НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Рибак Олександр Владиславович

УДК 517.987

Деякі задачі комбінаторної та топологічної динаміки

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:

доктор фізико–математичних наук

Коляда Сергій Федорович

Київ — 2017

Зміст

Перелік умовних позначень

(X, f) – динамічна система, яка задається простором X та відображенням f цього простору в себе.

$(X, f) \times (Y, g)$ – добуток систем, що задається на просторі $X \times Y$ за допомогою відображення $h(x, y) = (f(x), g(y))$ для $x \in X$, $y \in Y$.

(X, G) – динамічна система, яка задається простором X та напівгрупою G, елементи якої є відображеннями X у себе.

$f^n(x)$ – відображення вигляду $\underbrace{f(...f(f}_{n \text{ разів}}(x))...)$.

$f(A)$ – образ множини A відносно відображення f, тобто множина всіх y, для яких знайдеться такий елемент $x \in A$, що $f(x) = y$.

$f^{-1}(A)$ – прообраз множини A відносно відображення f, тобто множина всіх y, для яких знайдеться такий $x \in A$, що $f(y) = x$.

$\overline{A}$ – об'єднання множини A з множиною її граничних точок.

$B_r(x)$ – відкрита куля з радіусом r та центром x.

$N_f(x, U)$ – множина цілих невід'ємних чисел n, для яких $f^n(x)$ належить множині U.

$N_f(U, V)$ – множина цілих невід'ємних чисел n, для яких множини $f^n(U)$ та V мають спільний елемент.

$\mathrm{diam}(X)$ – діаметр множини X.

$\mathrm{Asym}(x)$ – множина точок y системи (X, f), для яких відстань між $f^n(x)$ та $f^n(y)$ зі зростанням n прямує до 0.

$\mathrm{Eq}(f)$ – множина рівномірно неперервних точок системи (X, f).

$\mathrm{Orb}_f(x)$ – орбіта точки x під дією ітерацій відображення f, тобто множина $\{x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...\}$.

$\mathrm{Prox}(x)$ – множина точок y, для яких пара (x, y) є проксимальною, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке n, що відстань між $f^n(x)$ та $f^n(y)$ менша за ε.

$\mathrm{Trans}(f)$ – множина таких точок x, для яких $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ співпадає з усім простором X, на якому задана динамічна система.

$\varnothing$ – порожня множина.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

$\mathbb{N}_0$ – множина цілих невід'ємних чисел.

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

Вступ

Актуальність теми. Задачі, пов'язані з чутливістю динамічних систем до початкових умов, зустрічаються у багатьох наукових напрямках. Подібні питання виникають у фізиці, екології, економіці та інших дисциплінах, де потрібно з'ясувати, наскільки точним може бути прогноз поведінки певного об'єкта або деякої системи. Чутливість систем також фігурує у численних розділах математики. Наприклад, у теорії диференціальних рівнянь, теорії різницевих рівнянь, математичному аналізі, топологічній динаміці. Під час дослідження динамічних систем математики намагаються знайти умови, при виконанні яких система точно буде або точно не буде чутливою, а також аналізують різноманітні види чутливості та співвідношення між ними.

Один із перших аналітичних підходів до стійкості та чутливості систем наприкінці XIX століття запровадив О. М. Ляпунов. Він запропонував визначати, наскільки сильно відрізняються між собою траєкторії, одна з яких починається у даній точці, а інша – у достатньо малому околі цієї точки. У залежності від того, як змінюється розбіжність траєкторій зі зменшенням радіуса згаданого околу, система вважається стійкою або чутливою у відповідній точці.

У часи Ляпунова більшу цікавість викликали стійкі системи, бо вони мають важливе значення для аналізу фізичних систем. Окремий інтерес до чутливих систем виник у другій половині XX століття. Зокрема, це було спричинено спробами дослідження хаосу. У роботах Е. Лоренца, Г. Фату та Б. Мандельброта було продемонстровано, що деякі системи, поведінка яких спричиняє враження хаотичної, можуть задавати фрактали – особливі геометричні фігури, структура яких залишається складною при розгляданні як завгодно малих їхніх фрагментів. Це привернуло увагу науковців до хаотичних систем. Єдиного означення хаотичності системи немає, але у різних означеннях однією з вимог до такої системи є чутливість до початкових умов.

Чутливість систем та пов'язані з нею явища особливо активно досліджуються з 1970-их років. Майже одночасно означення чутливої динамічної системи було наведено у роботах Д. Рюеля (1978), Дж. Гукенхаймера (1979) та Дж. Ауслендера і Дж. Йорка (1980).

З цього часу в статтях та монографіях багатьох авторів було опубліковано численні факти про чутливі системи. Різні властивості чутливих систем описано у статтях Е. Гласнера та Б. Вайса (1993), І. Ейкіна, Дж. Ауслендера та К. Берга (1996), В. Хуанга, П. Лу та Кс. Йє (2011).

Досить неочікуваний результат отримали Дж. Бенкс, Дж. Брукс, Г. Кернс, Г. Девіс та П. Стейсі у 1993 році. Вони встановили, що чутливість динамічної системи, заданої неперервним відображенням нескінченного компактного простору, випливає з транзитивності системи та щільності множини періодичних точок. По-перше, це спростило означення хаотичної системи, яке запровадив Р. Девані: він пропонував вважати хаотичними ті системи, які є транзитивними, чутливими до початкових умов та мають щільну множину періодичних точок. По-друге, результат згаданих п'яти авторів став прикладом того, що чутливість може бути наслідком умов, не пов'язаних з метрикою простору, на якому задана система. Наведений результат дістав узагальнення у статті Е. Гласнера та Б. Вайса (1993), які замінили умову щільності множини періодичних точок на умову щільності множини мінімальних точок. Ці результати показують, що чутливість є важливою характеристикою, яка може бути пов'язана з багатьма іншими властивостями динамічних систем.

У статті І. Ейкіна та С. Коляди (2003) було доведено, що для певного класу систем чутливість до початкових умов рівносильна тому, що певні пари точок суттєво віддаляються одна від іншої на нескінченній множині ітерацій. Усього у згаданій роботі дано чотири рівносильних означення чутливості, у кожному з яких фігурує деяке порогове значення, яке мають перевищувати відстані між певними точками. Це наводить на думку дослідити, як співвідносяться згадані порогові величини для відстаней. Такі величини названі числами Ляпунова. Усього означено чотири числа, по одному для кожного означення.

Деякі математики почали досліджувати більш сильні аналоги чутливості. Наприклад, у 2008 році Т. К. С. Мутатху ввів означення різних форм чутливості, пов'язаних зі структурою множини тих моментів, у які трапляється істотне розходження траєкторій. У цих означеннях фігурує певне порогове значення для відстані між точками. Такі значення за їх роллю в системі аналогічні числам Ляпунова.

Також на початку XXI століття проводиться багато досліджень на предмет того, які властивості зберігаються, якщо замість ітерацій одного відображення розглянути довільну напівгрупу відображень метричного простору. Деякі роботи з цього напрямку присвячені чутливості до початкових умов та різним узагальненням даного поняття. Такі питання, зокрема, розглядаються у статтях Е. Конторовича та М. Мегрелішвілі (2008), Ф. Поло (2010). Якщо деяку теорему про систему, задану ітераціями одного відображення, узагальнити на випадок напівгрупової системи, то нове твердження може виявитися складнішим для доведення.

Наприклад, у статті І. Ейкіна та С. Коляди (2003) доведено, що довільна слабко змішуюча система на компакті є чутливою в сенсі Лі–Йорка. Для напівгрупових систем аналогічне питання залишається відкритим. Це ілюструє той факт, що дослідження напівгрупових систем є цікавим напрямком.

Окремо досліджується чутливість систем із простором спеціального вигляду – наприклад, динамічних систем, заданих відображенням відрізка. Серед робіт у згаданому напрямку слід згадати статтю О. Блоха (1982), де ілюструвався зв'язок чутливості та транзитивності системи, заданої неперервним відображенням відрізка. Блох довів, що довільна транзитивна система є чутливою, а довільна чутлива система є у певному сенсі майже транзитивною: вона містить транзитивну підсистему, простір якої складається зі скінченної кількості відрізків. Задачі, пов'язані з ітераціями відображення відрізка, допускають спеціальні методи аналізу. Вивчення систем, де простір є відрізком або іншою добре структурованою множиною, відноситься до комбінаторної динаміки. Згаданий напрямок використовує комбінаторний апарат, що розкриває цікавий взаємозв'язок відображень відрізка зі скінченними структурами.

Ще одним цікавим напрямком, який має відношення до топологічної динаміки, є теорія індукованих відображень. Основним підходом цієї теорії є те, що певні підмножини простору, на якому задано динамічну систему, розглядаються як елементи деякого нового топологічного або метричного простору. Досить важливим для цього напрямку є клас систем, де простором є набір замкнених зв'язних непорожніх підмножин деякого відрізка. Аналіз таких систем зроблено у статтях Д. Робатіана та М. Матвійчука (2015).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі теорії динамічних систем згідно з загальним планом досліджень у рамках науково-дослідних тем "Топологічна динаміка та нелінійні еволюційні задачі" (2006–2010 рр., номер державної реєстрації 0106U000882), "Топологічна і комбінаторна динаміка та еволюційні задачі" (2011–2015 рр., номер державної реєстрації 0111U001003) та "Топологічна динаміка на скінченновимірних та функціональних просторах" (2016–2020 рр., номер державної реєстрації 0116U000072).

Метою дослідження є виявлення рівностей та співвідношень між кількісними характеристиками чутливості динамічних систем.

Об'єктом дослідження є динамічні системи, яким властива чутливість до початкових умов.

Предметом дослідження є кількісні характеристики чутливості динамічних систем, які у даній роботі названі числами Ляпунова. Також розглядаються узагальнення поняття чутливості на системи, що задаються дією напівгрупи на метричному просторі.

Завдання дослідження:

- Знайти достатні умови рівностей між числами Ляпунова для динамічних систем (X, f) з компактним метричним простором X та неперервним відображенням f.
- Дослідити взаємозв'язок чисел Ляпунова для систем, заданих на відрізку.
- Дослідити властивості чисел Ляпунова для індукованих систем на відрізку.

- Узагальнити поняття чисел Ляпунова та чутливості у сенсі Лі-Йорка на випадок напівгрупи відображень. Дослідити, які твердження про чутливість систем переносяться на згаданий випадок. Встановити достатні умови для виконання тих самих властивостей, що і у системах (X, f).

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- Отримано різні достатні умови для рівностей між числами Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$. Зокрема, показано, що у транзитивних системах виконується $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, у слабко змішуючих та у мінімальних: $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ і $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$, а у системах, що є одночасно мінімальними та слабко змішуючими: $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.
- Доведено, що у випадку неперервного відображення відрізка виконуються рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. Це означає, що діаметральна константа чутливості співпадає з діаметральною асимптотичною, а радіальна – з радіальною асимптотичною.
- Доведено, що у випадку неперервного відображення відрізка локальна радіальна константа $\mathcal{L}_3(x)$ не менша за діаметральну константу $\mathcal{L}_1$ для всіх точок за винятком несуттєвої множини. Тобто, множина тих точок x, де не виконується вказана нерівність, складає підмножину першої категорії у сенсі Бера.
- Доведено, що всі числа Ляпунова для індукованої системи на відрізку, що складається з замкнених зв'язних непорожніх підмножин, рівні нулю. Більше того, у такій системі завжди є стійка точка.
- Доведено, що у напівгрупових системах усі числа Ляпунова відрізняються не більше, ніж у два рази.

- Доведено, що у напівгруповій системі з комутативною напівгрупою за умови транзитивності виконується $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, а за умови мінімальності – $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ і $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.
- Доведено, що слабко змішуюча система (X, G), де X – компакт і G – комутативна напівгрупа його неперервних відображень, є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні чутливих динамічних систем. Також результати можуть бути корисними для аналізу обчислювальних алгоритмів, де багатократно застосовуються одні й ті самі перетворення.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи топологічної динаміки та математичного аналізу. Зокрема, застосовуються властивості компактів. Наприклад, теорема про існування спільної точки у вкладених компактах та теорема Бера про те, що компакт не може бути об'єднанням зліченної сім'ї своїх ніде не щільних підмножин.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статті, опублікованої у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 року, м. Київ;

- Міжнародній конференції “Динамічні системи та їх застосування”, 16–18 травня 2012 року, м. Київ;
- Міжнародній конференції “Динамічні системи та їх застосування”, 22–26 червня 2015 року, м. Київ;
- семінарі відділу теорії динамічних систем Інституту математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 5 статтях [25, 51–54] та тезах доповідей 3 міжнародних наукових конференцій [55–57].

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 62 найменування. Повний обсяг роботи складає 109 сторінок друкованого тексту.

Подяка. Автор висловлює подяку своєму науковому керівникові С. Ф. Коляді за постановку цікавих задач і допомогу при публікації статей. Також автор висловлює подяку співробітникам відділу теорії динамічних систем Інституту математики за поради та моральну підтримку.

Короткий зміст дисертації

У **вступі** наведені загальні поняття, що мають відношення до теми дисертації. Також сформульовані завдання та основні результати даної роботи.

У **першому** розділі зроблено огляд літератури за темою дисертації. Описано способи аналізу динамічних систем та питання, що стосуються цієї тематики. Наведено основні поняття, які пов'язані з комбінаторною та топологічною динамікою, а також із чутливістю до початкових умов.

Означення 1.1. Динамічною системою називається пара (X, f), де X – деяка множина, а f – відображення цієї множини у себе.

Ми будемо розглядати випадки, коли множина X – метричний простір, а відображення f є неперервним відносно метрики цього простору. Тому далі не будемо казати про це окремо. Також, як правило, розглядається випадок компактного X.

Відмітимо, що при вивченні динамічної системи (X, f) ми зазвичай аналізуємо еволюцію точок або підмножин простору X, яка відбувається під час багатократного застосування відображення f. Тому введемо позначення, які ми будемо використовувати далі.

Через f^n позначатимемо n-кратну композицію функції f, тобто $f^n(x) = \underbrace{f(...f}_{n \text{ разів}}(x)...)$. Зокрема, f^0 є тотожним відображенням: $f^0(x) = x$.

Якщо A є деякою множиною, через $f(A)$ позначатимемо множину $\{f(x)|x \in A\}$.

Також нехай $\mathbb{N}_0$ позначає множину цілих невід'ємних чисел, тобто множину натуральних чисел разом із нулем.

Означення 1.2. Послідовність $(x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...)$ називається орбітою (або траєкторією) точки x у системі (X, f). Множину $\{x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...\}$ позначатимемо як $\mathrm{Orb}_f(x)$ або просто як $\mathrm{Orb}(x)$, якщо зрозуміло, яка функція f розглядається.

Деякі системи демонструють сильну непередбачуваність. Наприклад, для $X = [0, 1]$ та $f(x) = 4x(1 - x)$ послідовність $\{f^n(x)\}$ дуже хаотична. Починаючи з близьких x_1 та x_2, для достатньо великих n можна отримати досить далекі точки $f^n(x_1)$ та $f^n(x_2)$. Для аналізу подібного явища О. М. Ляпунов запропонував означення стійкої системи.

Означення 1.5. Систему (X, f) називатимемо стійкою (або рівномірно неперервною) в точці x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке може залежати від x та ε), що для довільного y, яке задовольняє умову $d(x, y) < \delta$, та для довільного цілого невід'ємного числа n справджується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$.

Протилежністю до стійких систем є чутливі системи.

Означення 1.8. Система (X, f) називається чутливою до початкових умов (або просто чутливою), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якого $\delta > 0$ знайдуться такі $y \in X$ та $n \in \mathbb{N}$, що $d(x, y) < \delta$ та $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Також можна досліджувати класи динамічних систем, що задовольняють певні умови, пов'язані зі взаємним розташуванням ітерацій відкритих підмножин простору системи. Наприклад, виділяють транзитивні, слабко змішуючі та мінімальні системи.

Означення 1.10. Динамічна система (X, f) називається транзитивною, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U, V \subset X$ існує таке ціле невід'ємне n, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Означення 1.11. Динамічна система (X, f) називається слабко змішуючою, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U_1, V_1, U_2, V_2 \subset X$ існує таке ціле невід'ємне n, що одночасно справджуються умови $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ та $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$.

Означення 1.12. Динамічна система (X, f) називається мінімальною, якщо для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ знайдеться таке ціле невід'ємне n, що $f^n(x) \in U$.

Окрім означення транзитивності, яке спирається на взаємодію відкритих підмножин простору X, можна ввести поняття транзитивної точки.

Означення 1.13. Точка x системи (X, f) називається транзитивною, якщо для будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ існує таке ціле невід'ємне число n, що $f^n(x)$ належить U.

Виявляється, топологічні властивості системи пов'язані з явищем чутливості. Наприклад, цей зв'язок демонструє така теорема.

Теорема 1.7 (*Бенкс, Брукс, Кернс, Девіс, Стейсі*). Нехай динамічна система (X, f) задана на компактному просторі X. Якщо ця система транзитивна і має щільну множину періодичних точок, то вона чутлива або множина X скінченна.

У **другому** розділі наведені означення чисел Ляпунова як певних кількісних характеристик чутливості системи.

Означення 2.1. Перше число Ляпунова $\mathcal{L}_1$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_1, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_1$ та для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 2.2. Друге число Ляпунова $\mathcal{L}_2$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_2, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_2$ та для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Означення 2.3. Третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_3, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_3$, кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та довільної $x \in U$ знайдуться такі $y \in U$ та

$n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 2.4. Четверте число Ляпунова $\mathcal{L}_4$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_4, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_4$, кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та довільної $x \in U$ знайдеться така $y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Між числами Ляпунова виконуються очевидні нерівності $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$. Також доведене співвідношення, яке обмежує розбіжності між числами Ляпунова. Воно сформульоване у якості теореми.

Теорема 2.1. Нехай (X, f) – динамічна система на компактному метричному просторі X з неперервною функцією f. Тоді $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$.

З цієї теореми та зазначених раніше нерівностей маємо, що за відповідних обмежень нерівність $\mathcal{L}_i \leq 2\mathcal{L}_j$ справджується для довільних $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Далі вивчаються співвідношення між числами Ляпунова для певних класів систем.

Теорема 2.2. Нехай (X, f) – транзитивна динамічна система. Тоді $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Транзитивна система (X, f), де X не має ізольованих точок, називається ToM-системою, якщо кожна точка $x \in X$ є транзитивною або мінімальною. Тобто для кожної $x \in X$ виконана рівність $\overline{\mathrm{Orb}(x)} = X$ або система $(\overline{\mathrm{Orb}(x)}, f)$ мінімальна. Для таких систем, до яких, зокрема, належать транзитивні та мінімальні, має місце наступна теорема.

Теорема 2.3 Нехай (X, f) – чутлива ToM-система. Тоді $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Нарешті, для слабко змішуючих систем доведені рівності між декількома парами чисел Ляпунова.

Теорема 2.4. Нехай (X, f) – слабко змішуюча система. Тоді вірні такі рівності.

1. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathrm{diam}(X)$.

2. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

3. Якщо система (X, f) також є мінімальною, то $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = \mathrm{diam}(X)$.

У **третьому** розділі досліджуються співвідношення між константами Ляпунова для неперервного відображення відрізка.

Введені поняття локальних чисел Ляпунова.

Означення 3.1. Локальне третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3(x)$ для точки x динамічної системи (X, f) – це найбільше з таких $\varepsilon_3(x)$, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_3(x)$ та кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$, яка містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 3.2. Локальне четверте число Ляпунова $\mathcal{L}_4(x)$ для точки x системи (X, f) – це найбільше з таких $\varepsilon_4(x)$, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_4(x)$ та кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$, яка містить x, знайдеться така $y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Отримано рівності між деякими парами чисел Ляпунова.

Теорема 3.3. Якщо I – відрізок, то для системи (I, f) виконується рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Теорема 3.4. Для довільної динамічної системи (I, f) на відрізку I справджується рівність $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Також показано, що випадок, коли $\mathcal{L}_3(x)$ менше за $\mathcal{L}_1$, не є типовим.

Теорема 3.5. Для довільної динамічної системи (X, f) на метричному просторі (X, d) підмножина $Y = \{x \in X | \, \mathcal{L}_3(x) < \mathcal{L}_1\}$ є підмножиною першою категорії Бера в X. Тобто Y є зліченним об'єднанням таких множин Y_i, що ніяке замикання $\overline{Y_i}$ не містить жодної відкритої непорожньої підмножини простору X.

Також у третьому розділі розглядаються індуковані системи.

Означення 3.3. Індукованою системою називається пара (S, f), побудована на основі динамічної системи (X, f) таким чином: у якості S обирається деяка сім'я підмножин множини X, а функція f природним чином розповсюджується на підмножини згаданої сім'ї: для всіх $A \in S$ відображення задається рівністю $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$. При цьому для кожної $A \in S$ має виконуватися включення $f(A) \in S$.

Зокрема, розглядаються індуковані системи $(C(I), f)$, де $C(I)$ – множина відрізків та окремих точок, що містяться у відрізку I. На множині $C(I)$ розглядається метрика Хаусдорфа, яка для відрізків має простий вигляд: $d_H([a, b], [c, d]) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$.

Основним результатом дослідження у цьому напрямку є доведення того, що система $(C(I), f)$ має стійкий у сенсі Ляпунова елемент, отже не може бути чутливою.

Теорема 3.8. Нехай I – відрізок. Тоді в індукованій системі $(C(I), f)$ з метрикою d_H існує такий елемент $J \in C(I)$, що $\mathcal{L}_3(J) = 0$.

У **четвертому** розділі поняття чисел Ляпунова узагальнюється на випадок дії напівгрупи. Проведено аналіз, які властивості чисел Ляпунова зберігаються при переході від систем вигляду (X, f) до напівгрупових.

Означення 4.1. Напівгруповою динамічною системою називається пара (X, G), де X – деяка множина, а G – напівгрупа, для якої кожному елементу $g \in G$ поставлено у відповідність деяке відображення $f_g : X \to X$. При цьому для будь-яких $g, h \in G$ повинна справджуватись умова $f_{gh} = f_g(f_h)$. Також, якщо G містить одиничний елемент e, то має виконуватися тотожність $f_e(x) = x$.

Для таких систем введено поняття чисел Ляпунова, що узагальнюють відповідні характеристики систем вигляду (X, f).

Означення 4.3. Першим числом Ляпунова $\mathcal{L}_1$ для системи (X, G) називається найбільше з таких ε_1, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_1$ та будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4.4. Другим числом Ляпунова $\mathcal{L}_2$ для системи (X, G) називається найбільше з таких ε_2, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_2$ та будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Означення 4.5. Третім числом Ляпунова $\mathcal{L}_3$ для системи (X, G) називається найбільше з таких $\mathcal{L}_3$, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_3$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4.6. Четвертим числом Ляпунова $\mathcal{L}_4$ для системи (X, G) називається найбільше з таких $\mathcal{L}_4$, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_4$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Отримано теореми про рівності між числами Ляпунова для таких систем або їх певних класів.

Теорема 4.1. Для системи (X, G) виконується нерівність $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$.

Теорема 4.3. Для транзитивної системі (X, G) з комутативною напівгрупою G вірна рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Теорема 4.4. Для мінімальної системі (X, G) з комутативною напівгрупою G вірні рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Також отримано результати, які стосуються чутливості у сенсі Лі-Йорка.

Означення 4.10. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати ε-асимптотичною, якщо існує лише скінченна кількість елементів $g \in G$, для яких $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$. Пара (x, y) називається асимптотичною, якщо вона ε-асимптотична для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Означення 4.12. Пара (x, y) називається проксимальною, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує елемент $g \in G$, для якого $d(g(x), g(y)) < \delta$. Через $\mathrm{Prox}(x)$ ми позначатимемо множину точок $y \in X$, для яких пара (x, y) є проксимальною.

Означення 4.13. Пара (x, y) називається парою Лі-Йорка, якщо вона проксимальна, але не асимптотична. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати ε-парою Лі-Йорка, якщо вона проксимальна, але не ε-асимптотична.

Означення 4.14. Система (X, G) називається чутливою у сенсі Лі-Йорка, якщо є таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та будь-якого $x \in U$ існує таке $y \in U$, для якого пара (x, y) є ε-парою Лі-Йорка.

Для певних класів систем доведена їх чутливість у сенсі Лі-Йорка.

Теорема 4.10. Нехай X містить більше однієї точки, G – комутативна та (X, G) – слабко змішуюча. Тоді (X, G) є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Також можна розглянути тотально транзитивні системи, тобто такі (X, G), що G – група, і для будь-якої підгрупи H, яка має скінченний індекс у G, система (X, H) є транзитивною. Для наведених систем спостерігається аналогічне явище.

Теорема 4.11. Нехай X містить більше однієї точки, G – група, а (X, G) є тотально транзитивною системою з усюди щільною множиною періодичних точок. Тоді (X, G) є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Розділ 1
Огляд літератури

Вже декілька останніх століть математики та фізики розробляють методи, за допомогою яких можна вивчати системи, що змінюються з часом. Один із перших підходів – явний спосіб опису процесу. Наприклад, у XVI столітті І. Кеплер визначив, що планети рухаються навколо Сонця по еліпсах, а також описав, якою саме є швидкість руху в кожній точці орбіти [59]. Закономірності руху планет випливали з трьох принципів, що дістали назву законів Кеплера. Вчений відкрив ці закони за допомогою спостережень, і в той час вони ще не мали строгого обгрунтування.

Коли І. Ньютон відкрив закон всесвітнього тяжіння та розробив методи диференціального числення, з'явилася можливість математично довести закони Кеплера. Також ці закони було узагальнено. Наприклад, стало зрозуміло, що по еліпсах рухаються не тільки планети навколо Сонця, але і будь-які два тіла обертаються навколо їх спільного центра мас, якщо між ними є достатньо сильна гравітаційна взаємодія.

Основна ідея методу, за допомогою якого можна аналізувати системи взаємодіючих тіл або подібні системи, полягає у наступному. Спочатку для опису системи обираються параметри, які визначають її стан. Потім визначається, як поточні значення обраних параметрів пов'язані з їхніми майбутніми змінами. В залежності від вигляду цього зв'язку складається диференціальне рівняння або інше співвідношення. Далі потрібно проаналізувати систему на основі побудованих співвідношень. Перевага такого підходу полягає в тому, що можна отримати інформацію про систему навіть у тих випадках, коли немає можливості виразити форму траєкторій через відомі функції. Якщо же траєкторії допускають зручне представлення, його можна відшукати, розв'язуючи згадані рівняння. При цьому можна виявити й інші можливі розв'язки, які важче виявити зі спостережень. Наприклад, при достатньо високій початковій швидкості тіло буде рухатися відносно Сонця по параболі або гіперболі. Цей підхід виявився ефективним у розв'язанні інших фізичних задач – наприклад, задачі про опис руху пружинного маятника або про розрахунок траєкторії польоту крізь атмосферу.

Для зручності вивчення системи розділяють на відкриті та замкнені. Відкритими називаються системи, на чий стан впливають певні сторонні фактори, які можуть змінюватися з часом. У замкнених системах подальша поведінка визначається лише поточним станом. Наприклад, поверхня водойми є відкритою системою, адже на неї діють сонячні промені, вітер та інші чинники. Екземпляром замкненої системи може бути пружинний маятник. У даній роботі буде розглянуто тільки замкнені системи. Їх ще називають автономними.

Також серед систем можна виділити неперервні та дискретні. Параметри неперервної системи залежить від моменту часу, значення якого є довільним дійсним числом або числом із деякого відрізку. Якщо система дискретна, то її стан є функцією від номеру кроку, який пробігає цілі значення. Прикладом неперервної системи може бути система гравітаційно взаємодіючих тіл. За допомогою дискретних системи можна моделювати, наприклад, зміни чисельності рослин, які розмножуються лише у певну пору року. Тут основна увага приділена дискретним системам.

Стани дискретної системи можна описувати за допомогою послідовності $\{a_n\}$, де кожен елемент a_n позначає стан на кроці з номером n, який може приймати всі цілі або лише цілі невід'ємні значення. Якщо система автономна, кожен її наступний стан визначається за допомогою попереднього. Це можна записати у вигляді співвідношення $a_n = f(a_{n-1})$, де f – деяка функція, яка визначена на множині можливих станів системи та приймає значення з цієї же множини. Оскільки зміну станів можна сприймати як певний рух, згадані системи називають динамічними. Автономну дискретну динамічну систему можна задати, визначивши множину її можливих станів та функцію переходу між ними. Такий спосіб побудови візьмемо у якості означення.

Означення 1.1. Динамічною системою називається пара (X, f), де X – деяка множина, а f – відображення цієї множини у себе.

Насправді означення 1.1 задає не будь-які, а лише автономні дискретні динамічні системи. Але оскільки дана робота присвячена саме таким системам, будемо називати їх просто динамічними.

Множину X часто наділяють метрикою, тобто для пар $x, y \in X$ задають дійснозначну функцію $d(x, y)$, яка задовольняє критерії відстані. Таким чином, множиною станів X зазвичай є метричний простір. Елементи простору X ми часто називатимемо точками, навіть якщо вони є векторами, послідовностями або множинами. У даній роботі ми завжди розглядатимемо випадок, коли функція f є неперервною відносно метрики d на просторі X.

Введемо позначення, які ми будемо часто використовувати далі.

Через f^n позначатимемо n-кратну композицію функції f, тобто $f^n(x) = \underbrace{f(...f(f}_{n \text{ разів}}(x))...)$. Зокрема, f^0 є тотожним відображенням: для всіх $x \in X$ вірно $f^0(x) = x$.

Якщо A є деякою множиною, через $f(A)$ позначатимемо множину $\{f(x)|x \in A\}$.

Означення 1.2. Послідовність $(x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...)$ називається орбітою (або траєкторією) точки x у системі (X, f). Множину $\{x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...\}$ позначатимемо як $\mathrm{Orb}_f(x)$ або просто як $\mathrm{Orb}(x)$, якщо зрозуміло, яка функція f розглядається.

Якщо потрібно відслідкувати розвиток подій у динамічній системі, ми обираємо довільний елемент $a_0 \in X$, а наступні елементи задаємо рекурентним співвідношенням $a_n = f(a_{n-1})$. Згідно з означенням 1.2, послідовність $(a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n,\ ...)$ є траєкторією точки a_0. Отже, система вигляду (X, f) демонструє повну детермінованість: якщо визначено початкову умову a_0 та функцію f, що здійснює перехід між станами, подальший розвиток системи можна визначити. Аналогічне явище спостерігається в диференціальних рівняннях: якщо задати початкові умови та залежність похідної від поточного стану, то (при виконанні певних умов, накладених на диференціальне рівняння) траєкторія встановлюється однозначно [49].

Але, незважаючи на однозначність траєкторій, система може виглядати дуже непередбачувано. Наприклад, в останній чверті XIX століття Анрі Пуанкаре помітив, що задача гравітаційної взаємодії трьох тіл іноді задає дуже хаотичну поведінку, яка не властива елементарним функціям. Передбачення положень тіл через довгий проміжок часу виявилося задачею, яка не реалізується на практиці. Пуанкаре відкрив схоже явище і в системах із дискретними змінами стану. Наприклад, для $a_0 \in (0, 1)$ та $a_n = 4a_{n-1}(1 - a_{n-1})$ послідовність $\{a_n\}$ демонструє відсутність чітких закономірностей на довгих проміжках часу. Починаючи з близьких a_0, для достатньо великих n можна отримати досить далекі a_n.

Однозначність траєкторії має місце тоді, коли система розглядається як ідеальна математична модель. Але на практиці може так виявитися, що дійсний стан системи через довгий проміжок часу буде сильно відрізнятися від прогнозованого результату. Однією з причин такої розбіжності є те, що вимірювання початкового стану здійснюється з деякою похибкою. У певних системах наявність як завгодно малої похибки може призвести до поступового зростання розбіжностей між прогнозованим та реальним станами, аж поки прогноз не перестане хоч якость відображати характер справжніх подій.

Аналітичний підхід до описаного явища запропонував О. М. Ляпунов [62]. Для більш зручного опису цього підходу введемо таке позначення: нехай $f(x_0, t)$ дорівнює стану динамічної системи у момент часу t, якщо в нульовий момент часу станом системи був x_0. Тут t може набувати дійсних або лише цілих значень в залежності від конкретної системи. Ляпунов запропонував виділяти стійкі динамічні системи за наступною ознакою.

Означення 1.3. Система називається стійкою (або стійкою в сенсі Ляпунова) в точці x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке може залежати від x та ε), що для довільного y, яке задовольняє умову $d(x, y) < \delta$, та для довільного $t > 0$ справджується нерівність $d(f(x_0, t), f(y_0, t)) < \varepsilon$.

Означення 1.4. Система називається стійкою (або стійкою в сенсі Ляпунова), якщо вона стійка в будь-якій допустимій точці x у сенсі попереднього означення.

Стійкість означає, що траєкторії неперервно залежать від початкових умов, якщо відстань між траєкторіями визначається рівномірною метрикою. Для випадку системи (X, f) наведені означення можна конкретизувати наступним чином.

Означення 1.5. Систему (X, f) називатимемо стійкою (або рівномірно неперервною) в точці x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке може залежати від x та ε), що для довільного y, яке задовольняє умову $d(x, y) < \delta$, та для довільного цілого невід'ємного числа n справджується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$.

Можна ввести означення стійкості та рівномірної неперервності для системи в цілому. На відміну від ситуації в точці, для всієї системи згадані два поняття відрізняються одне від одного.

Означення 1.6. Систему (X, f) називатимемо стійкою, якщо вона стійка в будь-якій точці $x \in X$ у сенсі попереднього означення.

Означення 1.7. Система (X, f) називається рівномірно неперервною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке $\delta > 0$ (яке може залежати лише від ε), що для всіх цілих невід'ємних n та всіх таких $x, y \in X$, що $d(x, y) < \delta$, виконується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 1.7 відповідає вужчому класу систем, ніж означення 1.6, оскільки в цьому випадку повинно існувати універсальне δ одразу для всіх точок простору X. Але якщо X компактний, а функція f неперервна відносно метрики d, то означення 1.6 та 1.7 задають один і той самий клас динамічних систем.

Протилежністю до стійких та рівномірно неперервних систем є чутливі системи. Це системи, в яких форма траєкторії може значно змінитися навіть при дуже малій модифікації початкового стану. У таких системах, як правило, типові траєкторії виглядають хаотично.

Чутливі системи стали особливо цікавити математиків у другій половині XX століття, коли з'явилися досить потужні обчислювальні машини. Наприклад, Е. Лоренц виявив, що система трьох диференціальних рівнянь першого порядку може задавати траєкторії дуже цікавого вигляду: стан системи в певний момент часу є важко передбачуваним, але з часом різні траєкторії все більше наближаються за своєю формою до просторової фігури, що має досить незвичну структуру [32]. Ця фігура, згодом названа атрактором Лоренца, виглядає волокнистою при збільшенні до як завгодно великого масштабу: всередині як завгодно малого околу її будь-якої точки можна знайти інші фрагменти, між якими немає сполучення в межах даного околу. Атрактор Лоренца має дробову фрактальну розмірність, що теж свідчить про його складну структуру, адже, наприклад, гладкі фігури мають цілу фрактальну розмірність.

За допомогою комп'ютера також були знайдені системи, які задають фрактали на площині. Наприклад, якщо $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел, а f є многочленом степеня 2 або вище, то в системі $(\mathbb{C}, f)$ можуть утворюватися підсистеми складної форми. Зокрема, множина точок $z \in \mathbb{C}$, для яких траєкторія $\mathrm{Orb}_f(z)$ обмежена, за певних значень коефіцієнтів многочлена f може мати самоподібну структуру. Прикладами фрактальних фігур, пов'язаних зі згаданими системами, є множина Мандельброта [33] та множини Жюліа, які задаються за допомогою відображень вигляду $f(z) = z^2 + c$. Множини Жюліа суттєво пов'язані з чутливістю системи до початкових умов: межа множини Жюліа є чутливою підсистемою в $(\mathbb{C}, f)$, в той час як в інших точках проявляється стійкість до початкових умов.

Деякі дослідження було зроблено ще до появи можливості експериментувати на комп'ютері. Наприклад, певні властивості ітерацій комплекснозначних функцій описано в роботах [14] та [23]. Але особлива цікавість до систем вигляду $(\mathbb{C}, f)$ з'явилася саме з появою комп'ютерів.

Науковцями було знайдено деякі взаємозв'язки між згаданими множинами. Наприклад, була доведена теорема про те, що множина Жюліа для відображення $f(z) = z^2 + c$ є зв'язною тоді і тільки тоді, коли c належить множині Мандельброта. У випадку, коли c не належить множині Мандельброта, відповідна множина Жюліа є цілком незв'язною, тобто всі її зв'язні компоненти є окремими точками [14].

Ці та інші подібні факти наштовхнули математиків на думку вивчати чутливість до початкових умов як окреме поняття, що узагальнює раніше відомі приклади. Одними з перших робіт, де наведено означення чутливої системи, є [41], [19] та [7]. Це означення має наступний вигляд.

Означення 1.8. Система (X, f) називається чутливою до початкових умов (або просто чутливою), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якого $\delta > 0$ знайдуться такі $y \in X$ та $n \in \mathbb{N}$, що $d(x, y) < \delta$ та $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Система, чутлива до початкових умов, не просто нестійка в кожній точці простору X. Для такої системи має існувати універсальне число $\varepsilon > 0$, при якому вимога з означення стійкості порушується в будь-якій точці системи та для будь-якого $\delta > 0$.

Серед напрямків теорії динамічних систем, пов'язаних із чутливістю до початкових умов, можна виділити *комбінаторну* та *топологічну динаміку*.

Комбінаторна динаміка розглядає ітераційні перетворення скінченних множин, а також множин, де взаємне розташування точок визначає певні властивості неперервних відображень. Наприклад, такою множиною є відрізок, адже для нього виконується теорема про проміжне значення: якщо $x < z$, то для довільної неперервної функції f на відрізку та довільного a, що лежить між $f(x)$ та $f(z)$, знайдеться таке $y \in [x, z]$, для якого $f(y) = a$.

Виявилося, що динамічні системи вигляду (I, f), де I – відрізок, а f – його неперервне відображення в себе, мають цікаві властивості, не притаманні усім динамічним системам. Один з прикладів таких властивостей – умови існування періодичних траєкторій.

Означення 1.9. Точка x динамічної системи (X, f) називається періодичною, якщо існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $f^n(x) = x$. Траєкторія такої точки складається зі скінченної кількості точок і називається періодичною траєкторією. Мінімальне натуральне n, для якого виконується рівність $f^n(x) = x$, називатимемо періодом траєкторії.

Взаємозв'язок між періодичними траєкторіями різного періоду для неперервного відображення відрізка було встановлено О. М. Шарковським [60, 61]. Зараз цей результат відомий як теорема Шарковського. Для більш зручного формулювання цієї теореми опишемо наступний порядок на множині натуральних чисел.

Розглянемо два довільних різних числа $a, b \in \mathbb{N}$. Представимо їх у вигляді $a = 2^m \cdot p$ та $b = 2^n \cdot q$, де m, n – невід'ємні цілі, а p, q – непарні натуральні числа. Якщо $p = q = 1$, будемо вважати, що $a \succ b$ за умови $m > n$. Якщо $p > q = 1$, то завжди вважатимемо, що $a \succ b$. Якщо $p > 1$ та $q > 1$, то співвідношення $a \succ b$ виконується за умови $m < n$ або за умов $m = n$ та $p < q$. У всіх інших випадках вважатимемо, що $a \prec b$.

Згідно з наведеними правилами, для довільних різних a та b завжди виконується рівно одна з умов $a \succ b$, $a \prec b$. Всі натуральні числа можна впорядкувати відповідно до заданого відношення. Це впорядкування дістало назву порядку Шарковського і виглядає так:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ ... \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ ... \succ 4 \cdot 3 \succ 4 \cdot 5 \succ 4 \cdot 7 \succ ... \succ$$

$$\succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ ... \succ ... \succ 2^n \succ ... \succ 4 \succ 2 \succ 1.$$

Тепер сформулюємо раніше згадуваний результат.

Теорема 1.1 (*теорема Шарковського*). Нехай задано динамічну систему (I, f), де I – відрізок, а f – його неперервне відображення в себе. Якщо система має цикл довжини n, то вона має і цикли довжини m для всіх таких m, що $n \succ m$.

Вірний і зворотне твердження: для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує така система (I, f), де є цикл довжини n (а отже, і довільної довжини m, де $n \succ m$), але для жодного такого m, що $m \succ n$, немає циклів довжини m. У цьому випадку кажуть, що система має тип n. Також існує система, що має цикли всіх довжин вигляду 2^n, але не має циклів ніяких інших довжин. Про такі системи кажуть, що вони мають тип 2^∞. [61]

Іноді систему (I, f), називають топологічно хаотичною, якщо її тип є більшим за 2^∞ ([5], с. 231).

На початку XX століття почалося дослідження класів динамічних систем, що задовольняють певні умови, пов'язані зі взаємним розташуванням ітерацій відкритих підмножин простору системи. Напрямок, що вивчає такі класи систем, став називатися *топологічною динамікою.* У якості об'єктів дослідження цієї галузі можна виділити транзитивні, слабко змішуючі та мінімальні системи. Багато понять та фактів з топологічної динаміки було систематизовано в книжці [48].

Означення 1.10. Динамічна система (X, f) називається *транзитивною*, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U, V \subset X$ існує таке ціле невід'ємне n, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Означення 1.11. Динамічна система (X, f) називається *слабко змішуючою*, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U_1, V_1, U_2, V_2 \subset X$ існує таке ціле невід'ємне n, що одночасно справджуються умови $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ та $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$.

Означення 1.12. Динамічна система (X, f) називається *мінімальною*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ знайдеться таке ціле невід'ємне n, що $f^n(x) \in U$.

Як відомо, мінімальні системи є транзитивними. Також зрозуміло, що довільна слабко змішуюча система транзитивна. Обернені твердження не завжди вірні.

Прикладом мінімальної системи є (S, R^α), де S – коло, а R^α – його поворот на кут α, який має ірраціональну градусну міру. Ця система транзитивна, але не слабко змішуюча.

Прикладом транзитивної, але не мінімальної системи є (I, f), де I – відрізок $[0, 1]$, а $f(x) = 1 - |2x - 1|$. Транзитивність випливає з того, що для будь-якого $U = (a, b)$ (при $a < b$) знайдеться таке n, за якого $f^n(U) = [0, 1]$. Система не є мінімальною, бо $f(0) = 0$, тому, зокрема, для $x = 0$ та $U = (\frac{1}{2}, 1)$ немає такого n, що $f^n(x) \in U$.

Окрім означення транзитивності, в якому накладаються умови на взаємодію відкритих підмножин простору X, можна ввести поняття транзитивної точки, де обмеження накладаються на траєкторії точок.

Означення 1.13. Точка x системи (X, f) називається *транзитивною*, якщо для будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ існує таке ціле невід'ємне число n, що $f^n(x) \in U$.

Інакше кажучи, точка є транзитивною, якщо її орбіта є щільною підмножиною простору X.

Існування транзитивних точок сильно взаємопов'язане з транзитивністю системи у сенсі означення 1.10. Наприклад, якщо X є простором другої категорії у класифікації Бера (зокрема, компактом), то з транзитивності системи (X, f) випливає існування транзитивної точки. Більш того, множина транзитивних точок щільна в X, а її доповнення є підмножиною першої категорії. Зворотне твердження теж вірне за досить простої умови: якщо в X відсутні ізольовані точки, то існування транзитивної точки дає в якості наслідку транзитивність (X, f) [26].

Термін *хаос* для відзначення певних властивостей динамічних систем вперше використали Т. Лі та Дж. Йорк [30].

Поява праці [30] стимулювала дослідження одновимірних динамічних систем, про які на даний час отримано багато різних результатів. Досить детально це описано [5], [43]. Коротко розглянемо ті факти про хаотичні відображення відрізка, що мають відношення і до загального випадку динамічних систем. Більш розгорнуто ці факти описані в [43] та [42].

Слово *хаос* Т. Лі та Дж. Йорк використали, не надавши йому формального означення. Основний математичний результат їхньої роботи [30], зокрема, стверджує наступне. Нехай f є неперервним відображення відрізка I у себе має періодичну точку періоду 3. Тоді, по-перше, f має періодичні точки будь-якого натурального періоду, а, по-друге, існує незліченна підмножина $S \subset I$ (що не містить періодичних точок) і задовольняє такі умови:
(a) для довільних двох різних точок $x, y \in S$:

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0,$$

але

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$

(b) для довільної точки $x \in S$ та будь-якої періодичної точки $p \in I$ виконується співвідношення

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0.$$

Наявність такої незліченної множини S в системі (X, f) стали називати *хаосом у сенсі Лі–Йорка.*

Насправді, на той час у багатьох країнах ще не було відомо, що перша частина результату Лі та Йорка є частковим випадком теореми Шарковського, опублікованої в українському виданні на 11 років раніше.

Легко бачити, що у незліченній множині S щонайбільше для однієї $x \in S$ може існувати така періодична точка $p \in I$, що $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0$. Дійсно, якщо б існували дві точки $x, y \in S$, для яких є відповідні періодичні p та q, то у випадку $p \neq q$ була би неможливою рівність

$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, а у випадку $p = q$ не справджувалася би рівність $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x)-f^n(y)| > 0$. Іншими словами, можна відкинути умову (b) і під хаосом у сенсі Лі–Йорка розуміти існування незліченної S із властивістю (a).

Пізніше було доведено, що властивість хаотичності за Лі–Йорком мають всі системи вигляду (I, f), тип яких є більшим, ніж 2^∞, та деякі неперервні відображення відрізка, які мають тип 2^∞ [46], а також знайдено інші еквівалентні означення. Нарешті, в роботі [27] показано, що система (I, f) є хаотичною в сенсі Лі–Йорка тоді та тільки тоді, коли існують такі точки $x, y \in I$, що $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, але $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$. У цьому випадку множину $\{x, y\}$ називають двоточково скрамбленою (scrambled) множиною.

Зокрема, якщо (I, f) є транзитивною, то вона хаотична за Лі–Йорком. Зворотне не завжди вірно, оскільки відображення f може бути, наприклад, сталим на деякому підвідрізку в I.

Поняття хаотичності в сенсі Лі–Йорка не встановлює обмежень на те, наскільки малою може бути множина, де спостерігається хаос. Щоб накласти такі обмеження, було запропоновано декілька інших підходів.

А. Лясота запропонував розглядати властивість хаотичності, яка сильніша за ту, що вивчалася Лі та Йорком. Ця властивість згадується в роботі [38] його учня І. Пьорека.

Для неперервного відображення $f : I \to I$ означимо наступну множину на площині:

$$L(f) = \{(x, y) \in I^2 | \liminf_{n\to\infty} |f^n(x)-f^n(y)| = 0, \limsup_{n\to\infty} |f^n(x)-f^n(y)| > 0\}.$$

Згідно з пропозицією Лясоти, систему (I, f) називають типово хаотичною, якщо $L(f)$ резидуальна в I^2, тобто $I^2 \backslash L(f)$ для множини I^2 є підмножиною першої категорії в сенсі Бера. Аналогічно, будемо говорити, що f є щільно хаотичною, якщо $L(f)$ є щільною в I^2. Також в [44] були введені означення типового та щільного ε-хаосу, які насправді є еквівалентними до типового хаосу.

У роботі [44] знайдено декілька умов, рівносильних умові типового хаосу на відрізку (див. також [42]). В загальному випадку з топологічної транзитивності випливає типовий хаос, але зворотне не є справедливим. Зокрема, транзитивне відображення завжди сюр'єктивне, але існують типово хаотичні відображення, як завгодно близькі до деякого сталого. В [45] показано, що для деякого класу динамічних систем, який містить усі системи (I, f) із кусково-монотонним відображенням, поняття щільного хаосу та типового хаосу співпадають. Приклад щільно хаотичної, але не типово хаотичної системи наведено в [44].

У роботі [10] доведено, що за умови справедливості континуум-гіпотези відображення $f : [a, b] \to [a, b]$ є бітранзитивним (його друга ітерація f^2 є транзитивним відображенням) тоді і тільки тоді, коли існує деяка незліченна екстремально скрамблена множина для f, тобто така незліченна множина S, що для довільних різних $x, y \in S$:

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0,$$

але

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = b - a.$$

Для системи, заданої на відрізку було відкрито багато співвідношень між умовою чутливості та іншими структурними якостями. Наприклад, такі зв'язки демонструють результати О. Блоха. [47]

Теорема 1.2. Кожна транзитивна динамічна система (I, f), де I – відрізок додатної довжини, є чутливою.

Теорема 1.3 (*О. Блох*). Якщо система (I, f) на відрізку I чутлива до початкових умов, то I містить невироджені відрізки J_1, J_2, ..., J_p, які не перетинаються і для яких виконуються наступні дві умови. По-перше, для даних відрізків справедливі рівності $f(J_1) = J_2$, $f(J_2) = J_3$, ..., $f(J_p) = J_1$. По-друге, система $(J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_p, f)$ є транзитивною.

Деякі характеристики динамічних систем пов'язані зі структурою множин потрапляння.

Означення 1.14. Для точки $x \in X$ та підмножини $U \subset X$ множиною потрапляння $N_f(x, U)$ називається множина всіх таких $n \in \mathbb{N}_0$, що $f^n(x) \in U$.

Означення 1.15. Для двох підмножин $U, V \subset X$ множиною потрапляння $N_f(U, V)$ будемо називати множину всіх таких $n \in \mathbb{N}_0$, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Означення 1.15 можна перенести і на множини вигляду $N_f(x, U)$, якщо розглядати x як одноточкову множину. Але множини $N_f(x, U)$ мають самостійне важливе значення, тому для них дано окреме означення.

Дамо визначення деяких класів підмножин множини $\mathbb{N}_0$, які використовуються при вивченні динамічних систем.

Означення 1.16. Множина $M \subset \mathbb{N}_0$ називається зчепленою, якщо існує таке невід'ємне ціле k, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ хоча б одне число з множини $\{n + 1,\ n + 2,\ ..., n + k\}$ належить M. Інакше кажучи, множина M є зчепленою, якщо вона нескінченна та існує таке d, що різниця між будь-якими двома сусідніми елементами множини M не перевищує

d. Іноді найменше з можливих d називають параметром зчепленості множини M.

Означення 1.17. Множина $M \subset \mathbb{N}_0$ називається густою, якщо для будь-якого невід'ємного цілого k існує таке n, що множина $\{n,\ n+1,\ \ldots,\ n+k\} \subset M$.

Відмітимо, що зчеплена та густа множини завжди перетинаються. Більш того, такий перетин є характеристичною властивістю: якщо множина M перетинається з будь-якою густою, то вона зчеплена, а якщо з будь-якою зчепленою, то вона густа.

Зчеплені та густі множини можуть використовуватися у критеріях належності динамічної системи до певного класу. У якості прикладу наведемо наступні теореми.

Теорема 1.4 (*Критерій мінімальності Бірхофа*). Нехай X – компактна множина, а f – її неперервне відображення у себе. Система (X, f) є мінімальною тоді і тільки тоді, коли для будь-якої непорожньої відкритої множини $U \subset X$ та довільної точки $x \in X$ множина $N_f(x, U)$ є зчепленою.

Теорема 1.5. Система (X, f) є слабко змішуваною тоді і тільки тоді, коли для будь-яких відкритих непорожніх підмножн $U, V \subset X$ множина $N_f(U, V)$ є густою.

Чутливість динамічної системи до початкових умов теж може бути пов'язана з топологічними характеристиками динамічної системи. Наприклад, цікавим чином пов'язані чутливість та транзитивність. Для опису цього зв'язку введемо нові позначення. Множину транзитивних точок системи (X, f) будемо записувати як $\mathrm{Trans}(f)$. Через $\mathrm{Eq}(f)$ позначимо множину точок системи (X, f), які є стійкими у сенсі означення 1.5. Тепер взаємозв'язок транзитивності та чутливості подамо у вигляді теореми, доведеної в статті [18].

Теорема 1.6. Якщо X – компактна множина, та (X, f) – транзитивна динамічна система. Тоді можливі лише два варіанти: $\mathrm{Eq}(f) = \mathrm{Trans}(f)$ або $\mathrm{Eq}(f) = \varnothing$. Якщо справджується перше співвідношення, то система є рівномірно жорсткою, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $n \in \mathbb{N}$, що нерівність $d(x, f^n(x)) < \varepsilon$ справедлива для всіх $x \in X$. Це означає, що на деяких ітераціях усі точки простору одночасно майже повертаються до своїх вихідних положень. Якщо ж виконується умова $\mathrm{Eq}(f) = \varnothing$, то система завжди буде чутливою до початкових умов.

Відмітимо, що згадані варіанти не можуть мати місце одночасно, тому що у випадку компактного простору X множина $\mathrm{Trans}(f)$ непорожня. Також відмітимо, що система (X, f) є мінімальною, коли $\mathrm{Trans}(f) = X$. Тобто для мінімальних систем можливі лише варіанти $\mathrm{Eq}(f) = \varnothing$ та $\mathrm{Eq}(f) = X$.

Чутливість пов'язана з поняттям хаотичності систем. Єдиного точного означення хаотичності немає. Різні автори намагалися дати свою версію поняття хаосу, яка б відповідала інтуїтивному враженню про непередбачуваність та складність системи. Наприклад, у роботі Р. Девані [12] система називається хаотичною, якщо вона транзитивна, чутлива до початкових умов та має всюди щільну множину періодичних точок. Згодом у роботі [8] було доведено, що умова чутливості у даному списку є зайвою. Це справедливо внаслідок наступної теореми.

Теорема 1.7. Нехай динамічна система (X, f) задана на компактному скінченному просторі X. Якщо ця система транзитивна і має щільну множину періодичних точок, то вона є чутливою.

Тому в означенні хаотичної системи достатньо зазначити, що ця система є транзитивною, нескінченною та містить щільну множину періодичних точок.

Згодом виявилося, що дане твердження має узагальнення: періодичні точки можна замінити *мінімальними*, тобто такими точками x, для яких підсистема $(\overline{\mathrm{Orb}(x)}, f)$ мінімальна в сенсі означення 1.11. Наприклад, у статті [24] доведено наступне твердження.

Теорема 1.8. Нехай динамічна система (X, f) задана на компактному просторі X. Якщо ця система транзитивна і має щільну множину мінімальних точок, то вона чутлива або мінімальна.

Тут мінімальні системи є рідкісним, але суттєвим винятком. Наприклад, система (S, R^α), де S – коло, а R^α – поворот на ірраціональний кут α, є мінімальною, але не є чутливою.

Якщо система транзитивна, то вона є мінімальною тоді і тільки тоді, коли всі її точки мінімальні (для компактного X). Дійсно, транзитивна система містить транзитивну точку, тобто таку z, що $\overline{\mathrm{Orb}(z)} = X$. Якщо всі точки системи мінімальні, то такою буде і z. Тоді утворена нею система $(\overline{\mathrm{Orb}(z)}, f)$ – мінімальна, а ця система співпадає з (X, f). Обернене твердження очевидне. Тому для чутливості системи достатньо транзитивності і того, що множина мінімальних точок щільна, але не співпадає з X.

Чутливість до початкових умов означає, що для довільної початкової точки x як завгодно малий її зсув може призвести до достатніх змін орбіти $(x,\ f(x),\ ...,\ f^n(x),\ ...)$. Цікаво дослідити, про яку найбільшу зміну орбіти можна буде точно стверджувати, якщо зсув початкової точки прямує до 0. Тобто, яке найбільше число підходить у якості ε, що фігурує в означенні 1.8. Наприклад, точну верхню грань відповідних ε можна порівнювати з діаметром простору X, на якому задано систему.

У роботі [26] доведено рівносильність означення 1.8 та наступних трьох означень.

Означення 1.18. Система (X, f) називається чутливою, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться точки $x, y \in U$ та число $n \in \mathbb{N}$, для яких $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 1.19. Система (X, f) називається чутливою, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що всередині будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться точки x та y, для яких $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 1.20. Система (X, f) називається чутливою, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ та будь-якого $\delta > 0$ знайдеться така $y \in X$, що $d(x, y) < \delta$ та $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Ці означення рівносильні, але максимальні значення ε, для яких вони виконуються, можуть бути різними. Цікаво дослідити, які співвідношення можуть бути для чисел ε з різних означень та за яких умов ці числа співпадають.

Також розглядають узагальнення динамічних систем, пов'язані з певною напівгрупою. Багато означень, що мають відношення до звичайних динамічних систем, можна розповсюдити і на напівгрупові системи. Наприклад, це можна зробити з означеннями транзитивності, слабкої змішуваності або мінімальності. Подібні узагальнення можливі і для деяких тверджень. Наприклад, як і у випадку (X, f), транзитивна система (X, G) з компактним X міститиме точку, орбіта якої є всюди щільною. Або з того, що система транзитивна, нескінченна та має щільну множину мінімальних точок, випливає її чутливість як у звичайному, так і в напівгруповому випадку [24]. Доведення для випадку звичайної системи було вперше наведене в роботі [8]. Ця теорема привернула до себе велику увагу завдяки тому, що спочатку всі три згадані властивості вважалися незалежними і вимагалися в означенні хаотичної системи [12].

Досить багатостороннє дослідження з питань, присвяченим чутливості дії групи, зробив Ф. Поло [39].

Деякі властивості систем вигляду (X, f) не переносяться на загальний випадок. Наприклад, для системи (X, f) вірним є твердження, що зі слабкої змішуваності випливає k-кратна транзитивність для довільного натурального k. Для напівгрупових систем це не завжди вірно: множина монотонних неперервних відображень відрізка утворює слабко змішуючу, але не 3-кратно транзитивну систему [11]. Тому вивчення напівгрупових систем ставить багато цікавих питань.

Розділ 2
Співвідношення між числами Ляпунова для різних типів систем

У даному розділі вивчаються нерівності та рівності між числами Ляпунова для динамічної системи (X, f) з компактним простором X та неперервною функцією f. Розглядається, які нові співвідношення виникають між цими числами, якщо на систему додатково накласти умову мінімальності, транзитивності або слабкої змішуваності. Також побудовані приклади систем, де числа Ляпунова відрізняються у два рази, що показує точність оцінки в теоремі 2.1.

Основні результати розділу опубліковані в роботі [25].

Для динамічної системи (X, f) визначимо чотири величини, які будемо назвати числами Ляпунова. Така назва обрана тому, що такі числа з подібними властивостями фігурують в означеннях стійкої або нестійкої системи, даних Ляпуновим. Ці параметри показують, наскільки далеко можуть розбігатися близькі точки або як сильно будуть зростати діаметри малих відкритих множин після того, як відображення f буде застосовано достатньо велику кількість разів.

Означення 2.1. Перше число Ляпунова $\mathcal{L}_1$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_1, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_1$ та для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 2.2. Друге число Ляпунова $\mathcal{L}_2$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_2, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_2$ та для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність

$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Означення 2.3. Третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_3, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_3$, кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та довільної $x \in U$ знайдуться такі $y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 2.4. Четверте число Ляпунова $\mathcal{L}_4$ для системи (X, f) – це найбільше з таких ε_4, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_4$, кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та довільної $x \in U$ знайдеться така $y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

Як видно з означень 2.1–2.4, кожне число Ляпунова кількісно характеризує певну властивість, пов'язану з чутливістю системи до початкових умов. Параметри $\mathcal{L}_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) описують різні якості системи, але їх спільна природа викликає враження, що між числами Ляпунова є певні співвідношення. Далі буде показано, що ця здогадка справедлива.

2.1 Нерівність для чисел Ляпунова у загальному випадку

Одразу з означень 2.1–2.4 отримуємо нерівності $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$. Вони є наслідком того, що до $\mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3$ висуваються жорсткіші вимоги, ніж до $\mathcal{L}_1$, і менш жорсткі, ніж до $\mathcal{L}_4$. Співвідношення, де $\mathcal{L}_1$ оцінюється згори, доводиться складніше, тому сформулюємо його у якості теореми.

Теорема 2.1. Нехай (X, f) – динамічна система на компактному метричному просторі X з неперервною функцією f. Тоді $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$.

Доведення. Нехай $\mathcal{L}_1$ – перше число Ляпунова для системи (X, f). Розглянемо довільне достатньо мале $\delta > 0$, точку $x \in X$ та деякий відкритий окіл U точки x.

Нехай $U_0 = U$ та n_0 – найменше натуральне число, для якого діаметр множини $f^{n_0}(U_0)$ більший за $\mathcal{L}_1 - \delta$. Тоді існує така точка $y_0 \in U_0$, що $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y_0)) > (\mathcal{L}_1 - \delta)/2$. Візьмемо таку відкриту множину U_1 для якої виконуються всі наступні умови: множина U_1 містить точку y_0, замикання U_1 міститься в U_0 та для будь-якого цілого додатного $m \leq n_0$ справджується нерівність $y_0 \in U_1$ and $\mathrm{diam}(f^m(U_1)) \leq \delta/2$. Нехай n_1 – перше натуральне число, для якого $\mathrm{diam}(f^{n_1}(U_1)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Згідно з вибором U_1 виконується нерівність $n_1 > n_0$.

Опишемо, як ми будемо далі вводити відкриті множини (U_2, U_3, ...) та натуральні числа (n_2, n_3, ...) рекурентним чином. Припустимо, що U_{k-1} та n_{k-1} вже побудовано. Тоді існує така точка $y_{k-1} \in U_{k-1}$, що $d(f^{n_{k-1}}(x), f^{n_{k-1}}(y_{k-1})) > (\mathcal{L}_1 - \delta)/2$. Ми оберемо таку відкриту множину U_k всередині U_{k-1}, що $y_{k-1} \in U_k$ та для будь-якого цілого $m \leq n_{k-1}$ вірна нерівність $\mathrm{diam}(f^m(U_{n_k})) \leq \delta/2$. Нехай n_k – найменше натуральне число, яке перевищує n та для якого $\mathrm{diam}(f^{n_k}(U_k)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Як і в попередньому означенні, за вибором U_k очевидним чином маємо $n_k > n_{k-1}$.

Якщо y – точка непорожнього перетину $\cap_{k=1}^{\infty}\overline{U_{n_k}}$, то $y \in U$ та $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \mathcal{L}_1/2 - \delta$. Отже, для будь-якої $x \in X$ знайдеться точка y, яка реалізує нерівність $\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1/2 - \delta$. З довільності обраного числа $\delta > 0$ отримуємо, що $\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1/2$, тобто $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$. $\square$

У якості наслідку маємо $\mathcal{L}_i \leq 2\mathcal{L}_j$ для довільних $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Для доведення нерівності $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$ ми використали компактність простору X. Ця умова є істотною. Без її виконання для ця нерівність може порушуватися, що показує наступний приклад.

Приклад 2.1. У якості простору X розглянемо множину таких послідовностей $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...)$, що $a_i \in \{0, 1\}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, причому рівність $a_i = 1$ виконується лише для скінченної кількості індексів i. Для різних послідовностей $a = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...)$ та $b = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...)$ у якості відстані $d(a, b)$ візьмемо число $1/k$, де k – найменший індекс, для якого $a_k \neq b_k$. Якщо такого індексу не існує, то послідовності a та b однакові, тому для них $d(a, b) = 0$. Нескладно перевірити, що відстань $d(a, b)$ задає коректну метрику на множині X. У якості функції f візьмемо оператор зсуву, який переводить послідовність $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...)$ в $(a_2,\ a_3,\ ...,\ a_{n+1},\ ...)$. Просто отримати, що для (X, f) вірно $\mathcal{L}_1 = 1$ та $\mathcal{L}_2 = 0$. Отже, і $\mathcal{L}_4 = 0$, бо $\mathcal{L}_4 \leq \mathcal{L}_2$. Таким чином, для даної (X, f) має місце співвідношення $\mathcal{L}_1 > 2\mathcal{L}_4$.

2.2 Числа Ляпунова для транзитивних відображень

Далі розглянемо співвідношення між числа Ляпунова, які справджуються в системах певного вигляду. Означення транзитивної та мінімальної системи вже вводилися.

Якщо кожна точка системи (X, f) транзитивна, тоді систему називають *мінімальною.* Замкнена підмножина $M \subset X$ називається *мінімальною множиною* системи (X, f), якщо $f(M) \subset M$ та будь-яка точка $x \in M$ має щільну на множині M орбіту. Кожна точка $x \in X$, для якої замикання орбіти $\mathrm{Orb}(x)$ є мінімальною множиною, називається *міні-*

мальною точкою системи (X, f).

Якщо ми розглядаємо певну динамічну систему (X, f), то для довільної точки $x \in X$ та довільної підмножини $U \subset X$ через $N_f(x, U)$ позначимо множину потраплянь $\{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(x) \in U\}$. Точка $x \in X$ називається *рекурентною*, якщо для будь-якого її відкритого околу U множина $n_f(x, U)$ є нескінченною.

Підмножина S множини цілих невід'ємних чисел називається *зчепленою*, якщо вона має обмежені прогалини, тобто, якщо існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $\{i, i+1, ..., i+n\} \cap S \neq \varnothing$ для будь-якого $i \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. Множина S називається *густою*, якщо вона містить як завгодно суцільні блоки цілих чисел, тобто, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне число i, що $\{i, i+1, ..., i+n\} \subset S$.

Деякі властивості динамічних систем можна описати за допомогою понять рівномірної та густої множини. Наприклад, один з класичних результатів Готшалка стверджує, що $x \in X$ є мінімальною точкою тоді і тільки тоді, коли $N_f(x, U)$ є рівномірною множиною для будь-якого відкритого околу U точки x. Інший результат цього автора полягає у тому, що (X, f) є слабко змішуючою системою тоді і тільки тоді, коли множина $N_f(U, V)$ є густою для будь-яких відкритих непорожніх $U, V \subset X$ (див. [16], [17]).

Для транзитивних динамічних систем є вірною наступна теорема.

Теорема 2.2. Нехай (X, f) – транзитивна динамічна система. Тоді $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Доведення. У випадку $\mathcal{L}_1 = 0$ з нерівності $\mathcal{L}_2 \leq \mathcal{L}_1$ матимемо $\mathcal{L}_2 = 0$. Далі розглядатимемо лише випадок $\mathcal{L}_1 > 0$, тобто будемо вважати, що система (X, f) є чутливою.

За означенням $\mathcal{L}_1$, для будь-якого $\varepsilon < \mathcal{L}_1$ і для довільної відкритої непорожньої $U \in X$ є такі точки $x, y \in U$ та натуральне n_0, що $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > \varepsilon$. Оберемо довільне (достатньо мале) $\delta > 0$. Нехай $V, W \subset U$ – такі околи точок x та y, що $\operatorname{diam}(f^{n_0}(V)) < \delta$ та $\operatorname{diam}(f^{n_0}(W)) < \delta$. Якщо $z \in V$ – транзитивна точка, знайдеться натуральне m, для якого $f^m(z) \in W$. За нерівністю трикутника маємо $d(f^{n_0}(z), f^{n_0+m}(z)) > \varepsilon - 2\delta$.

Нехай S – такий окіл точки z, що $S \subset U$ та $f^m(S) \subset W$. Тоді, очевидно, $\operatorname{diam}(f^{n_0}(S)) < \delta$ та $\operatorname{diam}(f^{n_0+m}(S)) < \delta$.

Оскільки наша система не має ізольованих точок (за їх наявності вона не могла би бути одночасно транзитивною та чутливою), S є нескінченною множиною. Отже, орбіта точки z потрапляє в S нескінченно багато разів. Якщо для цілого невід'ємного числа n_k справджується умова $f^{n_k}(z) \in S$, то $f^{n_0+n_k}(z) = f^{n_0}(f^{n_k}(z)) \subset f^{n_0}(S)$ і $f^{n_0+n_k+m}(z) = f^{n_0+m}(f^{n_k}(z)) \subset f^{n_0+m}(S) = f^{n_0}(f^m(S)) \subset f^{n_0}(W)$. А тоді, за нерівністю трикутника, $d(f^{n_0+n_k}(z), f^{n_0+n_k+m}(z)) > \varepsilon - 2\delta$. З цього маємо $\mathcal{L}_2 > \limsup_{n\to\infty} d(f^n(z), f^n(f^m(z))) \geq \varepsilon - 2\delta$. Оскільки $\delta > 0$ та $\varepsilon < \mathcal{L}_1$ були обрані довільним чином, маємо $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. $\square$

Транзитивна система (X, f), де X не має ізольованих точок, називається *ToM-системою*, якщо кожна точка $x \in X$ є транзитивною або мінімальною. Означення таких систем було введено Довнаровічем та Йє (див. [13]). Оскільки в подальших доведеннях не використовується умова, що мінімальні точки не є транзитивними (як вимагає означення ToM-системи в роботі [13]), мінімальні системи ми теж вважатимемо

ToM-системами. Якщо така система не є мінімальною, множина її мінімальних точок щільна в X (оскільки для транзитивної, але не мінімальної системи множина її не транзитивних точок щільна – доведення дивіться, наприклад, у статті [26]).

Теорема 2.3. Нехай (X, f) – чутлива ToM-система. Тоді $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Доведення. Розглянемо деяку точку $x \in X$. Нехай U_x – відкритий окіл точки x та нехай $\delta > 0$. За означенням $\mathcal{L}_3$, існують такі $y \in U_x$ та натуральне число m, що $d(f^m(x), f^m(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Розглянемо відкритий окіл $U_y \subset U_x$ точки y, такий, що $\mathrm{diam} f^m(U_y) < \delta$.

Тепер, якщо x є транзитивною точкою, можна просто повторити ідею теореми 2.2 для доведення у цьому випадку. Якщо x не транзитивна, то вона мінімальна. Оскільки (X, f) є ToM-системою, можна знайти мінімальну точку $z_1 \in U_y$, а тоді $d(f^m(x), f^m(z_1)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$.

Розглянемо прямий добуток систем $(\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \times \overline{\mathrm{Orb}_f(z_1)}, f|_{\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}} \times f|_{\overline{\mathrm{Orb}_f(z_1)}})$. Нехай M – мінімальна підмножина цієї системи. Тоді, очевидно, $M \cap M_x \neq \varnothing$, де $M_x = \{(x, z) : z \in \overline{\mathrm{Orb}_f(z_1)}\}$. Звідси випливає, що існує точка $(x, z_2) \in U_x \times \overline{\mathrm{Orb}_f(z_1)}$, яка є мінімальною, а отже, і рекурентною у системі $f|_{\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}} \times f|_{\overline{\mathrm{Orb}_f(z_1)}})$. Зрозуміло, що кожна точка вигляду $(x, f^k(z_2))$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ також буде рівномірно рекурентною. Оскільки z_1 мінімальна, ми можемо обрати таке ціле додатне k, що $z_3 = f^k(z_2) \in U_y$. Отже, маємо, що $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(z_3)) \geq \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Оскільки x та $\delta > 0$ обираються довільним чином, отримуємо $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. $\square$

У якості наслідку можна відмітити, що рівності $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ виконуються для мінімальних систем. Відкритим є питання, для яких систем виконується рівність $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1$. Зокрема, чи завжди вона має місце у випадку мінімальної системи?

2.3 Числа Ляпунова для слабко змішуючих систем

Згадаємо, що динамічна система (X, f) називається *слабко змішуючою*, якщо для будь-яких непорожніх відкритих $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ існує таке ціле невід'ємне число n, що $U_1 \cap f^n(V_1) \neq \varnothing$ та $U_2 \cap f^n(V_2) \neq \varnothing$. Іншими словами, система (X, f) слабко змішуюча, якщо прямий добуток $(X \times X, f \times f)$ є транзитивною системою.

Теорема 2.4. Нехай (X, f) – слабко змішуюча система. Тоді вірні такі рівності.

1. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathrm{diam}(X)$.

2. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

3. Якщо система (X, f) також є мінімальною, то $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = \mathrm{diam}(X)$.

Доведення. 1. Оскільки слабко змішуюча система є транзитивною, за теоремою 2.2 маємо $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Оскільки (X, f) – слабко змішуюча, то прямий добуток $(X \times X, f \times f)$ є транзитивною системою. Отже, в кожній відкритій непорожній підмножині простору $X \times X$, знайдеться транзитивна точка системи $(X \times X, f \times f)$. Зокрема, така точка знайдеться у будь-якому декартовому добутку $U \times U$, де U – відкрита непорожня підмножина простору X. Це означає, що знайдеться така точок $x, y \in U$ з наступною властивістю: для довільних відкритих непорожніх підмножин $V, W \subset X$ існує нескінченно багато таких натуральних n, що задовольняються умови $f^n(x) \in V$ та $f^n(y) \in W$. Якщо у якості V та W взяти δ-околи точок $v, w \in X$, для яких $d(v, w) > \mathrm{diam}(X) - \delta$ (де δ – довільне достатньо мале число більше нуля), то отримаємо $\mathcal{L}_2 \geq \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \mathrm{diam}(X) - 3\delta$. З довільності вибору δ маємо $\mathcal{L}_2 \geq \mathrm{diam}(X)$. Також справедливі очевидні нерівності $\mathcal{L}_1 \leq \mathrm{diam}(X)$ та $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2$. Звідси маємо $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathrm{diam}(X)$.

2. Нехай $x \in X$. Оскільки (X, f) є слабко змішуючою, існує така точка $z \in X$, що для будь-якого відкритого околу G точки z та довільних замкнених непорожніх підмножин U, V простору X знайдеться нескінченно багато натуральних n, для яких одночасно $f^n(x) \in G$ та $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ (доведення цього факту міститься в роботі [4], більш загальне твердження доводиться у лемі 4.7).

За означенням $\mathcal{L}_3$, для точки z та будь-якого додатного δ є точка $y \in X$ та натуральне число k, такі, що $d(f^k(y), f^k(z)) > \mathcal{L}_3 - \delta$.

Тепер нехай U – відкритий окіл точки x. Нехай G_z і V_y є відкритими кулями радіуса δ з центрами в $f^k(z)$ та $f^k(y)$ відповідно. Оберемо δ настільки малим, щоб виконувалась умова $G_z \cap V_y = \varnothing$. Щоб довести другу частину теореми, у множині U_x знайдемо точку z, яка є точкою концентрації. Нехай n_0 – таке натуральне число, що $f^{n_0}(x) \in G_z$ та $f^{n_0}(U_x) \cap V_y \neq \varnothing$. Покладемо $U_0 = U_x \cap f^{-n_0}(V_y)$. Очевидно, U_0 є відкритою непорожньою підмножиною U_x, $\overline{U_0} \subset \overline{U_x}$ і $x \notin U_0$. Задамо множини U_1, U_2, ... та натуральні числа n_i індуктивним чином. А саме, нехай n_k – достатньо велике натуральне число, наприклад, $n_k \geq k$, таке, що $f^{n_k}(x) \in G_z$ та $f^{n_k}(U_{k-1}) \cap V_y \neq \varnothing$. Означимо U_k як множину $U_{k-1} \cap f^{-n_k}(V_y)$. Зрозуміло, що U_k – відкрита непорожня підмножина X та $U_i \subset U_{i-1}$ для будь-якого $i \geq 1$. Звідси $\overline{U_0} \supset \overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \ldots$ Якщо u – точка непорожнього перетину множин $\cap_i \overline{U_i}$, то для будь-якого натурального i ми маємо $f^{n_i}(u) \in \overline{V}_y$ і $f^{n_i}(x) \in G_z$. Отже,

$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(u)) \geq \mathcal{L}_3 - 3\delta$. Оскільки $\delta > 0$ взята довільним чином, отримуємо $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. $\square$

3. Випадки 1 та 2 приводять до того, що достатньо довести рівність $\mathcal{L}_3 = \mathrm{diam}(X)$. Нехай $x \in X$ і нехай U_x – відкритий окіл x. Зі слабкої змішуваності системи легко вивести відсутність у ній ізольованих точок. А тоді для будь-якого додатного числа δ існують такі відкриті нескінченні множини $V_x, V_y \subset X$, що відстань між V_x і V_y не менша за $\mathrm{diam}(X) - \delta$.

Як згадувалося раніше, так як (X, f) мінімальна, будь-яка точка X є рівномірно рекурентною. Зокрема, це означає, що $N_f(x, V_x)$ є рівномірною множиною. З іншого боку, (X, f) також є слабко змішуючою системою. А це означає, що $N_f(U, V_y)$ є густою підмножиною $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Звідси $n_f(x, V_x) \cap n_f(U, V_y) \neq \varnothing$, отже існують точка $y \in U$ та натуральне $k \in n_f(x, V_x) \cap n_f(U, V_y)$, такі, що $f^k(x) \in V_x$ і $f^k(y) \in V_y$. Отже, $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \mathrm{diam}(X) - \delta$. Так як $\delta > 0$ довільна, ми отримуємо $\mathcal{L}_3 = \mathrm{diam}(X)$. $\square$

2.4 Заключні зауваження

Спершу відмітимо, що існують слабко змішуючі (навіть просто змішуючі) системи, для яких $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = \mathrm{diam}(X)/2$. Для прикладу розглянемо неперервне відображення відрізка $g : [0,1] \to [0,1]$, де $g(x) = 3((x - 1/3) - |x - 1/3| + |x - 2/3|)$. Це відображення є топологічно точним, а однією з його нерухомих точок є $1/2$. Отже, для системи $([0,1], g)$ виконується $\mathcal{L}_3 \leq 1/2$. Враховуючи теорему 2.1, маємо, що $\mathcal{L}_1 = 1$ та $\mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_1/2 = 1/2$. Тому для даної системи $\mathcal{L}_3 = 1/2$.

Також (як ми побачимо у твердженні 2.5) існують системи, для яких

$\mathcal{L}_3 = 2\mathcal{L}_4$. Але відкритим залишається питання існування транзитивних систем з подібною властивістю. За теоремою 2.2, такі системи не можуть бути мінімальними.

Наступні питання залишаються відкритими:

1. Чи існує динамічна система (X, f), для якої $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2$ або $\mathcal{L}_3 > \mathcal{L}_2$?

2. Чи існує мінімальна динамічна система (X, f), для якої $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_3$?

Твердження 2.5. Існує динамічна система (X, f), для якої $\mathcal{L}_3 = 2\mathcal{L}_4$.

Доведення. Визначимо простір X, який буде компактною підмножиною $\mathbb{R}^3$, гомеоморфною двовимірному кругу. Зручніше зробити це за допомогою циліндричних координат: у цих координатах кожна точка тривимірного простору задається числами (r, φ, z), і це відповідає прямокутним координатам $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Іншими словами, (r, φ) – це полярні координати точки (x, y), а z залишається незмінним. Нехай $h(r) = 8r(1-r)$. Визначимо X як множину точок з циліндричними координатами $(r, \varphi, h(r))$, де $0 \le r \le 1$ та $\varphi \in \mathbb{R}$, а у якості метрики на X візьмемо стандартну евклідову метрику.

Тепер визначимо неперервне відображення f, яке переводить X у себе, наступним чином: $f(r, \varphi, h(r)) = (g(r), 2\varphi, h(g(r)))$, де $g : [0, 1] \to [0, 1]$ – неперервна функція, для якої виконуються умови $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ та $g(x) > x$ для всіх $x \in (0, 1)$. Нехай, наприклад, $g(x) = 2x - x^2$. З наведених умов для g легко вивести, що $\lim_{n\to\infty} g^n(x) = 1$ для будь-якого $x \in (0, 1]$.

Нехай $p \in X$ та U – відкритий окіл p. Якщо $p \neq (0, 0, 0)$, то для будь-якого $\delta > 0$ існують такі $n \in \mathbb{N}$ та $q \in U$, що $d(f^n(p), f^n(q)) > 2 - \delta$. Якщо $p = (0, 0, 0)$, то знайдуться $n \in \mathbb{N}$ та $q \in U$, для яких $f^n(q)$ лежить на колі, з центром $(0, 0, 2)$ (у просторі $\mathbb{R}^3$) та радіусом $\frac{1}{2}$. Для цих n та q ми маємо $d(f^n(p), f^n(q)) > 2$. Отже, $\mathcal{L}_3 \geq 2$.

Тепер нехай $p = (0, 0, 0)$. Рівність $\lim_{n\to\infty} d(f^n(p), f^n(q)) = 1$ виконується нерівність $q \neq p$. Отже, $\mathcal{L}_4 \leq 1$. Оскільки $\mathcal{L}_3 \leq 2\mathcal{L}_4$ (за твердженням 1.1), це дає $\mathcal{L}_3 = 2\mathcal{L}_4$. $\square$

Ідея означення та вивчення чисел Ляпунова була спричинена наступним:

1. Якщо деяке практичне припущення виконується для певної системи, наприклад, для фізичного об'єкта, нам потрібно знати, як сильно ми можемо припуститися помилки в розрахунках, якщо ми намагаємося передбачити еволюцію систему на достатньо довгий термін. Знання лише того факту, що в розрахунках подальшої поведінки системи будуть хоча би малі похибки, не є таким корисним, тому що існування похибок у розрахунках притаманне майже всім природним системам, принаймні, через неточність початкових даних. Отже, кількісний аналіз чутливості, який визначає, який саме розмір можуть мати похибки, представляє великий інтерес. Порівняння різних чисел Ляпунова демонструє, що похибки у розрахунках не можуть зникати з часом. Тобто, ми не можемо сподіватися, що, наприклад, через 10000 чи 1000000 кроків точність наших прогнозів істотно збільшиться.

2. Згідно з теоремою Ауслендера, однією з найбільш важливих теорем топологічної динаміки, будь-яка проксимальна комірка (тобто множина $\mathrm{Prox}_f(x) = \{y \in X : \liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$) містить мінімальну точку [3]. З цього, зокрема, випливає, що дистальна точка завжди є мінімальною. Потрібно зазначити наступне: якщо (X, f) – слабко змішуюча динамічна система, то для кожної $x \in X$ проксимальна комірка

$\mathrm{Prox}_f(x)$ є щільною в X [4]. Що можна сказати про цю властивість для чутливих транзитивних систем, зокрема, для систем Девані (тобто транзитивних систем з компактним X та щільною множиною періодичних точок)? Відмітимо, що існує прямий зв'язок цієї задачі з питанням про те, коли рівність $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ виконується для чутливої топологічно транзитивної системи.

Висновки до розділу 2

У даному розділі було запроваджено нові параметри, що характеризують чутливість динамічної системи до початкових умов – числа Ляпунова. Перші два числа показують, наскільки великим може бути розтяг довільної відкритої непорожньої підмножини при повторній дії відображення. Інші два числа характеризують те, наскільки сильно можуть змінюватися орбіти конкретних точок при малій зміні початкових умов. При цьому перше й третє число описують одиничні випадки максимального відхилення, а друге й четверте – випадки, що трапляються нескінченну кількість разів.

Між числами Ляпунова встановлено певні співвідношення у вигляді рівностей та нерівностей. Доведено, що для динамічної системи з компактним простором та його неперервним відображенням будь-які два числа серед чотирьох згаданих можуть відрізнятися не більше, ніж у два рази. Для систем спеціального вигляду встановлено додаткові факти стосовно наведених чисел. Для транзитивної системи співпадають перше та друге число. Для ТоМ-системи (яка трохи узагальнює випадок мінімальної системи) перше число дорівнює другому, а третє співпадає з четвертим.

Для слабко змішуючої системи виконується така ж пара рівностей, а якщо ця система є ще і мінімальною, то рівні між собою всі її чотири числа Ляпунова.

Наприкінці розділу побудовано приклади чутливих систем, для яких деякі числа Ляпунова відрізняються рівно вдвічі. Це показує точність оцінки максимального можливого відношення між зазначеними параметрами системи.

Розділ 3
Числа Ляпунова для систем на відрізку

У даному розділі вивчаються співвідношення між різними характеристиками чутливості динамічних систем вигляду (I, f), де I – відрізок прямої. Окрім чотирьох чисел Ляпунова, означення яких дані в розділі 2, вводяться локальні числа Ляпунова. Вони показують, як сильно може змінюватися траєкторія певної точки при малих змінах початкових умов.

Також розглядаються індуковані динамічні системи, де в якості простору виступає деяка сім'я підмножин відрізка. Наприклад, вивчаються властивості систем вигляду $(C(I), f)$, де $C(I)$ – набір усіх замкнених зв'язних непорожніх підмножин відрізка I, тобто його точок, а також відрізків, кінці яких належать йому. Доведено, що така система за умови неперервності функції f не чутлива до початкових умов. Більш того, система $(C(I), f)$ завжди містить точки, які є стійкими у сенсі Ляпунова. Це дає досить важливий висновок для теорії обчислень: заміна точки околом дозволяє оцінити згори похибку розрахунків.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [52] та [53].

3.1 Співвідношення між числами Ляпунова для систем на відрізку

Динамічну систему на відрізку будемо позначати як (I, f), де I – відрізок додатної довжини, а f – відображення цього відрізка в себе. Вважатимемо, що відрізок розташований на числовій прямій, тому він має вигляд

$[a, b]$, де a та b – дійсні числа, для яких $a < b$. Якщо це буде потрібно, завжди вважатимемо, що на відрізку I задана звичайна метрика, згідно з якою $d(x, y) = |x - y|$.

Динамічні системи, де в якості простору виступає відрізок, заслуговують особливої уваги. По-перше, такі системи досить прості для аналізу, оскільки в роботі з ними можна використати наявність порядку точок відрізка. По-друге, зазначені системи на часто застосовуються у моделюванні біологічних, екологічних та інших дискретних процесів. По-третє, такі системи мають багато цікавих властивостей. Наприклад, динамічні системи на відрізку демонструють особливий зв'язок між транзитивністю та чутливістю до початкових умов, що підтверджується, зокрема, двома наступними теоремами.

Теорема 3.1. Кожна транзитивна динамічна система (I, f), де I – відрізок додатної довжини, є чутливою.

Теорема 3.2 (*О. Блох*). Якщо система (I, f) на відрізку I чутлива до початкових умов, то I містить невироджені відрізки J_1, J_2, ..., J_p, які не перетинаються і для яких виконуються наступні дві умови. По-перше, для даних відрізків справедливі рівності $f(J_1) = J_2$, $f(J_2) = J_3$, ..., $f(J_p) = J_1$. По-друге, система $(J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_p, f)$ є транзитивною.

Наведені теореми вдало пов'язують чутливість зі структурними якостями системи (I, f). Але вони не дають кількісних оцінок для величин, згаданих у теоремах. Наприклад у теоремі 3.2 не вказана точна оцінка довжини найбільшого з відрізків $J_1, J_2, ..., J_p$ в залежності від параметра ε, який фігурує в означенні чутливості.

3.2 Основні означення

Означення чисел Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$ були введені в розділі 2. Для динамічних систем на відрізку вважатимемо, що в означеннях відповідних їм чисел Ляпунова використовується стандартна метрика $d(x,y) = |x-y|$.

Також можна ввести константи чутливості, пов'язані з відхиленням орбіт близьких точок від орбіти певної точки $x \in X$. Ці константи мають аналогію з числами Ляпунова $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$, тому позначатимемо їх $\mathcal{L}_3(x)$ та $\mathcal{L}_4(x)$.

Означення 3.1. Локальне третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3(x)$ для точки x динамічної системи (X, f) – це найбільше з таких $\varepsilon_3(x)$, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_3(x)$ та кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$, яка містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Означення 3.2. Локальне четверте число Ляпунова $\mathcal{L}_4(x)$ для точки x системи (X, f) – це найбільше з таких $\varepsilon_4(x)$, що для кожного $\varepsilon < \varepsilon_4(x)$ та кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$, яка містить x, знайдеться така $y \in U$, що нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}_0$ (тобто справджується умова $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$).

З означень 3.1 та 3.2 очевидно, що для будь-якої точки $x \in X$ виконана нерівність $\mathcal{L}_3(x) \geq \mathcal{L}_4(x)$. Далі буде доведено інші властивості локальних чисел Ляпунова.

3.3 Рівності між числами Ляпунова для відображення відрізка

У випадку динамічної системи на відрізку для чисел Ляпунова справджуються деякі рівності, які не є вірними в загальному випадку. Ці рівності виконуються тому, що метрика на відрізку узгоджена з порядком точок: якщо $x < y < z$, то $d(x,z) > d(x,y)$ та $d(x,z) > d(y,z)$. Рівності для певних пар чисел Ляпунова зазначені у наступних двох теоремах.

Теорема 3.3. *Якщо I – відрізок, то для системи (I,f) виконується рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.*

Доведення. Розглянемо непорожню відкриту множину $U \subset I$. Також візьмемо довільне $\delta > 0$.

За означенням діаметральної константи Ляпунова, знайдуться $x_1, y_1 \in U$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $d(f^{n_1}(x_1), f^{n_1}(y_1)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Відображення f є неперервним, тому існує відрізок $V_1 \subset U$, який задовольняє умови $x_1 \in V_1$ і $\operatorname{diam}(f^{n_1}(V_1)) < \delta$. Аналогічно, існує відрізок $W_1 \subset U$, який задовольняє умови $y_1 \in W_1$ і $\operatorname{diam}(f^{n_1}(W_1)) < \delta$. З нерівності трикутника отримуємо $d(f^{n_1}(V_1), f^{n_1}(W_1)) > \mathcal{L}_1 - 3\delta$, де $d(A,B)$ для множин A та B означає мінімум величини $d(a,b)$ по всіх $a \in A$ та $b \in B$.

Побудуємо послідовності відрізків $\{V_k\}_{k=2}^{\infty}$ та $\{W_k\}_{k=2}^{\infty}$ та зростаючу послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$ з наступними властивостями. По-перше, для всіх $k \in \mathbb{N}$ повинні виконуватися включення $V_{k+1} \subset V_k$ та $W_{k+1} \subset W_k$. По-друге, для кожного $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ має справджуватися нерівність $d(f^{n_k}(V_k), f^{n_k}(W_k)) > \mathcal{L}_1 - 3\delta$. Оскільки ми вже знайшли V_1, W_1 та n_1, послідовності можна будувати індуктивно. Тобто, для довільного $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ достатньо довести існування відповідних V_k, W_k та

n_k, припускаючи, що V_{k-1}, W_{k-1} та n_{k-1} вже існують.

У відрізку V_{k-1} виберемо настільки малий відрізок S, що для всіх цілих невід'ємних $i \leq n_{k-1}$ виконується $\mathrm{diam}(f^i(S)) < \mathcal{L}_1 - \delta$. З властивостей константи $\mathcal{L}_1$ випливає, що знайдеться таке m, для якого $\mathrm{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. За вибором S, має місце нерівність $m > n_{k-1}$.

Спочатку розглянемо випадок, коли існує точка $y \in W_{k-1}$, для якої $f^m(y) \notin f^m(S)$. Нехай z – той кінець відрізка $f^m(S)$, який знаходиться далі від $f^m(y)$. Очевидно, знайдеться точка $x \in S$, для якої $f^m(x) = z$. Тоді $d(f^m(x), f^m(y)) = d(z, f^m(y)) \geq \mathrm{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Розглянемо відрізок V_k, для якого виконуються умови $x \in V_k$, $V_k \subset V_{k-1}$ та $\mathrm{diam}(f^m(V_k)) < \delta$. Аналогічно, нехай W_k – деякий відрізок, для якого $y \in W_k$, $W_k \subset W_{k-1}$ та $\mathrm{diam}(f^m(W_k)) < \delta$. У якості n_k візьмемо m. Тоді справджується нерівність $d(f^{n_k}(V_k), f^{n_k}(W_k)) = d(f^m(V_k), f^m(W_k)) \geq d(f^m(x), f^m(y)) - 2\delta > \mathcal{L}_1 - 3\delta$.

Залишився випадок, коли $f^m(W_{k-1}) \subset f^m(S)$. Тоді справедливе включення $f^m(W_{k-1}) \subset f^m(V_{k-1})$, тому що $S \subset V_{k-1}$. За означенням $\mathcal{L}_1$, існує таке $t \in \mathbb{N}$, що $\mathrm{diam}(f^t(f^m(W_{k-1}))) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Отже, для деяких $y, z \in W_{k-1}$ виконується нерівність $d(f^{m+t}(y), f^{m+t}(z)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Оскільки $f^m(W_{k-1}) \subset f^m(V_{k-1})$, знайдеться $x \in V_{k-1}$, для якої $f^m(x) = f^m(z)$, а отже $f^{m+t}(x) = f^{m+t}(z)$. Маємо $x \in V_{k-1}$, $y \in W_{k-1}$ та $d(f^{m+t}(x), f^{m+t}(y)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Тому можна взяти $n_k = m + t$, а відрізки V_k та W_k обрати так само, як і в попередньому випадку.

Усі відрізки послідовності $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ є вкладеними, тому вони мають спільну точку v. Аналогічно, відрізки послідовності $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ мають деяку спільну точку w. За вибором V_1 та W_1, справедливе включення $v, w \in U$. Також, за побудовою $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ вірна нерівність $d(f^{n_k}(v), f^{n_k}(w)) > \mathcal{L}_1 - 3\delta$. Тобто, $\mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_1 - 3\delta$. З довільності $\delta > 0$ отримуємо, що $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$. $\Box$

Існування систем (X, f) з компактним X та неперервною f, для яких справджується нерівність $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2$, залишається відкритим питанням. Теорема 3.1 відповідає на це питання для систем, заданих на відрізку.

Теорема 3.4. Для довільної динамічної системи (I, f) на відрізку I справджується рівність $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in I$ та деяку відкриту множину $U \subset I$, яка містить x. Також оберемо довільне $\delta > 0$.

За означенням $\mathcal{L}_3$, знайдуться $y \in U$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $d(f^{n_1}(x), f^{n_1}(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. На множині U оберемо відрізок V_1, для якого виконуються умови $y \in V_1$ та $\mathrm{diam}(f^{n_1}(V_1)) < \delta$. Тоді вірна нерівність $d(f^{n_1}(x), f^{n_1}(V_1)) < \mathcal{L}_3 - 2\delta$, де $d(p, A)$ позначає відстань від точки p до найближчої до неї точки з множини A.

Побудуємо послідовність відрізків $\{V_k\}_{k=2}^{\infty}$ та зростаючу послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$ з наступними властивостями. По-перше, для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконуватиметься співвідношення $V_{k+1} \subset V_k$. По-друге, для кожного $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ справджуватиметься нерівність $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(V_k)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Як і в доведенні попередньої теореми, будуватимемо послідовності індуктивно.

Розглянемо довільне $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$. Оберемо на V_{k-1} настільки малий відрізок S, що для всіх цілих невід'ємних $i \leq n_{k-1}$ виконується $\mathrm{diam}(f^i(S)) < \mathcal{L}_3 - \delta$. З означення $\mathcal{L}_3$ випливає, що є таке m, для якого $\mathrm{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. За вибором S, маємо $m > n_{k-1}$.

Розглянемо випадок, коли $f^m(x) \notin f^m(S)$. Нехай z – той з двох кінців відрізка $f^m(S)$, який знаходиться далі від $f^m(x)$. Тоді, очевидно, $d(f^m(x), z) > \mathrm{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Оскільки $z \in f^m(S)$, існує точка $y \in S$, для якої $f^m(y) = z$. Оберемо відрізок $V_k \subset S$, який містить y та має настільки малу довжину, що $\mathrm{diam}(f^m(V_k)) < \delta$. Також покладемо $n_k = m$. Тоді $V_k \subset S \subset V_{k-1}$ та $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(V_k)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$, що і було потрібно.

Залишився випадок, коли $f^m(x) \in f^m(S)$. За означенням $\mathcal{L}_3$, існують $t \in \mathbb{N}$ та $z \in f^m(S)$, для яких $d(f^t(f^m(x)), f^t(z)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Розглянемо точку $y \in S$, для якої $f^m(y) = z$. Тоді $d(f^{m+t}(x), f^{m+t}(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Покладемо $n_k = m + t$ і, аналогічно попередньому випадку, оберемо відрізок $V_k \subset S$, який містить y та задовольняє умову $\mathrm{diam}(f^{n_k}(V_k)) < \delta$.

Послідовно розглядаючи всі натуральні $k \geq 2$, ми побудуємо потрібні послідовності $\{V_k\}_{k=2}^{\infty}$ та $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$. Для точки v, що належить усім V_k, за будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується умова $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(v)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Отже, $\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_3 - 2\delta$, а завдяки довільності $\delta > 0$ виходить $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. $\square$

Наведемо приклад системи, для якої $\mathcal{L}_3 < \mathcal{L}_1$. Нехай $I = [0, 1]$ та $f(x) = |1 - 2x|$. Легко показати, що для довільної непорожньої відкритої підмножини $U \subset I$ знайдеться таке $n \in \mathbb{N}$, що $f^n(U) = I$. Тому $\mathcal{L}_1 = 1$. З іншого боку, точка $x_1 = \frac{1}{3}$ є нерухомою для f. Отже, для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ та $y \in I$ справедливе співвідношення $d(f^n(x_1), f^n(y)) = |\frac{1}{3} - f^n(y)| \leq \frac{2}{3}$. Тому $\mathcal{L}_3 \leq \frac{2}{3}$ (і можна показати, що $\mathcal{L}_3 = \frac{2}{3}$).

Нагадаємо, що $\mathcal{L}_3 = \inf_{x \in X} \mathcal{L}_3(x)$. Як показує наведений приклад, для деякої точки $x \in I$ можлива нерівність $\mathcal{L}_3(x) < \mathcal{L}_1$. Цікаво дослідити, якою може бути множина точок, що задовольняють наведену нерівність. Далі ми покажемо, що така ситуація не є типовою. Тобто підмножину точок відрізка I, для яких виконується умова $\mathcal{L}_3(x) < \mathcal{L}_1$, можна назвати в певному сенсі малою.

Підмножину $Y \subset X$ будемо називати *підмножиною першої категорії Бера*, якщо Y можна представити як зліченне об'єднання ніде не щільних підмножин з X. Підмножини першої категорії Бера є, у деякому сенсі, малими підмножинами. Наприклад, тому, що відрізок (або іншу непорожню компактну множину) не можна покрити зліченною кількістю підмножин першої категорії.

Теорема 3.5. Для довільної динамічної системи (X, f) на метричному просторі (X, d) підмножина $Y = \{x \in X | \, \mathcal{L}_3(x) < \mathcal{L}_1\}$ є підмножиною першою категорії Бера в X.

Доведення. Нехай $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ позначає відкриту кулю радіуса r навколо $x \in X$. Позначимо через A_{pq} множину таких точок x, що для будь-якого $y \in B_{1/p}(x)$ та будь-якого невід'ємного цілого числа n виконується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \mathcal{L}_1 - \frac{1}{q}$. Очевидно, $Y = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} A_{pq}$.

Доведемо, що кожна A_{pq} – ніде не щільна, тобто вона не є щільною ні в якій відкритій непорожній множині $U \subset X$. Припустимо протилежне: нехай деяка A_{pq} щільна в певній $U \in \mathcal{O}(X)$. Оберемо в U відкриту підмножину V діаметром менше $\frac{1}{p}$. За означенням $\mathcal{L}_1$, існують точки $x, y \in V$ та число $n \in N$, для яких $d(f^n(x), f^y(n)) > \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2q}$. Оскільки A_{pq} щільна у V, існує точка $z \in A_{pq} \cap V$, яка настільки близька до x, що $d(f^n(x), f^n(z)) < \frac{1}{2q}$. Але за означенням множини A_{pq} маємо, що $d(f^n(z), f^n(y)) < \mathcal{L}_1 - \frac{1}{q}$. Тоді, за нерівністю трикутника, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n) < \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2q}$, що суперечить вибору x, y та n. Отже, кожна A_{pq} – ніде не щільна, а тоді Y є підмножиною першої категорії. $\square$

3.4 Узагальнення результатів для систем на відрізку

Теореми 3.3 та 3.4 виконуються не лише для систем, заданих на відрізку. Щоб зробити узагальнення цих теорем, опишемо вимогу до відображення f, яку назвемо умовою сильної віддаленості.

Будемо казати, що для відображення $f : X \to X$ виконується *умова сильної віддаленості*, якщо існує таке $r_1 > 0$, що для довільної замкненої кулі $B = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ радіуса $r < r_1$, довільного цілого $n \geq 0$ та довільної $x \notin f^n(B)$ справджується нерівність $\sup_{y \in f^n(B)} d(x, y) \geq \operatorname{diam}(f^n(B))$. Легко переконатися, що доведення теорем 3.3 та 3.4 використовують лише той факт, що метричний простір X – повний, а f є неперервною та задовольняє умову сильної віддаленості.

Для відрізка I зі стандартною метрикою $d(x, y) = |x - y|$ описаний принцип, очевидно, виконується за довільної неперервної f. Виявляється принцип має місце і для інших видів систем.

По-перше, він вірний для відрізка I з будь-якою *монотонною* метрикою, тобто такою метрикою d, що для будь-яких $x < y < z$ виконуються нерівності $d(x, y) \leq d(x, z)$ та $d(y, z) \leq d(x, z)$.

По-друге, принцип сильної віддаленості справедливий для кола, на якому відстань між точками x та y визначається як довжина більш короткої дуги з кінцями в цих точках. Також даний принцип розповсюджується на скінченне об'єднання відрізків та кіл, які не перетинаються. Це є наслідком того, що куля U достатньо малого радіуса буде належати лише одному колу або відрізку. Тому її неперервний образ $f^n(U)$ також знаходитиметься всередині однієї зв'язної компоненти простору, а до нього можна застосувати попередні міркування.

Таким чином, можна сформулювати більш загальну теорему.

Теорема 3.6. Нехай X – повний метричний простір, а $f : X \to X$ є неперервним і задовольняє умову сильної віддаленості. Тоді для (X, f) справджуються рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Нагадаємо, що метрика d на множині X називається *ультраметрикою*, якщо вона задовольняє посилену нерівність трикутника

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \text{ для довільних точок } x, y, z \in X.$$

Наприклад, метрика на канторовому кубі із прикладу 2.1 є ультраметрикою. Посилена нерівність трикутника гарантує, що для довільної підмножини $B \subset X$ ультраметричного простору (X, d) та точки $x \in X$ справджується нерівність $\operatorname{diam}(B) \leq \sup_{y \in B} d(x, y)$, звідки випливає, що будь-яке відображення $f : X \to X$ на X задовольняє умову сильної віддаленості. Тому із теореми 3.6 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.7. Для довільної динамічної системи (X, f) на повному ультраметричному просторі справджуються рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

3.5 Індуковані динамічні системи

В роботах багатьох авторів вивчаються індуковані динамічні системи. Наприклад, цьому об'єкту присвячені роботи [58], [35] та [40].

Нехай $f : X \to X$ неперервне відображення з континууму (тобто компактного зв'язного метричного простору) X в себе. Позначимо через $C(X)$ простір всіх компактних зв'язних підмножин X із метрикою Хаусдорфа. Було встановлено, що якщо X є одновимірний континуум, тоді може існувати тісний зв'язок між динамікою індукованого відображення і породжуючого його відображення [58], [34]. Зокрема, було доведено, що якщо ми розглянемо індуковане відображення відрізка I, то ω-гранична множина точки з $C(I)$ є або об'єднанням вироджених елементів з $C(I)$ (тобто точок з I), або скінчена підмножина з $C(I)$. Проте, зв'язок між динамікою відображень відрізку f та індукованим відображенням на $C(I)$ не завжди настільки сильний. Наприклад, індуковане відображення ніколи не є транзитивним, навіть якщо таким є саме відображення f. У більш загальному плані, транзитивність ніколи не має місце для індукованих відображень графів [28].

Означення 3.3. Індукованою системою називається пара (S, f), побудована на основі динамічної системи (X, f) таким чином: у якості S обирається деяка сім'я підмножин множини X, а функція f природним чином розповсюджується на підмножини згаданої сім'ї: для всіх $A \in S$ відображення задається рівністю $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$. При цьому для кожної $A \in S$ має виконуватися включення $f(A) \in S$.

Приклад 3.1. У випадку неперервної функції $f : X \to X$ розглянемо простір $C(X)$ всіх замкнених зв'язних непорожніх підмножин простору X. Для кожної $A \in C(X)$ образ $f(A)$ теж буде замкненим, зв'язним та непорожнім. Отже, $(C(X), f)$ є індукованою динамічною системою.

У просторі S, на якому задається індукована система (S, f) бажано задати метрику, що дозволить досліджувати збіжність і подібні явища. Для цього добре підходить метрика Хаусдорфа.

Означення 3.4. Метрикою Хаусдорфа називається функція

$d_H(U, V)$, задана для пар $U, V \subset X$ і визначена співвідношенням

$$d_H(U, V) = \max\{\sup_{u\in U} \inf_{v\in V} d(u, v), \sup_{v\in V} \inf_{u\in U} d(u, v)\},$$

де $d(u, v)$ дорівнює відстані між u та v у просторі X. Іншими словами, відстань Хаусдорфа – це нижня межа таких r, для яких замкнений r-окіл множини U містить V, а замкнений r-окіл множини V містить U.

Для довільних різних непорожніх замкнених $U, V \subset X$ виконується $d_H(U, V) > 0$. Також вірними є рівність $d_H(U, U) = 0$ та нерівність трикутника $d_H(U, W) \leq d_H(U, V) + d_H(V, W)$ (вона не очевидна, але добре відома). Отже, d_H задає коректну метрику в просторі $C(X)$.

Також метрика Хаусдорфа цікава тим, що відносно неї простір $C(X)$ буде компактним, якщо компактним є сам X. Для відображень виконується аналогічне правило: $f : C(X) \to C(X)$ буде неперервним відносно метрики Хаусдорфа, якщо неперервним є вихідне відображення $f : X \to X$.

Тут розглядається випадок, коли простір X є відрізком I. Тоді простір $C(I)$ є множиною всіх відрізків, що містяться в I (включаючи окремі точки), а відстань $d_H([a, b], [c, d])$ дорівнює $\max\{|a-c|, |b-d|\}$. Множина $C(I)$ (з метрикою d_H) гомеоморфна трикутнику $\{(a, b)|a, b \in I, a \leq b\}$ (з Евклідовою метрикою).

3.6 Властивості індукованих систем на відрізку

Перейдемо до аналізу чутливості індукованих систем вигляду $(C(I), f)$. Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 3.8. Нехай I – відрізок. Тоді в індукованій системі $(C(I), f)$

з метрикою d_H існує такий елемент $J \in C(I)$, що $\mathcal{L}_3(J) = 0$.

Доведення. Спочатку доведемо дві допоміжні леми.

Лема 3.9. Якщо функція $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ нестрого монотонна, то вона має не більше, ніж зліченну множину точок розриву.

Доведення леми. Розглянемо випадок, коли f неспадаюча. Випадок незростаючої функції аналогічний.

Нехай $u(x) = \sup\{f(y)|y < x\}$ та $v(x) = \inf\{f(y)|y > x\}$. Нехай D – множина точок, де f має розрив. Тоді для кожної $x \in D$ вірна нерівність $u(x) < v(x)$, тобто інтервал $(u(x), v(x))$ не порожній. Поставимо кожній $x \in D$ у відповідність деяке раціональне число $q(x)$ з $(u(x), v(x))$. Нехай x_1 та x_2 ($x_1 < x_2$) – деякі точки множини D. З монотонності f отримуємо, що $v(x_1) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq u(x_2)$, тобто інтервали $(u(x_1), v(x_1))$ та $(u(x_2), v(x_2))$ не мають спільних точок. Отже, для всіх $x \in D$ відповідні $q(x)$ будуть різними. Звідси слідує, що множина D не потужніша, ніж $\mathbb{Q}$, тобто не більш, ніж зліченна. Лему 3.9 доведено.

Наступна лема є частковим випадком результату статті [58]. Доведення для зазначеного у лемі випадку є досить коротким, тому наведемо його для повноти викладу.

Лема 3.10. Якщо відрізок J містить нерухому точку функції f, то послідовність відрізків $f^{2n}(J)$ збігається. Збіжність відрізків будемо розуміти як збіжності координат лівих та правих кінців (тобто у сенсі метрики Хаусдорфа).

Доведення леми. Нехай J – відрізок, що містить нерухому точку s. Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ через J_n позначатимемо відрізок $f^n(J)$.

Випадок 1. Нехай для деякого цілого невід'ємного m має місце включення $J_m \subset J_{m+1}$ або $J_{m+1} \subset J_m$. Тоді для всіх $n > m$ також виконується $J_n \subset J_{n+1}$ або $J_{n+1} \subset J_n$ відповідно. Отже, всі J_n $(n \geq m)$ вкладені один в інший. Звідси маємо, що послідовність відрізків J_n збігається. А тоді цю властивість мають і $f^{2n}(J)$.

Випадок 2. Нехай для деякого цілого невід'ємного m виконується $J_m \subset J_{m+2}$ або $J_{m+2} \subset J_m$. Тоді, аналогічно попередньому випадку, відрізки $f^{2n}(J)$ для $n \geq m$ утворюють послідовність вкладених множин.

Випадок 3. Припустимо, що для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ відрізок J_n не містить ані J_{n+1}, ані J_{n+2}, а також сам не міститься в жодному з останніх двох відрізків.

Введемо наступні позначення. Для $U = [a, b]$ та $V = [c, d]$ будемо використовувати запис $U < V$, якщо $a < c$ та $b < d$. Аналогічно, записуватимемо $U > V$, якщо $a > c$ та $b > d$. Помітимо, що для відрізків U та V, жоден з яких не містить інший, завжди буде $U < V$ або $U > V$.

Випадок 3.1. Нехай для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ виконується $J_n < J_{n+1}$ або для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ вірно $J_n > J_{n+1}$. У цьому разі, за теоремою Веєрштраса, координати кінців J_n збігаються.

Випадок 3.2. Тепер розглянемо ситуацію, коли для деякого $m \in \mathbb{N}$ одночасно виконані нерівності $J_m < J_{m-1}$ та $J_m < J_{m+1}$ або ж одночасно мають місце $J_m > J_{m-1}$ і $J_m > J_{m+1}$. Нехай $K = J_{m-1} \cup J_m$. Множина K є відрізком, тому що J_{m-1} та J_m обидва містять точку s. Застосовуючи відображення f до обох частин рівності $K = J_{m-1} \cup J_m$, отримаємо $f(K) = J_m \cup J_{m+1}$. Отже, згідно з розглянутим випадком, виконується $f(K) \subset K$ або $K \subset f(K)$. Розглянемо варіант $f(K) \subset K$ – інший є аналогічним. Із кульками різні розваги існують: одні їх кидають, а інші пакують. Застосовуючи функцію f^n до обох частин останнього включення, отримаємо, що для будь-якого натурального n виконується $f^{n+1}(K) \subset f^n(K)$.

Оскільки в розглянутому випадку відрізки J_{m-1} і J_m не містять один одного, виконується умова $J_{m-1} < J_m$ або $J_{m-1} > J_m$. Вважатимемо, що $J_{m-1} < J_m$ – протилежний варіант аналізується так само. Зі співвідношення $f(K) \subset K$ випливає, що $J_{m+1} \subset K = J_{m-1} \cup J_m$. Тому лівий кінець J_{m+1} має бути не лівіше лівого кінця J_{m-1}, а правий кінець J_{m+1} – не правіше правого кінця J_m. За умовою випадку 3, відрізок J_{m+1} не міститься ані в J_{m-1}, ані в J_m. Тому $J_{m-1} < J_{m+1} < J_m$. Тепер із $f^2(K) \subset f(K)$ та нерівності $J_m > J_{m+1}$ так само виводимо, що $J_m > J_{m+2} > J_{m+1}$.

Застосовуючи індукцію та включення $f^{n+1}(K) \subset f^n(K)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, приходимо до висновку, що для всіх натуральних k виконуються нерівності $J_{m-1+2k} < J_{m+1+2k} < J_{m+2k}$ і $J_{m+2k} > J_{m+2+2k} > J_{m+1+2k}$.

Отже, відрізки вигляду J_{m+2k} утворюють спадаючу послідовність, а J_{m-1+2k} – зростаючу. Тому координати кінців J_{2n} для $n \geq m$ утворюють монотонні послідовності. Звідси отримуємо, що послідовність відрізків $f^{2n}(J)$ збігається. Лему 3.10 доведено.

Перейдемо до доведення самої теореми. Для зручності введемо систему координат, у якій I стане відрізком [0,1]. Розглянемо декілька випадків.

Випадок 1. Нехай на інтервалі $(0, 1)$ немає такої точки s, що $f(s) = s$. У цьому випадку для всіх $x \in (0, 1)$ виконується нерівність $f(x) > x$ або для всіх $x \in (0, 1)$ справджується $f(x) < x$.

Розглянемо випадок, коли для всіх $x \in (0, 1)$ маємо $f(x) > x$ – інший цілком аналогічний. У нашому випадку виконується рівність $f(1) = 1$, бо функція f є неперервною.

Розглянемо довільний відрізок $J = [a, b]$, для якого $a > 0$. Покажемо, що в системі $(C(I), f)$ виконується $\mathcal{L}_3(J) = 0$. Нехай $a_0 = a/2$. Розглянемо відрізки $J_n = f^n([a_0, 1])$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Оскільки справджується рівність $f(1) = 1$, для довільного цілого невід'ємного n відрізок J_n міститиме точку 1. Отже, кожен такий відрізок має вигляд $[a_n, 1]$. Для лівих країв згаданих відрізків при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $a_n = \min\{f(x)|x \in [a_{n-1}, 1]\}$.

За вибором випадку, для всіх $x \in [a_{n-1}, 1]$ вірно $f(x) > x \geq a_{n-1}$. Тому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $a_n \geq a_{n-1}$. Отже, за теоремою Веєрштраса, $\{a_n\}$ має границю. Покажемо, що зазначена границя дорівнює 1. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = d$. Тоді для всіх n виконується нерівність $a_n \leq d$. А з неперервності f та рівності $f([a_n, 1]) = [a_{n+1}, 1]$ отримуємо наслідок, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ на відрізку $[a_n, 1]$ є така точка x_n, для якої $f(x_n) = d$. За вибором розглянутого випадку, $x \leq f(x)$ для всіх x. Тому для будь-якого натурального n вірно $x_n \leq f(x_n) = d$. Зі співвідношень $a_n \leq x_n \leq d$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = d$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d$. Отже, $f(d) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = d$.

У розглянутому випадку рівність $f(d) = d$ можлива лише при $d = 0$ або $d = 1$. З нерівності $d \geq a_0 > 0$ випливає, що $d = 1$.

Тепер покажемо, що розглянутий нами відрізок $J = [a, b]$ не є чутливим. Відрізок $J_0 = [a_0, 1]$ містить J, отже для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується включення $f^n(J) \subset f^n(J_0) = J_n$. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Як показано раніше, для послідовності $\{a_n\}$, де $[a_n, 1] = f^n(J)$, вірна рівність $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Зважаючи на це, знайдеться такий індекс m, що для всіх натуральних $n > m$ має місце нерівність $1 - a_n < \varepsilon$. Якщо для деякого $K = [c, d]$ виконано $d_H(J, K) \leq a/2$, то, за вибором a_0, відрізок K також міститься в J_0. А тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконано співвідношення $f^n(K) \subset J_n$. За вибором індексу m, для всіх $n > m$ відрізки $f^n(J)$ та $f^n(K)$ лежать всередині J_n, довжина якого менша за ε. Тому для цих n виконується нерівність $d_H(f^n(J), f^n(K)) < \varepsilon$. Розглянемо таке $\delta \in (0, a/2)$, що для всіх відрізків L, що задовольняють умову $d_H(J, L) < \delta$, та для всіх цілих невід'ємних $n \le m$ має місце нерівність $d_H(f^n(J), f^n(L)) < \varepsilon$. Потрібне δ знайдеться, бо відображення $f : C(I) \to C(I)$ є неперервним відносно метрики Хаусдорфа. Тоді для будь-якого $K \in C(I)$, що задовольняє нерівність $d_H(J, K) < \delta$, маємо нерівність $d_H(f^n(J), f^n(K)) < \varepsilon$ при всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Дійсно, для $n \le m$ ця нерівність виконується за вибором δ. А для $n > m$ вона справджується за вибором m. Отже, за означенням 3.1, виконується рівність $\mathcal{L}_3(J) = 0$.

Випадок 2. Нехай існує точка $s \in (0, 1)$, для якої $f(s) = s$. Для кожного $x \in [0, 1]$ нехай $I_x = [s - sx, s + (1 - s)x]$. Тоді відрізок I_0 співпадає з $\{s\}$, а I_1 – з відрізком $[0, 1]$. Також, якщо $0 \le x < y \le 1$, то $I_x \subset I_y$. За лемою 3.10, для всіх $x \in [0, 1]$ послідовність $\{f^{2n}(I_x)\}$ має границю. Нехай для кожного $x \in [0, 1]$ функції $g(x)$ та $h(x)$ задані рівністю $[g(x), h(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} f^{2n}(I_x)$. Оскільки відрізки I_x $(0 \le x \le 1)$ вкладені один в одного, так само влаштовані й граничні відрізки $[g(x), h(x)]$. Тобто, $g(x)$ нестрого монотонно спадає, а $h(x)$ нестрого монотонно зростає. За лемою 3.9, функції $g(x)$ та $h(x)$ мають максимум зліченну множину точок розриву.

Нехай $y \in (0, 1)$ – точка неперервності функцій g та h. Покажемо, що відрізок I_y не є чутливим у динамічній системі $(C(I), f)$. Задамо функції $p(x)$ та $q(x)$ за допомогою рівності $[p(x), q(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} f^{2n+1}(I_x)$. Оскільки $[p(x), q(x)] = f([g(x), h(x)])$, а відображення f – неперервне відносно метрики Хаусдорфа, функції p та q також неперервні в точці y. Для зручності записами J_x та K_x позначатимемо відрізки $[g(x), h(x)]$ та $[p(x), q(x)]$ відповідно. Тоді, якщо розглядати J_x та K_x як функції від x, вони неперервні в точці y відносно метрики d_H.

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай δ – таке додатне число, що $d_H(J_{y-\delta}, J_y) < \varepsilon/4$, $d_H(J_{y+\delta}, J_y) < \varepsilon/4$, $d_H(K_{y-\delta}, K_y) < \varepsilon/4$ і $d_H(K_{y+\delta}, K_y) < \varepsilon/4$. Розглянемо таке m, що для всіх парних $n > m$ виконуються нерівності $d_H(f^n(I_{y-\delta}), J_{y-\delta}) < \varepsilon/4$ та $d_H(f^n(I_{y+\delta}), J_{y+\delta}) < \varepsilon/4$, а для всіх непарних $n > m$ вірно $d_H(f^n(I_{y-\delta}), K_{y-\delta}) < \varepsilon/4$ та $d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_{y+\delta}) < \varepsilon/4$. Тоді для парних $n > m$, за нерівністю трикутника, маємо співвідношення

$$d_H(f^n(I_{y-\delta}), J_y) \leq d_H(f^n(I_{y-\delta}), J_{y-\delta}) + d_H(J_{y-\delta}, J_y) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2,$$

$$d_H(f^n(I_{y+\delta}), J_y) \leq d_H(f^n(I_{y+\delta}), J_{y+\delta}) + d_H(J_{y+\delta}, J_y) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.$$

Аналогічно, для непарних $n > m$ справджуються оцінки

$$d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_y) \leq d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_{y+\delta}) + d_H(K_{y+\delta}, K_y) <$$

$$< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2,$$

$$d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_y) \leq d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_{y+\delta}) + d_H(K_{y+\delta}, K_y) <$$

$$< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.$$

Зрозуміло, що довільний відрізок U, для якого виконано $I_{y-\delta} \subset U \subset I_{y+\delta}$ також задовольняє нерівності $d_H(f^n(U), J_y) < \varepsilon/2$ (для парних n) та $d_H(f^n(U), K_y) < \varepsilon/2$ (для непарних n) при всіх $n > m$. Для відрізка I_y теж вірна умова $I_{y-\delta} \subset I_y \subset I_{y+\delta}$, тому з нерівності трикутника отримуємо, що для парних $n > m$ та для всіх відрізків U, які задовольняють умову $I_{y-\delta} \subset U \subset I_{y+\delta}$, справджується нерівність

$$d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < d_H(f^n(I_y), J_y) + d_H(J_y, f^n(U)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Аналогічно, для непарних $n > m$ та тих самих U виконується

$$d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < d_H(f^n(I_y), K_y) + d_H(K_y, f^n(U)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Отже, для всіх $n > m$ справджується $d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < \varepsilon$.

Тепер підберемо таке $\delta_1 > 0$, що $\delta_1 < d_H(I_y, I_{y-\delta}) = d_H(I_y, I_{y+\delta})$ і для всіх цілих невід'ємних $n \leq m$ з нерівності $d_H(I_y, U) < \delta_1$ випливатиме $d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < \varepsilon$. З умови $d_H(I_y, U) < \delta_1$ також випливає, що $I_{y-\delta} \subset U \subset I_{y+\delta}$. А тому для обраного δ_1 нерівність $d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < \varepsilon$ виконується і для всіх $n > m$, якщо тільки $d_H(I_y, U) < \delta_1$. Отже, відрізок I_y є стійким в індукованій системі $(C(I), f)$, для нього виконується $\mathcal{L}_3(I_y) = 0$. $\square$

Наслідок 3.11. Індукована система вигляду $(C(I), f)$ не може бути чутливою до початкових умов.

Доведення. За означеннями звичайних та локальних чисел Ляпунова (а саме, за означеннями 2.3 та 3.1), $\mathcal{L}_3 = \inf_{x \in X} \mathcal{L}_3(x)$. Згідно з теоремою 3.8, у системі $(C(I), f)$ існує елемент J, для якого $\mathcal{L}_3(J) = 0$. Отже, для даної системи третє число Ляпунова $\mathcal{L}_3$ дорівнює нулю, тобто вона не є чутливою. $\square$

Отримані результати свідчать про більшу стійкість індукованої системи $(C(I), f)$ у порівнянні зі стійкістю вихідної системи (I, f). Окрім теоретичного інтересу, це може допомогти у розрахунках, пов'язаних із ітераціями деякої чутливої системи. Замінивши окремі точки їхніми околами можна бути впевненим, що при обчисленні положення точки на певній ітерації похибка розрахунків може призвести лише до такого відхилення, яке не виводить за межі ітерації відповідного околу.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі наведено ряд означень та результатів.

1. Наведено означення локальних чисел Ляпунова.

2. Доведено теореми про те, що в системах на відрізку перше число Ляпунова співпадає з другим, а третє – з четвертим.

3. Показано, що в динамічній системі на відрізку множина точок, для яких третє локальне число Ляпунова перевищує $\mathcal{L}_1$, є топологічно неістотною.

4. Теореми про рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ узагальнено на випадок системи (X, f) з повним простором X та неперервним відображенням f, яке задовольняє певну умову, названу умовою сильної віддаленості.

5. Доведено, що індукована система на відрізку $(C(I), f)$ завжди містить точки, які є стійкими у сенсі Ляпунова. Наслідком існування таких точок є те, що згадані системи не бувають чутливими до початкових умов.

Розділ 4
Числа Ляпунова для напівгрупових систем

У даному розділі проаналізовано питання, пов'язані з чутливістю систем вигляду (X, G), де X – метричний простір, а G – деяка напівгрупа його неперервних відображень у себе. Деякі співвідношення між числами Ляпунова, які в розділі 2 доведено для для систем вигляду (X, f), узагальнено на випадок напівгрупової системи. Також на випадок таких систем перенесено поняття чутливості у сенсі Лі-Йорка і узагальнено деякі теореми, пов'язані з цим явищем.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [51] та [54].

4.1 Основні поняття

В попередніх розділах у якості динамічної системи розглядалася пара (X, f), де X – метричний простір, а f – його відображення в себе. Поняття динамічної системи можна узагальнити наступним чином. Як вже було зазначено, багатократне застосування функції f є реалізацією відображення f^n, де $n \in \mathbb{N}_0$. Тобто, кожному елементу n з $\mathbb{N}_0$ можна поставити у відповідність функцію f^n. При цьому операція додавання чисел, яка діє в напівгрупі $\mathbb{N}_0$, узгоджена з композицією функцій: для будь-яких $m, n \in N_0$ виконується рівність $f^{m+n} = f^m(f^n)$. За аналогією можна розглянути довільну напівгрупу G і співставити її елементам деякі відображення простору X у себе. Поняття, що узагальнює раніше розглянуті динамічні системи, задамо за допомогою такого означення.

Означення 4.1. Напівгруповою динамічною системою називається пара (X, G), де X – деяка множина, а G – напівгрупа, для якої кожному елементу $g \in G$ поставлено у відповідність деяке відображення $f_g : X \to X$. При цьому для будь-яких $g, h \in G$ повинна справджуватись умова $f_{gh} = f_g(f_h)$. Також, якщо G містить одиничний елемент e, то має виконуватися тотожність $f_e(x) = x$.

У випадку, описаному в наведеному означенні, будемо казати, що напівгрупа G діє на просторі X.

Насправді X та G не містять повної інформації про відповідну динамічну систему, адже елементам напівгрупи можуть бути співставлені різні відображення. Але ми, використовуючи запис (X, G), будемо вважати, що для кожного $g \in G$ вже задано відображення f_g. Далі замість відображення f_g іноді ми будемо писати просто g, бо можна вважати, що самі елементи $g \in G$ є відображеннями X у себе.

Наведемо декілька прикладів напівгрупових динамічних систем.

Приклад 4.1. Нехай простір X є декартовим добутком $X_1 \times ... \times X_k$, тобто його точки – це набори елементів $(x_1,\ ...,\ x_k)$, де $x_i \in X_i$ $(i = 1,\ ...,\ k)$. Для кожного X_i нехай існує відображення $f_i : X_i \to X_i$. Множина $\mathbb{N}_0^k = \{(n_1,\ ...,\ n_k) | n_1,\ ...,\ n_k \in \mathbb{N}_0\}$ є напівгрупою відносно операції покоординатного додавання. Задамо її дію на X: нехай для довільного вектора $\vec{n} = (n_1,\ ...,\ n_k)$ та всіх точок $x = (x_1,\ ...,\ x_n)$ виконується співвідношення $\vec{n}(x) = (f_1^{n_1}(x_1),\ ...,\ f_k^{n_k}(x_k))$. Маємо динамічну систему $(X_1 \times ... \times X_k, \mathbb{N}_0^k)$.

На просторі з прикладу 4.1 часто розглядається дія меншої напівгрупи $\{(n, ..., n) | n \in \mathbb{N}_0\}$. Тоді відповідну систему називають декартовим добутком систем (X_1, f_1), ..., (X_k, f_k).

Приклад 4.2. Нехай простір X є колом S^1. Розглянемо множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ з операцією додавання. Нехай для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ функція f_α є поворотом на кут α (для визначеності вважатимемо, що поворот здійснюється проти годинникової стрілки). Тоді $(S^1, \mathbb{R})$ є ще одним прикладом дії напівгрупи.

Приклад 4.3. Розглянемо одиничний відрізок $I = [0, 1]$. Нехай G складається з неперервних монотонних функцій $g : I \to I$. Оскільки композиція двох неперервних монотонних функцій теж неперервна та монотонна, множина G є напівгрупою відносно композиції, Елементи $g \in G$ діятимуть на I природним чином: у якості f_g береться сама функція g. Пара (I, G) є напівгруповою динамічною системою.

Дія довільної напівгрупи G може бути не комутативною: не для всіх відображень f, g буде виконуватися рівність $f(g) = g(f)$. Таке явище спостерігається у прикладі 4.3.

Для напівгрупових систем (X, G) також можна ввести поняття чутливості за аналогією з означенням 1.8.

Означення 4.2. Систему (X, G) називають чутливою (або чутливою до початкових умов), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ і довільного її відкритого околу U знайдуться $y \in U$ та $g \in G$, для яких $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Як правило, розглядаються дії напівгруп, де відображення є неперервними відносно метрики простору X. Неперервні функції особливо цікаві у дослідженні чутливості, адже у цьому випадку чутливість може бути досягнута лише завдяки нескінченній множині відображень. У даному розділі також використовуватиметься дане обмеження на функції діючої напівгрупи.

У розділі 2 були запропоновані означення чисел Ляпунова. Ці числа на кількісному рівні характеризують чутливість певної системи. Тепер наведемо означення для випадку системи (X, G).

Означення 4.3. Першим числом Ляпунова $\mathcal{L}_1$ для системи (X, G) називається найбільше з таких ε_1, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_1$ та будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4.4. Другим числом Ляпунова $\mathcal{L}_2$ для системи (X, G) називається найбільше з таких ε_2, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_2$ та будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Означення 4.5. Третім числом Ляпунова $\mathcal{L}_3$ для системи (X, G) називається найбільше з таких $\mathcal{L}_3$, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_3$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4.6. Четвертим числом Ляпунова $\mathcal{L}_4$ для системи (X, G) називається найбільше з таких $\mathcal{L}_4$, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_4$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Іншими словами, числа $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$ – це точні верхні грані тих ε, для яких виконуються певні властивості, пов'язані зі взаємним віддаленням точок простору під дією напівгрупи.

4.2 Співвідношення між числами Ляпунова для напівгрупових систем

Далі ми будемо припускати, що X – компактний простір з метрикою d, а всі відображення f_g, відповідні елементам $g \in G$, неперервні відносно цієї метрики. Тому ми не будемо окремо згадувати про це у формулюванні кожної подальшої теореми.

Із означень 4.3–4.6 безпосередньо випливає, що $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$. Теорема 2.1 стверджує про менш очевидну нерівність $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$ для системи (X, f) із компактним X та неперервним f. Доведемо аналогічне твердження для напівгрупової дії.

Теорема 4.1. Для системи (X, G) виконується нерівність $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$.

Доведення. Потрібно проаналізувати лише випадок $\mathcal{L}_1 > 0$, бо для $\mathcal{L}_1 = 0$ наведена нерівність отримується очевидним чином з невід'ємності чисел Ляпунова.

Розглянемо деяку точку $x \in X$. Покажемо, що для довільного $\delta > 0$ та будь-якого відкритого околу U точки x знайдеться $y \in U$, для якої нерівність $d(g(x), g(y)) > \mathcal{L}_1/2 - \delta$ справджується при нескінченно багатьох $g \in G$.

За означенням першого числа Ляпунова, знайдуться точки $z_1, z_2 \in U$ та відображення $g_1 \in G$, для яких вірна умова $d(g_1(z_1), g_1(z_2)) > \varepsilon_1 - \delta$. За нерівністю трикутника, для однієї з цих двох точок (позначимо її y_1) виконується $d(g_1(x), g_1(y_1)) > (\varepsilon_1 - \delta)/2$. Оберемо відкритий окіл U_1 точки y_1, для якого справджуються умови $\operatorname{diam}(U_1) < 1$, $\operatorname{diam}(g_1(U_1)) < \delta/2$ і $\overline{U_1} \subset U$. Потрібний окіл існує завдяки (рівномірній) неперервності відображення g_1.

Побудуємо послідовність точок $\{y_n\}$, а разом з нею – послідовності відображень $\{g_n\}$ та відкритих околів $\{U_n\}$. Згадана $\{y_n\}$ має збігатися до такої точки y, що співвідношення $d(g(x), g(y)) > \mathcal{L}_1/2 - \delta$ вірне за нескінченно багатьох $g \in G$.

Будуватимемо зазначені послідовності індуктивно. Елементи y_1, g_1 та U_1 вже обрані. Тому достатньо задати y_{k+1}, g_{k+1}, U_{k+1} ($k \in \mathbb{N}$) у припущенні, що відповідні члени y_k, g_k та U_k вже є.

За означенням числа $\mathcal{L}_1$, знайдеться така $g_{k+1} \in G$, що $\operatorname{diam}(g_{k+1}(U_k)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Тоді, за нерівністю трикутника, існує точка y_{k+1}, для якої $d(g_{k+1}(x), g_{k+1}(y_{k+1})) > (\mathcal{L}_1 - \delta)/2$. Оберемо згадані y_{k+1} та g_{k+1} в якості наступних елементів відповідних послідовностей. Нарешті, візьмемо такий окіл U_{k+1} точки y_{k+1}, що $\operatorname{diam}(U_{k+1}) < 1/(k+1)$, $\operatorname{diam}(g_{k+1}(U_{k+1})) < \delta/2$ та $U_{k+1} \subset U_k$.

Згідно з правилами побудови наших послідовностей, для кожного натурального k виконана умова $U_{k+1} \subset U_k$, звідки маємо $\overline{U_{k+1}} \subset \overline{U_k}$. Множина X компактна, тому будь-яка її замкнена підмножина теж буде компактною. Отже, $\{\overline{U_n}\}$ – це послідовність вкладених компактів, а такі множини завжди мають спільну точку y. Оскільки $\overline{U_1} \subset U$, точка y теж належить U. Для кожного натурального k точки y та y_k належать множині U_k. За вибором U_k та g_k, виконуються умови $d(g_k(x), g_k(y_k)) > (\mathcal{L}_1 - \delta)/2$ та $d(g_k(y_k), g_k(y)) \leq \operatorname{diam}(g_k(U_k)) < \delta/2$. Тому з нерівності трикутника маємо, що $d(g_k(x), g_k(y)) \geq d(g_k(x), g_k(y_k)) - d(g_k(y_k), g_k(y)) < \mathcal{L}_1/2 - \delta$.

Покажемо, що для довільного $\delta < 2\mathcal{L}_1/3$ всі відображення $\{g_k\}$ різні. Розглянемо деякі g_i та g_j, де $i < j$. За вибором множини U_j маємо $\operatorname{diam}(g_i(U_i)) < \delta/2$. З іншого боку, U_i містить U_{j-1} (можливо, $U_i = U_{j-1}$), тому $\operatorname{diam}(g_j(U_i)) \geq \operatorname{diam}(g_j(U_{j-1})) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Якщо

$\delta/2 < \mathcal{L}_1 - \delta$, множини $g_i(U_i)$ та $g_j(U_i)$ мають різні діаметри. Отже, у випадку $\delta < 2\mathcal{L}_1/3$ відображення g_i та g_j відрізняються одне від одного. Тому для $0 < \delta < 2\mathcal{L}_1/3$ виконується $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4 + 2\delta$.

Беручи як завгодно малі $\delta > 0$, отримуємо $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$. $\square$

З доведеної теореми та очевидних нерівностей $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ і $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$ слідує, що для будь-яких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ справджується $\mathcal{L}_i \leq 2\mathcal{L}_j$.

Теорема 4.1 у певному сенсі є точною. Тобто можна навести приклади чутливих систем, де нерівність $\mathcal{L}_i \leq 2\mathcal{L}_j$ для деяких i та j перетворюється на рівність. Наведемо приклад такої системи.

Розглянемо функцію $f(x) = 1 - |2x - 1|$ на відрізку $[0, 1]$. Дана функція переводить цей відрізок у себе, тому з її допомогою можна задати динамічну систему (X, f), де $X = [0, 1]$. Легко довести, що така система є топологічно точною, тобто для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдеться таке n, що $f^n(U) = X$. Дійсно, всередині будь-якої відкритої непорожньої підмножини простору X міститься деякий відрізок $[a, b]$, де $a > b$. Прослідкуємо еволюцію множин $f^n([a, b])$, яка відбувається зі зростанням натурального n. Кожний відрізок $f^n([a, b])$ вдвічі довший за $f^{n-1}([a, b])$ або містить точку 1. Оскільки довжини відрізків $f^n([a, b])$ обмежені згори довжиною відрізка $[0, 1]$, для певного n виконується умова $1 \in f^n([a, b])$. Для наведеної функції виконується рівність $f(1) = 0$, тому справедливе включення $0 \in f^{n+1}([a, b])$. Кожен наступний відрізок теж буде містити точку 0, бо $f(0) = 0$. Отже довжини відрізків $f^{n+k}([a, b])$ зі збільшенням k будуть кожного разу зростати вдвічі, поки для деякого натурального k стане справедливим співвідношення $1 \in f^{n+k}([a,b])$. Згідно з попередніми спостереженнями, вірно і $0 \in f^{n+k}([a,b])$. Отже, $f^{n+k}([a,b]) = X$, тому й $f^{n+k}(U) = X$.

Тепер розглянемо деякий гомеоморфізм g, який переводить відрізок $[0,1]$ у себе. Система $(X, g^{-1} \circ f \circ g)$ також буде топологічно точною. Дійсно, для будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ множина $g(U)$ також відкрита та непорожня. Отже, знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого $f^n(g(U)) = X$. А тоді і $(g^{-1} \circ f \circ g)^n(U) = g^{-1}(f^n(g(U))) = X$.

За означенням топологічно точної системи, її число $\mathcal{L}_1$ дорівнює діаметру простору X. У нашому випадку $\mathcal{L}_1 = 1$. Оберемо такий гомеоморфізм g, що $g(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$. Тоді точка $\frac{1}{2}$ буде нерухомою для відображення $g^{-1} \circ f \circ g$. Отже, для будь-якого n та будь-якої точки $y \in [0,1]$ виконується $d(f^n(\frac{1}{2}), f^n(y)) = d(\frac{1}{2}, f^n(y)) \le \frac{1}{2}$. Тому справджується співвідношення $\mathcal{L}_3 \le \frac{1}{2}$. За теоремою 4.1, це можливо лише у випадку $\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}$. Тепер наведемо приклад потрібної системи.

Приклад 4.4 Нехай $X = [0,1]$, $f(x) = 1 - |2x - 1|$ та $g(x) = x + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}|2x - 1|$. Тоді функція $h = g^{-1} \circ f \circ g$ має вигляд $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + |x - \frac{1}{4}| - 4|x - \frac{3}{8}| + \frac{3}{2}|x - \frac{1}{2}|$. Оскільки $g(x)$ – гомеоморфізм відрізка $[0,1]$, система (X, h) є топологічно точною, звідки отримуємо $\mathcal{L}_1 = 1$. З урахуванням попередніх міркувань та рівності $g(\frac{1}{2} = \frac{2}{3})$ маємо $\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}$. Отже, для чутливої системи (X, h) виконується рівність $\mathcal{L}_1 = 2\mathcal{L}_3$.

4.3 Рівності між числами Ляпунова для напівгрупових систем певних типів

У розділі 2 було показано, що для деяких класів динамічних систем вигляду (X, f) між певними числами Ляпунова спостерігається рівність.

Наприклад, було доведено, що для транзитивних систем виконується рівність між першими двома числами. Для мінімальних систем, які є частковим випадком транзитивних, доведено, що окрім $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ виконується співвідношення $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Далі будуть виведені такі ж рівності для випадку дії комутативної напівгрупи.

Наведемо деякі означення.

Означення 4.7. Транзитивною системою називається така (X, G), що для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U, V \subset X$ знайдеться $g \in G$, для якої $g(U) \cap V \neq \varnothing$.

Як відомо, множина $M \subset X$ називається щільною в точці x якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така $y \in M$, що $d(x, y) < \varepsilon$. Множина $M \subset X$ називається всюди щільною, якщо вона щільна в будь-якій точці $x \in X$. Множина $M \subset X$ ніде не щільна, якщо для довільної непорожньої відкритої множини $U \subset X$ існує точка $z \in U$, де M не щільна. (Підкреслимо, що ніде не щільна множина може бути щільною в деяких точках, якщо множина цих точок не містить відкритої непорожньої підмножини.) Якщо розглянути замикання, щільність можна розуміти наступним чином. Множина M щільна в точці x, якщо $x \in \overline{M}$, всюди щільна, якщо $X = \overline{M}$, і ніде не щільна, якщо $\overline{M}$ не містить відкритих непорожніх підмножин простору X.

Можна дати означення мінімальної та транзитивної точки, виходячи з поняття щільності.

Означення 4.8. Точка $x \in X$ називається транзитивною точкою системи (X, G), якщо множина $\{g(x) | g \in G\}$ щільна в X.

Означення 4.9. Мінімальною системою називається така (X, G), що для довільної точки $x \in X$ множина $\{g(x)|g \in G\}$ щільна в X. Тобто система мінімальна тоді і лише тоді, коли будь-яка її точка транзитивна.

Для подальших доведень будемо використовувати таку лему.

Лема 4.2. Якщо система (X, G) транзитивна, простір X – компактний, а G складається з неперервних відображень, то будь-яка непорожня відкрита підмножина простору X містить транзитивну точку.

Доведення. Як відомо, якщо X – компактний, то в ньому існує злічення база, тобто така сім'я непорожніх відкритих множин $B_i|i \in \mathbb{N}$, що для будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдеться B_i, яка повністю лежить в U.

Точка x не є транзитивною тоді і тільки тоді, коли замикання її орбіти $\overline{\{g(x)|g \in G\}}$ не співпадає з усім X. Оскільки $\overline{\{g(x)|g \in G\}}$ є замкненою множиною, її доповнення до X відкрите. За вибором системи $B_i|i \in \mathbb{N}$, знайдеться B_j, яка не має спільних точок із $\overline{\{g(x)|g \in G\}}$, а тим більше – з самою орбітою $\{g(x)|g \in G\}$. Отже, точка не є транзитивною тоді і лише тоді, коли її орбіта не перетинається з деякою B_j.

Покажемо, що для кожної B_j $(j \in \mathbb{N})$ множина C_j тих точок, орбіти яких не перетинаються з B_j, є ніде не щільною в X. Нехай це не так. Тоді для деякої $_j$ знайдеться непорожня відкрита множина U, що належить $\overline{C_j}$. Але, за означенням транзитивної системи, знайдеться $g \in G$, для якої $g(U) \cap B_j \neq \varnothing$. Оскільки g неперервна і C_j щільна в U, знайдеться точка $z \in U \cap C_j$, для якої $g(z) \in B_j$. Але це суперечить означенню C_j. Тому C_j ніде не щільна.

Отже, множина не транзитивних точок є об'єднанням зліченної сім'ї ніде не щільних множин C_j. За теоремою Бера, непорожня відкрита підмножина компактного простору не може бути об'єднанням зліченної кількості ніде не щільних множин. Тому для довільної непорожньої відкритої $U \subset X$ існує точка $z \in U$, яка не належить жодній C_j ($j \in \mathbb{N}$). Вона є транзитивною. □

Завдяки наведеній лемі можна показати рівність між першими двома числами Ляпунова для транзитивної системи, що ми сформулюємо у вигляді окремої теореми.

Теорема 4.3. Для транзитивної системі (X, G) з комутативною напівгрупою G вірна рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Доведення. Як і в доведенні теореми 1, розглянемо лише випадок $\mathcal{L}_1 > 0$. Розглянемо довільну відкриту непорожню множину $U \subset X$ та деяке $\delta > 0$. За означенням $\mathcal{L}_1$, знайдуться такі $x, y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \mathcal{L}_1 - \delta$.

За лемою 4.2, у як завгодно малому відкритому околі x знайдеться транзитивна точка. Функція g неперервна, тому існує такий окіл V точки x, що для всіх $v \in V$ вірно $d(g(x), g(v)) < \delta$. Множина $U \cap V$ відкрита та непорожня, бо містить точку x. Оберемо транзитивну точку z всередині цієї множини. Оскільки z транзитивна, знайдеться таке відображення $h \in G$, що точка $h(z)$ достатньо близька до y для виконання умови $d(g(h(z)), g(y)) < \delta$. Тоді, за нерівністю трикутника, справджується співвідношення $d(g(z), g(h(z))) \geq d(g(x), g(y)) - d(g(x), g(z)) - d(g(h(z)), g(y)) < \mathcal{L}_1 - 3\delta$.

З комутативності напівгрупи G маємо $g(h(z)) = h(g(z))$. Тому $d(g(z), h(g(z))) < \mathcal{L}_1 - 3\delta$. Точка $g(z)$ не може бути ізольованою, інакше виконуватиметься рівність $\mathcal{L}_1 = 0$. Отже, в довільному околі $g(z)$ є нескінченно багато точок вигляду $f(z)$, де $f \in G$.

Точка z не ізольована. Дійсно, якби існував відкритий окіл V точки z, що містить лише її, то в цьому околі не знайшлося би двох точок x та y, які для деякої $f \in G$ задовольняли би умову $d(f(x), f(y)) > 0$. А це суперечило би припущенню про $\mathcal{L}_1 > 0$. Розглянемо настільки малий відкритий окіл W точки z, що для довільної $p \in W$ виконуються нерівності $d(p, z) < \delta$ та $d(h(p), h(z)) < \delta$. Із транзитивності та не ізольованості z випливає, що всередині W існує безліч точок вигляду $f_i(z)$, де $f_i \in G$. За вибором множини W, для таких точок виконуються нерівності $d(z, f_i(z)) < \delta$ та $d(h(z), h(f_i(z))) < \delta$. Тому за нерівністю трикутника отримуємо $d(f_i(z), f_i(h(z))) > d(z, h(z)) - d(z, f_i(z)) - d(h(z), h(f_i(z))) > \mathcal{L}_1 - 5\delta$.

Отже, для даної системи $\mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_1 - 5\delta$. З довільності $\delta > 0$ маємо $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. $\square$

Можна довести схожу теорему для мінімальних систем. У цьому випадку вірними виявляються дві рівності у різних парах чисел Ляпунова.

Теорема 4.4. Для мінімальної системі (X, G) з комутативною напівгрупою G вірні рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Доведення. Оскільки мінімальна система завжди є транзитивною, рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ слідує з попередньої теореми.

Для доведення рівності $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ розглянемо довільну точку z та її довільний окіл U. За означенням числа $\mathcal{L}_3$, для довільного $\delta > 0$ знайдуться такі $y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(z), g(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Нехай $V \subset U$ – відкритий окіл точки y, для якого $\operatorname{diam}(g(V)) < \delta$. Точка z є транзитивною, тому існує така $h \in G$, що $h(z) \in V$. За нерівністю трикутника, $d(g(z), h(g(z))) > d(g(z), g(y)) - d(g(y), h(g(z))) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Далі можна застосувати ті ж самі міркування, що і в доведенні теореми 4.3, звідки отримаємо $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. $\square$

4.4 Чутливість у сенсі Лі-Йорка

Далі ми розглянемо поняття чутливості в сенсі Лі-Йорка. Це поняття, запропоноване Лі та Йорком для систем вигляду (X, f), узагальнене тут на випадок системи (X, G).

У даній частині ми поширимо на випадок дії напівгрупи деякі твердження зі статті [4], що стосуються чутливості систем у сенсі Лі-Йорка, а також чутливості взагалі. В наведених узагальненнях доведеться накласти певні обмеження на діючу напівгрупу G. Наприклад, ми покажемо чутливість слабко змішуючої системи (X, G) за Лі-Йорком у випадку, коли G є комутативною.

Введемо деякі допоміжні поняття.

Означення 4.10. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати ε-асимптотичною, якщо існує лише скінченна кількість елементів $g \in G$, для яких $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$. Пара (x, y) називається *асимптотичною*, якщо вона ε-асимптотична для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Можна дати й інше означення асимптотичної пари, яке також збігається з класичним у випадку $G = f^n | n \in \mathbb{N}_0$.

Означення 4.11. Пара (x, y) називається секвенціально асимптотичною, якщо для будь-якої послідовності $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, де всі g_i є елементами напівгрупи G, відмінними від одиничного, виконується

$\lim_{n\to\infty} d(g_n...g_1(x), g_n...g_1(y)) = 0$.

У загальному випадку асимптотична пара не обов'язково є секвенціально асимптотичною. Але за наступних умов таке твердження є вірним.

Твердження 4.5. Якщо для всіх $g \in G$, всіх $k \in \mathbb{N}$ та всіх неодиничних $h_1, ..., h_k \in G$ виконується $h_k...h_1 g \neq g$, то будь-яка асимптотична пара є секвенціально асимптотичною.

Доведення цього твердження отримується безпосередньо з означень. З нього слідує, що асимптотичні пари є секвенціально асимптотичними у випадку, коли напівгрупа G є вільною або вільною комутативною. Зокрема, коли $G = F$. А у випадку скінченно породженої комутативної напівгрупи G можна довести й обернене твердження: кожна секвенціально асимптотична пара також є асимптотичною.

Далі ми будемо використовувати перше означення асимптотичної пари, тому що воно зручніше для наших цілей.

Означення 4.12. Пара (x, y) називається проксимальною, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує елемент $g \in G$, для якого $d(g(x), g(y)) < \delta$. Через $\mathrm{Prox}(x)$ ми позначатимемо множину точок $y \in X$, для яких пара (x, y) є проксимальною.

Означення 4.13. Пара (x, y) називається парою Лі-Йорка, якщо вона проксимальна, але не асимптотична. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати ε-парою Лі-Йорка, якщо вона проксимальна, але не ε-асимптотична.

Означення 4.14. Система (X, G) називається чутливою у сенсі Лі-Йорка, якщо є таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та будь-якого $x \in U$ існує таке $y \in U$, для якого пара (x, y)

є ε-парою Лі-Йорка.

4.5 Деякі загальні аспекти чутливості дії напівгруп

Для заданої системи (X, G) будемо позначати множину рівномірно неперервних точок через $\mathrm{Eq}(G)$, а множину транзитивних точок позначатимемо записом $\mathrm{Trans}(G)$.

У [4] було зазначено, що для транзитивної системи (X, f) може справджуватися лише один з двох наступних випадків: або $\mathrm{Eq}(f) = \varnothing$, або $\mathrm{Eq}(f) = \mathrm{Trans}(f)$. Ми узагальнимо це твердження наступним чином. Будемо казати, що напівгрупа має *властивість скінченного зсуву*, якщо для будь-якого $g \in G$ множина $G \backslash \{hg | h \in G\}$ скінченна. Наприклад, G має цю властивість у випадку, коли вона породжена одним елементом (випадок $G = f^n | n \in \mathbb{N}_0$), або у випадку, коли вона є групою. Справедливе наступне твердження.

Твердження 4.6. Якщо система (X, G) – транзитивна, G має властивість скінченного зсуву та $\mathrm{Eq}(G) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Eq}(G) = \mathrm{Trans}(G)$.

Доведення. Спершу покажемо, що $\mathrm{Eq}(G) \subseteq \mathrm{Trans}(G)$. Нехай $x \notin \mathrm{Trans}(G)$. Тоді існує така відкрита непорожня $U \subset X$, що $g(x) \notin U$ для всіх $g \in G$. Нехай y – деяка точка множини U. Тоді існує $\varepsilon > 0$, для якого весь ε-окіл точки y належить U. Нехай V – $\varepsilon/2$-окіл y. Нехай z – довільна транзитивна точка. Тоді існує $g \in G$, для якого $g(z) \in V$. Звідси слідує $d(g(x), g(z)) > \varepsilon/2$, тому що $g(x) \notin U$. За твердженням 2, у будь-якому відкритому околі точки x є транзитивна точка. Отже, будь-який окіл точки x під дією деякого елемента з G розтягується не менше, ніж на $\varepsilon/2$. Тому x є чутливою. Іншими словами, $x \notin \mathrm{Eq}(G)$.

Тепер доведемо, що кожна транзитивна точка є рівномірно неперервною. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай $y \in \mathrm{Eq}(G)$. Тоді існує такий відкритий окіл U точки y, що $\mathrm{diam}(h(U)) < \varepsilon$ для всіх $h \in G$. Нехай $x \in \mathrm{Trans}(G)$. За вибором x, існує $g \in G$, для якого $g(x) \in U$. З неперервності функції g слідує, що є відкритий окіл V точки x, для якого $g(V) \subset U$. Для кожного елемента вигляду hg ($h \in G$) маємо $\mathrm{diam}(hg(V)) = \mathrm{diam}(h(g(V))) \leq \mathrm{diam}(h(U)) < \varepsilon$. За властивістю скінченного зсуву, в G існує лише скінченна кількість елементів $g_1, ..., g_k$, які не дорівнюють hg для жодного $h \in G$. Нехай V_i ($1 \leq i \leq k$) – відкриті околи точки x, для яких $\mathrm{diam}(g_i(V_i)) < \varepsilon$. Тоді $W = V \cap V_1 \cap ... \cap V_k$ теж є відкритим околом точки x. За побудовою множини W, для будь-якого $h \in G$ виконується нерівність $\mathrm{diam}(h(W)) < \varepsilon$. Отже, $x \in \mathrm{Eq}(G)$. $\square$

Якщо напівгрупа G є метричним простором, метрика якої узгоджена з її дією на X (тобто якщо відображення $f(g, x) = g(x)$ є неперервним за сукупністю аргументів), то умову скінченності зсуву можна послабити. А саме, її можна замінити умовою передкомпактності зсуву: будь-яка множина вигляду $G \backslash \{hg | h \in G\}$ має міститися в деякому компакті. Оскільки X – компактний простір, то для будь-якої компактної підмножини $C \subset G$ множина $C \times X$ теж буде компактною. Отже, за теоремою про рівномірну неперервність, існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $g \in C$ та довільних $x, y \in X$, для яких $d(x, y) < \delta$, справджується нерівність $d(g(x), g(y)) < \varepsilon/2$. Це означає, що останнє доведення можна розповсюдити на випадок умови передкомпактності зсуву, якщо в якості відповідного W взяти перетин V з δ-околом точки x.

Умові передкомпактності зсуву, зокрема, задовольняє напівгрупа $\mathbb{R}^+$, елементами якої є невід'ємні дійсні числа, а операцією є додавання. За допомогою дії такої напівгрупи можна описувати системи, еволюція яких задається звичайним диференціальним рівнянням. Отже, для випадку диференціального рівняння твердження 4.6 теж вірне (якщо множина значень функцій, заданих рівнянням, є компактною).

4.6 Чутливість Лі-Йорка для слабко змішуючих систем

У цьому розділі наводиться основний результат щодо чутливості у сенсі Лі-Йорка для слабко змішуючих систем. Наведемо означення такої системи.

Означення 4.15. Система (X, G) є (топологічно) слабко змішуючою, якщо для будь-яких відкритих непорожніх множин $T, U, V, W \subset X$ існує $g \in G$, для якого $g(T) \cap V \neq \varnothing$ та $g(U) \cap W \neq \varnothing$. Іншими словами, (X, G) є слабко змішуючою, якщо $(X \times X, G \times G)$ є транзитивною.

Ми будемо використовувати наступну лему.

Лема 4.7. Нехай (X, G) – слабко змішуюча система, де G – абелева (тобто для всіх $g, h \in G$: $gh = hg$). Тоді для кожного $x \in X$ існує $z \in X$ з наступною властивістю: для будь-яких відкритих непорожніх $U, V \subset X$ і будь-якого відкритого околу W точки z є елемент $g \in G$, для якого одночасно маємо $g(U) \cap V \neq \varnothing$ та $g(x) \in W$.

Доведення. Використаємо наступне твердження: якщо $\mathcal{C}$ – сім'я замкнених підмножин компактної множини і кожний скінченний набір множин з $\mathcal{C}$ має спільну точку, то й усі множини у $\mathcal{C}$ мають спільну точку. Це твердження рівносильне теоремі Бореля-Лебега про те, що з будь-якого покриття компакта відкритими множинами можна вибрати скінченне підпокриття.

Будемо позначати через $\mathrm{Orb}_{U,V}(x)$ множину $\{g(x) \mid g \in G, g(U) \cap V \neq \varnothing\}$. Також нехай $\mathcal{O}(X)$ позначає сім'ю всіх відкритих непорожніх підмножин X. Ми покажемо, що всі множини сім'ї $\{\overline{\mathrm{Orb}_{U,V}(x)} \mid U, V \in \mathcal{O}(X)\}$ мають спільну точку.

Основна ідея нашого доведення аналогічна ідеї Х. Фюрстенберга, який у роботі [16] показав, що у випадку змішуючої системи (X, f) для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ система (X^k, f^k) є транзитивною.

Розглянемо декілька відкритих непорожніх множин U_1, U_2, ..., U_k та V_1, V_2, ..., V_k. За означенням слабко змішуючої системи, існує $g \in G$, для якого $g(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing$ і $g(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$. Нехай $U_{12} = U_1 \cap g^{-1}(U_2)$ та $V_{12} = V_1 \cap g^{-1}(V_2)$. (Відмітимо, що існування елемента g^{-1} у G не є необхідним: через $g^{-1}(S)$ ми позначаємо множину всіх точок x, для яких $g(x) \in S$.) За вибором g, множини U_{12} і V_{12} не порожні. Також вони відкриті, бо функція g є неперервною.

Покажемо, що $\mathrm{Orb}_{U_{12},V_{12}}(x)$ міститься у перетині множин $\mathrm{Orb}_{U_1,V_1}(x)$ та $\mathrm{Orb}_{U_2,V_2}(x)$. Дійсно, якщо $h(U_{12}) \cap V_{12} \neq \varnothing$, то $h(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ та $hg^{-1}(U_2) \cap g^{-1}(V_2) \neq \varnothing$. До останнього співвідношення застосуємо дію елемента g: $ghg^{-1}(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Завдяки комутативності G цей вираз можна переписати як $h(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Отже, $\mathrm{Orb}_{U_1,V_1}(x) \cap \mathrm{Orb}_{U_2,V_2}(x)$ покриває $\mathrm{Orb}_{U_{12},V_{12}}(x)$. Застосовуючи ці міркування ще кілька разів, отримаємо, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Orb}_{U_i,V_i}(x) \supset \mathrm{Orb}_{U_{12\ldots k},V_{12\ldots k}}(x)$ для деяких непорожніх відкритих $U_{12\ldots k}$ та $V_{12\ldots k}$. Звідси маємо, що будь-який скінченний перетин множин вигляду $\mathrm{Orb}_{U,V}(x)$ є непорожнім. Отже, непорожнім буде і скінченний перетин множин вигляду $\overline{\mathrm{Orb}_{U,V}(x)}$. А тому, за теоремою Бореля-Лебега, усі множини сім'ї $\{\overline{\mathrm{Orb}_{U,V}(x)} \mid U, V \in \mathcal{O}(X)\}$ мають спільну точку.

Очевидно, будь-яка точка z, яка належить усім множинам згаданої сім'ї, задовольняє вимогам, вказаним в умові леми. $\square$

З леми 4.7 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4.8. Нехай (X, G) – слабко змішуюча система з комутативною напівгрупою G. Тоді для кожного $x \in X$ множина $\mathrm{Prox}(x)$ щільна в X. $\square$

Доведення. Нехай x – довільна точка, а U – довільна відкрита непорожня підмножина X. Нехай z – така точка, що для будь-яких відкритих непорожніх множин $U, V \subset X$ і будь-якого відкритого околу W точки z існує елемент $g \in G$, для якого $g(U) \cap V \neq \varnothing$ та $g(x) \in W$. За лемою 4.7, згадана точка z існує.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо відкриту кулю $B_{z,1/n}$ із центром у точці z та з радіусом $1/n$. Нехай U_0 – відкрита непорожня множина, чиє замикання лежить в U. Ми побудуємо послідовність множин $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ наступним рекурентним чином. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай $g_n \in G$ – це такий елемент, для якого $g_n(x) \in B_{z,1/n}$ та $g_n(U_{n-1}) \cap B_{z,1/n} \neq \varnothing$. Тоді нехай $U_n = U_{n-1} \cap g_n^{-1}(B_{z,1/n})$.

Маємо $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset$ ..., тому їх замикання – це вкладені компакти. Отже, всі $\overline{U_n}$ мають деяку спільну точку y. Відмітимо, що за вибором U_0 справджується $y \in U$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо $g_n(x) \in B_{z,1/n}$ та $g_n(y) \in \overline{B_{z,1/n}}$, з чого слідує $d(g_n(x), g_n(y)) < 2/n$. Звідси отримуємо, що (x, y) – проксимальна пара. Оскільки множина U – довільна, $\mathrm{Prox}(x)$ є щільною в X. $\square$

Позначимо через $\mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ множину таких точок $y \in X$, що (x, y) є

ε-асимптотичною парою. Тепер доведемо проміжний результат у припущенні зліченності G.

Теорема 4.9. Нехай X містить більше однієї точки, G – зліченна та абелева, а (X, G) – слабко змішуюча. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх $x \in X$ множина $\mathrm{Prox}(x) \backslash \mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ є щільною в X.

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in X$. Нехай (x, y) – ε-асимптотична пара. Тоді, за означенням такої пари, існує скінченна підмножина $F \subset G$, така, що нерівність $d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$ вірна для всіх $g \in G \backslash F$. Іншими словами, для будь-якого $g \in G \backslash F$ точка y належить $g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$, де $\overline{B_{g(x),\varepsilon}}$ – замкнена куля з центром $g(x)$ та радіусом ε. Отже, y належить множині $\bigcap\limits_{g \in G \backslash F} g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$. Ця множина є замкненою як перетин замкнених множин $g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$. Нарешті, нехай $\mathcal{F}(G)$ позначає сім'ю всіх скінченних підмножин G. Тоді

$$\mathrm{Asym}_\varepsilon(x) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(G)} \left(\bigcap_{g \in G \backslash F} g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}}) \right).$$

Візьмемо дві різні точки $a, b \in X$. Доведемо, що для $\varepsilon = d(a, b)/4$ множина $\mathrm{Prox}(x) \backslash \mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ щільна в X для кожного $x \in X$.

Розглянемо відкриті кулі $B_{a,\varepsilon}$ та $B_{b,\varepsilon}$ радіуса ε з центрами a та b відповідно. За властивістю слабкої змішуваності, для довільної відкритої непорожньої $U \subset X$ є деяке $g \in G$, для якого одночасно $g(U) \cap B_{x,\varepsilon} \neq \varnothing$ та $g(U) \cap B_{y,\varepsilon} \neq \varnothing$. З цього слідує, що для кожної відкритої непорожньої $U \subset X$ існує $g \in G$, для якого $\mathrm{diam}(g(U)) > 2\varepsilon$.

Для довільного $F \in \mathcal{F}(G)$ через $A_{F,\varepsilon}(x)$ позначимо множину $\bigcap\limits_{g \in G \backslash F} g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$. За побудовою $A_{F,\varepsilon}(x)$, ця множина замкнена. Доведемо, що кожна множина такого вигляду є ніде не щільною в X. Припустимо протилежне: нехай деяка $A_{F,\varepsilon}(x)$ щільна у якійсь відкритій непорожній $V \subset X$. Але разом з тим, що $A_{F,\varepsilon}(x)$ замкнена, це давало би $V \subset A_{F,\varepsilon}(x)$. Звідси для будь-якого $g \notin F$ і для будь-яких $y, z \in V$ було би $d(g(y), g(z)) \leq d(g(x), g(y)) + d(g(x), g(z)) \leq 2\varepsilon$. Отже, для всіх $g \notin F$ ми мали би $\mathrm{diam}(g(V)) \leq 2\varepsilon$. Оскільки F – скінченна, можна було б обрати відкриту непорожню $U \subset V$ таким чином, що нерівність $\mathrm{diam}(g(V)) \leq 2\varepsilon$ виконувалася б і для всіх $g \in F$. Але це суперечило б раніше доведеному твердженню, згідно з яким для будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ існує таке $g \in G$, що $\mathrm{diam}(g(U)) > 2\varepsilon$. Тому всі множини вигляду $A_{F,\varepsilon}(x)$ є ніде не щільними в X. І як ми показали вище, $\mathrm{Asym}_\varepsilon(x) = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}(G)} A_{F,\varepsilon}(x)$.

Аналогічно можна показати, що

$$X \backslash \mathrm{Prox}(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{g \in G} X \backslash g^{-1}(B_{g(x),1/n}) \right).$$

Нехай $D_{1/n}(x)$ позначає множину $\bigcap\limits_{g \in G} X \backslash g^{-1}(B_{g(x),1/n})$. За побудовою, будь-яка множина такого вигляду є замкненою. Також усі такі множини ніде не щільні, інакше одна з таких множин містила би деяку відкриту непорожню множину, з чого слідувало би, що $\mathrm{Prox}(x)$ не щільна в X. Але останнє суперечило би наслідку 4.8.

Після всього цього можна сказати, що

$$(X \backslash \mathrm{Prox}(x)) \cup \mathrm{Asym}_\varepsilon(x) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}(x) \right) \cup \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}(G)} A_{F,\varepsilon}(x) \right).$$

Отже, зазначена множина є зліченним об'єднанням ніде не щільних множин. Тому, за теоремою Бера про категорії, множина $(X \backslash \mathrm{Prox}(x)) \cup$

$\mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ не може містити ніякої відкритої непорожньої множини. Отже, її доповнення $\mathrm{Prox}(x) \backslash \mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ щільне в X для кожного $x \in X$. $\square$

Насамкінець, доведемо наступну теорему.

Теорема 4.10. Нехай X містить більше однієї точки, G – комутативна та (X, G) – слабко змішуюча. Тоді (X, G) є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Доведення. Скористаємося відомим фактом, що простір неперервних функцій з компакта в компакт є сепарабельним відносно рівномірної метрики. Тобто, можна вибрати таку зліченну підмножину $H_0 \subset G$, що для довільного $\delta > 0$ і будь-якого $g \in G$ існує $h \in H_0$, для якого $\max\limits_{x \in X} d(g(x), h(x)) < \delta$. Візьмемо підмножину H_0 з описаними властивостями і розглянемо напівгрупу H, породжену всіма елементами з H_0. Напівгрупа H, як і множина H_0, є зліченною. Також, очевидно, система (X, H) – слабко змішуюча.

З теореми 4.9 отримуємо, що (X, H) – чутлива за Лі-Йорком. Отже, такою є і (X, G). $\square$

4.7 Заключні зауваження

Ми показали чутливість у сенсі Лі-Йорка для слабко змішуючої системи (X, G), де простір X містить більше однієї точки, а напівгрупа G є комутативною. Єдиним місцем у доведенні, де потрібна комутативність G, є твердження про те, що система (X, G) є k-транзитивною для всіх $k \in \mathbb{N}$ – тобто для довільного натурального k транзитивною є система (X^k, G^k). З іншого боку, в статті [11] показано, що у випадку некомутативної напівгрупи з її слабкої змішуваності не обов'язково слідує k-транзитивність. Окрім твердження про k-транзитивність слабко змішуючої системи, у всіх інших міркуваннях, потрібних для доведення теореми 4.10, ми не припускали комутативність G. Тому цю теорему можна перенести і на випадок довільної напівгрупи, замінивши слабку змішуваність умовою, що для довільного натурального k задана система є k-транзитивною.

Також у [11] наведено результати, з яких випливає, що чутливість Лі-Йорка притаманна широкому класу систем (X, G), де G є групою. Зокрема, розглядаються *тотально транзитивні* системи, тобто такі (X, G), що для будь-якої підгрупи H, яка має скінченний індекс у групі G, система (X, H) є транзитивною. У згаданій роботі продемонстровано, що система (X, G) є k-транзитивною для всіх k, якщо вона тотально транзитивна (зокрема, якщо вона слабко змішуюча) та має всюди щільну множину періодичних точок. Тут точка x називається *періодичною*, якщо її орбіта $\{g(x)|g \in G\}$ скінченна. Таким чином, для тотально транзитивних систем з усюди щільною множиною періодичних точок можна довести аналог леми 4.6, не припускаючи комутативності групи G. А тоді справедлива і наступна теорема.

Теорема 4.11. Нехай X містить більше однієї точки, G – група, а (X, G) є тотально транзитивною системою з усюди щільною множиною періодичних точок. Тоді (X, G) є чутливою в сенсі Лі-Йорка.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі наведено ряд означень та результатів, які стосуються систем, що задаються дією напівгрупи.

Проаналізовано явище чутливості систем вигляду (X, G), де X – компактний метричний простір, а G – напівгрупа неперервних відображень

X у себе, для якої напівгруповою операцією є композиція функцій. Для таких систем розглядаються чотири числа Ляпунова – це різні кількісні показники, що є екстремальними та асимптотичними характеристиками, які пов'язані з чутливістю системи до початкових умов. Показано, що будь-які два числа Ляпунова для систем вигляду (X, G) відрізняються не більше, ніж у 2 рази. Також доведено, що між деякими числами Ляпунова спостерігаються рівності у випадку транзитивної, мінімальної та слабко змішуючої систем з комутативною напівгрупою G.

Висновки

Дисертацію присвячено вивченню кількісних показників чутливості динамічних систем. Також розглянуто ширший клас напівгрупових систем та зроблені деякі узагальнення на цей випадок.

Основні результати дисертаційної роботи можна підсумувати таким чином:

- Отримано різні достатні умови для рівностей та нерівностей між числами Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$, пов'язані з топологічними властивостями динамічної системи (X, f).
- Доведено рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ для системи, заданої неперервним відображенням відрізка у себе.
- Показано, що в системі, заданій неперервним відображенням компактного простору, точки x, для яких третє локальне число Ляпунова $\mathcal{L}_3(x)$ менше за перше число $\mathcal{L}_1$ цієї системи, складають множину першої категорії у сенсі Бера. Тобто, множина таких точок є у певному сенсі малою. Зокрема, вона не може співпадати з усім простором, на якому задано систему.
- Показано, що індукована система, простором якої є сім'я замкнених зв'язних непорожніх підмножин відрізка, завжди має точку стійкості, отже, зокрема, не може бути чутливою.
- Отримано різні достатні умови для рівностей та нерівностей між числами Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$ у випадку дії напівгрупи.
- Доведено, що у випадку комутативної напівгрупи G слабко змішуюча система (X, G) чутлива у сенсі Лі-Йорка.

Бібліоґрафія

1. E. Akin *Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg Families and Ellis Actions* // New York: Plenum, — 1997, — x+265 p.
2. E. Akin, J. Auslander, K. Berg *When is a transitive map chaotic?* // Convergence in ergodic theory and probability, — 1996, — **5**, — P. 25–40.
3. C. Arbaham, G. Biau, B. Cadre *On Lyapunov exponent and sensitivity* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, — 2004, — **290**, — P. 395–404.
4. E. Akin, S. Kolyada *Li-Yorke sensitivity* // Nonlinearity, — 2003, — **16**, — P. 1421–1433.
5. L. Alseda, J. Llibre, M. Misiurewicz *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One* // Singapore: World Scientific Publishing — 1993, — Second edition, — 2000, — xvi+415 p.
6. J. Auslander *Minimal flows and their extensions* // North-Holland Mathematics Studies, 153. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, — 1988.
7. J. Auslander, J. Yorke *Interval maps, factors of maps and chaos* // Tohoku Mathematical Journal, — 1980, — **32**, — P. 177–188.
8. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos* // American Mathematical Monthly, — 1992, — **99**, — № 4, — P. 332–334.
9. F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass *On Li-Yorke pairs* // Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's Journal), — 2002, — **547**. — P. 51–68.

10. A. M. Bruckner, Hu Thakyin *On scrambled sets for chaotic functions* // Trans. American Mathematical Society, — 1987, — **301**, — P. 289–297.

11. G. Cairns, A. Kolganova, A. Nielsen *Topological transitivity and mixing notions for group actions* // Rocky Mountain Journal of Mathematics, — 2007, — **37**, — № 2, — P. 371–397.

12. R. L. Devaney *An introduction to chaotic dynamical systems* // Second edition, Addison-Wesley, Reading, — 1989.

13. T. Downarowicz, X. Ye *When every point is either transitive or periodic* // Colloquium Mathematicum, — 2002, — **93**, — P. 137–150.

14. P. Fatou *Sur les substitutions rationnelles* // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, — 1917, — textbf164, — P. 806–808, — *165*, — P. 992–995.

15. V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskii, J. Smital *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval* // ProC. American Mathematical Society — 1990, — **110**, — P. 141–148.

16. H. Furstenberg *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation* // Mathematical Systems Theory, — 1967, — **1**, — P. 1–49.

17. H. Furstenberg *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory* / M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, N. J. — 1981.

18. E. Glasner and B. Weiss *Sensitive dependence on initial conditions* // Nonlinearity, — 1993, — **6**, — P. 1067–1075.

19. J. Guckenheimer *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps* // Common Mathematical Physics, — 1979, — **70**, — P. 133–160.

20. V. Jimenez Lypez, L. Snoha *All maps of type* 2^∞ *are boundary maps* // ProC. American Mathematical Society, — 1997, — **125**, — P. 1667–1673.

21. W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada, G. Zhang, *Dynamical compactness and sensitivity* // Journal of Differential Equations, — 2016, — **260**, — № 9, — P. 6800–6827.

22. W. Huang, P. Lu, X. Ye *Measure-theoretical sensitivity and equicontinuity* // Israel Journal of Mathematics, — 2011, — **183**, — P. 233–283.

23. G. Julia *Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles* // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, — 1918, — **8**, — P. 47–245.

24. E. Kontorovich, M. Megrelishvili *A note on sensitivity of semigroup actions* // Semigroup Forum, — 2008, — **76**, — № 1, — P. 133–141.

25. S. Kolyada, O. Rybak *On the Lyapunov numbers* // Colloquium Mathematicum, — 2013, — **131**, — № 2, — P. 209–218.

26. S. Kolyada, L. Snoha *Some aspects of topological transitivity – a survey* // Grazer Mathematics Bericht, Karl-Franzens-University Graz, Iteration theory (ECIT 94, Opava), — 1997, — **334**, — P. 3–35.

27. M. Kuchta, J. Smital *Two-point scrambled set implies chaos* // in European Conference on Iteration Theory (ECIT 87), World Scientific Publishing, Singapore, — 1989. — P. 427–430.

28. D. Kwietniak, P. Oprocha *Topological entropy and chaos for maps induced on hyperspaces* // Chaos Solitons Fractals, — 2007, — **33**, — no. 1, — P. 76–86.

29. J. Li, X. Ye *Recent development of chaos theory in topological dynamics* // Acta Math. Sin. (English Series), — 2016, — **32**, — № 1, — P. 83–114.

30. T. Li, J. Yorke *Period three implies chaos* // American Mathematical Monthly, — 1975, — **82**, — P. 985–992.
31. H. Liu, L. Liao, L. Wang *Thickly syndetical sensitivity of topological dynamical system* // Discrete Dynamics National Society, — 2014, — Art. ID 583431, 4.
32. E. N. Lorenz *Deterministic nonperiodic flow* // Journal of the Atmospheric Sciences, — 1963, — **20**, — № 2, — P. 130–141.
33. B. Mandelbrot *Fractal aspects of the iteration of f(z)=cz(1-z) for complex c, z* // Annals of the New York Academy of Sciences, — 1980, — **357**, — P. 249–259.
34. M. Matviichuk *On the dynamics of subcontinua of a tree* // Journal of Difference Equations and Applications, — 2013, — **19**, — № 2, — P. 223–233.
35. M. Matviichuk, D. Robatian *Chain transitive induced interval maps on continua* // Discrete and Continuous Dynamical Systems, — 2015, — **35**, — № 2, — P. 741–755.
36. T. K. S. Moothathu *Stronger forms of sensitivity for dynamical systems* // Nonlinearity, — 2007, — **20**, — P. 2115–2126.
37. S. B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: An Introduction* // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, — Marcel Dekker, New York, — 1992, **158**.
38. J. Piorek *On the generic chaos in dynamical systems* // Acta Math. Univ. Jagell, — 1985, — **25**, — P. 293–298.
39. F. Polo *Sensitive dependence on initial conditions and chaotic group actions* // Proceedings of the American Mathematical Society, — 2010, — **138**, — № 8, — P. 2815–2826.

40. D. Robatian *The fixed-point property under induced interval maps of continua* // Nonlinear Oscillations, — 2015, — **18**, — № 1, — P. 102–111.

41. D. Ruelle *Dynamical systems with turbulent behavior* // Lecture Notes in Physics, — 1978, — **80**.

42. S. Ruette *Chaos on the interval* / University Lecture Series, AMS, — **67**, — 2017. — 225 p.

43. A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak, V. V. Fedorenko, *Dynamics of one-dimensional maps* / Kluwer Academic Publishers Group, Mathematics and its Applications, — 1997, **407**.

44. L. Snoha *Generic chaos* // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1990. — **31**. — P. 793–810.

45. L. Snoha *Dense chaos* // Comment. Math. Univ. Carolinae — 1992. — **33**. — P. 747–752.

46. J. Smital *Chaotic functions with zero topological entropy* // Trans. American Mathematical Society — 1986, — **297**, — P. 269–282.

47. А. М. Блох *О чувствительных отображениях отрезка* // Успехи математических наук, —1982, — **37**, — С. 189–190.

48. С. Ф. Коляда *Топологічна динаміка: мінімальність, ентропія та хаос* / Київ: Інститут математики НАН України, — 2011. — 340 с.

49. Г. П. Лопушанська *Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики* / Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, — 2004. — 166 с.

50. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений* / Москва-Ленинград: ОГИЗ, — 1947.

51. О. В. Рибак *Чутливість Лі-Йорка для дії напівгрупи* // Український математичний журнал, —2013, — **65**, — № 5, — С. 681–688.

52. О. Рибак *Числа Ляпунова для динамічних систем на відрізку* // Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка, — 2013, — **10**, — С. 127–134.

53. О. В. Рибак *Чутливість індукованої системи на відрізку* — Нелінійні коливання, — 2016, — **19**, — № 1, — P. 122–128.

54. О. В. Рибак *Числа Ляпунова у напівгрупових системах* // Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України, — 2016, — **13**, — № 2, — С. 255–266.

55. О. Рибак *Співвідношення між константами чутливості у динамічних системах*, Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 року, т. 2, С. 211 — Київ: НВП "Інтерсервіс", 2012, 276 с.

56. О. Рибак *Кількісний підхід до чутливості динамічних систем*, Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", 16–18 травня 2012 року, С. 38 — Київ: Інститут математики НАН України, 2012, 56 с.

57. O. Rybak *Sensitivity of the induced systems on an interval*, Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", 22–26 червня 2015 року, С. 49 — Київ: Інститут математики НАН України, 2015, 64 с.

58. В. В. Федоренко *Асимптотична періодичність траєкторій інтервалу* // Український математичний журнал, —2009, — **61**, — С. 854–858.

59. Я. А. Смородинский *Планеты движутся по эллипсам* // Квант, — 1979, — № 12, — С. 13–19.

60. А. Н. Шарковский *Сосуществование циклов для непрерывных отображений прямой в себя* // Украинский Математический Журнал — 1964, — **16**, — С. 61–71.

61. А. Н. Шарковский *О циклах и структуре непрерывного отображения* // Украинский Математический Журнал — 1965, — **17**, — С. 104–111.

62. Л. Э. Эльсгольц *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* / Москва: УРСС, — 2002. — 320 с.