theory and Applications, 5–9 липня 2010, Technische Universitat Berlin, м. Берлін, Німеччина;

- Сучасні проблеми математики і її застосування, 30 квітня 2012, м. Харків, Україна;

- Міжнародна конференція – International conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17–21 вересня 2012, м. Львів, Україна;

- Міжнародна конференція – Кримська Міжнародна математична конференція, 23 вересня – 3 жовтня 2013, м. Судак, Крим, Україна;

- Міжнародна конференція – XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19—20 травня 2016 року, м. Київ, Україна;

- Міжнародна конференція – Modeling, Analysis and Approximation Theory toward applications in tomography and inverse problems, 24-28 червня 2016 року, м. Любек, Німеччина;

- Міжнародна конференція – 7th European Congress of Mathematics, 18–22 липня 2016, м. Берлін, Німеччина.

Результати дисертації доповідались на семінарах:

- Донецький національний університет, семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, керівник д.ф.-м.н. професор В.О. Деркач, 2014;

- Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, керівник д.ф.-м.н. професор Г.М. Торбін, 2016;

- Інститут математики НАН України, Київський семінар з функціонального аналізу, керівники: академік НАН України професор Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН України професор М.Л. Горбачук, 2016;

- Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, семінар кафедри фундаментальної математики, керівник д.ф.-м.н. професор В.К. Дубовий, 2016.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у статтях [1-5] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, з яких [2], [5] внесено до міжнародних наукометричних баз; та відображено у збірниках тез конференцій [6-10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація викладена на 133 сторінках і складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку літератури з 95 найменувань та переліку умовних позначень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

Розділ 1 присвячено історичному огляду робіт за темою дисертації та опису методів дослідження, які в ній використовуються. Також в цьому розділу приводяться необхідні поняття та означення.

Символ $\mathbb{C}$ позначає множину комплексних чисел, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}, \quad \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\ z = 0\};$$

$\mathbb{C}^{p\times q}$ ($\mathbb{C}^p$) — множина матриць розміру $p \times q$ (векторів розміру p); H_2 (H_∞) позначає клас Харді функцій f голоморфних в $\mathbb{D}$ і таких, що

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 dt < \infty \quad (\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty).$$

$H_2^{p\times q}$ ($H_\infty^{p\times q}$) — це клас $\mathbb{C}^{p\times q}$-значних функцій, з елементами з H_2 (H_∞), $H_2^p := H_2^{p\times 1}$ ($H_\infty^p := H_\infty^{p\times 1}$), $\mathcal{S}^{p\times q}$ — це клас Шура $\mathbb{C}^{p\times q}$-значних функцій обмежених за нормою одиницею.

Нехай Ω – це відкрита множина у $\mathbb{C}$. Будемо казати, що $\mathbb{C}^{p\times q}$-значне ядро $\mathsf{N}_\omega(\lambda)$ має κ від'ємних квадратів в Ω, якщо для будь-яких точок $\omega_1, ..., \omega_n$ в Ω, векторів $u_1, ..., u_n$ в $\mathbb{C}^q$ квадратична форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\mathsf{N}_{\omega_j}(\omega_i) u_j,\, u_i\right)_{\mathcal{L}} \xi_j \bar{\xi}_i, \quad \xi_j \in \mathbb{C}$$

має не менше κ від'ємних квадратів, і при деякому виборі n, ω_j, u_j ця форма має рівно κ від'ємних квадратів. $\mathbb{C}^{p\times q}$-значну функцію s, що є мероморфною в

$\mathbb{D}$, відносять до узагальненого класу Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$, якщо ядро

$$\mathsf{\Lambda}_\zeta^s(z) = \frac{I_p - s(z)s(\zeta)^*}{1 - z\bar{\zeta}} \quad (z, \zeta \in \mathfrak{h}_s)$$

має κ від'ємних квадратів у своїй області голоморфності $\mathfrak{h}_s$.

$\mathbb{C}^{p\times q}$-значна функція $m(\lambda)$ належить до узагальненого класу Неванлінни $N_\kappa(\mathbb{C}^{p\times q})$, якщо $m(\lambda)$ є мероморфною в $\mathbb{C}_+$, і ядро

$$\mathsf{N}_\omega^m(\lambda) = \frac{m(\lambda) - m(\omega)^*}{\lambda - \bar{\omega}}$$

має κ від'ємних квадратів у своїй області голоморфності $\mathfrak{h}_m$.

Нехай $\mathcal{H}$ є лінійним простором над полем $\mathbb{C}$. Внутрішнім добутком називають відображення $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, яке є лінійним по першому аргументу і симетричним. Простором Крейна $\big(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$ називають лінійний простір $\mathcal{H}$ з внутрішнім добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, який можна розкласти в ортогональну пряму суму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \tag{1}$$

відносно внутрішнього добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, де $\big(\mathcal{H}_+, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$ і $\big(\mathcal{H}_-, -\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$ є класичними просторами Гільберта. У випадку, коли розмірність простору $\mathcal{H}_-$ з розкладу (1) є скінченою і дорівнює κ, простір $\mathcal{H}$ називають простором Понтрягіна з від'ємним індексом κ.

Лінійним відношенням A в $\mathcal{H}$ називають лінійний підпростір в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Спряжене лінійне відношення A^* визначається рівністю

$$A^* = \left\{(f, f')^\top : \langle f', g\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, g'\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{для всіх } (g, g')^\top \in A\right\}.$$

Лінійне відношення A називається симетричним, якщо $A \subset A^*$ і самоспряженим, якщо $A = A^*$.

Розділ 2 присвячено дослідженню функціональної моделі узагальненої неванліннівської пари у просторі Понтрягіна.

Нехай $\mathcal{L}$ є простором Гільберта, будемо позначати множину лінійних обмежених операторів в просторі $\mathcal{L}$ як $[\mathcal{L}]$.

Означення 2.2. *Пара $\{\varphi, \psi\}$ $[\mathcal{L}]$-значних функцій $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ мероморфних на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ зі спільною областю голоморфності $\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$ називається N_κ-парою, якщо:*

(i) ядро

$$\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\bar{\lambda})^*\varphi(\bar{\omega}) - \varphi(\bar{\lambda})^*\psi(\bar{\omega})}{\lambda - \bar{\omega}},$$

має κ від'ємних квадратів на $\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$;

(ii) $\psi(\bar{\lambda})^*\varphi(\lambda) - \varphi(\bar{\lambda})^*\psi(\lambda) = 0$ для всіх $\lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$;

(iii) для всіх $\lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi} \cap \mathbb{C}_+$ існує $\mu \in \mathbb{C}_+$, таке що

$$0 \in \rho\big(\varphi(\lambda) - \mu\psi(\lambda)\big) \text{ і } 0 \in \rho\big(\varphi(\overline{\lambda}) - \overline{\mu}\psi(\overline{\lambda})\big).$$

Дві N_κ-пари $\{\varphi, \psi\}$ і $\{\varphi_1, \psi_1\}$ називаються еквівалентними, якщо $\varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda)\chi(\lambda)$ та $\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda)\chi(\lambda)$ для деякої операторно-значної функції $\chi(\cdot)$ зі значенням в $[\mathcal{H}]$, яка є голоморфною і оборотною для усіх $\lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$. Множина усіх класів еквівалентності N_κ-пар в $\mathcal{L}$ позначається як $\widetilde{N}_\kappa(\mathcal{L})$. Якщо $\varphi(\lambda) \equiv I_\mathcal{L}$, де $I_\mathcal{L}$ є одиничний оператор в просторі $\mathcal{L}$, то $\psi(\lambda)$ є $N_\kappa(\mathcal{L})$-функцією. У випадку коли $\mathcal{L} = \mathbb{C}$ клас $N_\kappa(\mathbb{C})$-функцій будемо позначати N_κ.

Пара $\{\varphi, \psi\} \in \widetilde{N}_\kappa(\mathcal{L})$ називається нормалізованною N_κ-парою, якщо:

(iii′) $\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda) \equiv I_\mathcal{L}$ для всіх $\lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$.

Простором Понтрягіна $\mathcal{H}(\varphi, \psi)$ з відтворюючим ядром $\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda)$ називають пару $(\mathcal{H}(\varphi, \psi), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)})$, яка характеризується властивостями:

(1) $\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u \in \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ для усіх $\omega \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$ та $u \in \mathcal{L}$;

(2) для всіх $f \in \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ виконується така тотожність

$$\big\langle f(\cdot), \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u\big\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = (f(\omega), u)_\mathcal{L}, \quad \omega \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}, u \in \mathcal{L}.$$

Означення 2.3. *Нехай $\widetilde{A}$ – це самоспряжене лінійне відношення в просторі $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$. Пара операторно-значних функцій $\{\varphi, \psi\}$ визначених формулами*

$$\varphi(\lambda) := I_\mathcal{L} + \lambda\Pi_\mathcal{L}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_\mathcal{L}, \quad \psi(\lambda) := \Pi_\mathcal{L}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_\mathcal{L}, \quad (\lambda \in \rho(\widetilde{A})) \tag{2}$$

називається N_κ-парою, що є асоційованою з лінійним відношенням $\widetilde{A}$.

Наступна теорема є центральною теоремою розділу, в ній показується, що для кожної нормалізованої N_κ-пари існує єдине з точністю до унітарної еквівалентності самоспряжене лінійне відношення A у просторі Понтрягіна, таке що пара $\{\varphi, \psi\}$ є асоційованою з лінійним відношенням A.

Теорема 2.7. *Нехай $\mathcal{L}$ є простором Гільберта, і пара $\{\varphi, \psi\}$ є нормалізованою N_κ-парою. Тоді лінійне відношення*

$$A(\varphi, \psi) = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix} \right\} : \begin{array}{c} f, f' \in \mathcal{H}(\varphi, \psi);\ u, u' \in \mathcal{L}; \\ f'(\lambda) - \lambda f(\lambda) = \varphi(\lambda)u - \psi(\lambda)u' \end{array} \right\}$$

є самоспряженим відношенням в $\mathcal{H}(\varphi, \psi) \oplus \mathcal{L}$, і нормалізована пара $\{\varphi, \psi\}$ є N_κ-парою, що асоційована з самоспряженим відношенням $A(\varphi, \psi)$.

Показано, що будь-яке самоспряжене лінійне відношення A є унітарно еквівалентним його функціональній моделі $A(\varphi,\psi)$. Оператор $\mathcal{F}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ визначений формулою

$$h \mapsto (\mathcal{F}h)(\lambda)=\gamma(\bar\lambda)^*h=\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}h \quad (h\in\mathcal{H})$$

називається узагальненим перетворенням Фур'є, що асоційоване з $\widetilde{A}$.

Також в Розділі 2 будується функціональна модель для симетричного оператора в просторі Понтрягіна.

Простір Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathsf{N}_\omega^m(\lambda):=\mathsf{N}_\omega^{1,m}(\lambda)$ для функції $m\in N_\kappa$ будемо називати узагальненим простором де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$. Наприкінці Розділу 2 наведено опис узагальненого простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$ у випадку, коли m є узагальненою скалярною функцією Неванлінни. Для цього використано таку факторизацію[1,2] узагальненої скалярної функції Неванлінни $m\in N_\kappa$:

$$m(\lambda)=\frac{p(\lambda)p^{\#}(\lambda)}{q(\lambda)q^{\#}(\lambda)}m_0(\lambda), \tag{3}$$

де $m_0\in N_0$, p і q – однозначно визначені взаємно прості монічні поліноми, а $p^{\#}(\lambda):=p(\overline{\lambda})^*$, $q^{\#}(\lambda):=q(\overline{\lambda})^*$. При цьому $\max\{\deg(p),\deg(q)\}=\kappa$.

Нехай p,q є поліномами. Матриця $B_{p,q}:=\left(b_{ij}\right)_{i,j=0}^{\kappa-1}$, що визначена за правилом

$$\frac{p(x)q(y)-p(y)q(x)}{x-y}=\sum_{i,j=0}^{\kappa-1}b_{ij}x^iy^j,$$

називається *безутіантою* поліномів p і q. Опис простору $\mathcal{H}(m)$ дає така

Теорема 2.23. *Нехай $m\in N_\kappa$ допускає факторизацію (3). Тоді простір $\mathcal{H}(m)$ співпадає з простором $\left(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\right)$, де $\mathcal{H}$ – це множина функцій*

$$f(\lambda)=f_0(\lambda)\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}+\frac{1}{q(\lambda)}\varphi_1(\lambda)+\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)q^{\#}(\lambda)}m_0(\lambda)\varphi_2(\lambda),$$

а внутрішній добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ визначається формулою

$$\langle f,f\rangle_{\mathcal{H}}=(f_0,f_0)_{\mathcal{H}(m_0)}+\mathcal{F}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}=\begin{bmatrix}f^{(1)}\\ f^{(2)}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\kappa},\quad \mathcal{B}=\begin{bmatrix}0 & B_{p,q}\\ B_{p,q}^* & 0\end{bmatrix},$$

[1] Derkach V. Operator models associated with Kac subclasses of generalized Nevanlinna functions / V. Derkach, S. Hassi, and H.S.V. de Snoo // Methods of Functional Analysis and Topology. — 1999. — Vol. 5. — P. 65–87

[2] A factorization result for generalized Nevanlinna functions of the class $\mathbf{N}_\kappa$ / A. Dijksma, H. Langer, A. Luger, and Yu. Shondin // Integral Equations and Operator Theory. — 2000. — Vol. 36. — P. 121–125

де $f_0 \in \mathcal{H}(m_0)$*;* φ_1, φ_2 *– довільні поліноми формального степеня* $\kappa - 1$*;* $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{C}^\kappa$ *– стовпці коефіцієнтів поліномів* φ_1 *та* φ_2*, відповідно;* $B_{p,q}$ *– безутіанта поліномів* p *та* q*.*

Розділ 3 є центральним розділом усієї роботи. В цьому розділі ставиться та вирішується абстрактна інтерполяційна проблема в узагальнених класах Неванлінни.

Нехай $\mathcal{X}$ є комплексним лінійним простором, $\mathcal{L}$ – це простір Гільберта. Нехай B_1, B_2 – це лінійні оператори в $\mathcal{X}$, і C_1, C_2 – це лінійні оператори з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{L}$. Нехай K – це півторалінійна форма в $\mathcal{X}$, що має ν від'ємних квадратів. Розглянемо такий неперервний аналог абстрактної інтерполяційної проблеми.

Проблема $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. Нехай $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ і нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови

(A1) $K(B_2 h, B_1 g) - K(B_1 h, B_2 g) = (C_1 h, C_2 g)_{\mathcal{L}} - (C_2 h, C_1 g)_{\mathcal{L}} \quad \forall h, g \in \mathcal{X}$;

(A2) $\ker K = \{0\}$, де $\ker K = \{h \in \mathcal{X} : \ K(h,u) = 0 \ \ \forall u \in \mathcal{X}\}$.

Знайти N_κ-пару $\{\varphi, \psi\} \in \widetilde{N}_\kappa(\mathcal{L})$ таку, що існує лінійне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ для якого виконуються такі умови:

(C1) $(FB_2h)(\lambda) - \lambda(FB_1h)(\lambda) = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 h \\ C_2 h \end{bmatrix}$, для всіх $h \in \mathcal{X}$;

(C2) $\langle Fh,\, Fh \rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \le K(h,h)$, для всіх $h \in \mathcal{X}$.

Абстрактну інтерполяційну проблему у класичних класах Неванлінни ($\kappa = \nu = 0$) було розглянуто В. Деркачем[3].

Визначимо простір Понтрягіна $\mathcal{H}$ з від'ємним індексом ν, як поповнення простору $\mathcal{X}$ відносно добутку $\langle h, g \rangle_{\mathcal{H}} = K(h,g)$ $(h, g \in \mathcal{X})$. Виявляється, що усі розв'язки проблеми AIP_κ параметризуються самоспряженими розширеннями деякого симетричного лінійного відношення A, яке будується за даними проблеми.

Для знаходження усіх самоспряжених розширень лінійного відношення A нам будуть потрібні додаткові умови:

(A3) $B_2 = I_{\mathcal{X}}$ і оператори $B_1 : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $C_1, C_2 : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ є обмеженими.

Нехай операторно-значні функції $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}$ та $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ є визначеними за формулою

$$\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda & I \end{bmatrix} W(\lambda) = I - \lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} \begin{bmatrix} C_2^* & -C_1^* \end{bmatrix} \qquad (4)$$

---

[3] Derkach V. Abstract interpolation problem in Nevanlinna classes / V. Derkach // Modern Analysis and Applications: Mark Kreĭn Centenary Conference, vol. 1 – Operator Theory and Related Topics. — 2009. — Vol. 190. — P. 197–236

Теорема 3.15. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A3) і $sq\_K = \kappa$. Тоді формула*

$$\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} = \Theta(\lambda) \begin{bmatrix} q(\lambda) \\ p(\lambda) \end{bmatrix} (w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda))^{-1} \tag{5}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною усіх нормалізованих розв'язків $\{\varphi, \psi\}$ проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ і множиною усіх класів еквівалентності неванліннівських пар $\{p, q\} \in \widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$, таких що виконуються умови $\det(w_{21}q + w_{22}p) \not\equiv 0$ *і*

$$\big(w_{11}(\lambda)q(\lambda) + w_{12}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \in \mathbf{N}_\kappa(\mathcal{L}).$$

Застосовуючи результат Теореми 3.15 розглянуто питання про однозначність побудови узагальненого перетворення Фур'є F по розв'язку m абстрактної інтерполяційної проблеми.

Для знаходження розв'язків AIP_κ серед однозначних оператор-функцій накладається додаткова умова

(A4) для деяких різних точок $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$ $(j = 1, ..., \kappa)$ виконано співвідношення

$$\ker \begin{bmatrix} C_2^* & (1 - \lambda_1 B_1^*)^{-1} C_2^* & \cdots & (1 - \lambda_\kappa B_1^*)^{-1} C_2^* \end{bmatrix} = \{0\}.$$

Виявляється, що за умов (A1)-(A4) параметризація всіх функцій, які є розв'язками абстрактної інтерполяційної проблеми, також має вигляд дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари.

Розділ 4 присвячений індефінітній проблемі моментів, та її розв'язанню методом абстрактної інтерполяційної проблеми.

Проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$. Маємо послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty$. Знайти функцію $m \in N_\kappa$ таку, що виконується формула

$$m(\lambda) \sim -\frac{s_0}{\lambda} - \frac{s_1}{\lambda^2} - \frac{s_2}{\lambda^3} - ..., \qquad \lambda \widehat{\rightarrow} \infty, \tag{6}$$

де границя $\lambda \widehat{\rightarrow} \infty$ означає, що λ прямує до ∞ недотичним шляхом, тобто в деякому секторі $|\arg(\lambda) - \pi/2| < \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Позначимо через H_κ клас послідовностей дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty$ таких, що Ганкелева матриця D_n має рівно κ від'ємних власних значень для всіх достатньо великих n. В подальшому ми будемо вважати, що

(I) проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є невизначеною, тобто має нескінченну кількість розв'язків.

Побудуємо абстрактну інтерполяційну проблему, що асоційована з проблемою моментів. Нехай $\mathcal{X} = \mathbb{C}[x]$ – це простір поліномів $h(x) = \sum_{j=0}^{n} h_j x^j \quad (n = 0, 1, 2, ...)$. Позначимо послідовність $\mathbf{s} = \{s_j\}_0^\infty \in H_\kappa$. Визначимо півторалінійну форму $K(\cdot, \cdot)$ на множині $\mathcal{X} = \mathbb{C}[\lambda]$ формулою $K(h, h) = \sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} h_j \overline{h}_k$. Стандартна процедура замикання простору $\mathcal{X}$ відносно внутрішнього добутку приводить до простору Понтрягіна $\mathcal{H}$.

Визначимо оператори B_1, B_2 і C_1, C_2 за формулами

$$\begin{aligned} &B_1, B_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad B_1 h = \frac{h(x) - h(0)}{x}, \quad B_2 h = h; \\ &C_1, C_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}, \quad C_1 h = \sum_{j=1}^{n} s_{j-1} h_j, \quad C_2 h = -h(0). \end{aligned} \tag{7}$$

В [4, Propisition 4.3] доведено, що оператори B_1, B_2, C_2, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A4), отже абстрактну інтерполяційну проблему AIP_κ, що асоційована з $MP_\kappa(\mathbf{s})$, можна формулювати таким чином.

Проблема $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. Нехай послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty$ належить H_κ та виконана умова (I). Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K визначені формулами (7) та відображення F визначене рівністю

$$(Fh)(\lambda) = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} G(\lambda) h \quad (\lambda \in \mathcal{O}_\pm).$$

Знайти N_κ-функцію $m(\lambda)$, таку що:

(C1) $Fh \in \mathcal{H}(m)$ для будь-яких $h \in \mathcal{X}$;

(C2) $\langle Fh,\, Fh \rangle_{\mathcal{H}(m)} \le K(h, h)$ для будь-яких $h \in \mathcal{X}$.

Виявляється, що проблеми AIP_κ та $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є еквівалентними, тобто мають однакові множини розв'язків. Звернено увагу, що для узагальненого перетворення Фур'є $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(m)$, що пов'язане з розв'язком m проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$, виконується рівність Парсевалю

$$\langle Fh,\, Fh \rangle_{\mathcal{H}(m)} = K(h, h) \quad (\forall h \in \mathcal{X}).$$

У випадку $\kappa = 0$ ця рівність була відмічена О.Я. Хейфецем [4].

Опис розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ наведено в термінах біортогональних базисів. Показано, що при деякому виборі біортогональних базисів отримуємо

[4]Kheifets A. Hamburger moment problem: Parseval equality and A-singularity / A. Kheifets // J. Funct. Analysis. — 1996. — Vol. 141. — P. 374–420.

відомі описи розв'язків проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ у формі Крейна-Лангера[5] та Деревягіна-Деркача[6].

В **Розділі 5** розглядається інтерполяційна проблема в узагальнених класах Шура.

Нехай розклад у ряд Лорана $p\times q$-мероморфної матрично-значної функції $F(z)$ в околі точки $\alpha \in \mathbb{D}$ має вигляд $F(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} F_j(z-\alpha)^j$. Полюсна кратність[7] матричної-функції $F(z)$ в точці α визначається як

$$\mathcal{M}_\pi(F,\alpha) = \operatorname{rank}(F_{-k+i-j})_{i,j=0}^{k-1}.$$

Полюсна кратність $\mathcal{M}_\pi(F,\mathbb{D})$ в одиничному крузі матрично-значної функції F дорівнює сумі полюсних кратностей $\mathcal{M}_\pi(F,\alpha)$ у точках цього круга. Для квадратної матрично-значної функції $F(z) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ визначимо нульову кратність співвідношенням

$$\mathcal{M}_\zeta(F,\mathbb{D}) = \mathcal{M}_\pi(F^{-1},\mathbb{D}) \quad (\det F(z) \not\equiv 0).$$

Різницю полюсної і нульової кратностей функції F будемо позначати

$$\mathcal{M}(F,\mathbb{D}) := \mathcal{M}(F_\zeta,\mathbb{D}) - \mathcal{M}_\pi(F,\mathbb{D}).$$

Класом Смірнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$ називається множина матрично-значних функцій вигляду $h^{-1}s$, де $s \in \mathcal{S}^{p\times q}$, а h – скалярна зовнішня функція.

Означення 5.3. *Мероморфну в $\mathbb{D}$ матрично-значну функцію F будемо називати такою, що належить до узагальненого класу Смірнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, якщо вона допускає зображення у вигляді*

$$F = f + r,$$

де f функція з класу Смірнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$, а r – раціональна матрично-значна функція з полюсною кратністю $\mathcal{M}_\pi(r,\mathbb{D}) = \kappa$.

В 1981 році М.Г. Крейн і Х. Лангер[8] довели аналог теореми Руше для голоморфних функцій з класу Смірнова $\mathcal{N}_+^{n\times n}$. Інше узагальнення теореми Руше

[5]Kreĭn M. On some extension problem which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space π_κ iii. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems, part i / M.G. Kreĭn, H. Langer Beiträge zur Anal. — 1979. — Vol. 14, no. 25–40.

[6]Derevyagin M. On the convergence of Pade approximations for generalized Nevanlinna functions / M. Derevyagin, V.Derkach // Trans Moscow Math. Soc. — 2007. — Vol. 68. — P. 1–44.

[7]Адамян В.М. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги / В.М. Адамян, Д.З. Аров, М.Г. Крейн // Матем. сб.— 1971. — Vol. 86. — P. 34–75.

[8]Kreĭn M.G. Some propositions of analytic matrix functions related to the theory of operators in the space π_κ / M.G. Kreĭn, H. Langer // Acta Sci.Math.Szeged. — 1981. — Vol. 43. — P. 181–205.

на матрично-значні функції, що є мероморфними в $\mathbb{D}$, але неперервними аж до контуру $\mathbb{T}$ отримано И.Ц. Гохбергом і Е.И. Сигалом[9].

В дисертації доводиться аналог теореми Руше для функцій з узагальнених класів Смірнова.

Теорема 5.8. *Нехай* $F \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{n\times n}(\mathbb{D})$, $G \in \mathcal{N}_{+,\kappa_1}^{n\times n}(\mathbb{D})$. *Якщо* $\det(F(\lambda)+G(\lambda)) \not\equiv 0$ *(в* $\mathbb{D}$*) і* $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| \le 1$ *(м. в. на* $\mathbb{T}$*), то*

$$\mathcal{M}(F+G,\mathbb{D}) \le \mathcal{M}(F,\mathbb{D}).$$

Якщо до того ж $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$, *то*

$$\mathcal{M}(F+G,\mathbb{D}) = \mathcal{M}(F,\mathbb{D}).$$

Факторизація $b(z)^{-1}s(z)$, де b, s функції з класів Харді $H_\infty^{p\times q}$ називається взаємно простою, якщо

$$\ker s(z)^* \cap \ker b(z)^* = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Сформулюємо інтерполяційну проблему, яка досліджувалася в роботах Дж. Болла, Дж. Хелтона, І. Гохберга, Л. Родмана, та ін.

Узагальнена проблема Шура-Такагі $GSTP_\kappa(K,b)$. Нехай $b \in \mathcal{S}^{q\times q}$, $K \in H_\infty^{p\times q}$, $\kappa \in \mathbb{N}\cup 0$. Знайти усі матрично-значні функції $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ такі, що

$$(s-K)b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{8}$$

В.О. Деркач та Г. Дим[10] знайшли резольвентну матрицю проблеми Шура-Такагі $GSTP_\kappa(K,b)$, тобто таку матрично-значну функцію $W(\lambda) = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$, що кожний розв'язок $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ проблеми $GSTP_\kappa(K,b)$ допускає зображення у вигляді дробово-лінійного перетворення

$$s = T_W[\varepsilon] = (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{21}\varepsilon + w_{22})^{-1},$$

де $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$. При цьому має місце взаємно проста факторизація $\begin{bmatrix} w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = b^{-1}\begin{bmatrix} \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$, де $\varphi_{21} \in H_2^{q\times p}$, $\varphi_{22} \in H_2^{q\times q}$ і множина розв'язків $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ проблеми $GSTP_\kappa(K,b)$ характеризується умовою, що факторизація

$$w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z) = b(z)^{-1}\big(\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)\big) \tag{9}$$

[9] Гохберг И.Ц. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете / И.Ц. Гохберг, Е.И. Сигал // Математический сборник. — 1971. — Vol. 126, no. 4. — P. 607–629.

[10] Derkach V. A generalized Schur-Takagi interpolation problem / V. Derkach, H. Dym // Integral Equations and Operator Theory. — 2014. — Vol. 2, no. 80. — P. 165–227.

теж є взаємно простою на $\mathbb{D}$.

Параметр $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ називається винятковим для проблеми $GSTP_\kappa(K, b)$, якщо порушується умова взаємної простоти факторизації (9), тобто $b(z)$ і $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)$ мають спільний лівий дільник $\theta \in \mathcal{S}^{q\times q}$.

Опис усіх виняткових параметрів зводиться до деякої іншої узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми.

Проблема $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Маємо матрично-значні функції $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_1 \in H_\infty^{q\times p}$, $\varphi_2 \in H_\infty^{q\times r}$. Описати усі матричні функції $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$, для яких виконується умова

$$\theta^{-1}(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2) \in H_\infty^q.$$

Розв'язання проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ вкладено у загальну схему абстрактної інтерполяційної проблеми у класі Шура.[11]

Для внутрішньої функції $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ введемо два модельних простори

$$\mathcal{H}(\theta) = H_2^q \ominus \theta H_2^q, \quad \mathcal{H}_*(\theta) = (H_2^q)^\perp \ominus \theta^*(H_2^q)^\perp.$$

Введемо оператори $N_1 : H_2^p \to \mathcal{H}(\theta)$ і $N_2 : H_2^r \to \mathcal{H}(\theta)$, які діють за правилом

$$N_1 f = \Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_1 f, \quad N_2 g = -\Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_2 g \quad (f \in H_2^p,\ g \in H_2^r);$$

і оператори $M_1 : \mathcal{H}(\theta) \to \mathbb{C}^p$ і $M_2 : \mathcal{H}(\theta) \to \mathbb{C}^r$, які діють за правилом

$$M_1 f = (N_1^* f)(0), \quad M_2 f = (N_2^* f)(0) \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)).$$

Позначимо

$$Pf = (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) f \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{10}$$

Нехай оператор T – це оператор зсуву в просторі H_2^q. Нехай оператор $T_\theta : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{H}(\theta)$ – є зрізаним оператором зсуву в просторі $\mathcal{H}(\theta)$

$$T_\theta = \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} T \upharpoonright_{\mathcal{H}(\theta)},$$

тоді оператор T_θ^* є оператором зворотного зсуву в просторі $\mathcal{H}(\theta)$.

Лема 5.14. *Оператор P задовольняє рівнянню Ляпунова*

$$P - T_\theta P T_\theta^* = M_1^* M_1 - M_2^* M_2.$$

[11] Кацнельсон В.Е. Абстрактная интерполяционная задача и террия расширений изометрических операторов / В.Е. Кацнельсон, А.Я. Хейфец, П.М. Юдицкий // Операторы в функциональном пространстве и проблемы теории функций. — 1986. — Vol. 1. — P. 83–96.

Теорема 5.29. *Нехай* $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_1 \in H_\infty^{q\times p}$, $\varphi_2 \in H_\infty^{q\times r}$. *Нехай* $P \geq 0$ *де оператор* P *є визначеним формулою* (10). *Нехай матрично-значна функція* $U(z) = \begin{bmatrix} u_{11}(z) & u_{12}(z) \\ u_{21}(z) & u_{22}(z) \end{bmatrix} : \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)} \to \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}$ *задана рівністю*

$$U(z) = I - (1-z)\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}(I - zT_\theta^*)^{-1}P^{-1}(I - T_\theta^*)^{-*}\begin{bmatrix} M_1^* & -M_2^* \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Тоді формула

$$\varepsilon = T_U[\omega] = (u_{11}\omega + u_{12})(u_{21}\omega + u_{22})^{-1}$$

дає опис усіх розв'язків проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, *коли* ω *пробігає клас* $\mathcal{S}^{p\times r}$.

Опис виняткових параметрів проблеми $GSTP_\kappa(K, b)$ дає така

Теорема 5.37. *Нехай* $b \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $K \in H_\infty^{p\times q}$ *і* $\kappa \in \mathbb{N}$. *Нехай* $W(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ – *деякі матриці-функції, що визначені за даними проблеми* $GSTP_\kappa(K, b)$. *Нехай* θ *є лівим дільником матрично-значної функції* b, *при цьому* $b(z) = \theta(z)\widetilde{b}(z)$, *і* $\deg\theta = \kappa_0 \leq \kappa$. *Нехай* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ *є розв'язком проблеми* $GTIP(\theta, \varphi_{21}, \varphi_{22})$, *тобто*

$$\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z) = \theta(z)\psi(z)$$

для деякої $\psi \in H_\infty^{q\times q}$. *Тоді матрично-значна функція* $s = T_W[\varepsilon]$ *вигляду*

$$s = T_W[\varepsilon] = (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{21}\varepsilon + w_{22})^{-1},$$

належить до класу $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p\times q}$, *де* $\kappa_1 \leq \kappa - \kappa_0$, *і*

$$(s - K)\widetilde{b}^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}^{p\times q}. \tag{12}$$

При цьому

$$(s - K)b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{13}$$

У випадку, коли θ *є найбільшим лівим дільником* b *і* $\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}$, *тоді* $\kappa_1 = \kappa - \kappa_0$.

Умову (12) можливо трактувати як виконання рівно $\kappa - \kappa_0$ інтерполяційних умов для функції $s \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_0}^{p\times q}$, у той час як (13) означає, що не всі інтерполяційні умови проблеми (8) виконуються. Отриманий опис виняткових параметрів у скалярному випадку співпадає з отриманими раніше результатами В. Болотнікова[12].

В кінці Розділу 5 наведено приклад узагальненої дотичної проблеми Шура-Такаги та її виняткових параметрів.

[12] Bolotnikov V. On the Carathéodory-Fejér interpolation problem for generalized Schur functions / V. Bolotnikov // Int. Eq. Oper. Th. — 2004. — Vol. 50. — P. 9–41.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розглянуто і досліджено абстрактну інтерполяційну проблему в класі узагальнених функцій Неванлінни. Основними результатами роботи є:

1) Введено поняття нормалізованої N_κ-пари, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню у просторі Понтрягіна. Показано, що для кожної нормалізованої N_κ-пари існує єдине з точністю до унітарної еквівалентності мінімальне самоспряжене лінійне відношення A у просторі Понтрягіна, таке що пара $\{\varphi, \psi\}$ відповідає цьому відношенню A. Для кожної узагальненої неванліннівської пари побудовано функціональну модель самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром. Для узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ знайдено опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$, який є простором Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathsf{N}_\omega^m(\lambda)$.

2) Розглянуто абстрактну інтерполяційну проблему в класі N_κ-пар. З кожною абстрактною інтерполяційною проблемою пов'язано деяке симетричне відношення $\widehat{A}$ у просторі Понтрягіна, таке що множина розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною самоспряжених розширень $\widetilde{A}$ цього симетричного відношення $\widehat{A}$. Знайдено вигляд резольвентної матриці оператора $\widehat{A}$ в термінах даних інтерполяції. За допомогою цієї матриці отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари. Розглянуто питання про однозначність побудови узагальненого перетворення Фур'є по розв'язку проблеми абстрактної інтерполяційної проблеми.

3) Метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Побудовано абстрактну інтерполяційну проблему, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів. Показано, що для цієї абстрактної проблеми виконується властивість Парсеваля. Знайдено вигляд резольвентної матриці.

4) Введено до розгляду новий клас мероморфних в $\mathbb{D}$ матрично-значних функцій, так званий узагальнений клас Смірнова з κ полюсами в $\mathbb{D}$. Доведено аналог теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

5) Розглянуто нову дотичну інтерполяційну проблему в матричних класах Шура, яку розв'язано методом абстрактної інтерполяційної проблеми. Цю допоміжну проблему застосовано для опису виняткових параметрів дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Нейман Е.В. Аналог теоремы Руше в обощённом классе Смирнова / Е.В. Нейман // Труды Института прикладной математики и механики. — 2008. — Vol. 17. — P. 148–153;

2. Neiman E. A functional model associated with a generalized Nevanlinna pair / E. Neiman // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 174, no. 4. — P. 469–480;

3. Neiman E. Abstract interpolation problem in generalized Nevanlinna classes / E. Neiman // Methods Funct. Anal. Topology. — 2012. — Vol. 18, no. 3. — P. 266–287;

4. Neiman E. Indefinite moment problem as an abstract interpolation problem / E. Neiman // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — Vol. 19, no. 2. — P. 168–186;

5. Neiman E. A generalized tangent interpolation problem / E. Neiman // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 207, no. 1. — P. 74–97;

6. Нейман Е.В. Абстрактная интерполяционная задача в обобщённом классе Неванлинны / Е.В. Нейман // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Харків, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна. — 2012 — P. 28-29;

7. Neiman E. Abstract interpolation problem in generalized Nevanlinna classes / E. Neiman // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. Львів — 2012 — P. 57-58;

8. Neiman E. Indefinite moment problem as an abstract interpolation problem / E. Neiman // Крымская Международная Математическая Конференция. Крим, Судак — 2013;

9. Нейман Є.В. Функціональна модель в узагальнених класах Неванлінни / Є.В. Нейман // XVII Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м. Київ, — 2016 — P. 143-146;

10. Neiman E. De Branges-Rovnyak space for N_κ-function / E. Neiman // 7th European Congress of Mathematics. м. Берлін, Німеччина — 2016 — https://cats.host/7ecm/cats2/cats21/src/login/index.php?object0 =InvoicesTableEntryUser_651&action0=downloadFile

АНОТАЦІЇ

Нейман Є.В. Абстрактна інтерполяційна проблема в узагальнених класах Неванлінни. – Рукопис. – Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена дослідженню операторного підходу до розв'язання інтерполяційних проблем в узагальнених класах функцій. Для розв'язання абстрактної інтерполяційної проблеми отримано функціональну модель самоспряженого лінійного відношення у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром. Цю функціональну модель застосовано для побудови симетричного лінійного оператора пов'язаного з абстрактною інтерполяційною проблемою і для обчислення його резольвентної матриці. Отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари. Розроблений метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Знайдено явний вигляд резольвентної матриці цієї проблеми. Введено до розгляду нові узагальнені класи матричних функцій Смірнова і отримано матричний аналог теореми Руше для матричних функцій з цих класів. Розглянуто нову дотичну інтерполяційну проблему в матричних класах Шура. Цю допоміжну проблему застосовано для опису виняткових параметрів дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Ключові слова: Абстрактна інтерполяційна проблема, клас Неванлінни, клас Шура, простір Понтрягіна з відтворюючим ядром, проблема моментів, інтерполяційна проблема Шура-Такагі.

Нейман Е.В. Абстрактная интерполяционная проблема в обобщённых классах Неванлинны. – Рукопись. – Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена исследованию операторного подхода к решению интерполяционных проблем в обобщённых классах функций. Для решения абстрактной интерполяционной проблемы построена функциональная модель самосопряженного линейного отношения в пространстве Понтрягина с воспроизводящим ядром. Для обобщенных неванлинновских функций получено описание пространства де Бранжа-Ровняка, которое является пространством Понтрягина с воспроизводящим ядром. Показано, что множество решений абстрактной интерполяционной проблемы находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством самосопряжённых расширений некоторого линейного отношения. Полученная функциональная модель самосопряженного линейного

отношения используется для нахождения резольвентной матрицы в терминах данных интерполяции. Получена параметризация всех решений абстрактной интерполяционной проблемы в виде дробно-линейного преобразования произвольной неванлинновской пары. Разработанный метод абстрактной интерполяционной проблемы применён к полной индефинитной проблеме моментов. Построена абстрактная интерполяционная проблема, множество решений которой совпадает с множеством решений проблемы моментов. Показано, что для этой абстрактной интерполяционной проблемы выполняется свойство Парсеваля. Найдено явное представление резольвентной матрицы проблемы моментов. Введено новое понятие матричных обобщенных классов Смирнова и получен аналог теоремы Руше для матричных функций из этих классов. Рассмотрена новая обобщенная касательная интерполяционная проблема в матричных классах Шура, описание решений которой получено методом абстрактной интерполяционной задачи. Эта вспомогательная проблема используется для описания исключительных параметров касательной интерполяционной проблемы Шура-Такаги.

Ключевые слова: Абстрактная интерполяционная проблема, класс Неванлинны, класс Шура, пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром, проблема моментов, интерполяционная проблема Шура-Такаги.

Neiman E. Abstract interpolation problem in the generalized Nevanlinna classes. – Manuscript. – The Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of the operator approach to interpolation problems in generalized Nevanlinna classes. A functional model for a self-adjoint linear relation in a reproducing kernel Pontryagin space is constructed as a tool for solution of an abstract interpolation problem. This functional model is used for construction of a symmetric linear relation associated with an abstract interpolation problem and for the calculation of its resolvent matrix. The set of all solutions of abstract interpolation problem is parameterized in the form of a linear fractional transformation of an arbitrary Nevanlinna pair. The method of abstract interpolation problem is applied to the full indefinite moment problem. An explicit formula for the resolvent matrix of the indefinite moment problem is found. In the thesis the concept of generalized matrix Smirnov classes is introduced and an analogue of Rouche's theorem for matrix functions of these classes is proved. A new generalized tangent interpolation problem in the classes of matrix Schur functions is considered. This auxiliary problem is used in order to describe the excluded parameters of indefinite tangent Schur-Takagi interpolation problems.

Key words: Abstract interpolation problem, Nevanlinna class, Schur class, Reproducing kernel Pontryagin space, Moment problem, Schur-Takagi problem.

Підписано до друку 27.03.2017. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1. Ум. друк. арк. 0,39.
Тираж 100 пр. Зам. 2097.

Надруковано ФОП "Черенок К.В."
Свідоцтво В02 №353859 від 25.09.2006 р.
м. Київ, вул. Пушкінська, 45/2
тел.: (044) 235-81-92, 228-45-05