НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Фещенко Богдан Григорович

УДК 515.146.27 + 515.162.2

Деформації гладких функцій на 2-торі

01.01.04 – геометрія та топологія

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Максименко Сергій Іванович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії топології
у складі відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Болотов Дмитро Валерійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України,
старший науковий співробітник відділу
диференціальних рівнянь та геометрії;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кадубовський Олександр Анатолійович,
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний
університет», доцент кафедри геометрії
та методики викладання математики
фізико-математичного факультету

Захист відбудеться 6 червня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 27 квітня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Вченої ради

Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена дослідженню гомотопійних властивостей орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії відповідних груп дифеоморфізмів.

Актуальність теми. Гладкі функції на многовидах є одним з основних об'єктів математики сьогодення і мають застосування у різних галузях науки. Аналітичні властивості таких функцій часто несуть інформацію про геометрію та топологію многовиду, на якому вони визначені.

Наприклад, М. Морс довів, що в околі кожної своєї *невиродженої* критичної точки гладка функція, після деякої заміни координат, має стандартний вигляд квадратичного многочлену (лема Морса). Це дозволило йому встановити зв'язок між числом невироджених критичних точок різних індексів з рангами та скрутами груп гомологій многовиду (слабкі та сильні нерівності Морса), а також отримати оцінки числа замкнених геодезичних ріманового многовиду. Таким чином, виявилось, що «геометрична» будова многовиду суттєво визначається функціями Морса на ньому. Розвитком цих ідей, які отримали назву «теорія Морса», займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, В. Шарко та багато інших математиків XX ст. Їх результати заклали надійний фундамент для подальших досліджень многовидів методами гладких функцій та досліджень гладких функцій на многовидах.

Варто відзначити, що особлива увага приділялась вивченню спеціальних класів функцій Морса, наприклад, мінімальних та точних. С. Смейл довів існування таких функцій на однозв'язних многовидах розмірності більше 5. Це дало змогу довести відому гіпотезу Пуанкаре у високих розмірностях. В. Шарко узагальнив результати С. Смейла та отримав умови існування мінімальних та точних функцій Морса на неоднозв'язних многовидах високої розмірності. Також він довів «більш жорсткіші» нерівності Морса для неоднозв'язних многовидів.

Топологічна еквівалентність функцій досліджувалась у роботах А. Фоменка, С. Матвєєва, О. Болсінова, А. Ошемкова, В. Шарка. У Києві цими питаннями займались О. Пришляк, О. Кадубовський, Є. Полулях, І. Юрчук, Д. Личак.

Компоненти зв'язності просторів функцій Морса у високих розмірностях описані В. Шарка, а на поверхнях вони класифіковані у роботах В. Шарка, С. Матвєєва, Х. Цишанга, О. Кудрявцевої та С. Максименка.

Групи кобордизмів функцій Морса на поверхнях обчислили К. Ікегамі і О. Саекі та Б. Кальмар.

Дослідження функцій на поверхнях у останні 40 років також було стимульоване значним прогресом у симплектичній топології і, зокрема, у теорії інтегровних гамільтонових систем. А. Фоменко та О. Болсінов побудували теорії типу Морса для цілком інтегровних гамільтонових систем з двома ступенями вільності (тобто систем, що мають два функціонально-незалежних інтеграли) на чотиривимірних многовидах. Також вони показали, що вивчення структури таких систем зводиться до задач дослідження комбінаторних властивостей гладких функцій на поверхнях та 3-многовидах, їх деформацій та симетрій, тобто автоморфізмів многовидів, що зберігають деяке клітинне розбиття многовиду.

Зауважимо, що дослідження груп автоморфізмів має довгу історію. Для повноти викладу нагадаємо, що перший загальний результат був отриманий ще А. Келі у 1854 році, який довів, що будь-яка скінченна група G порядку n є підгрупою групи перестановок з n елементів. Е. Нумелла узагальнив цей результат на топологічні групи. К. Жордан у 1869 році описав структуру групи автоморфізмів скінченних дерев і Р. Фрукт у 1939 показав, що будь-яка скінченна група може бути реалізована як група симетрій деякого скінченного графу.

Нехай M – замкнена компактна поверхня і Ξ – деяке клітинне розбиття M (наприклад, триангуляція). Р. Корі і А. Манші розглядали Ξ-гомеоморфізми, тобто гомеоморфізми M, що переводять клітину в клітину однакової розмірності та зберігають орієнтації клітин.

Визначимо групу комбінаторних автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\Xi)$ розбиття Ξ як фактор-групу групи Ξ-гомеоморфізмів за модулем тих, що зберігають орієнтації клітин. Р. Корі і А. Манші та Й. Ширань і М. Шковейра довели, що кожна скінченна група є ізоморфною групі $\mathrm{Aut}(\Xi)$ для деякого розбиття деякої поверхні, яка може бути як орієнтованою, так і неорієнтованою.

А. Фоменко і О. Кудрявцева дали конструктивне доведення цього факту за допомогою функцій Морса.

Зауважимо, що 1-вимірний остов Ξ можна розглядати як граф, вкладений у поверхню. Припустимо, що кожна його вершина має парний степінь. Тоді у багатьох випадках (наприклад, коли M є орієнтованою) ми можемо побудувати гладку функцію $f : M \to \mathbb{R}$ таку, що цей граф є критичним рівнем, що містить всі сідла f, а групу $\mathrm{Aut}(\Xi)$ можна інтерпретувати як групу «комбінаторних» симетрій f. Групу симетрій функцій Морса вивчали А. Фоменко, Ю. Браілов, О. Кадубовський і А. Клімчук, О. Кудрявцева і І. Ніконов.

С. Максименко досліджував гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів. Вимагалось, щоб такі функції приймали постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі поверхні, їх критичні точки належали до внутрішності поверхні та, щоб в околі кожної критичної точки вони були гладко еквівалентні деяким однорідним поліномам без кратних множників. Позначимо через $\mathscr{F}(M)$ множину таких функцій на M. Очевидно, що множина функцій Морса, які приймають постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі, є підмножиною $\mathscr{F}(M)$.

С. Максименко повністю описав гомотопійні властивості стабілізаторів функцій з класу $\mathscr{F}(M)$. Більш того, було знайдено зв'язок між фундаментальними групами компонент зв'язності орбіт гладких функцій на поверхнях з компонентами зв'язності стабілізаторів цих функцій. Зокрема, для всіх компактних поверхонь, крім 2-тора, 2-сфери, проективної площини та пляшки Клейна, це дало змогу описати і фундаментальні групи компонент зв'язності орбіт $\mathcal{O}_f(f)$ функцій з $\mathscr{F}(M)$. Окремо відзначимо, що С. Максименко дав повний опис вищих гомотопійних груп орбіт, показавши, що друга гомотопійна група є тривіальною, а вищі гомотопійні групи ізоморфні відповідним вищим гомотопійним групам поверхні. Звідси, якщо поверхня є асферичною, тобто її старші гомотопійні групи зануляються, то зв'язна компонента орбіти, яка містить функцію, є простором Ейленберга-Маклейна $K(\pi, 1)$, де π – фундаментальна група орбіти. Іншими словами, це означає, що вся гомотопійна інформація про компоненту орбіти, що містить функцію, описується лише її фундаментальною групою.

С. Максименко довів, що орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ для функцій з класу $\mathscr{F}(M)$ має гомотопійний тип скінченновимірного CW комплексу, причому, якщо M є компактною поверхнею, відмінною від сфери S^2 та проективної площини $\mathbb{RP}^2$, а $f \in \mathscr{F}(M)$ є функцією загального положення, то $\mathcal{O}_f(f)$ має гомотопійний тип n-тора T^n. Якщо f є функцією загального положення на S^2 або $\mathbb{RP}^2$, то $\mathcal{O}_f(f)$ має гомотопійний тип $\mathrm{SO}(3) \times T^n$, для деякого $n \geq 0$.

О. Кудрявцева, вивчаючи гомотопійні типи просторів функцій Морса на поверхнях і використовуючи подібну техніку узагальнила, цей результат і довела, що орбіти довільних функцій Морса на орієнтованих поверхнях, відмінних від S^2, мають гомотопійний тип фактор-простору n-тора T^n відносно дії деякої скінченної групи.

Відкритою залишалась задача описання фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{F}(M)$ на орієнтованих поверхнях M у випадках, коли M є 2-тором або 2-сферою.

Основним результатом дисертації є *повний опис фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{F}(T^2)$ на 2-торі.*

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України у рамках державної науково-дослідної теми «Алгебраїчні геометричні та топологічні властивості многовидів з додатковими структурами», номер державної реєстрації 0111U000159.

Метою дослідження є дослідження структури фундаментальної групи орбіт широкого класу гладких функцій на поверхнях відносно правих дій груп дифеоморфізмів поверхонь.

Об'єктом дослідження є різні класи гладких відображень поверхонь та їх гомотопійні властивості.

Предметом дослідження є гладкі функції на 2-торі та дифеоморфізми 2-тора, що зберігають функції.

Завдання дослідження: повністю описати фундаментальну групу орбіт гладких функцій на 2-торі для великої множини гладких функцій, що містить відкриту щільну множину функцій Морса.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл;

- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, а стабілізатори цих функцій діють на зірках відповідних спеціальних вершин графів Кронрода-Ріба тривіально;

- також дано опис фундаментальних груп орбіт для випадку, коли стабілізатори цих функцій діють нетривіально на відповідних зірках;

- знайдено умови, за яких «комбінаторна» дія скінченної групи на деякому розбитті компактної поверхні є індукованою дією цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану гладку функцію.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані у ній результати можуть бути використані у дослідженнях з топології, алгебри, теорії динамічних систем, теорії особливостей гладких відображень та інших галузей знань, методи яких використовують топологічні структури гладких функцій.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи алгебри, алгебраїчної, геометричної та диференціальної топології, теорії динамічних систем та теорії особливостей.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на:

- XVI Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2014);
- IV Міжнародній Ганській конференції (м. Чернівці, 2014);
- Міжнародній конференції присвяченої 100-річчю професора Л. А. Калужніна (м. Київ, 2014);
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ 2015);
- 11 Літній школі «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2016);
- Міжнародній конференції «Геометрія та топологія в Одесі – 2016» (м. Одеса, 2016);
- Міжнародній конференції «Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday» (м. Харків, 2016);
- Науковому семінарі лабораторії топології відділу алгебри та топології Інституту математики НАН України (м. Київ);
- Семінарі з фрактального аналізу Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова (м. Київ, 2017);
- Міському геометричному семінарі (м. Харків, 2017).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 5 статтях.

Наукові роботи [1, 6–9] опубліковано у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України. Серед них три статті [1, 6, 9] опубліковано у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus). В статтях, що опубліковані у співавторстві [1, 6, 7], науковому керівнику належать постановка задач, а також загальне керівництво роботою. Остаточні формулювання та доведення результатів належать здобувачу.

Також результати роботи представлені у матеріалах конференцій [2–5, 10–12].

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 76 найменувань. Повний обсяг роботи — 121 сторінка.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Розділі 1 містить відомості про основні об'єкти дослідження.

Підрозділ 1.1 присвячений гладким функція на поверхнях. У підпункті 1.1.1 наведено деякі базові поняття та твердження теорії Морса.

У підпункті 1.1.2 введено два класи гладких функцій на поверхнях, що будуть досліджуватися в дисертації. Для зручності наведемо їх означення.

Нехай M – гладка компактна поверхня, $\mathscr{F}(M) \subset C^{\infty}(M)$ – множина гладких функцій, що задовольняють такі дві умови:

(B) функція $f \in \mathscr{F}(M)$ приймає постійне значення на кожній зв'язній компоненті межі ∂M і всі критичні точки f належать до внутрішності M;

(PL) для кожної критичної точки x функції f паросток f у x є гладко еквівалентним до деякого ненульового однорідного многочлена $f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ степеня ≥ 2 без кратних *лінійних* множників.

Нехай $\mathscr{E}(M)$ – підмножина функцій у $C^{\infty}(M)$, що задовольняють умову (B), а також наступну умову:

(PQ) для кожної критичної точки x функції f паросток f у x є гладко еквівалентним до деякого однорідного многочлену $f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *без кратних множників.*

Очевидно, що $\mathscr{E}(M)$ – підмножина $\mathscr{F}(M)$. Також легко побачити, що множина функцій Морса, що задовольняють умову (B), є підмножиною простору $\mathscr{E}(M)$. Таким чином, множина $\mathscr{E}(M)$ є також всюди щільною і складається з «типових» функцій.

У цьому підпункті також описана локальна будова шарування в околах критичних точок гладких функцій.

У підрозділі 1.2 наведено результати про локальні «симетрії» функцій з класу $\mathscr{F}(M)$ у околах критичних точок.

У підрозділі 1.3 дається означення стабілізаторів та орбіт гладких функцій.

Нехай M – гладка компактна поверхня, X – замкнена (можливо, порожня) підмножина M і $\mathcal{D}(M,X)$ – група дифеоморфізмів M, нерухомих на деякому околі X. Тоді група $\mathcal{D}(M,X)$ діє справа на просторі гладких функцій $C^{\infty}(M)$ за таким правилом:

$$\gamma : C^{\infty}(M) \times (M,X) \to C^{\infty}(M), \qquad \gamma(f,h) = f \circ h. \tag{1.3}$$

Нехай $f \in C^{\infty}(M)$ – гладка функція на M.
Означення 1.3.0.1. Множини

$$\mathcal{S}(f,X) = \{h \in \mathcal{D}(M,X) \,|\, f \circ h = f\},$$
$$\mathcal{O}(f,X) = \{f \circ h \,|\, h \in \mathcal{D}(M,X)\}$$

називаються, відповідно, ***стабілізатором*** і ***орбітою*** функції f відносно дії γ. Якщо $X = \varnothing$ є порожньою множиною, то покладемо:

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M,\varnothing), \qquad \mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f,\varnothing), \qquad \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f,\varnothing).$$

Наділимо простори $\mathcal{D}(M,X)$ та $C^{\infty}(M,X)$ відповідними сильними топологіями Уітні. Ці топології індукують деякі топології на $\mathcal{S}(f,X)$ і $\mathcal{O}(f,X)$.

Позначимо через $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X)$ і $\mathcal{D}(M,X)$, відповідно, зв'язні компоненти $\mathcal{S}(f,X)$ і $\mathcal{D}(M,X)$, які містять тотожне відображення id_M, а через $\mathcal{O}_f(f,X)$ – зв'язну компоненту $\mathcal{O}(f,X)$, що містить f. Нехай також

$$\mathcal{S}'(f,X) := \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$$

– підгрупа $\mathcal{S}(f,X)$, що складається з дифеоморфізмів $h \in \mathcal{S}(f,X)$, ізотопних до тотожного дифеоморфізму id_M. При цьому не вимагається, щоб ці ізотопії обов'язково зберігали f. Тому $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X) \subset \mathcal{S}'(f,X)$, але, взагалі кажучи, $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X) \neq \mathcal{S}'(f,X)$.

У підрозділі 1.4 наведено відомі результати[1,2,3,4] про гомотопійні властивості орбіт та стабілізаторів функцій з класу $\mathscr{F}(M)$ на гладких компактних поверхнях. Також у підрозділі 1.4.1 приводяться результати про множення шляхів у відносних гомотопійних групах.

У підрозділі 1.5 розглядаються спеціальні класи дифеоморфізмів циліндра $Q = S^1 \times [0,1]$ – скручування Дена та слайди. Також наведено результат про твірні групи компонент зв'язності групи дифеоморфізмів $\pi_0\mathcal{D}(Q, \partial Q)$ циліндру Q, нерухомих на деякому околі межі. Ця група породжується класом ізотопії скручування Дена уздовж деякої кривої, що паралельна основам циліндра.

Підрозділ 1.6 присвячений графу Кронрода-Ріба гладких функцій. У ньому доведено, що для функцій $f \in \mathscr{F}(T^2)$ цей граф, Γ_f, є або деревом, або містить єдиний цикл, лема 1.6.1.1.

У підпункті 1.6.2 показано, що стабілізатор функції $f \in \mathscr{F}(M)$ діє на її графі Кронрода-Ріба, а в підпункті 1.6.3 — наведено приклади таких дій.

У підрозділі 1.7 розглядаються відображення спеціального вигляду, які зберігають орбіти потоку на многовиді. Зокрема у підпункті 1.7.1 ми нагадуємо означення потоку на многовиді, породженого векторним полем, а у підпунктах 1.7.2 та 1.7.3 — означення та властивості гамільтонових та градієнтних полів функцій на многовидах. У підпункті 1.7.4 дано означення відображення зсуву уздовж орбіт потоків та сформульовано деякі властивості таких відображень для потоків на поверхнях.

У підрозділі 1.8 наведено опис фундаментальної групи компоненти зв'язності групи дифеоморфізмів 2-тора, що містить тотожне відображення.

У підрозділі 1.9 дається означення вінцевих добутків спеціального виду,

$$G \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}{\wr} \mathbb{Z}^2, \qquad G \underset{\mathbb{Z}_n}{\wr} \mathbb{Z},$$

[1] Maksymenko, Sergiy. Stabilizers and orbits of smooth functions / Sergiy Maksymenko // Bull. Sci. Math. — 2006. — Vol. 130, no. 4. — Pp. 279–311.

[2] Maksymenko, Sergiy. Functions with isolated singularities on surfaces / Sergiy Maksymenko // Geometry and topology of functions on manifolds. Pr. 112 Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. — 2010. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 7–66.

[3] Maksymenko, Sergiy. Homotopy types of right stabilizers and orbits of smooth functions functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // Ukrainian Math. Journal. — 2012. — Vol. 64, no. 9. — Pp. 1186–1203.

[4] Sergeraert, Francis. Un théorème de fonctions implicités sur certains espaces de Frechet et quelques applications / Francis Sergeraert // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). — 1972. — Vol. 5. — Pp. 599–660.

які відповідають неефективним діям групи $\mathbb{Z}$ на циклічних групах $\mathbb{Z}_n$. Наведемо ці означення.

Нехай G – група з одиницею 1, $n, m \geq 1$, і $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ – група всіх відображень $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to G$ відносно поточкового множення. Таким чином, якщо $\alpha, \beta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to G$ – два відображення з $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$, то

$$(\alpha \cdot \beta)(i,j) = \alpha(i,j) \cdot \beta(i,j), \qquad (i,j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m.$$

Група $\mathbb{Z}^2$ діє справа на $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ за таким правилом: якщо $\alpha \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ і $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, то результат цієї дії $\alpha^{k,l}$ задається формулою:

$$\alpha^{k,l}(i,j) = \alpha(i + k \bmod n,\ j + l \bmod m), \qquad (i,j) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1.12}$$

Напівпрямий добуток $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$, що відповідає цій дії, позначимо через

$$G \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}{\wr} \mathbb{Z}^2 := \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$$

і будемо називати *вінцевим добутком G і $\mathbb{Z}^2$ над $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$*.

Таким чином, $G \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ — це прямий добуток множин

$$\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$$

з такою операцією

$$(\alpha, (k_1, k_2))(\beta, (l_1, l_2)) = (\alpha^{l_1, l_2}\beta, (k_1 + l_1, k_2 + l_2))$$

для всіх $(\alpha, (k_1, k_2)), (\beta, (l_1, l_2)) \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$.

Нехай $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ – група всіх відображень $\mathbb{Z}_n \to G$ відносно поточкового множення. Тоді група $\mathbb{Z}$ діє на множині $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ за таким правилом: якщо $\alpha \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ і $k \in \mathbb{Z}$, то результат $\alpha^k : \mathbb{Z}_n \to G$ дії k на α визначається за формулою

$$\alpha^k(i) = \alpha(i + k \bmod n), \qquad i \in \mathbb{Z}_n. \tag{1.13}$$

Напівпрямий добуток $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \rtimes \mathbb{Z}$, що відповідає такій дії, називається *вінцевим добутком G і $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}_n$*. Отже,

$$G \underset{\mathbb{Z}_n}{\wr} \mathbb{Z} := \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Таким чином, $G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$ є декартовим добутком $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \times \mathbb{Z}$ з операцією, що визначена за формулою

$$(\alpha, k) \cdot (\beta, l) = (\alpha^l \beta, k + l),$$

для всіх $(\alpha, k), (\beta, l) \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \rtimes \mathbb{Z}$.

Розділ 2 присвячений дослідженню дії скінченних груп на поверхнях та їх підняттів до дій груп дифеоморфізмів, що зберігають задану функцію.

У підрозділі 2.1 дається таке означення спеціальної вершини графу Кронрода-Ріба функції f з класу $\mathscr{F}(M)$ на гладкій компактній поверхні. Наведемо це означення нижче.

Нехай M — замкнута поверхня, $f \in \mathscr{F}(M)$ і Γ_f — KR-граф функції f. Нехай $\mathcal{G} = \rho(\mathcal{S}(f))$ – образ $\mathcal{S}(f)$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma_f)$. Довільний зв'язний $\mathcal{G}_v$-інваріантний окіл v, що не містить інших вершин Γ_f, будемо називати *зіркою* v. Зірку вершини v будемо позначати через $\mathrm{st}(v)$. Нехай v – вершина Γ_f, $\mathcal{G}_v = \{g \in \mathcal{G} \mid g(v) = v\}$ – стабілізатор вершини v відносно дії $\mathcal{G}$ на Γ_f.

Означення 2.1.0.1. *Вершину v KR-графу Γ_f функції f називатимемо* ***спеціальною****, якщо існує бієкція між зв'язними компонентами $\mathrm{st}(v) \setminus v$ і $M \setminus V$. Відповідну зв'язну компоненту $V = p_f^{-1}(v)$ критичного рівня f будемо також називати* ***спеціальною****.*

Також ми наводимо приклади вершин, що задовольняють та не задовольняють цю умову.

У підрозділі 2.2 ми показуємо, що якщо граф Кронрода-Ріба функції f містить спеціальну вершину, то на поверхні виникає деяке розбиття Ξ. А саме, нехай M — замкнута поверхня, $f \in \mathscr{F}(M)$ — функція на M і Γ_f — KR-граф функції f. Припустимо, що Γ_f має спеціальну вершину v. Нехай також $V = p_f^{-1}(v)$ — зв'язна компонента критичного рівня f, що відповідає v. Нагадаємо, що V є вкладеним у поверхню M графом. Тоді компонента V задає розбиття Ξ поверхні M таке, що 0-вимірними компонентами Ξ є вершини V, 1-вимірними компонентами Ξ є ребра V, а 2-вимірними компонентами Ξ є зв'язні компоненти доповнення до V в M.

У підрозділі 2.3 ми вивчаємо комбінаторні дії скінченної групи на поверхні. Приведемо необхідні означення. Нехай $f \in \mathscr{F}(M)$. Припустимо, що KR-граф Γ_f функції f містить спеціальну вершину v і V — спеціальна компонента множини рівня f, що відповідає v. Нехай також $\mathrm{st}(v)$ – зірка v та $\mathcal{G}_v$ – стабілізатор v.

Множина
$$\mathcal{G}_v^{loc} = \{g|_{\mathrm{st}(v)} \,| g \in \mathcal{G}_v\}$$
що складається з обмежень елементів $\mathcal{G}_v$ на зірку $\mathrm{st}(v)$ вершини v є підгрупою $\mathrm{Aut}(\mathrm{st}(v))$. Будемо називати її *локальним стабілізатором вершини* v. Нехай також $r : \mathcal{G}_v \to \mathcal{G}_v^{loc}$ – відображення обмеження на зірку, тобто $r(g) = g|_{\mathrm{st}(v)}$.

Нехай далі, $S_V(f) = \{h \in \mathcal{S}(f) \,|\, h(V) = V\}$ – підгрупа у $\mathcal{S}(f)$, яка складається з дифеоморфізмів, що залишають компоненту V інваріантною. З означення випливає, що $\rho(\mathcal{S}_V(f)) \subset \mathcal{G}_v$. Позначимо через ϕ таку композицію
$$\phi = r \circ \rho : \mathcal{S}_V(f) \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}_v \xrightarrow{r} \mathcal{G}_v^{loc},$$
де відображення $r : \mathcal{G}_v \to \mathcal{G}_v^{loc}$ є відображенням обмеження на $\mathrm{st}(v)$, тобто $r(g) = g|_{\mathrm{st}(v)}$.

Нехай H — підгрупа в $\mathcal{G}_v^{loc}$ і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ — підгрупа в $\mathcal{S}_V(f)$.

Означення 2.3.0.1. *Будемо говорити, що група $\mathcal{H}$ має властивість* (C)*, якщо виконана така умова.*

(C) *Нехай $h \in \mathcal{H}$ і E — 2-вимірний елемент Ξ. Припустимо, що $h(E) = E$. Тоді $h(e) = e$ для всіх інших $e \in \Xi$ і відображення h зберігає орієнтацію кожного елементу Ξ.*

Також ми доводимо таку лему.

Лема 2.3.0.2. *Якщо $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ має властивість* (C)*, то H діє на множині всіх елементів розбиття Ξ. Зокрема, ця дія є вільною на множині 2-вимірних елементів Ξ.*

Означення 2.3.0.3. *Нехай H – підгрупа $\mathcal{G}_v^{loc}$. Будемо говорити, що група H комбінаторно діє на M, якщо виконані такі дві умови:*

(C1) *H діє на розбитті Ξ поверхні M,*

(C2) *група $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ задовольняє умову* (C).

Головним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 2.3.0.4. *Нехай $f \in \mathscr{F}(M)$ така, що її* KR*-граф Γ_f містить спеціальну вершину v, $\mathcal{G}_v^{loc}$ — локальний стабілізатор v. Нехай також H — підгрупа в $\mathcal{G}_v^{loc}$ що комбінаторно діє на M і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ — підгрупа в $S^V(f)$. Тоді існує переріз $s : H \to \mathcal{H}$ відображення ϕ, тобто відображення s є гомоморфізмом, що задовольняє умову $\phi \circ s = \mathrm{id}_H$.*

Іншими словами, якщо $\mathcal{H}$ задовольняє умову (C), то комбінаторна дія H на M піднімається до «справжньої дії» H на M дифеоморфізмами, що зберігають f.

У підрозділі 2.4 досліджується топологічна структура атома спеціальної зв'язної компоненти множини рівня, що відповідає спеціальній вершині v, а у підрозділі 2.5 ми даємо доведення теореми 2.3.0.4.

Розділ 3 присвячений повному опису фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{E}(T^2)$ на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом. Підмножину гладких функцій $\mathscr{E}(T^2)$, граф Кронрода-Ріба яких є деревом ми будемо позначати через $\mathscr{N}(T^2)$.

У підрозділі 3.1 ми доводимо, що для таких функцій граф Кронрода-Ріба завжди має спеціальну вершину. Це твердження є наслідком такої теореми.

Теорема 3.1.0.1. *Нехай $f \in \mathscr{N}(T^2)$ – гладка функція і Γ_f – її* KR-*граф. Тоді існує така єдина вершина v графу Γ_f, що кожна компонента доповнення $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є відкритим диском.*

У підрозділі 3.2 ми формулюємо основний результат розділу.

Теорема 3.2.0.1. *Нехай $f \in \mathscr{N}(T^2)$ і v – спеціальна вершина її* KR-*графу Γ_f. Тоді*

(i) *$\mathcal{G}_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$;*

(ii) *існують замкнені 2-диски $D_1, D_2, \dots, D_r \subset T^2$ такі, що $f|_{D_i} \in \mathscr{N}(D_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ і має місце такий ізоморфізм*

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=1}^{r} \pi_0 \mathcal{S}^i \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}}{\wr} \mathbb{Z}^2,$$

де $\mathcal{S}^i = \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i)$. Зокрема, у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$ отримуємо ізоморфізм:

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O} \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2.$$

У підрозділі 3.3 ми даємо доведення твердження (i) теореми 3.2.0.1, у підрозділі 3.4 доводимо твердження (ii) теореми 3.2.0.1 для частинного випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$, а у підрозділі 3.5 – теорему 3.2.0.1 для $\mathcal{G}_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$.

У розділі 4 ми досліджуємо фундаментальні групи орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{E}(T^2)$ на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл. Множину таких функцій ми будемо позначати через $\mathscr{L}(T^2)$.

У підрозділі 4.1 ми вводимо таке означення паралельності кривих на 2-торі.

Означення 4.1.0.1. *Непорожню скінчену сім'ю $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ простих замкнутих кривих на T^2 будемо називати паралельною, якщо ці криві попарно диз'юнктивні і не є гомотопними нулю.*

У підрозділі 4.1.1 ми даємо означення циклічного індексу функції $f \in \mathscr{L}(T^2)$. За означенням, функція $f \in \mathscr{L}(T^2)$ є такою, що Γ_f містить єдиний простий цикл, який ми позначатимемо через Λ.

Нехай також $C \subset T^2$ – регулярна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, і z – відповідна точка на Γ_f. Легко перевірити, що z належить єдиному простому циклу Λ в Γ_f, тоді і тільки тоді, коли C не розбиває тор T^2. Відмітимо, що $f^{-1}(c)$ складається зі скінченого числа зв'язних компонент і є інваріантною відносно кожного $h \in \mathcal{S}(f)$. Нехай $\mathcal{C} = \{h(C) \,|\, h \in \mathcal{S}'(f)\}$ — множина образів кривої C відносно дії $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$. Тоді $\mathcal{C}$ складається зі скінченого числа зв'язних компонент $\mathcal{C} = \{C_0 = C, C_1, \ldots, C_{n-1}\}$, $n \geq 1$, множини $f^{-1}(c)$.

Означення 4.1.1.1. *Число n кривих у $\mathcal{C}$ ми будемо називати циклічним індексом f.*

Основним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 4.1.1.2. *Нехай $f \in \mathscr{L}(T^2)$, C – регулярна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$ функції f, що не розбиває T^2, $\mathcal{C} = \{h(C) \,|\, h \in \mathcal{S}'(f)\}$ і n – циклічний індекс f, тобто число кривих у $\mathcal{C}$.*

Якщо $n = 1$, то існує ізоморфізм

$$\xi : \pi_1\mathcal{O}(f) \cong \pi_1\mathcal{O}(f, C) \times \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що $n \geq 2$, і нехай Q_0 – циліндр, обмежений кривими C_0 і C_1. Тоді має місце ізоморфізм

$$\xi : \pi_1\mathcal{O}(f) \cong \pi_1\mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \underset{\mathbb{Z}_n}{\wr} \mathbb{Z},$$

де $f|_{Q_0}$ — звуження функції f на Q_0.

У підрозділі 4.6 ми доводимо теорему 4.1.1.2.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню гладких функцій на 2-торі та їх деформацій.

Основні результати дисертаційної роботи можна підсумувати таким чином:

- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл;

- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, а стабілізатори цих функцій діють на зірках відповідних спеціальних вершин графів Кронрода-Ріба тривіально;
- також дано опис фундаментальних груп орбіт для випадку, коли стабілізатори цих функцій діють нетривіально на відповідних зірках;
- знайдено умови, за яких «комбінаторна» дія скінченної групи на деякому розбитті компактної поверхні є індукованою дією цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану гладку функцію.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Максименко, С. И. Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе / С. И. Максименко, Б. Г. Фещенко // Український математичний журнал. — 2014. — том 66, №. 9. — С. 1205–1212.
2. Feshchenko, B. Deformations of smooth functions on 2-torus and wreath products / B. Feshchenko // Book of abstracts of International Algebraic Conference dedicated to 100th of anniversary of L. A. Kaluzhnin (Kyiv). — 2014. — Pp. 96–97.
3. Фещенко, Б. Г. Фундаментальна група орбіт гладких функцій на 2-торі / Б. Г. Фещенко // Тези доповідей четвертої міжнарожної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана (м. Чернівці). — 2014. — С. 204–205.
4. Фещенко, Б. Г. Гомотопічні властивості просторів гладких функцій на 2- торі / Б. Г. Фещенко // Тези доповідей п'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені Михайла Кравчука, II том «Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз» (м. Київ). — 2014. — С. 192.
5. Feshchenko, B. Deformations of smooth functions on 2-torus whose Kronrod–Reeb graph is a tree / B. Feshchenko // Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків (м. Київ). — 2015. — С. 10.

6. Maksymenko, Sergiy. Functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle / Sergiy Maksymenko, Bohdan Feshchenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2015. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 22–40.
7. Maksymenko, Sergiy. Orbits of smooth functions on 2–torus and their homotopy types / Sergiy Maksymenko, Bohdan Feshchenko // Matematychni Studii. — 2015. — Vol 44, no. 1. — Pp. 67–83.
8. Фещенко, Богдан. Деформації гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом / Богдан Фещенко // Праці Інституту математики НАН України. — 2015. — том. 12, № 6. — С. 22–40.
9. Feshchenko, Bohdan. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces / Bohdan Feshchenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2016. — **22**, 3. — Pp. 210–219.
10. Feshchenko, B. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces / B. Feshchenko // Abstracts of International conference «Geometry and Topology in Odessa – 2016» (Odessa). — 2016. — P. 19.
11. Feshchenko, B. Fundamental groups of orbits of smooth functions on 2-torus / B. Feshchenko // Тези доповідей 11-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз» (м. Одеса). — 2016. — Pp. 128–129.
12. Feshchenko, B. Fundamental groups of orbits of smooth functions on 2-torus / B. Feshchenko // Book of Abstracts of International Conference «Modern Advances in Geometry and Topology» in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday (Kharkiv). — 2016. — P. 19.

АНОТАЦІЇ

Фещенко Б. Г. Деформації гладких функцій на 2-торі. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.04 – геометрія та топологія. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена дослідженню гомотопійних властивостей гладких функцій на поверхнях.

У дисертації досліджуються орбіти гладких функцій на 2-торі відносно дій груп дифеоморфізмів

Ми даємо повний опис фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі для великого класу гладких функцій, що містить множину функцій Морса, яка є відкритою і всюди щільною у просторі всіх гладких функцій. Також ми розглядаємо дії скінченних груп на поверхнях, які зберігають деяке спеціальне розбиття поверхні. Знайдено умови, за яких ці дії є індукованими деякими діями цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану функцію.

Ключові слова: гладка функція, фундаментальна група, орбіта.

Фещенко Б. Г. Деформации гладких функций на 2-торе. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена исследованию гомотопических свойств гладких функций на поверхностях.

В диссертации изучаются орбиты гладких функций на 2-торе относительно действий группы диффеоморфизмов.

Мы даем полное описание фундаментальных групп орбит гладких функций на 2-торе для большого класса гладких функций, который содержит множество функций Морса, являющихся открытым и всюду плотным подмножеством пространства всех гладких функций. Также мы рассматриваем действия конечных групп на поверхностях, которые сохраняют некоторые специальные разбиения поверхности. Найдены условия, при которых эти действия являются индуцироваными некоторыми действиями этой группы с помощью диффеоморфизмов, сохраняющих заданную функцию.

Ключевые слова: гладкая функция, фундаментальная группа, орбита.

Feshchenko B. G. Deformations of smooth functions on 2-torus. — Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences by the speciality 01.01.04. — geometry and topology. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the investigation of homotopy properties of smooth functions on surfaces.

We study orbits of smooth functions on 2-torus under the actions of the group of diffeomorphisms.

Let M be a smooth compact surface. The group of diffeomorphisms $\mathcal{D}(M)$ of M acts on the space of smooth functions $C^{\infty}(M)$ by the rule:

$$\gamma : C^{\infty}(M) \times \mathcal{D}(M) \to C^{\infty}(M), \qquad \gamma(f, h) = f \circ h.$$

Given $f \in C^{\infty}$ let $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \,|\, f \circ h = f\}$ be the stabilizer of f and $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \,|\, h \in \mathcal{D}(M)\}$ be the orbit of f. Endow on $C^{\infty}(M)$ and $\mathcal{D}(M)$ the corresponding Whitney topologies. These topologies induce certain topologies on the stabilizer $\mathcal{S}(f)$ and the orbit $\mathcal{O}(f)$. Let also $\mathcal{O}_f(f)$ be the connected component of $\mathcal{O}(f)$, which contains $f \in C^{\infty}(M)$.

Let $\mathscr{E}(M)$ be the subset of $C^{\infty}(M)$ satisfying the following two conditions:

(B) all critical points of f belong to the interior of M, and f takes constant values on each connected component of the boundary of M;

(PQ) for each critical point z of f its germ at z is smoothly equivalent to some non-zero homogeneous polynomial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ of degree ≥ 2 without multiple factors

We give a full description of the fundamental groups of orbits of smooth functions on 2-torus for a class of smooth functions $\mathscr{E}(M)$ containing the set of Morse functions being open and dense subset of the space of all smooth functions on M.

Let $f : M \to \mathbb{R}$ be a Morse function on a smooth closed surface, V be a connected component of some critical level of f, and $\mathcal{E}_V$ be its atom. Let also $\mathcal{S}_V(f) = \{h \in \mathcal{S}(f) \,|h(V) = V\}$ be the group of diffeomorphisms which preserve a given function and leaving invariant the set V

The group $\mathcal{S}_V(f)$ acts on the set $\pi_0\partial\mathcal{E}_V$ of connected components of the boundary of $\mathcal{E}_V$. Therefore we have a homomorphism $\phi : \mathcal{S}(f) \to \mathrm{Aut}(\pi_0\partial\mathcal{E}_V)$. Let also $G = \phi(\mathcal{S}(f))$ be the image of $\mathcal{S}(f)$ in $\mathrm{Aut}(\pi_0\partial\mathcal{E}_V)$.

Suppose that the inclusion $\partial\mathcal{E}_V \subset M \setminus V$ induces a bijection $\pi_0\partial\mathcal{E}_V \to \pi_0(M \setminus V)$. Let H be a subgroup of G.

We find sufficient condition when the restriction of the action of H on $\pi_0\partial\mathcal{E}_V$ lifts to the action of H on M by f-preserving diffeomorphisms of M.

Key words: smooth function, fundamental group, orbit.

Підписано до друку 24.04.2017. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,0. Умов. друк. арк. 1,8.
Тираж 100 пр. Зам. 35.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.