НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Рибак Олександр Владиславович

УДК 517.9

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРНОЇ ТА ТОПОЛОГІЧНОЇ ДИНАМІКИ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Коляда Сергій Федорович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії динамічних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Даниленко Олександр Іванович,
Фізико-технічний інститут
низьких температур імені Б. І. Вєркіна
НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Самусенко Петро Федорович,
Національний педагогічний університет,
імені М. П. Драгоманова, м. Київ, доцент
кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист відбудеться 16 травня 2017 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Із дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 14 квітня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Пелюх Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі, пов'язані з чутливістю динамічних систем до початкових умов, зустрічаються у багатьох наукових напрямках. Подібні питання виникають у фізиці, екології, економіці та інших дисциплінах, де потрібно з'ясувати, наскільки точним може бути прогноз поведінки певного об'єкта або деякої системи. Чутливість систем також фігурує у численних розділах математики. Наприклад, у теорії диференціальних рівнянь, теорії різницевих рівнянь, математичному аналізі, топологічній динаміці. Під час дослідження динамічних систем математики намагаються знайти умови, при виконанні яких система точно буде або точно не буде чутливою, а також аналізують різноманітні види чутливості та співвідношення між ними.

Один із перших аналітичних підходів до стійкості та чутливості систем наприкінці XIX століття запровадив О. М. Ляпунов. Він запропонував визначати, наскільки сильно відрізняються між собою траєкторії, одна з яких починається у даній точці, а інша – у достатньо малому околі цієї точки. У залежності від того, як змінюється розбіжність траєкторій зі зменшенням радіуса згаданого околу, система вважається стійкою або чутливою у відповідній точці.

У часи Ляпунова більшу цікавість викликали стійкі системи, бо вони мають важливе значення для аналізу фізичних систем. Окремий інтерес до чутливих систем виник у другій половині XX століття. Зокрема, це було спричинено спробами дослідження хаосу. У роботах Е. Лоренца, Г. Фату та Б. Мандельброта було продемонстровано, що деякі системи, поведінка яких спричиняє враження хаотичної, можуть задавати фрактали – особливі геометричні фігури, структура яких залишається складною при розгляданні як завгодно малих їхніх фрагментів. Це привернуло увагу науковців до хаотичних систем. Єдиного означення хаотичності системи немає, але у різних означеннях однією з вимог до такої системи є чутливість до початкових умов.

Чутливість систем та пов'язані з нею явища особливо активно досліджуються з 1970-их років. Майже одночасно означення чутливої динамічної системи було наведено у роботах Д. Рюеля (1978), Дж. Гукенхаймера (1979) та Дж. Ауслендера і Дж. Йорка (1980).

З цього часу в статтях та монографіях багатьох авторів було опубліковано численні факти про чутливі системи. Різні властивості чутливих систем описано у статтях Е. Гласнера та Б. Вайса (1993), І. Ейкіна, Дж. Ауслендера та К. Берга (1996), В. Хуанга, П. Лу та Кс. Йє (2011).

Досить неочікуваний результат отримали Дж. Бенкс, Дж. Брукс, Г. Кернс, Г. Девіс та П. Стейсі у 1993 році. Вони встановили, що чутливість динамічної системи, заданої неперервним відображенням нескінченного компактного простору, випливає з транзитивності системи та щільності множини періодичних точок. По-перше, це спростило означення хаотичної системи, яке запровадив Р. Девані: він пропонував вважати хаотичними ті системи, які є транзитивними, чутливими до початкових умов та мають щільну множину періодичних точок. По-друге, результат згаданих п'яти авторів став прикладом того, що чутливість може бути наслідком умов, не пов'язаних з метрикою простору, на якому задана система. Наведений результат дістав узагальнення у статті Е. Гласнера та Б. Вайса (1993), які замінили умову щільності множини періодичних точок на умову щільності множини мінімальних точок. Ці результати показують, що чутливість є важливою характеристикою, яка може бути пов'язана з багатьма іншими властивостями динамічних систем.

У статті І. Ейкіна та С. Коляди (2003) було доведено, що для певного класу систем чутливість до початкових умов рівносильна тому, що певні пари точок суттєво віддаляються одна від іншої на нескінченній множині ітерацій. Усього у згаданій роботі дано чотири рівносильних означення чутливості, у кожному з яких фігурує деяке порогове значення, яке мають перевищувати відстані між певними точками. Це наводить на думку дослідити, як співвідносяться згадані порогові величини для відстаней. Такі величини названі числами Ляпунова. Усього означено чотири числа, по одному для кожного означення.

Деякі математики почали досліджувати більш сильні аналоги чутливості. Наприклад, у 2008 році Т. К. С. Мутатху ввів означення різних форм чутливості, пов'язаних зі структурою множини тих моментів, у які трапляється істотне розходження траєкторій. У цих означеннях фігурує певне порогове значення для відстані між точками. Такі значення за їх роллю в системі аналогічні числам Ляпунова.

Також на початку XXI століття проводиться багато досліджень на предмет того, які властивості зберігаються, якщо замість ітерацій одного відображення розглянути довільну напівгрупу відображень метричного простору. Деякі роботи з цього напрямку присвячені чутливості до початкових умов та різним узагальненням даного поняття. Такі питання, зокрема, розглядаються у статтях Е. Конторовича та М. Мегрелішвілі (2008), Ф. Поло (2010). Якщо деяку теорему про систему, задану ітераціями одного відображення, узагальнити на випадок напівгрупової системи, то нове твердження може виявитися складнішим для доведення. Наприклад, у статті І. Ейкіна та С. Коляди (2003) доведено, що довільна слабко змішуюча система на компакті є чутливою в сенсі Лі–Йорка. Для напівгрупових систем аналогічне питання залишається відкритим. Це ілюструє той факт, що дослідження напівгрупових систем є цікавим напрямком.

Окремо досліджується чутливість систем із простором спеціального вигляду – наприклад, динамічних систем, заданих відображенням відрізка. Серед робіт у згаданому напрямку слід згадати статтю О. Блоха (1982), де ілюструвався зв'язок чутливості та транзитивності системи, заданої неперервним відображенням відрізка. Блох довів, що довільна транзитивна система є чутливою, а довільна чутлива система є у певному сенсі майже транзитивною: вона містить транзитивну підсистему, простір якої складається зі скінченної кількості відрізків. Задачі, пов'язані з ітераціями відображення відрізка, допускають спеціальні методи аналізу. Вивчення систем, де простір є відрізком або іншою добре структурованою множиною, відноситься до комбінаторної динаміки. Згаданий напрямок використовує комбінаторний апарат, що розкриває цікавий взаємозв'язок відображень відрізка зі скінченними структурами.

Ще одним цікавим напрямком, який має відношення до топологічної динаміки, є теорія індукованих відображень. Основним підходом цієї теорії є те, що певні підмножини простору, на якому задано динамічну систему, розглядаються як елементи деякого нового топологічного або метричного простору. Досить важливим для цього напрямку є клас систем, де простором є набір замкнених зв'язних непорожніх підмножин деякого відрізка. Аналіз таких систем зроблено у статтях Д. Робатіана та М. Матвійчука (2015).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі теорії динамічних систем згідно з загальним планом досліджень у рамках науково-дослідних тем "Топологічна динаміка та нелінійні еволюційні задачі" (2006–2010 рр., номер державної реєстрації 0106U000882), "Топологічна і комбінаторна динаміка та еволюційні задачі" (2011–2015 рр., номер державної реєстрації 0111U001003) та "Топологічна динаміка на скінченновимірних та функціональних просторах" (2016–2020 рр., номер державної реєстрації 0116U000072).

Метою дослідження є виявлення рівностей та співвідношень між кількісними характеристиками чутливості динамічних систем.

Об'єктом дослідження є динамічні системи, яким властива чутливість до початкових умов.

Предметом дослідження є кількісні характеристики чутливості динамічних систем, які у даній роботі названі числами Ляпунова. Також розглядаються узагальнення поняття чутливості на системи, що задаються дією напівгрупи на метричному просторі.

Завдання дослідження:

- Знайти достатні умови рівностей між числами Ляпунова для динамічних систем (X, f) з компактним метричним простором X та неперервним відображенням f.

- Дослідити взаємозв'язок чисел Ляпунова для систем, заданих на відрізку.

- Дослідити властивості чисел Ляпунова для індукованих систем на відрізку.

- Узагальнити поняття чисел Ляпунова та чутливості у сенсі Лі-Йорка на випадок напівгрупи відображень. Дослідити, які твердження про чутливість систем переносяться на згаданий випадок. Встановити достатні умови для виконання тих самих властивостей, що і у системах (X, f).

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- Отримано різні достатні умови для рівностей між числами Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$. Зокрема, показано, що у транзитивних системах виконується $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, у слабко змішуючих та у мінімальних: $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ і $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$, а у системах, що є одночасно мінімальними та слабко змішуючими: $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

- Доведено, що у випадку неперервного відображення відрізка виконуються рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. Це означає, що діаметральна константа чутливості співпадає з діаметральною асимптотичною, а радіальна – з радіальною асимптотичною.

- Доведено, що у випадку неперервного відображення відрізка локальна радіальна константа $\mathcal{L}_3(x)$ не менша за діаметральну константу $\mathcal{L}_1$ для всіх точок за винятком несуттєвої множини. Тобто, множина тих точок x, де не виконується вказана нерівність, складає підмножину першої категорії у сенсі Бера.

- Доведено, що всі числа Ляпунова для індукованої системи на відрізку, що складається з замкнених зв'язних непорожніх підмножин, рівні нулю. Більше того, у такій системі завжди є стійка точка.

- Доведено, що у напівгрупових системах усі числа Ляпунова відрізняються не більше, ніж у два рази.

- Доведено, що у напівгруповій системі з комутативною напівгрупою за умови транзитивності виконується $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, а за умови мінімальності – $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ і $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

- Доведено, що слабко змішуюча система (X, G), де X – компакт і G – комутативна напівгрупа його неперервних відображень, є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні чутливих динамічних систем. Також результати можуть бути корисними для аналізу обчислювальних алгоритмів, де багатократно застосовуються одні й ті самі перетворення.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи топологічної динаміки та математичного аналізу. Зокрема, застосовуються властивості компактів. Наприклад, теорема про існування спільної точки у вкладених компактах та теорема Бера про те, що компакт не може бути об'єднанням зліченної сім'ї своїх ніде не щільних підмножин.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статті, опублікованої у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 року, м. Київ;

- Міжнародній конференції "Динамічні системи та їх застосування", 16–18 травня 2012 року, м. Київ;

- Міжнародній конференції "Динамічні системи та їх застосування", 22–26 червня 2015 року, м. Київ;

- семінарі відділу теорії динамічних систем Інституту математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 5 статтях [1–5] та тезах доповідей 3 міжнародних наукових конференцій [6–8].

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 62 найменування. Повний обсяг роботи складає 109 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведені загальні поняття, що мають відношення до теми дисертації. Також сформульовані завдання та основні результати даної роботи.

У **першому** розділі зроблено огляд літератури за темою дисертації. Описано способи аналізу динамічних систем та питання, що стосуються цієї тематики. Наведено основні поняття, які пов'язані з комбінаторною та топологічною динамікою, а також із чутливістю до початкових умов.

Означення 1.1. Динамічною системою називається пара (X, f), де X – деяка множина, а f – відображення цієї множини у себе.

Ми будемо розглядати випадки, коли множина X – метричний простір, а відображення f є неперервним відносно метрики цього простору. Тому далі не будемо казати про це окремо. Також, як правило, розглядається випадок компактного X.

Відмітимо, що при вивченні динамічної системи (X, f) ми зазвичай аналізуємо еволюцію точок або підмножин простору X, яка відбувається під час багатократного застосування відображення f. Тому введемо позначення, які ми будемо використовувати далі.

Через f^n позначатимемо n-кратну композицію функції f, тобто $f^n(x) = \underbrace{f(...f}_{n \text{ разів}}(x)...)$. Зокрема, f^0 є тотожним відображенням: $f^0(x) = x$.

Якщо A є деякою множиною, через $f(A)$ позначатимемо множину $\{f(x)|x \in A\}$.

Також нехай $\mathbb{N}_0$ позначає множину цілих невід'ємних чисел, тобто множину натуральних чисел разом із нулем.

Означення 1.2. Послідовність $(x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...)$ називається орбітою (або траєкторією) точки x у системі (X, f). Множину

$\{x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...\}$ позначатимемо як $\mathrm{Orb}_f(x)$ або просто як $\mathrm{Orb}(x)$, якщо зрозуміло, яка функція f розглядається.

Деякі системи демонструють сильну непередбачуваність. Наприклад, для $X = [0,1]$ та $f(x) = 4x(1-x)$ послідовність $\{f^n(x)\}$ дуже хаотична. Починаючи з близьких x_1 та x_2, для достатньо великих n можна отримати досить далекі точки $f^n(x_1)$ та $f^n(x_2)$. Для аналізу подібного явища О. М. Ляпунов запропонував означення стійкої системи.

Означення 1.5. Систему (X, f) називатимемо стійкою (або рівномірно неперервною) в точці x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке може залежати від x та ε), що для довільного y, яке задовольняє умову $d(x,y) < \delta$, та для довільного цілого невід'ємного числа n справджується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$.

Протилежністю до стійких систем є чутливі системи.

Означення 1.8. Система (X, f) називається чутливою до початкових умов (або просто чутливою), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якого $\delta > 0$ знайдуться такі $y \in X$ та $n \in \mathbb{N}$, що $d(x,y) < \delta$ та $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Також можна досліджувати класи динамічних систем, що задовольняють певні умови, пов'язані зі взаємним розташуванням ітерацій відкритих підмножин простору системи. Наприклад, виділяють транзитивні, слабко змішуючі та мінімальні системи.

Означення 1.10. Динамічна система (X, f) називається транзитивною, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U, V \subset X$ існує таке ціле невід'ємне n, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Означення 1.11. Динамічна система (X, f) називається слабко змішуючою, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U_1, V_1, U_2, V_2 \subset X$ існує таке ціле невід'ємне n, що одночасно справджуються умови $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ та $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$.

Означення 1.12. Динамічна система (X, f) називається мінімальною, якщо для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ знайдеться таке ціле невід'ємне n, що $f^n(x) \in U$.

Окрім означення транзитивності, яке спирається на взаємодію відкритих підмножин простору X, можна ввести поняття транзитивної точки.

Означення 1.13. Точка x системи (X, f) називається транзитивною, якщо для будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ існує таке ціле невід'ємне число n, що $f^n(x)$ належить U.

Виявляється, топологічні властивості системи пов'язані з явищем чутливості. Наприклад, цей зв'язок демонструє така теорема.

Теорема 1.7 (*Бенкс, Брукс, Кернс, Девіс, Стейсі*). Нехай динамічна система (X, f) задана на компактному просторі X. Якщо ця система транзитивна і має щільну множину періодичних точок, то вона чутлива або множина X скінченна.

У **другому** розділі наведені означення чисел Ляпунова як певних кількісних характеристик чутливості системи.

Означення 2.1. Перше число Ляпунова $\mathcal{L}_1$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_1, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_1$ та для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 2.2. Друге число Ляпунова $\mathcal{L}_2$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_2, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_2$ та для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Означення 2.3. Третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_3, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_3$, кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та довільної $x \in U$ знайдуться такі $y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 2.4. Четверте число Ляпунова $\mathcal{L}_4$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_4, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_4$, кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та довільної $x \in U$ знайдеться така $y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Між числами Ляпунова виконуються очевидні нерівності $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$. Також доведене співвідношення, яке обмежує розбіжності між числами Ляпунова. Воно сформульоване у якості теореми.

Теорема 2.1. Нехай (X, f) – динамічна система на компактному метричному просторі X з неперервною функцією f. Тоді $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$.

З цієї теореми та зазначених раніше нерівностей маємо, що за відповідних обмежень нерівність $\mathcal{L}_i \leq 2\mathcal{L}_j$ справджується для довільних $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Далі вивчаються співвідношення між числами Ляпунова для певних класів систем.

Теорема 2.2. Нехай (X, f) – транзитивна динамічна система. Тоді $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Транзитивна система (X, f), де X не має ізольованих точок, називається ТоМ-системою, якщо кожна точка $x \in X$ є транзитивною або мінімальною. Тобто для кожної $x \in X$ виконана рівність $\overline{\mathrm{Orb}(x)} = X$ або система $(\overline{\mathrm{Orb}(x)}, f)$ мінімальна. Для таких систем, до яких, зокрема, належать транзитивні та мінімальні, має місце наступна теорема.

Теорема 2.3 Нехай (X, f) – чутлива ТоМ-система. Тоді $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Нарешті, для слабко змішуючих систем доведені рівності між декількома парами чисел Ляпунова.

Теорема 2.4. Нехай (X, f) – слабко змішуюча система. Тоді вірні такі рівності.

1. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathrm{diam}(X)$.
2. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.
3. Якщо система (X, f) також є мінімальною, то $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = \mathrm{diam}(X)$.

У **третьому** розділі досліджуються співвідношення між константами Ляпунова для неперервного відображення відрізка.

Введені поняття локальних чисел Ляпунова.

Означення 3.1. Локальне третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3(x)$ для точки x динамічної системи (X, f) – це найбільше з таких $\varepsilon_3(x)$, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_3(x)$ та кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$, яка містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 3.2. Локальне четверте число Ляпунова $\mathcal{L}_4(x)$ для точки x системи (X, f) – це найбільше з таких $\varepsilon_4(x)$, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_4(x)$ та кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$, яка містить x, знайдеться така $y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Отримано рівності між деякими парами чисел Ляпунова.

Теорема 3.3. Якщо I – відрізок, то для системи (I, f) виконується рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Теорема 3.4. Для довільної динамічної системи (I, f) на відрізку I справджується рівність $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Також показано, що випадок, коли $\mathcal{L}_3(x)$ менше за $\mathcal{L}_1$, не є типовим.

Теорема 3.5. Для довільної динамічної системи (X, f) на метричному просторі (X, d) підмножина $Y = \{x \in X |\ \mathcal{L}_3(x) < \mathcal{L}_1\}$ є підмножиною першою категорії Бера в X. Тобто Y є зліченним об'єднанням таких множин Y_i, що ніяке замикання $\overline{Y_i}$ не містить жодної відкритої непорожньої підмножини простору X.

Також у третьому розділі розглядаються індуковані системи.

Означення 3.3. Індукованою системою називається пара (S, f), побудована на основі динамічної системи (X, f) таким чином: у якості S обирається деяка сім'я підмножин множини X, а функція f природним чином розповсюджується на підмножини згаданої сім'ї: для всіх $A \in S$ відображення задається рівністю $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$. При цьому для кожної $A \in S$ має виконуватися включення $f(A) \in S$.

Зокрема, розглядаються індуковані системи $(C(I), f)$, де $C(I)$ – множина відрізків та окремих точок, що містяться у відрізку I. На множині $C(I)$ розглядається метрика Хаусдорфа, яка для відрізків має простий вигляд: $d_H([a, b], [c, d]) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$.

Основним результатом дослідження у цьому напрямку є доведення того, що система $(C(I), f)$ має стійкий у сенсі Ляпунова елемент, отже не може бути чутливою.

Теорема 3.8. Нехай I – відрізок. Тоді в індукованій системі $(C(I), f)$ з метрикою d_H існує такий елемент $J \in C(I)$, що $\mathcal{L}_3(J) = 0$.

У **четвертому** розділі поняття чисел Ляпунова узагальнюється на випадок дії напівгрупи. Проведено аналіз, які властивості чисел Ляпунова зберігаються при переході від систем вигляду (X, f) до напівгрупових.

Означення 4.1. Напівгруповою динамічною системою називається пара (X, G), де X – деяка множина, а G – напівгрупа, для якої кожному елементу $g \in G$ поставлено у відповідність деяке відображення $f_g : X \to X$. При цьому для будь-яких $g, h \in G$ повинна справджуватись умова $f_{gh} = f_g(f_h)$. Також, якщо G містить одиничний елемент e, то має виконуватися тотожність $f_e(x) = x$.

Для таких систем введено поняття чисел Ляпунова, що узагальнюють відповідні характеристики систем вигляду (X, f).

Означення 4.3. Першим числом Ляпунова $\mathcal{L}_1$ для системи (X, G) називається найбільше з таких ε_1, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_1$ та будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4.4. Другим числом Ляпунова $\mathcal{L}_2$ для системи (X, G) називається найбільше з таких ε_2, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_2$ та будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Означення 4.5. Третім числом Ляпунова $\mathcal{L}_3$ для системи (X, G) називається найбільше з таких $\mathcal{L}_3$, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_3$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4.6. Четвертим числом Ляпунова $\mathcal{L}_4$ для системи (X, G) називається найбільше з таких $\mathcal{L}_4$, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_4$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Отримано теореми про рівності між числами Ляпунова для таких систем або їх певних класів.

Теорема 4.1. Для системи (X, G) виконується нерівність $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$.

Теорема 4.3. Для транзитивної системі (X, G) з комутативною напівгрупою G вірна рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Теорема 4.4. Для мінімальної системі (X, G) з комутативною напівгрупою G вірні рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Також отримано результати, які стосуються чутливості у сенсі Лі-Йорка.

Означення 4.10. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати ε-асимптотичною, якщо існує лише скінченна кількість елементів $g \in G$, для яких $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$. Пара (x, y) називається асимптотичною, якщо вона ε-асимптотична для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Означення 4.12. Пара (x, y) називається проксимальною, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує елемент $g \in G$, для якого $d(g(x), g(y)) < \delta$. Через $\mathrm{Prox}(x)$ ми позначатимемо множину точок $y \in X$, для яких пара (x, y) є проксимальною.

Означення 4.13. Пара (x, y) називається парою Лі-Йорка, якщо вона проксимальна, але не асимптотична. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати ε-парою Лі-Йорка, якщо вона проксимальна, але не ε-асимптотична.

Означення 4.14. Система (X, G) називається чутливою у сенсі Лі-Йорка, якщо є таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та будь-якого $x \in U$ існує таке $y \in U$, для якого пара (x, y) є ε-парою Лі-Йорка.

Для певних класів систем доведена їх чутливість у сенсі Лі-Йорка.

Теорема 4.10. Нехай X містить більше однієї точки, G – комутативна та (X, G) – слабко змішуюча. Тоді (X, G) є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Також можна розглянути тотально транзитивні системи, тобто такі (X, G), що G – група, і для будь-якої підгрупи H, яка має скінченний індекс у G, система (X, H) є транзитивною. Для наведених систем спостерігається аналогічне явище.

Теорема 4.11. Нехай X містить більше однієї точки, G – група, а (X, G) є тотально транзитивною системою з усюди щільною множиною періодичних точок. Тоді (X, G) є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

ВИСНОВКИ

Дисертацію присвячено вивченню кількісних показників чутливості динамічних систем. Також розглянуто ширший клас напівгрупових систем та зроблені деякі узагальнення на цей випадок.

Основні результати дисертаційної роботи можна підсумувати таким чином:

- Отримано різні достатні умови для рівностей та нерівностей між числами Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$, пов'язані з топологічними властивостями динамічної системи (X, f).
- Доведено рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ для системи, заданої неперервним відображенням відрізка у себе.
- Показано, що в системі, заданій неперервним відображенням компактного простору, точки x, для яких третє локальне число Ляпунова $\mathcal{L}_3(x)$ менше за перше число $\mathcal{L}_1$ цієї системи, складають множину першої категорії у сенсі Бера. Тобто, множина таких точок є у певному сенсі малою. Зокрема, вона не може співпадати з усім простором, на якому задано систему.
- Показано, що індукована система, простором якої є сім'я замкнених зв'язних непорожніх підмножин відрізка, завжди має точку стійкості, отже, зокрема, не може бути чутливою.
- Отримано різні достатні умови для рівностей та нерівностей між числами Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$ у випадку дії напівгрупи.
- Доведено, що у випадку комутативної напівгрупи G слабко змішуюча система (X, G) чутлива у сенсі Лі-Йорка.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Rybak O. V.* On the Lyapunov numbers / S. Kolyada, O. Rybak // Colloquium Mathematicum. — 2013. — **131**, 2. — P. 209–218.

2. *Рибак О. В.* Чутливість Лі-Йорка для дії напівгрупи / О. В. Рибак // Український математичний журнал. — 2013. — **65**, 5. — С. 681–688.

3. *Рибак О. В.* Числа Ляпунова для динамічних систем на відрізку / О. Рибак // Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка. — 2013. — **10**. — С. 127–134.

4. *Рибак О. В.* Чутливість індукованої системи на відрізку / О. В. Рибак // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, 1. — С. 122–128.

5. *Рибак О. В.* Числа Ляпунова у напівгрупових системах / О. В. Рибак // Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України. — 2016. — **13**, 2. — С. 255–266.

6. *Рибак О. В.* Співвідношення між константами чутливості у динамічних системах / О. Рибак // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 року, Київ, Україна. — Київ: НТУУ "КПІ", 2012. — Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. — С. 211.

7. *Рибак О. В.* Кількісний підхід до чутливості динамічних систем / О. Рибак // Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", 16–18 травня 2012 року, Київ, Україна. — Київ: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 38.

8. *Rybak O. V.* Sensitivity of the induced systems on an interval / O. Rybak // Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", 22–26 червня 2015 року, Київ, Україна. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 49.

АНОТАЦІЇ

Рибак О. В. Деякі задачі комбінаторної та топологічної динаміки. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей, які пов'язані з чутливістю динамічних систем до початкових умов. Спочатку розглянуті раніше відомі поняття та результати, що відносяться до цього питання. В основній частині зроблено узагальнення таких результатів та доведені деякі нові твердження про чутливість систем.

Вводяться чотири числа Ляпунова, які є кількісними показниками, призначені для опису екстремальних та асимптотичних характеристик чутливості певної системи (X, f). Тут X – метричний і, як правило, компактний простір, а f є його неперервним відображенням у себе. Для чисел Ляпунова доведено серію рівностей та нерівностей. Зокрема, показано, що у випадку компактного простору довільні числа Ляпунова відрізняються не більше, ніж у два рази. Також показані рівності між певними парами цих чисел для транзитивних, мінімальних і слабко змішуючих систем.

Окремо розглядаються динамічні системи, де простором X є відрізок. Для них теж доведені рівності між певними числами Ляпунова, які не обов'язково мають місце у загальному випадку. Додатково розглядаються індуковані системи, у яких точками простору є всі відрізки, що належать даному. Для систем такого типу показано, що завжди знайдеться елемент, стійкий у сенсі Ляпунова. У якості наслідку отримуємо, що наведені системи не бувають чутливими до початкових умов.

Також у дисертації розглянуто системи більш загального вигляду, де замість одного відображення діє довільна їх напівгрупа. На випадок таких систем перенесено поняття чисел Ляпунова, а також чутливості у сенсі Лі-Йорка. Для цього узагальненого випадку отримані рівності та нерівності між числами Ляпунова. Також доведено теорему про те, що слабко змішуюча система з компактним простором, що містить більше однієї точки, та комутативною напівгрупою неперервних відображень є чутливою в сенсі Лі-Йорка. Це узагальнює відомий результат для систем із одним відображенням.

Ключові слова: динамічна система, дія напівгрупи, мінімальність, слабка змішуваність, транзитивність, числа Ляпунова, чутливість.

Рыбак А. В. Некоторые задачи комбинаторной и топологической динамики. — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена изучению свойств, которые связаны с чувствительностью динамических систем к начальным условиям. Сначала рассмотрены ранее известные понятия и результаты, относящиеся к этому вопросу. В основной части сделаны обобщения таких результатов и доказаны некоторые новые утверждения о чувствительности систем.

Вводятся четыре числа Ляпунова, которые являются количественными показателями, предназначенными для описания экстремальных и асимптотических характеристик чувствительности определённой системы (X, f). Здесь X – метрическое и, как правило, компактное пространство, а f является его непрерывным отображением в себя. Для чисел Ляпунова доказана серия равенств и неравенств. В частности, показано, что в случае компактного пространства произвольные числа Ляпунова отличаются не более, чем в два раза. Также показаны равенства между определёнными парами этих чисел для транзитивных, минимальных и слабо перемешивающих систем.

Отдельно рассматриваются динамические системы, где пространством X является отрезок. Для них тоже доказаны равенства между определёнными числами Ляпунова, которые не обязательно имеют место в общем случае. Дополнительно рассматриваются индуцированные системы, в которых точками пространства являются все отрезки, принадлежащие данному. Для систем такого типа показано, что всегда найдётся элемент, устойчивый в смысле Ляпунова. В качестве следствия получаем, что упомянутые системы не бывают чувствительными к начальным условиям.

Также в диссертации рассмотрены системы более общего вида, где вместо одного отображения действует произвольная их полугруппа. На случай таких систем перенесены понятия чисел Ляпунова, а также чувствительности в смысле Ли-Йорка. Для этого обобщённого случая получены равенства и неравенства между числами Ляпунова. Ещё доказана теорема о том, что слабо перемешивающая система с компактным пространством, которое содержит более одной точки, и коммутативной полугруппой непрерывных отображений является чувствительной в смысле Ли-Йорка. Это обобщает известный результат для систем с одним отображением.

Ключевые слова: динамическая система, действие полугруппы, минимальность, слабая перемешиваемость, транзитивность, числа Ляпунова, чувствительность.

Rybak O. V. Some problems of combinatorial and topological dynamics. — Manuscript.

Thesis for the candidate's degree of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — Differential Equations. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The dissertational work is devoted to studying the properties, which are connected with the sensitivity of the dynamical systems to the initial conditions. At the beginning we consider earlier known concepts and results, related to this topic. In the main part the generalization of such results is made and some new statements about the sensitivity of systems are proved.

We introduce four Lyapunov numbers, which are the quantitative measures, assigned for the description of extremal and asymptotic characteristics of sensitivity for some system (X, f). Here X is a metric and, as usual, compact space, and f is its self-mapping. A series of equalities and inequalities is proved for the Lyapunov numbers. In partial, it is shown, that in case of a compact space two arbitrary Lyapunov numbers differ at most twice. Also we have shown the equalities between some pairs of these numbers for transitive, minimal and weakly mixing systems.

Separately we consider the systems, where a segment stands for the space X. For them we also have proved the equalities between the Lyapunov numbers, which not necessarily have place in the general case. Additionally the induced systems, where the points of the space are all segments, which belong to the given one, are studied. It is shown for the systems of such type, that there is always an element, which is stable in the sense of Lyapunov. As a corollary we get, that the mentioned systems can't be sensitive to the initial conditions.

Also the systems of more general type, where an arbitrary semigroup of mappings acts instead of a single one, are considered in the dissertation. The concept of Lyapunov numbers, and also the Li-Yorke sensitivity, are transferred to the case of such systems. For this generalized case the equalities and inequalities are obtained. Also we have proved a theorem, which states the following: a weakly mixing system with a compact space, which contains more than one point, and a commutative semigroup of continuous mappings is sensitive in the sense of Li-Yorke. This generalizes the known result for the systems with one mapping.

Key words: dynamical system, semigroup action, minimality, weak mixing, transitivity, Lyapunov numbers, sensitivity.