

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Фещенко Богдан Григорович

УДК 515.146.27 + 515.162.2

**ДЕФОРМАЦІЇ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ
НА 2-ТОРІ**

Спеціальність: 01.01.04 – геометрія та топологія

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник – доктор
фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Максименко Сергій Іванович

Київ – 2017

ЗМІСТ

Перелік умовних скорочень	4
Вступ	5
1 Попередні відомості	21
1.1 Гладкі функції на поверхнях	21
1.2 Лінійні симетрії однорідних многочленів без кратних лінійних множників	25
1.3 Стабілізатори та орбіти гладких функцій	26
1.4 Гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій .	27
1.5 Скручування Дена і слайди уздовж кривих	32
1.6 Граф Кронрода-Ріба функції f	33
1.7 Відображення зсуву уздовж орбіт потоків на поверхнях	39
1.8 Фундаментальна група $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$	43
1.9 Вінцеві добутки груп	44
1.10 Висновки	47
2 Дії скінченних груп і гладкі функції на поверхнях	48
2.1 Спеціальні вершини KR-графу функції f	48
2.2 Розбиття поверхні спеціальною компонентою критичного рівня .	50
2.3 Комбінаторні дії скінченних груп на поверхнях	51
2.4 Топологічна структура атома $\mathcal{E}_{V,a}$	54
2.5 Доведення теореми 2.3.0.4	55

2.6	Висновки	66
3	Фундаментальна група орбіт гладких функцій на 2-торі KR-граф яких є деревом	67
3.1	Спеціальні вершини KR-графу для гладких функцій на 2-торі . .	67
3.2	Опис $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для функцій з $\mathcal{N}(T^2)$	71
3.3	Структура локального стабілізатора \mathcal{G}_v^{loc}	71
3.4	Доведення твердження (ii) теореми 3.2.0.1 у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$. Побудова перерізу	73
3.5	Доведення твердження (ii) теореми 3.2.0.1	76
3.6	Висновки	85
4	Фундаментальна група орбіт гладких функцій на 2-торі, KR-граф яких містить цикл	86
4.1	Паралельні криві на T^2	86
4.2	Дифеоморфізми T^2 , нерухомі на паралельній сім'ї кривих	89
4.3	f -адаптовані допоміжні конструкції	92
4.4	Епіморфізми φ і κ	95
4.5	Інтерлюдія: f -інваріантні вільні \mathbb{Z}_n -дії	105
4.6	Доведення теореми 4.1.1.2	106
4.7	Висновки	110
	Висновки	111
	Список використаних джерел	112

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

\mathbb{R}	множина дійсних чисел
\mathbb{Z}	множина цілих чисел
\mathbb{N}	множина натуральних чисел
\mathbb{C}	множина комплексних чисел
\mathbb{Z}_n	фактор-група $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
\mathbb{R}^n	n -вимірний евклідовий простір
S^n	n -вимірна сфера
D^n	n -вимірний диск
∂D^n	межа D^n
\bar{A}	замикання множини A
T^2	2-вимірний тор
I	відрізок $[0, 1]$

ВСТУП

Дисертація присвячена дослідженню гомотопійних властивостей орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії відповідних груп дифеоморфізмів.

Актуальність теми

Гладкі функції на многовидах є одним з основних об'єктів математики сьогодення і мають застосування в різних галузях науки. Аналітичні властивості таких функцій часто несуть інформацію про геометрію та топологію многовиду, на якому вони визначені.

Наприклад, М. Морс [33, 34] довів, що в околі кожної своєї *невиродженої* критичної точки гладка функція, після деякої заміни координат, має стандартний вигляд квадратичного многочлену (лема Морса). Це дозволило йому встановити зв'язок між числом неvirоджених критичних точок різних індексів з рангами та скрутами груп гомологій многовиду (слабкі та сильні нерівності Морса), а також отримати оцінки на число замкнутих геодезичних ріманового многовиду. Таким чином, виявилось, що «геометрична» будова многовиду суттєво визначається функціями Морса на ньому. Розвитком цих ідей, які отримали назву теорія Морса, займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, В. Шарко та багато інших математиків XX ст. Їх результати заклали надійний фундамент для подальших досліджень многовидів методами гладких функцій та досліджень гладких функцій на многовидах.

Варто відзначити, що особлива увага приділялась вивченню спеціальних кла-

сів функцій Морса, наприклад мінімальних та точних. С. Смейл довів існування таких функцій на однозв'язних многовидах розмірності більше 5. Це дало змогу довести відому гіпотезу Пуанкаре у високих розмірностях [47]. В. Шарко узагальнив результати С. Смейла та отримав умови існування мінімальних та точних функцій Морса на неодnozв'язних многовидах високої розмірності. Також він довів «більш жорсткіші» нерівності Морса для неодnozв'язних многовидів.

Топологічна еквівалентність функцій досліджувалась в роботах А. Фоменко, С. Матвєєва, О. Болсінова [50], А. Ошемкова [65], В. Шарка [45, 75]. В Києві цими питаннями займались О. Пришляк [66, 41], О. Кадубовський [53], Є. Полулях [37], І. Юрчук [76], Д. Личак [61], Є. Полулях та І. Юрчук [38].

Компоненти зв'язності просторів функцій Морса в високих розмірностях описані В. Шарко [73], а на поверхнях вони класифіковані в роботах В. Шарка [74], С. Матвєєва, Х. Цишанга, О. Кудрявцевої [55] та С. Максименка [22, 26]. Групи кобордизмів функцій Морса на поверхнях обчислили К. Ikegami і О. Saeki [15] та В. Kalmar [18].

Дослідження функцій на поверхнях в останні 40 років також було стимульоване значним прогресом в симплектичній топології і, зокрема, в теорії інтегровних гамільтонових систем. А. Фоменко та О. Болсінов [50, 51] побудували теорії типу Морса для цілком інтегровних гамільтонових систем з двома ступенями вільності (тобто систем, що мають два функціонально-незалежних інтеграла) на чотиривимірних многовидах. Також вони показали, що вивчення структури таких систем зводяться до задач дослідження комбінаторних властивостей гладких функцій на поверхнях та 3-многовидах, їх деформацій та симетрій, тобто автоморфізмів многовидів, що зберігають деяке їх клітинне розбиття.

Зауважимо, що дослідження груп автоморфізмів має довгу історію. Для повноти викладу нагадаємо, що перший загальний результат був отриманий ще А. Cayley в 1854 році, який довів, що будь-яка скінченна група G порядку n є підгрупою групи перестановок з n елементів, див. також результат E. Nummela

[36] де цей факт узагальнений на топологічні групи. С. Jordan [16] в 1869 році описав структуру групи автоморфізмів скінченних дерев і R. Frucht [12] в 1939 показав, що будь-яка скінченна група може бути реалізована як група симетрій деякого скінченного графу.

Нехай M – замкнена компактна поверхня і Ξ – деяке клітинне розбиття M (наприклад, триангуляція). R. Cori і A. Machi розглядали Ξ -гомеоморфізми, тобто гомеоморфізми M , що зберігають клітинне розбиття, тобто переводять клітину в клітину однакової розмірності та зберігають орієнтації клітин.

Визначимо групу комбінаторних автоморфізмів $\text{Aut}(\Xi)$ розбиття Ξ як фактор-групу групи Ξ -гомеоморфізмів за модулем тих, що зберігають орієнтації клітин. R. Cori і A. Machi [1] та J. Širáň і M. Škoveira [48] довели, що кожна скінченна група є ізоморфною групі $\text{Aut}(\Xi)$ для деякого розбиття деякої поверхні, що може бути як орієнтованою так і неорієнтованою.

А. Фоменко і О. Кудрявцева [58, 59] дали конструктивне доведення цього факту за допомогою функцій Морса.

Зауважимо, що 1-вимірний остов Ξ може бути розглянутий як граф. Припустимо, що кожна його вершина має парну степінь. Тоді в багатьох випадках (наприклад коли M є орієнтованою) ми можемо побудувати гладку функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що цей граф є критичним рівнем, що містить всі сідла f і групу $\text{Aut}(\Xi)$ можна інтерпретувати як групу «комбінаторних» симетрій f . Групу симетрій функцій Морса вивчали А. Фоменко [70], Ю. Браїлов [52], Kadubovsky та А. V. Klimchuk [17], А. Fomenko, Е. Kudrjavitseva і І. Nikonov [57].

С. Максименко досліджував гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях, відносно дії груп дифеоморфізмів. Вимагалось, щоб такі функції приймали постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі поверхні, їх критичні точки належали до внутрішності поверхні та, щоб в околі кожної критичної точки вони були гладко еквівалентні деяким однорідним поліномам без кратних множників. Позначимо через $\mathcal{F}(M)$ множину таких

функцій на M . Очевидно, що множина функцій Морса, що приймають постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі є підмножиною $\mathcal{F}(M)$.

В роботах [23, 28] С. Максименка повністю описано гомотопійні властивості стабілізаторів функцій з класу $\mathcal{F}(M)$. Більш того, було знайдено зв'язок між фундаментальними групами компонент зв'язності орбіт гладких функцій на поверхнях з компонентами зв'язності стабілізаторів цих функцій. Зокрема, для всіх компактних поверхонь крім 2-тора, 2-сфери, проективної площини та пляшки Клейна, це дало змогу описати і фундаментальні групи компонент зв'язності орбіт функцій з $\mathcal{F}(M)$. Окремо відзначимо, що С. Максименко дав повний опис вищих гомотопійних груп орбіт, а саме показав, що друга гомотопійна група є тривіальною, а вищі гомотопійні групи ізоморфні відповідним вищим гомотопійним групам поверхні. Звідси, якщо поверхня є асферичною, тобто її старші гомотопійні групи зануляються, то зв'язна компонента орбіти, що містить функцію є простором Ейленберга-Маклейна $K(\pi, 1)$, де π – фундаментальна група орбіти. Іншими словами це означає, що вся гомотопійна інформація про компоненту орбіти, що містить функцію, описується лише її фундаментальною групою.

С. Максименко довів [24], що орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ для функцій з класу $\mathcal{F}(M)$ має гомотопійний тип скінченновимірною CW комплексу причому, якщо M є компактною поверхнею відмінною від сфери S^2 та проективної площини $\mathbb{R}P^2$, а $f \in \mathcal{F}(M)$ є функцією загального положення, то $\mathcal{O}_f(f)$ має гомотопійний тип n -тора T^n . Якщо f є функцією загального положення на S^2 або $\mathbb{R}P^2$, то $\mathcal{O}_f(f)$ має гомотопійний тип $SO(3) \times T^n$, для деякого $n \geq 0$.

О. Кудрявцева [60, 56], вивчаючи гомотопійні типи просторів функцій Морса на поверхнях і використовуючи подібну техніку до робіт [23, 28] узагальнила цей результат і довела, що орбіти довільних функцій Морса на орієнтованих поверхнях крім S^2 мають гомотопійний тип фактор-простору n -тора T^n відносно дії деякої скінченної групи.

Відкритою залишалась задача описання фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{F}(M)$ на орієнтованих поверхнях M у випадках коли $M \in 2$ -тором або $M \in 2$ -сферою.

Основним результатом дисертації є *повний опис фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{F}(T^2)$ на 2-торі.*

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами

Робота виконана в лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України в рамках державної науково-дослідної теми «Алгебраїчні геометричні та топологічні властивості многовидів з додатковими структурами», номер державної реєстрації 0111U000159.

Мета і завдання дослідження

Метою роботи є дослідження структури фундаментальних груп орбіт широкого класу функцій гладких на поверхнях відносно правих дій груп дифеоморфізмів поверхонь.

Об'єкт дослідження: різні класи гладких відображень поверхонь та їх гомотопійні властивості.

Предмет дослідження: гладкі функції на 2-торі та дифеоморфізми 2-тора, що зберігають функції.

Завдання дослідження: повністю описати фундаментальні групи орбіт гладких функцій на 2-торі для великої множини гладких функцій, що містить відкрити і всюди щільну множину функцій Морса.

Методи дослідження

У роботі використовуються методи алгебри, алгебраїчної, геометричної та диференціальної топології, теорії динамічних систем та теорії особливостей.

Наукова новизна одержаних результатів

Результати роботи, що виносяться на захист:

- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл;
- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, а стабілізатори цих функцій діють на зірках відповідних спеціальних вершин графів Кронрода-Ріба тривіально;
- також дано опис фундаментальних груп орбіт для випадку, коли стабілізатори цих функцій діють нетривіально на відповідних зірках;
- знайдено умови, за яких «комбінаторна» дія скінченної групи на деякому розбитті компактної поверхні є індукованою дією цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану гладку функцію.

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, теорії динамічних систем, теорії особливостей гладких відображень та інших галузей знань, методи яких базуються на топологічних властивостях гладких функцій.

Особистий внесок здобувача

Всі результати, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові.

Апробація результатів

Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

- XVI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2014);
- IV Міжнародна Ганська конференція (м. Чернівці, 2014);
- Міжнародна конференція присвячена 100-річчю професора Л. А. Калужніна (м. Київ, 2014);
- Міжнародна конференція молодих математиків (м. Київ 2015);
- 11 Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2016);
- Геометрія та топологія в Одесі – 2016 (м. Одеса, 2016);
- Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday (Kharkiv, 2016);
- Науковий семінар лабораторії топології відділу алгебри та топології Інституту математики НАН України (м. Київ);
- Семінар з фрактального аналізу Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова (м. Київ, 2017);
- Міський геометричний семінар (м. Харків, 2017).

Публікації

Основні результати дисертації опубліковано в 5 статтях.

Наукові роботи [8, 30, 31, 63, 67] опубліковано в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України. Серед них три статті [8, 30, 63] опубліковано в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз

даних (Web of Science, Scopus). В статтях, що опубліковані у співавторстві [30, 31, 63], науковому керівнику належать постановка задач, а також загальне керівництво роботою. Остаточні формулювання та доведення результатів належать здобувачу.

Також результати роботи представлені в матеріалах конференцій [6, 7, 9, 10, 11, 69, 68].

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається з переліку умовних скорочень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 76 найменувань. Повний обсяг роботи 121 сторінка.

Основний зміст роботи

Розділі 1 включає формулювання результатів про основні об'єкти дослідження.

Підрозділ 1.1 присвячений гладким функція на поверхнях. В підпункті 1.1.1 наведено деякі базові поняття та твердження теорії Морса.

В підпункті 1.1.2 введено два класи гладких функцій на поверхнях, що будуть досліджуватися в дисертації. Для зручності наведемо їх означення.

Нехай M – гладка компактна поверхня, $\mathcal{F}(M) \subset C^\infty(M)$ – множина гладких функцій, що задовольняють такі дві умови:

- (B) функція $f \in \mathcal{F}(M)$ приймає постійне значення на кожній зв'язній компоненті межі ∂M і всі критичні точки f належать до внутрішності M ;
- (PL) для кожної критичної точки x функції f паросток f в x є гладко еквівалентним до деякого однорідного многочлена $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без кратних лінійних множників.

Нехай $\mathcal{E}(M)$ – підмножина функцій в $C^\infty(M)$, що задовольняють умову (В), а також наступну умову:

(PQ) для кожної критичної точки x функції f паросток f в x є гладко еквівалентним до деякому однорідному многочлену $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без кратних множників.

Очевидно, що $\mathcal{E}(M)$ – підмножина $\mathcal{F}(M)$. Також легко побачити, що множина функцій Морса, що задовольняють умову (В), є підмножиною простору $\mathcal{E}(M)$. Таким чином, множина $\mathcal{E}(M)$ є також всюди щільною і складається з «типових» функцій.

В цьому підпункті також описана локальна будова шарування в околі критичних точок гладких функцій.

В підрозділі 1.2 наведено результати про локальні «симетрії» функцій з класу $\mathcal{F}(M)$ в околах критичних точок.

В підрозділі 1.3 дається означення стабілізаторів та орбіт гладких функцій.

Нехай M – гладка компактна поверхня, X – замкнена (можливо порожня) підмножина M і $\mathcal{D}(M, X)$ – група дифеоморфізмів M , нерухомих в деякому околі X . Тоді група $\mathcal{D}(M, X)$ діє справа на просторі гладких функцій $C^\infty(M)$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M, X) \rightarrow C^\infty(M), \quad \gamma(f, h) = f \circ h. \quad (1.3)$$

Нехай $f \in C^\infty(M)$ – гладка функція на M .

Означення 1.3.0.1. Множини

$$\mathcal{S}(f, X) = \{h \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\},$$

$$\mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}$$

називаються, відповідно, **стабілізатором** і **орбітою** функції f відносно дії γ . Якщо $X = \emptyset$ є порожньою множиною, то покладемо:

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M, \emptyset), \quad \mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f, \emptyset), \quad \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f, \emptyset).$$

Наділимо простори $\mathcal{D}(M, X)$ та $C^\infty(M, X)$ відповідними сильними топологіями Уїтні, [72]. Ці топології індукують деякі топології на $\mathcal{S}(f, X)$ і $\mathcal{O}(f, X)$.

Позначимо через $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ і $\mathcal{D}(M, X)$, відповідно, зв'язні компоненти $\mathcal{S}(f, X)$ і $\mathcal{D}(M, X)$, які містять тотожне відображення id_M , а через $\mathcal{O}_f(f, X)$ – зв'язну компоненту $\mathcal{O}(f, X)$, що містить f . Нехай також

$$\mathcal{S}'(f, X) := \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$$

– підгрупа $\mathcal{S}(f, X)$, що складається з дифеоморфізмів $h \in \mathcal{S}(f, X)$ ізотопних до тотожного дифеоморфізму id_M . При цьому не вимагається, щоб ці ізотопії обов'язково зберігали f . Тому $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X) \subset \mathcal{S}'(f, X)$, але, взагалі кажучи, $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X) \neq \mathcal{S}'(f, X)$.

В підрозділі 1.4 наведено відомі результати [44, 23, 29, 62] про гомотопійні властивості орбіт на стабілізаторів функцій з класу $\mathcal{F}(M)$ на гладких компактних поверхнях. Також в підрозділі 1.4.1 приводяться результати про множення шляхів у відносних гомотопійних групах.

В підрозділі 1.5 розглядаються спеціальні класи дифеоморфізмів циліндру $Q = S^1 \times [0, 1]$ – скручування Дена та слайди. Також наведено наведено результат про твірні групи компонент зв'язності групи дифеоморфізмів $\pi_0 \mathcal{D}(Q, \partial Q)$ циліндру Q , нерухомих на деякому околі межі. Ця група породжується класом ізотопії скручування Дена уздовж деякої кривої, що паралельна основам циліндра.

Підрозділ 1.6 присвячений графу Кронрода-Ріба гладких функцій. В ньому доведено, що для функцій $f \in \mathcal{F}(T^2)$ цей граф, Γ_f , є або деревом, або містить єдиний цикл, лема 1.6.1.1.

В підпункті 1.6.2 показано стабілізатор функції $f \in \mathcal{F}(M)$ діє на її графі Кронрода-Ріба, а в підпункті 1.6.3 наведено приклади таких дій.

В підрозділі 1.7 розглядаються відображення спеціального вигляду, які зберігають орбіти потоку на многовиді. Зокрема в підпункті 1.7.1 ми нагадуємо

означення потоку на многовиді, породженого векторним полем, а в підпунктах 1.7.2 та 1.7.3— означення та властивості гамільтонових та градієнтних полів функцій на многовидах. В підпункті 1.7.4 дано означення відображення зсуву уздовж орбіт потоків та сформульовано деякі властивості таких відображень для потоків на поверхнях.

В підрозділі 1.8 наведено опис фундаментальної групи компоненти зв'язності групи дифеоморфізмів 2-тора, що містить тотожне відображення.

В підрозділі 1.9 дається означення вінцевих добутоків спеціального виду,

$$G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2, \quad G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z},$$

які відповідають неефективним діям групи \mathbb{Z} на циклічних групах \mathbb{Z}_n .

Розділ 2 присвячений дослідженню дії скінченних груп на поверхнях та їх підняття до дій груп дифеоморфізмів, що зберігають задану функцію.

В підрозділі 2.1 дається таке означення спеціальної вершини графу Кронрода-Ріба функції f з класу $\mathcal{F}(M)$ на гладкій компактній поверхні. Наведемо це означення нижче.

Нехай M — замкнута поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$ і Γ_f — KR-граф функції f . Нехай $\mathcal{G} = \rho(\mathcal{S}(f))$ — образ $\mathcal{S}(f)$ в $\text{Aut}(\Gamma_f)$. Довільний зв'язний \mathcal{G}_v -інваріантний окіл v , що не містить інших вершин Γ_f , будемо називати *зіркою* v . Зірку вершини v будемо позначати через $\text{st}(v)$. Нехай v — вершина Γ_f , $\mathcal{G}_v = \{g \in \mathcal{G} \mid g(v) = v\}$ — стабілізатор вершини v відносно дії \mathcal{G} на Γ_f .

Означення 2.1.0.1. *Вершину v KR-графу Γ_f функції f називатимемо **спеціальною**, якщо існує бієкція між зв'язними компонентами $\text{st}(v) \setminus v$ і $M \setminus V$. Відповідну зв'язну компоненту $V = p_f^{-1}(v)$ критичного рівня f будемо також називати **спеціальною**.*

Також ми наводимо приклади вершин, що задовольняють та не задовольняють цю умову.

В підрозділі 2.2 ми показуємо, що якщо граф Кронрода-Ріба функції f містить

спеціальну вершину, то на поверхні виникає деяке клітине розбиття Ξ . А саме, нехай M — замкнута поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$ — функція на M і Γ_f — КР-граф функції f . Припустимо, що Γ_f має спеціальну вершину v . Нехай також $V = p_f^{-1}(v)$ — зв'язна компонента критичного рівня f , що відповідає v . Нагадаємо, що V є вкладеним в поверхню M графом. Тоді компонента V задає розбиття Ξ поверхні M таке, що 0-вимірними компонентами Ξ є вершини V , 1-вимірними компонентами Ξ є ребра V , а 2-вимірними компонентами Ξ є зв'язні компоненти доповнення до V в M .

В підрозділі 2.3 ми вивчаємо комбінаторні дії скінченної групи на поверхні. Приведемо необхідні означення. Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$. Припустимо, що КР-граф Γ_f функції f містить спеціальну вершину v і V — спеціальна компонента множини рівня f , що відповідає v . Нехай також $st(v)$ — зірка v , та \mathcal{G}_v — стабілізатор v .

Множина

$$\mathcal{G}_v^{loc} = \{g|_{st(v)} \mid g \in \mathcal{G}_v\}$$

що складається з обмежень елементів \mathcal{G}_v на зірку $st(v)$ вершини v є підгрупою $\text{Aut}(st(v))$. Будемо називати її *локальним стабілізатором вершини v* . Нехай також $r : \mathcal{G}_v \rightarrow \mathcal{G}_v^{loc}$ — відображення обмеження на зірку, тобто $r(g) = g|_{st(v)}$.

Нехай далі, $\mathcal{S}_V(f) = \{h \in \mathcal{S}(f) \mid h(V) = V\}$ — підгрупа в $\mathcal{S}(f)$, яка складається з дифеоморфізмів, що залишають компоненту V інваріантною. З означення випливає, що $\rho(\mathcal{S}_V(f)) \subset \mathcal{G}_v$. Позначимо через ϕ таку композицію

$$\phi = r \circ \rho : \mathcal{S}_V(f) \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}_v \xrightarrow{r} \mathcal{G}_v^{loc},$$

де відображення $r : \mathcal{G}_v \rightarrow \mathcal{G}_v^{loc}$ є відображенням обмеження на $st(v)$, тобто $r(g) = g|_{st(v)}$.

Нехай H — підгрупа в \mathcal{G}_v^{loc} і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ — підгрупа в $\mathcal{S}_V(f)$.

Означення 2.3.0.1. Будемо говорити, що група \mathcal{H} має властивість (C), якщо виконана така умова.

(C) Нехай $h \in \mathcal{H}$ і E — 2-вимірний елемент Ξ . Припустимо, що $h(E) = E$.

Тоді $h(e) = e$ для всіх інших $e \in \Xi$ і відображення h зберігає орієнтацію кожного елементу Ξ .

Також ми доводимо таку лему.

Лема 2.3.0.2. Якщо $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ має властивість (C), тоді H діє на множині всіх елементів розбиття Ξ . Зокрема, ця дія є вільною на множині 2-вимірних елементів Ξ .

Означення 2.3.0.3. Нехай H – підгрупа \mathcal{G}_v^{loc} . Будемо говорити, що група H комбінаторно діє на M , якщо виконані такі дві умови:

(C1) H діє на розбитті Ξ поверхні M ,

(C2) група $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ задовольняє умову (C).

Умова (C1) означає, що H «перемішує» елементи розбиття Ξ поверхні M , а умова (C2) накладає обмеження на цю дію.

Головним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 2.3.0.4. Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ така, що її KR-граф Γ_f містить спеціальну вершину v , \mathcal{G}_v^{loc} – локальний стабілізатор v . Нехай також H – підгрупа в \mathcal{G}_v^{loc} що комбінаторно діє на M і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ – підгрупа в $S^V(f)$. Тоді існує переріз $s : H \rightarrow \mathcal{H}$ відображення ϕ , тобто відображення s є гомоморфізмом, що задовольняє умову $\phi \circ s = \text{id}_H$.

Іншими словами, якщо \mathcal{H} задовольняє умову (C), то комбінаторна дія H на M піднімається до «справжньої дії» H на M дифеоморфізмами, що зберігають f .

В підрозділі 2.4 досліджується топологічна структура атома спеціальної зв'язної компоненти множини рівня, що відповідає спеціальній вершині v , а в підрозділі 2.5 ми даємо доведення теореми 2.3.0.4.

Розділ 3 присвячений повному опису фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{E}(T^2)$ на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом. Підмно-

жину гладких функцій $\mathcal{E}(T^2)$, граф Кронрода-Ріба яких є деревом ми будемо позначати через $\mathcal{N}(T^2)$.

В підрозділі 3.1 ми доводимо, що для таких функцій граф Кронрода-Ріба завжди має спеціальну вершину. Це твердження є наслідком такої теореми.

Теорема 3.1.0.1. *Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$ – гладка функція і Γ_f – її KR-граф. Тоді існує така єдина вершина v графу Γ_f , що кожна компонента доповнення*

$$T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$$

є відкритим диском.

В підрозділі 3.2 ми формулюємо основний результат розділу.

Теорема 3.2.0.1. *Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$ і v – спеціальна вершина її KR-графу Γ_f . Тоді*

(i) $\mathcal{G}_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$;

(ii) існують замкнені 2-диски $D_1, D_2, \dots, D_r \subset T^2$ такі, що $f|_{D_i} \in \mathcal{N}(D_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ і має місце такий ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=1}^r \pi_0 \mathcal{S}^i \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}} \mathbb{Z}^2,$$

де $\mathcal{S}^i = \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i)$. Зокрема, у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$ отримуємо ізоморфізм:

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O} \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2.$$

У підрозділі 3.2 ми даємо доведення твердження (i) теореми 3.2.0.1, в підрозділі 3.4 доводимо твердження (ii) теореми 3.2.0.1 для частинного випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$, а в підрозділі 3.5 – теорему 3.2.0.1 для $\mathcal{G}_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$.

В розділі 4 ми досліджуємо фундаментальні групи орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{E}(T^2)$ на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл. Множину таких функцій ми будемо позначати через $\mathcal{L}(T^2)$.

В підрозділі 4.1 ми вводимо таке означення паралельності кривих на 2-торі.

Означення 4.1.0.1. Непорожню скінчену сім'ю C_0, C_1, \dots, C_{n-1} простих замкнутих кривих на T^2 будемо називати паралельною, якщо ці криві попарно диз'юнктивні і не є гомотопними нулю.

В підрозділі 4.1.1 ми даємо означення циклічного індексу функції $f \in \mathcal{L}(T^2)$. За означенням, функція $f \in \mathcal{L}(T^2)$ є такою, що Γ_f містить єдиний простий цикл, який ми позначатимемо через Λ .

Нехай також $C \subset T^2$ – регулярна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, і z – відповідна точка на Γ_f . Легко перевірити, що z належить єдиному простому циклу Λ в Γ_f , тоді і тільки тоді, коли C не розбиває тор T^2 . Відмітимо, що $f^{-1}(c)$ складається зі скінченного числа зв'язних компонент і є інваріантною відносно кожного $h \in \mathcal{S}(f)$. Нехай $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$ – множина образів кривої C відносно дії $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$. Тоді \mathcal{C} складається зі скінченного числа зв'язних компонент $\mathcal{C} = \{C_0 = C, C_1, \dots, C_{n-1}\}$, $n \geq 1$ множини $f^{-1}(c)$.

Означення 4.1.1.1. Число n кривих в \mathcal{C} ми будемо називати **циклічним індексом** f .

Основним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 4.1.1.2. Нехай $f \in \mathcal{L}(T^2)$, C – регулярна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$ функції f , що не розбиває T^2 , $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$ і n – циклічний індекс f , тобто число кривих в \mathcal{C} .

Якщо $n = 1$, то існує ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}(f, C) \times \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що $n \geq 2$ і нехай Q_0 – циліндр, обмежений кривими C_0 і C_1 . Тоді має місце ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z},$$

де $f|_{Q_0}$ – звуження функції f на Q_0 .

У підрозділі 4.6 ми доводимо теорему 4.1.1.2.

Подяки

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому керівникові Максименку Сергію Івановичу за співпрацю, підтримку та увагу до роботи, а також всім учасникам семінару лабораторії топології Інституту математики НАН України за цінні зауваження під час обговорення результатів дисертації.

Розділ 1. Попередні відомості

1.1 Гладкі функції на поверхнях

В даному пункті будуть наведені деякі результати про функції Морса та гладкі функції більш широкого класу, див. напр. [32, 64].

Якщо не зазначено протилежне, ми будемо вважати, що всі многовиди та відображення мають клас C^∞ .

1.1.1 Функції Морса

Нехай M – гладкий многовид розмірності m без межі і $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція на M . Точка $p_0 \in M$ називається *критичною точкою* функції f , якщо

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$$

у деякій локальній системі координат (x_1, x_2, \dots, x_m) в околі точки p_0 . Означення критичної точки не залежить від вибору локальної системи координат. Дійсне число $c \in \mathbb{R}$ будемо називати *критичним значенням* f , якщо $f(p_0) = c$ для деякої критичної точки p_0 функції f .

Матрицею Гессе $\text{Hess}_f(p_0)$ функції f в критичній точці p_0 називається квадратна симетрична $(m \times m)$ матриця

$$\text{Hess}_f(p_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) \right)_{i,j=1}^m,$$

складена з похідних другого порядку в точці p_0 . Визначник $\det(\text{Hess}_f(p_0))$ матриці Гессе функції f в точці p_0 називається *гессіаном* функції f в p_0 .

Означення 1.1.1.1. Критична точка p_0 функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називається *невиродженою*, якщо її гессіан в точці p_0 відмінний від нуля, тобто

$$\det(\text{Hess}_f(p_0)) \neq 0.$$

В протилежному випадку p_0 називається *виродженою* критичною точкою.

Означення 1.1.1.2. Гладка функція $f \in C^\infty(M)$ називається **функцією Морса**, якщо кожна критична точка f є неvirодженою.

Має місце такий результат.

Теорема 1.1.1.3 (Лема Морса, [64]). Нехай p_0 – неvirоджена критична точка функції $f \in C^\infty(M)$. Тоді можна вибрати систему локальних координат (x_1, x_2, \dots, x_m) таку, що координатне представлення функції f біля p_0 має такий вигляд:

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c, \quad (1.1)$$

де p_0 відповідає початку координат $0 = (0, 0, \dots, 0)$ і $c = f(p_0)$.

Число λ від'ємних членів стандартної форми (1.1) є числом від'ємних елементів матриці $\text{Hess}_f(p_0)$ після її діагоналізації. На підставі теореми Сільвестра, число λ не залежить від вибору локальної системи координат. Це означає, що λ залежить лише від функції f та критичної точки p_0 . Число λ називається *індексом* критичної точки p_0 . Множину функцій Морса на M будемо позначати через $\text{Morse}(M)$.

1.1.2 Класи гладких функцій $\mathcal{F}(M)$ та $\mathcal{E}(M)$

Нехай M – гладка компактна поверхня, $\mathcal{F}(M) \subset C^\infty(M)$ – множина гладких функцій, що задовольняють такі дві умови:

(В) функція $f \in \mathcal{F}(M)$ приймає постійне значення на кожній зв'язній компоненті межі ∂M і всі критичні точки f належать до внутрішності M ;

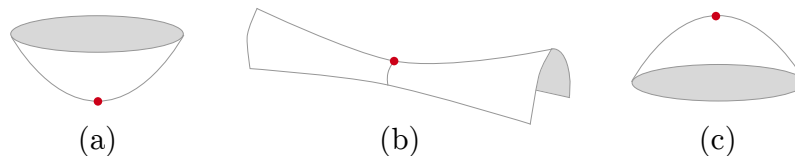


Рис. 1.1.1.1: Невироджені критичні точки функцій на поверхнях:

(а) – локальний мінімум ($\lambda = 0$), (б) – сідло ($\lambda = 1$),

(с) – локальний максимум ($\lambda = 2$)

(PL) для кожної критичної точки x функції f паросток f в x є гладко еквівалентним до деякого однорідного многочлена $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без кратних лінійних множників.

Відомо, що будь-який однорідний многочлен $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ розкладається в добуток лінійних та незвідних над \mathbb{R}^2 квадратичних множників. Умова (PL) означає, що

$$f_x = \prod_{i=1}^n L_i \cdot \prod_{j=1}^m Q_j^{q_j}, \quad (1.2)$$

де $L_i(x, y) = a_i x + b_i y$ – лінійна форма, а $Q_j(x, y) = c_j x^2 + d_j xy + e_j y^2$ – незвідна над \mathbb{R} квадратична форма такі, що $L_i/L_{i'} \neq \text{const}$ при $i \neq i'$ і $Q_j/Q_{j'} \neq \text{const}$ при $j \neq j'$. Отже, якщо $\deg f_x \geq 2$, то $0 \in \mathbb{R}^2$ є ізольованою критичною точкою f_x .

Нехай $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ – паросток C^∞ -функції такої, що $0 \in \mathbb{C}$ є ізольованою критичною точкою для f . Тоді існує паросток дифеоморфізму $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ такий, що

$$f_x \circ h(z) = \begin{cases} \pm |z|^2, & \text{якщо } 0 \text{ є локальним екстремумом, [2],} \\ \text{Re}(z^n), & \text{для деякого } n \in \mathbb{N} \text{ в іншому випадку [41].} \end{cases}$$

Якщо 0 не є локальним екстремумом, то число n не залежить від вибору h . В цьому випадку точка 0 називається *узагальненим n -сідлом*, або простіше, *n -сідлом*. Число n відповідає кількості лінійних множників в (1.2).

Приклади шарувань ліній рівня f в малому околі ізольованої критичної точки показані на Рис. 1.1.2.1.

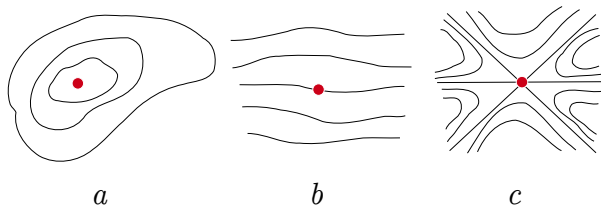


Рис. 1.1.2.1: а – локальний екстремум, b – 1-сідло, c – 3-сідло

Відомим прикладом гладкої функції на \mathbb{R}^2 з особливістю типу 3-сідло, див. рис. 1.1.2.1, є $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Очевидно, що $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$, $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Початок координат $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ є особливою точкою для f . Таку особливість інколи називають «мавп'ячим сідлом».

Нехай $\mathcal{E}(M)$ – підмножина в $C^\infty(M)$, що задовольняють умову (B) і ще таку умову (PQ):

(PQ) для кожної критичної точки x функції f паросток f в x є гладко еквівалентним до деякому однорідному многочлену $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без кратних множників.

Очевидно, що $\mathcal{E}(M)$ – підмножина $\mathcal{F}(M)$.

Нехай $\text{Morse}_\partial(M) \subset \text{Morse}(M)$ – підмножина функцій Морса на M , що задовольняють умову (B), $f \in \text{Morse}_\partial(M)$ і x – критична точка f . Тоді на підставі леми Морса 1.1.1.3, існує координатна система (s, t) в околі x така, що функція f в околі x має одну з таких форм: $f(s, t) = \pm s^2 \pm t^2$, яка є, очевидно, однорідним многочленом без кратних множників. Тому маємо вкладення

$$\text{Morse}_\partial(M) \subset \mathcal{E}(M) \subset \mathcal{F}(M).$$

Відомо, що множина $\text{Morse}(M)$ є відкритою і всюди щільною в $C^\infty(M)$, див. в [64], тобто «майже кожна» гладка функція є функцією Морса. Звідси маємо, що множини $\mathcal{E}(M)$ та $\mathcal{F}(M)$ є «великими».

1.2 Лінійні симетрії однорідних многочленів без кратних лінійних множників

Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ – гладка функція на поверхні M . За умовою (PL), в околі кожної критичної точки f , що не є локальним екстремумом, функція f гладко еквівалентна до однорідного многочлена без кратних множників., див. п.п. 1.1.2.

В даному підрозділі ми опишемо основні результати, що стосуються локальних симетрій функцій з класу $\mathcal{F}(M)$ в околах особливих точок.

Нехай $f_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – однорідний многочлен без кратних лінійних множників. Припустимо, що $0 \in \mathbb{R}^2$ не є точкою локального екстремуму для f_z . Позначимо через $\mathcal{L}(f_z)$ – групу лінійних дифеоморфізмів $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, що

- (i) h зберігає орієнтацію \mathbb{R}^2 ,
- (ii) $f_z \circ h = f_z$.

Тоді має місце така лема.

Лема 1.2.0.1 ([25], пункт 6). *Після деякої лінійної заміни координат можна вважати, що група $\mathcal{L}(f_z)$ описується наступним чином:*

- (1) якщо $\deg f_z = 2$, то $\mathcal{L}(f_z)$ складається з лінійних перетворень такого виду

$$\pm \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad a > 0,$$

(див. [25], пункт 6, випадок (B));

- (2) якщо ж $\deg f_z \geq 3$, то $\mathcal{L}(f_z)$ є скінченною циклічною підгрупою в $SO(2)$,
(див. [25], пункт 6, випадок (E)).

Також нам потрібна така лема.

Лема 1.2.0.2 ([25], наслідок 7.4). *Нехай $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ – паросток дифеоморфізму $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в $0 \in \mathbb{R}^2$ і T_0h – дотичне до h відображення в $0 \in \mathbb{R}^2$. Якщо $f_z \circ h = f_z$, то $f_z \circ T_0h = f_z$.*

Доведення. Для повноти викладу ми нагадаємо просте доведення цього факту. Нехай $k = \deg f_z$. Так як f_z — однорідний многочлен, тобто $f_z(tx) = t^k f_z(x)$ для $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}^2$, то

$$f_z(x) = \frac{f_z(tx)}{t^k} = \frac{f_z(h(tx))}{t^k} = f_z\left(\frac{h(tx)}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (f_z \circ T_0 h)(x).$$

Лема доведена.

1.3 Стабілізатори та орбіти гладких функцій

Нехай M — гладка компактна поверхня, X — замкнута (можливо порожня) підмножина M і $\mathcal{D}(M, X)$ — група дифеоморфізмів M , нерухомих в деякому околі X . Тоді група $\mathcal{D}(M, X)$ діє справа на просторі гладких функцій $C^\infty(M)$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M, X) \rightarrow C^\infty(M), \quad \gamma(f, h) = f \circ h. \quad (1.3)$$

Означення 1.3.0.1. Нехай $f \in C^\infty(M)$ — гладка функція на M . Множини

$$\mathcal{S}(f, X) = \{h \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\},$$

$$\mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}$$

називаються, відповідно, **стабілізатором** і **орбітою** f відносно дії γ .

Якщо $X = \emptyset$ є порожньою множиною, то покладемо:

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M, \emptyset), \quad \mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f, \emptyset), \quad \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f, \emptyset).$$

Наділимо простори $\mathcal{D}(M, X)$ та $C^\infty(M, X)$ відповідними сильними топологіями Уїтні, [72]. Ці топології індукують деякі топології на $\mathcal{S}(f, X)$ і $\mathcal{O}(f, X)$.

Позначимо через $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ і $\mathcal{D}(M, X)$, відповідно, зв'язні компоненти $\mathcal{S}(f, X)$ і $\mathcal{D}(M, X)$, які містять тотожне відображення id_M , а через $\mathcal{O}_f(f, X)$ — зв'язну компоненту $\mathcal{O}(f, X)$, що містить f . Нехай також

$$\mathcal{S}'(f, X) := \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$$

– підгрупа $\mathcal{S}(f, X)$, що складається з дифеоморфізмів $h \in \mathcal{S}(f, X)$ ізотопних до тотожного дифеоморфізму id_M . При цьому не вимагається, щоб ізотопія між $h \in \mathcal{S}'(f, X)$ та id_M зберігала f . Відмітимо, що $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X) \subset \mathcal{S}'(f, X)$.

1.4 Гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій

Означення 1.4.0.1. Неперервне відображення $p : E \rightarrow X$ топологічних просторів називається **розшаруванням Серра**, якщо для будь-якого скінченного поліедру K і таких неперервних відображень

$$f : K \times [0, 1] \rightarrow X \quad F_0 : K = K \times \{0\} \rightarrow X,$$

що $f|_{K \times \{0\}} = p \circ F_0$, існує відображення $F : K \times [0, 1] \rightarrow E$ таке, що

$$F|_{K \times \{0\}} = F_0 \quad p \circ F = f.$$

Наступний результат описує гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях, див. також [14, § 4.1, теорема 4.1].

Теорема 1.4.0.2 ([44, 23, 62]). Нехай M – гладка компактна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$ і X – скінчене (можливо порожнє) об'єднання регулярних компонент множин рівня функції f . Тоді відображення

$$p : \mathcal{D}(M, X) \rightarrow \mathcal{O}(f, X), \quad p(h) = f \circ h$$

є розшаруванням Серра з шаром $\mathcal{S}(f, X)$

Тому $p(\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)) = \mathcal{O}_f(f, X)$ і звуження

$$p|_{\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)} : \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X) \rightarrow \mathcal{O}_f(f, X) \tag{1.4}$$

також є розшаруванням Серра з шаром $\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$.

Крім того для будь-якого $k \geq 0$ має місце ізоморфізм

$$\lambda_k : \pi_k(\mathcal{D}(M, X), \mathcal{S}(f, X)) \rightarrow \pi_k \mathcal{O}(f, X), \quad \lambda_k([\omega]) = [f \circ \omega],$$

де $\omega : (I^k, \partial I^k, 0) \rightarrow (\mathcal{D}(M, X), \mathcal{S}(f, X), \text{id}_M)$ і такий, що робить діаграму комутативною

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_k \mathcal{D}(M, X) & \xrightarrow{q} & \pi_k(\mathcal{D}(M, X), \mathcal{S}(f, X)) & \xrightarrow{\partial_X} & \pi_{k-1} \mathcal{S}(f, X) \longrightarrow \dots \\ & & \searrow p & & \cong \downarrow \lambda_k & & \nearrow \partial_x \circ \lambda_k^{-1} \\ & & & & \pi_k \mathcal{O}(f, X) & & \end{array} \quad (1.5)$$

Теорема 1.4.0.3 ([23, 29, 62]). Нехай M — гладка компактна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$ і X — скінчене (можливо порожнє) об'єднання регулярних компонент множин рівня функції f . Тоді

(i) $\mathcal{O}_f(f, X) = \mathcal{O}_f(f, X) \cup \partial M$, тому

$$\pi_k \mathcal{O}_f(f, X) \cong \pi_k \mathcal{O}_f(f, X \cup \partial M), \quad k \geq 1.$$

(ii) Припустимо, що $X = \emptyset$ і, або f має критичну точку, що не є невиродженим локальним екстремумом, або M є неорієнтованою поверхнею. Тоді тотожна компонента зв'язності $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ стабілізатора є стягнутою,

$$\pi_n \mathcal{O}_f(f) = \pi_n M, \quad n \geq 3, \quad \pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0,$$

а для $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ маємо таку коротку точну послідовність

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \xrightarrow{p} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1. \quad (1.6)$$

Також зауважимо, що образ $p(\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$ міститься в центрі $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$.

(iii) Припустимо, що ейлерова характеристика $\chi(M) < 0$ або $X \neq \emptyset$. Тоді $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ і $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ є стягнутими, $\pi_n \mathcal{O}_f(f, X) = 0$ для $n \geq 0$, а граничний гомоморфізм

$$\partial : \pi_1 \mathcal{O}(f, X) \longrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, X)$$

є ізоморфізмом.

В подальшому нас цікавитиме нетривіальна частина послідовності (1.5), тобто послідовність (1.6) у випадку функцій на T^2 . Тому ми коротко нагадаємо

побудову граничного гомоморфізму ∂ . Нехай \tilde{f} – петля в $\mathcal{O}_f(f)$ з базовою точкою f , тобто $\tilde{f} : I \rightarrow \mathcal{O}_f(f)$ – таке відображення, що $\tilde{f}_0 = f = \tilde{f}_1$. Оскільки $p : \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \rightarrow \mathcal{O}_f(f)$ є розшаруванням Серра, то існує шлях $h : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ такий, що

$$\tilde{f}_t = f \circ h, \quad h_0 = \text{id}, \quad h_1 = h \in \mathcal{S}'(f).$$

Позначимо через $[\tilde{f}]$ та $[h]$ гомотопійні класи \tilde{f} та h в $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ та $\pi_0 \mathcal{S}'(f)$ відповідно. Тоді граничний гомоморфізм ∂ визначається так: $\partial[\tilde{f}] = [h]$.

Припустимо, що M не є 2-сферою, 2-тором, проективною площиною чи пляшкою Клейна. Нехай також $X = \partial M$. Тоді M і X задовольняють умови теореми 1.4.0.3 і ми маємо ізоморфізми

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_f(f, \partial M) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f, \partial M).$$

З іншого боку, для вказаних вище поверхонь $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \neq 0$, а тому всі члени короткої точної послідовності (1.6) можуть бути нетривіальними.

1.4.1 Множення шляхів в відносних гомотопійних групах

Нехай D – топологічний простір, S – його підмножина і $e \in S$ – точка. Тоді, в загальному випадку, відносні гомотопійні множини $\pi_1(D, S, e)$, $\pi_0(D, e)$ та $\pi_0(S, e)$ не мають групової структури. Якщо D є топологічною групою, S є підгрупою D і e є одиницею D , то групові структури існують.

Зокрема, топологічні простори $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ та $\mathcal{S}'(f, X)$ є топологічними групами. Ми наведемо декілька результатів, що стосуються групових операцій на множинах $\pi_0 \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$, $\pi_0 \mathcal{S}'(f, X)$ та $\pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X), \mathcal{S}'(f, X))$, індукованих груповими операціями на $\mathcal{D}_{\text{id}}(f, X)$ та $\mathcal{S}'(f, X)$.

Лема 1.4.1.1 ([71], розділ 1, §4). *Нехай D – топологічна група з множенням \circ , S – підгрупа D та e – одиниця D . Тоді $\pi_0(D, e)$, $\pi_1(D, S, e)$ та $\pi_0(S, e)$ мають групову структуру, що в такій точній послідовності гомотопійних*

груп трійки (D, S, e)

$$\dots \longrightarrow \pi_1(D, e) \xrightarrow{q} \pi_1(D, S, e) \xrightarrow{\partial} \pi_0(S, e) \xrightarrow{i} \pi_0 D \longrightarrow \dots$$

відображення q, ∂, i є гомоморфізмами. Зокрема, $q(\pi_1(D, e))$ міститься в центрі $\pi_1(D, S, e)$.

Припустимо, що D, S і e є такими, як в лемі 1.4.1.1. Нагадаємо формулу для множення в групі $\pi_1(D, S, e)$.

Нехай $g, h : (I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$ – два шляхи, що представляють деякі елементи $\pi_1(D, S, e)$. Для простоти, позначатимемо $g(t)$ і $h(t)$ через g_t і h_t відповідно, а гомотопійний клас $[g] \in \pi_1(D, S, e)$ – через $[g_t]$. Визначимо інший шлях $r : (I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$ за такою формулою:

$$r(t) = \begin{cases} g_{2t}, & t \in [0, 1/2], \\ g_1 \circ h_{2t-1}, & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Тоді $[r_t] = [g_t][h_t]$ в $\pi_1(D, S, e)$.

Лема 1.4.1.2. *Нехай $g, h : (I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$ – такі два шляхи, що $g(0) = e$, $g(1) = h(0) \in S$ і $h(1) \in S$, і $s : (I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$ – шлях, визначений за формулою:*

$$s(t) = \begin{cases} g_{2t}, & t \in [0, 1/2], \\ h_{2t-1}, & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

тобто, шлях s отриманий проходженням шляху g а потім шляху h , див рис.

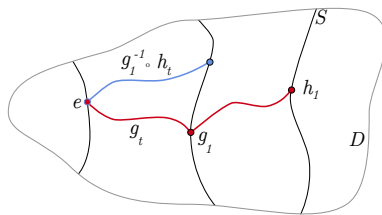
1.4.1.1. Тоді

$$[s_t] = [g_t][g_1^{-1} \circ h_t] \tag{1.7}$$

в $\pi_1(D, S, e)$, де $[g_1^{-1} \circ h_t]$ – клас шляху $(I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$, визначеного за правилом: $t \mapsto g_1^{-1} \circ h_t$.

Лема 1.4.1.3. *Нехай $g_t, h_t : (I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$ – два шляхи. Тоді в $\pi_1(D, S, e)$ виконуються такі тотожності:*

$$[g_t \circ h_t] = [g_s][h_t] = [h_t][h_1^{-1} \circ g_s \circ h_1], \tag{1.8}$$

Рис. 1.4.1.1: Шлях s

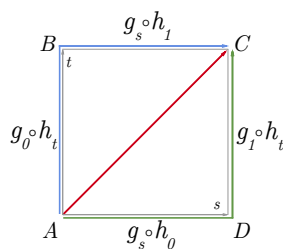
$$[h_t][g_s][h_t^{-1}] = [h_1^{-1} \circ g_s \circ h_t^{-1}], \quad (1.9)$$

де $[g_t \circ h_t]$ – клас шляху $(I, \partial I, 0) \rightarrow (D, S, e)$ заданого формулою: $t \mapsto g_t \circ h_t$.

Доведення. Нехай $\gamma : I \times I \rightarrow D$ – неперервний шлях, визначений за такою формулою:

$$\gamma(s, t) = g_s \circ h_t, \quad (s, t) \in I \times I,$$

див рис. 1.4.1.2.

Рис. 1.4.1.2: Шлях $g_s \circ h_t$

Тоді клас шляху $[g_t \circ h_t]$ відповідає обмеженню γ на діагональ

$$AC = \{s = t \mid (s, t) \in I \times I\}.$$

Очевидно, що цей шлях є гомотопним відносно кінців до композиції шляхів уздовж сторін AB і BC так і до композиції уздовж сторін AD і DC . На підставі (1.7) і того, що $g_0 = h_0 = e$, маємо такі співвідношення в $\pi_1(D, S, e)$:

$$[g_t \circ h_t] = [g_s \circ h_0][(g_1 \circ h_0)^{-1} \circ g_1 \circ h_t] = [g_s][h_t],$$

$$[g_t \circ h_t] = [g_0 \circ h_t][(g_0 \circ h_1)^{-1} \circ g_s \circ h_1] = [h_t][h_1^{-1} \circ g_s \circ h_1],$$

$$[h_t][g_s][h_t^{-1}] = [h_t][h_t^{-1}][h_1 \circ g_s \circ h_1^{-1}] = [h_t \circ h_t^{-1}][h_1 \circ g_s \circ h_1^{-1}] = [h_1 \circ g_s \circ h_1^{-1}].$$

Лема доведена. \square

1.5 Скручування Дена і слайди уздовж кривих

В цьому підрозділі ми опишемо спеціальні класи дифеоморфізмів, що грають важливе значення для дослідження автоморфізмів поверхонь.

Нехай $\alpha, \beta : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ – дві C^∞ -функції такі, що $\alpha = 0$ на $[-1, -1/2]$ і $\alpha = 1$ на $[1/2, 1]$, див. рис. 1.5.0.3, та $\beta = 0$ на $[-1, -2/3] \cup [2/3, 1]$ і $\beta = 1$ на $[-1/3, 1/3]$, див. рис. 1.5.0.4.

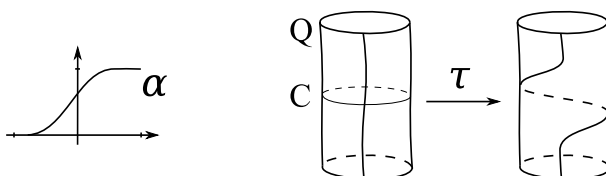


Рис. 1.5.0.3: Скручування Дена

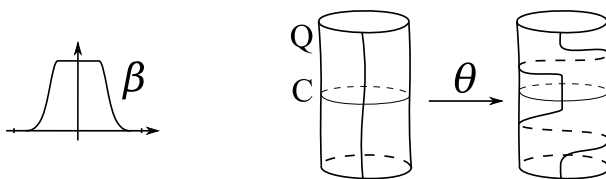


Рис. 1.5.0.4: Слайд

Нехай також $Q = S^1 \times [-1, 1]$ – циліндр і $C = S^1 \times \{0\}$. Визначимо дифеоморфізми $\tau, \theta : Q \rightarrow Q$ за формулами:

$$\tau(z, t) = (ze^{\alpha(t)}, t), \quad \theta(z, t) = (ze^{\beta(t)}, t)$$

для $(z, t) \in Q$, див. рис. 1.5.0.3 і 1.5.0.4. Відображення τ називається *скручуванням Дена* кривої C , а відображення θ – *слайдом* уздовж C . Відмітимо, що відображення τ є нерухомим на деякому околі ∂Q , а θ є нерухомим на деякому околі $C \cup \partial Q$.

Скручування Дена були введені М. Деном [3] у 1938 році. В цій же роботі Ден показав, що вони породжують групу класів відображень, що зберігають орієнтацію для замкнених орієнтованих поверхонь.

Має місце така лема.

Лема 1.5.0.1. Нехай $\mathcal{D}(Q, \partial Q)$ – група дифеоморфізмів Q , нерухомих в деякому околі $\partial Q = S^1 \times \{0, 1\}$, і $\tau \in \mathcal{D}(Q, \partial Q)$ – скручування Дена уздовж кривої C . Тоді

$$\pi_0 \mathcal{D}(Q, \partial Q) = \langle [\tau] \rangle \cong \mathbb{Z},$$

тобто $\pi_0 \mathcal{D}(Q, \partial Q)$ є нескінченною циклічною групою, породженою класом ізотопії скручування Дена τ .

Нехай $C \subset M$ – проста замкнена крива. Припустимо, що C двостороння, тобто вона має окіл W дифеоморфний циліндру Q . Зафіксуємо довільний дифеоморфізм $\phi : Q \rightarrow W$ такий, що $\phi(S^1 \times \{0\}) = C$.

Оскільки скручування Дена τ уздовж $S^1 \times 0$ є нерухомим на деякому околі W межі ∂Q , то відображення $\phi \circ t \circ \phi^{-1} : W \rightarrow W$ продовжується за допомогою тотожного відображення до єдиного дифеоморфізму $\bar{\tau}$ поверхні M . Будь-який дифеоморфізм $h : M \rightarrow M$ поверхні M , що є ізотопним до $\bar{\tau}$, або $\bar{\tau}^{-1}$, ми також будемо називати *скручуванням Дена*.

Аналогічно, слайд θ є нерухомим в деякому околі W простору $(S^1 \times \{0\}) \cup \partial Q$, а тому дифеоморфізм $\phi \circ \theta \circ \phi^{-1} : W \rightarrow W$ також продовжується за допомогою тотожного відображення до єдиного дифеоморфізму $\bar{\theta}$ поверхні M . Будь-який дифеоморфізм $h : M \rightarrow M$ поверхні M , нерухомий на деякому околі кривої C та має носій в деякому циліндричному околі W кривої C і ізотопний до $\bar{\theta}$ або $\bar{\theta}^{-1}$ відносно деякого околу $C \cup \overline{M \setminus Q}$ ми будемо називати *слайдом* уздовж C .

1.6 Граф Кронрода-Ріба функції f

Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ і $c \in \mathbb{R}$ – дійсне число. Множина $f^{-1}(c) = \{p \in M \mid f(p) = c\}$ називається *множиною рівня* функції f . Зв'язна компонента C множини $f^{-1}(c)$ називається *критичною*, якщо C містить щонайменше одну критичну точку f . В протилежному випадку C називається *регулярною*.

Нехай M – гладкий компактний многовид і Δ – розбиття M на зв'язні компоненти множин рівня функції f . Добре відомо, [42], що фактор-простір $\Gamma_f = M/\Delta$ має структуру 1-вимірного CW-комплексу, і називається *графом Кронрода-Ріба* функції f , або просто *KR-графом* f .

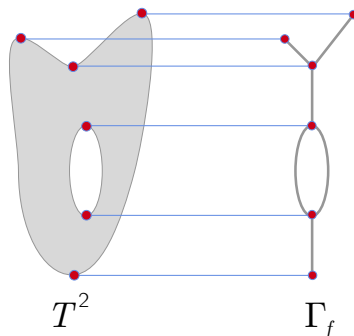


Рис. 1.6.0.5: Побудова KR-графу

Зазвичай такий простір називають графом Ріба, на честь Ж. Ріба, що ввів його у роботі [42], але такий простір був описаний московськими математиками Г. Адельсон-Вельским та А. Кронродом раніше для вивчення гладких функцій на поверхнях [49], також див. [54].

Вершинам KR-графу Γ_f відповідають критичні компоненти множин рівня f . Проекцію $M \rightarrow \Gamma_f = M/\Delta$ будемо позначати через p_f .

Так як функція f приймає постійні значення на елементах розбиття Δ , то f індукує функцію $\phi_f : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}$ на KR-графі Γ_f таку, що

$$f = \phi_f \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{\phi_f} \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що функція ϕ_f є монотонною на ребрах графу Γ_f .

1.6.1 KR-граф гладких функцій на T^2

Для функції $f \in \mathcal{F}(T^2)$ відображення проекції $p_f : T^2 \rightarrow \Gamma_f$ індукує гомоморфізм

$$(p_f)_* : \pi_1(T^2, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(\Gamma_f, \mathbb{Z}).$$

Лема 1.6.1.1. Відображення $(p_f)_*$ є епіморфізмом з ненульовим ядром. Зокрема, для кожної функції $f \in \mathcal{F}(T^2)$ КР-граф Γ_f є або деревом, або містить єдиний цикл.

Доведення. Відмітимо, що $\pi_1(\Gamma_f, \mathbb{Z}) = F_k$ — вільна група деякого рангу k , де k — число незалежних циклів в Γ_f , а $\pi_1(T^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$. Неважко побудувати «гомотопійний переріз» відображення p_f , тобто таке відображення $s : \Gamma_f \rightarrow T^2$, що композиція $p_f \circ s$ гомотопна тотожному відображенню $\text{id}(\Gamma_f)$. Тоді на рівні фундаментальних груп ми отримуємо, що композиція

$$\pi_1(\Gamma_f, \mathbb{Z}) \xrightarrow{s_*} \pi_1(T^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(p_f)_*} \pi_1(\Gamma_f, \mathbb{Z})$$

є тотожним ізоморфізмом. Зокрема, $(p_f)_*$ — сюр'єктивне і $\pi_1(\Gamma_f, \mathbb{Z}) = F_k$ ізоморфна підгрупі групи $\pi_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$. Останнє можливе лише коли $k = 0$, або 1, тобто коли Γ_f є або деревом або має єдиний цикл. В обох цих випадках $(p_f)_* : \mathbb{Z}_2 \rightarrow F_k$ матиме нетривіальне ядро. \square

1.6.2 Дія $\mathcal{S}(f)$ на Γ_f

Нехай M — гладка компактна поверхня і $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладка функція на M . Нагадаємо, що функція f може бути представлена як композиція відображень:

$$f = \phi_f \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{\phi_f} \mathbb{R},$$

див. п.п. 1.6. Припустимо, що $h \in \mathcal{S}(f)$, тобто $f \circ h = f$. Тоді $h(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$. Це значить, що h переставляє зв'язні компоненти множин рівня f , а тому індукує гомеоморфізм $\rho(h)$ КР-графа Γ_f такий, що наступна діаграма

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f & \xrightarrow{\phi_f} & \mathbb{R} \\ \downarrow h & & \downarrow \rho(h) & & \parallel \\ M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f & \xrightarrow{\phi_f} & \mathbb{R} \end{array}$$

є комутативною. Іншими словами, ми отримуємо гомоморфізм

$$\rho : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$$

в групу $\text{Aut}(\Gamma_f)$ автоморфізмів КР-графа Γ_f .

1.6.3 Приклади дій дифеоморфізмів з $\mathcal{S}(f)$ на T^2 та Γ_f

Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ – функція така, що f має 1 мінімум c_0 , 3 сідлові точки s_0, s_1, s_2 та 2 локальні максимуми m_1, m_2 такі, що

$$f(c_0) < f(s_0) < f(s_1) < f(s_2) < f(m_1) = f(m_2),$$

див. рис 1.6.3.1.

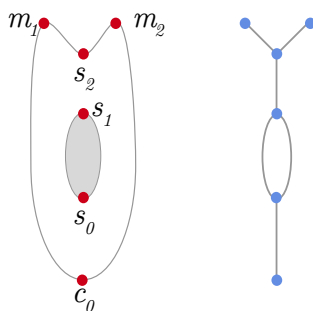


Рис. 1.6.3.1: Функція f та її КР-граф

Приклад 1.6.3.1 (Скручування Дена уздовж негомотної нулю кривої). Нехай C – зв'язна компонента деякої множини рівня f , що $f(s_0) < f(C) < f(s_1)$. Тоді, C – негомотопна нулю крива в T^2 . Нехай також Q – циліндричний окіл C в T^2 , що цілком складається із зв'язних компонент множин рівня f . Визначимо дифеоморфізм $h_1 : T^2 \rightarrow T^2$ за формулою:

$$h_1 = \begin{cases} \tau_C, & \text{на } Q, \\ \text{id}, & \text{на } T^2 \setminus Q, \end{cases}$$

де τ_C – скручування Дена уздовж C , яке лишає інваріантними компоненти зв'язності множин рівня f , див. рис. рис. 1.6.3.2. Таким чином, h_1 є дифеоморфізмом тора T^2 з носієм в Q і належить до стабілізатора $\mathcal{S}(f)$.

З іншого боку, h_1 не є ізотопним тотожному відображенню, а отже $h \notin \mathcal{S}'(f)$. Відмітимо також, що образ $\rho(h_1)$ тривіально діє на КР-графі функції f .

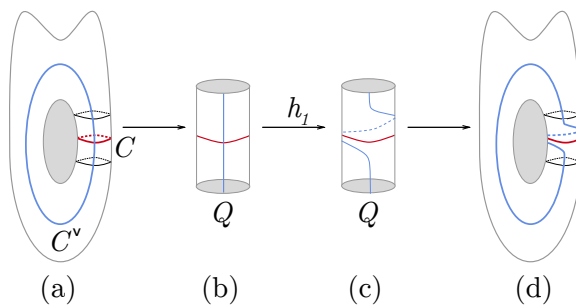


Рис. 1.6.3.2: (a)–(d) Дія дифеоморфізму h_1 на T^2 . Червона крива – крива C . Крива C^v (синя) ілюструє цю дію.

Приклад 1.6.3.2. Нехай C – регулярна компонента деякої множини рівня функції f така, що $f(s_2) < f(C) < f(m_1)$, і нехай Q – циліндричний окіл C , що складається із зв'язних компонент множин рівня f . Визначимо дифеоморфізм $h_2 : T^2 \rightarrow T^2$ за таким правилом:

$$h_2 = \begin{cases} \tau_C, & \text{на } Q, \\ \text{id}, & \text{на } T^2 \setminus Q, \end{cases}$$

де τ_C – скручування Дена уздовж кривої C , яке лишає інваріантними компоненти зв'язності множин рівня f , див. рис. 1.6.3.3. Дифеоморфізм h_2 зберігає

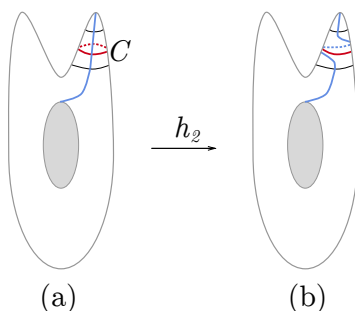


Рис. 1.6.3.3: Образ $h_2(T^2)$

функцію, оскільки τ_C зберігає функцію на Q . Отже, $h_2 \in \mathcal{S}(f)$. Зауважимо, що $h_2 \in \text{ізотопним } \text{id}_{T^2}$. Дійсно, нехай D – 2-диск, що є зв'язною компонентою $f^{-1}[f(s_2), f(m_2)]$, який містить C . Очевидно, що існує ізоотопія, яка «розкручує» криву $h_2(C)$ уздовж множин рівня функції f , див. напр. [46]. Таким чином,

$h_2 \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Також відмітимо, що образ $\rho(h_2)$ в групі $\text{Aut}(\Gamma_f)$ тривіально діє на графі Γ_f .

Приклад 1.6.3.3. Нехай C – зв’язна компонента рівня f така, що $f(s_1) < f(C) < f(s_2)$, Q – її циліндричний окіл, що складається з регулярних зв’язних компонент множин рівня f . Нехай D – 2-диск, що є об’єднанням Q та зв’язної компоненти $T^2 \setminus C$, яка є 2-диском. Нехай h_3 – такий дифеоморфізм T^2 , що h_3 прокручує диск D на кут π уздовж C , а на $T^2 \setminus D$ дифеоморфізм h_3 є тотожнім, див. рис. 1.6.3.4.

Очевидно, що h_3 є ізотопним тотожному відображенню і $f \circ h_3 = f$, тобто $h_3 \in \mathcal{S}(f)$. Образ $\rho(h_3)$ нетривіально діє на KR-графі Γ_f , переставляючи ребра «верхні» ребра місцями. Звідси, $h_3 \notin \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$.

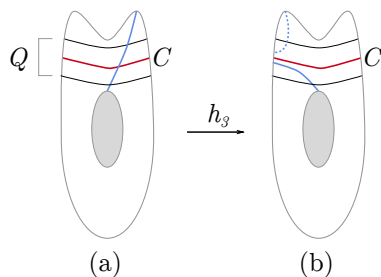


Рис. 1.6.3.4: Образ $h_3(T^2)$

Приклад 1.6.3.4. Нехай C_1 та C_2 – зв’язні компоненти деяких множин рівня f , $C_1 \neq C_2$ і такі, що $f(s_0) < f(C_i) < f(s_1)$, $i = 1, 2$, Q_1 та Q_2 – відповідні циліндричні околиці кривих C_1 та C_2 , що складається зі зв’язних компонент множин рівня f . Відмітимо, що C_1 та C_2 гомологічні та є простими циклами.

Розглянемо дифеоморфізм h_4 тора T^2 заданий так:

$$h_4 = \begin{cases} \tau_{C_1}, & \text{на } Q_1, \\ \tau_{C_2}^{-1}, & \text{на } Q_2, \\ \text{id}, & \text{на } T^2 \setminus (Q_1 \cup Q_2), \end{cases}$$

де τ_1 та τ_2 – скручування Дена уздовж кривих C_1 та C_2 . Таким чином, $h_4 \in$

дифеоморфізмом T^2 , що $\text{supp}(h_4) = Q_1 \cup Q_2$. На рис. 1.6.3.5 зображений образ $h_4(C^\vee)$ кривої C^\vee при відображенні h_4 .

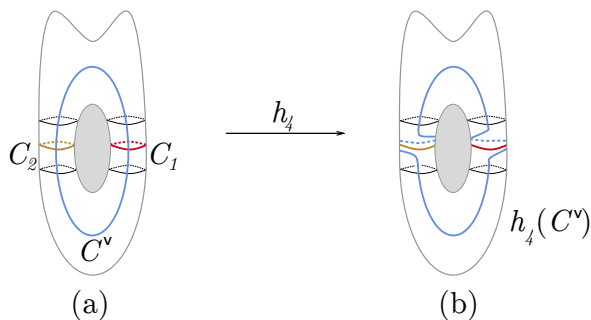


Рис. 1.6.3.5: Образ $h_4(T^2)$

Очевидно, що h_4 зберігає функцію f , тобто $h_4 \in \mathcal{S}(f)$. Крім того, h_4 є ізотопним id . Дійсно, «розріжемо» тор T^2 уздовж деякої зв'язної компоненти рівня C такої, що $f(s_0) < f(C) < f(s_1)$. Множина $\overline{T^2 \setminus C}$ дифеоморфна циліндру $S^1 \times I$. Очевидно, що існує ізотопія на циліндрі між h_4 та id і те, що вона продовжується на T^2 . Таким чином $h_4 \in \mathcal{S}'(f)$, але $h_4 \notin \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Зауважимо також, що $\rho(h_4)$ тривіально діє на KR-графі Γ_f функції f .

1.7 Відображення зсуву уздовж орбіт потоків на поверхнях

В даному пункті ми розглядаємо відображення спеціального вигляду, які зберігають орбіти заданого потоку на многовиді.

1.7.1 Векторні поля та потоки

Нехай M – гладкий компактний многовид без межі. Нагадаємо, що потоком \mathbf{F} називається \mathbb{R} -дія на M , тобто гладке відображення

$$\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M,$$

що задовольняє такі дві умови:

$$(i) \mathbf{F}_0 = \text{id}_M,$$

$$(ii) \mathbf{F}_s \circ \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{s+t} \text{ для всіх } t, s \in \mathbb{R}.$$

Нехай F – гладке векторне поле на M . Інтегральною кривою поля F , що проходить через точку $x \in M$, будемо називати відображення $w_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ таке, що

$$\frac{d}{dt}w_x(t) = F(w_x(t)), \quad w_x(0) = x, \quad (x, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Тоді відображення $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ визначене за формулою $\mathbf{F}_t(x) = w_x(t)$ є потоком на M .

1.7.2 Гамільтонові поля гладких функцій

Нехай M – гладкий орієнтований многовид парної розмірності. Нагадаємо, що диференціальна 2-форма ω на M називається *симплектичною*, якщо вона задовольняє такі умови:

1. ω – замкнута;
2. для будь-якого ненульового вектора $X_p \in T_pM$

$$\iota_{X_p}\omega \neq 0,$$

де ι_{X_p} – операція підстановки вектора.

Якщо на M існує така 2-форма ω , що задовольняє умови 1 та 2, то пара (M, ω) називається *симплектичним* многовидом. Зокрема, кожна орієнтовна поверхня допускає симплектичну структуру.

Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція на гладкій орієнтованій поверхні (M, ω) з симплектичною 2-формою ω . Тоді існує єдине векторне поле F на M , яке задовольняє тотожність:

$$df = \iota_F\omega. \tag{1.10}$$

Воно називається *гамільтоновим* векторним полем для функції f . Відповідно, потік $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ гамільтонового векторного поля F називається *гамільтоновим потоком*.

З означення гамільтонового потоку \mathbf{F} функції f випливає, що \mathbf{F} задовольняє такі умови:

- (Н1) точка $z \in M$ є нерухомою для \mathbf{F} тоді і тільки тоді, коли z є критичною точкою для f ;
- (Н2) f є постійною уздовж орбіт потоку \mathbf{F} , тобто $f(z) = f(\mathbf{F}(z, t))$ для всіх $z \in M$ і $t \in \mathbb{R}$.

Приклад 1.7.2.1. Нехай f – гладка функція на T^2 така, як в п.п. 1.6.3 і $Q = f^{-1}[f(c_0 + \varepsilon), f(s_0 + \varepsilon)]$ для деякого $\varepsilon > 0$. На рис. 1.7.2.1 зображені траєкторії гамільтонового векторного поля функції $f|_Q$.

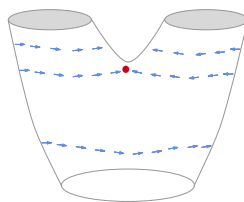


Рис. 1.7.2.1: Траєкторії гамільтонового векторного поля функції $f|_Q$

Інколи буває зручно не фіксувати симплектичну структуру ω на поверхні M , а розглядати потоки, що задовольняють умовам (Н1) та (Н2). Потік \mathbf{X} векторного поля X , що задовольняє умови (Н1) і (Н2) будемо називати *потокм гамільтонового типу*.

1.7.3 Поле градієнта гладкої функції

Нехай M – гладкий многовид і $g : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ – ріманова метрика на M , тобто сім'я скалярних добутків $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для будь-яких

векторних полів F_1 та F_2 на M відображення $x \mapsto g_p(F_1(x), F_2(x))$ визначає гладку функцію на M .

Нехай f – гладка функція на M . Полем градієнта гладкої функції f відносно ріманової метрики g називається таке векторне поле $\nabla_g f$ на M , що

$$g(\nabla_g f, F) = Ff,$$

для будь-якого векторного поля F на M .

З означення випливає, що критичні точки f є особливими точками поля градієнта $\nabla_g f$. Також зрозуміло, що траєкторії $\nabla_g f$ трансверсально перетинають множини рівня функції f .

Приклад 1.7.3.1. Нехай f – гладка функція на T^2 така, як в п.п. 1.6.3 і нехай $Q = f^{-1}[f(c_0 + \varepsilon), f(s_0 + \varepsilon)]$ для деякого $\varepsilon > 0$. Виберемо на T^2 деяку ріманову метрику g . Тоді траєкторії поля $\nabla_g f$ на Q зображені на рис. 1.7.3.1.

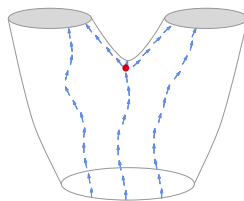


Рис. 1.7.3.1: Траєкторії поля $\nabla_g f$ на Q

1.7.4 Відображення зсуву

Нехай M – гладкий многовид і $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ – гладкий потік на M . Тоді для кожної гладкої функції $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ ми можемо визначити відображення $\mathbf{F}_\alpha : M \rightarrow M$ за такою формулою:

$$\mathbf{F}_\alpha(z) = \mathbf{F}(z, \alpha(z)), \quad z \in M.$$

Відображення \mathbf{F}_α називається гладким зсувом уздовж орбіт потоку \mathbf{F} . Такі відображення вивчались в [21].

Лема 1.7.4.1 ([21], теорема 19). *Нехай \mathbf{F} – гладкий потік векторного поля F на гладкому компактному многовиді M . Відображення зсуву \mathbf{F}_α за допомогою гладкої функції $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ є дифеоморфізмом, який лишає інваріантними орбіти потоку та зберігає їх орієнтацію, тоді і тільки тоді, коли похідна Лі $F\alpha$ функції α уздовж F задовольняє умову:*

$$F\alpha > -1. \quad (1.11)$$

Для поля F гладкі функції $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняють умову (1.11) будемо називати *функціями зсуву*.

Лема 1.7.4.2 ([23, 29]). *Нехай M – гладка орієнтована поверхня, $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ – потік і $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція. Припустимо, що \mathbf{F}_α є дифеоморфізмом. Тоді для будь-якого $t \in I$ відображення $\mathbf{F}_{t\alpha}$ також є дифеоморфізмом. Зокрема, $(\mathbf{F}_{t\alpha})_{t \in I}$ є ізотопією між \mathbf{F}_α та тотожним дифеоморфізмом id_M .*

Припустимо, що $f \in \mathcal{F}(M)$ і $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ – потік гамільтонового типу функції f на M . Тоді мають місце такі твердження.

(1) *Нехай $h \in \mathcal{S}(f)$. Тоді $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ тоді і тільки тоді, коли існує гладка функція $\alpha : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що $h = \mathbf{F}_\alpha$. Така функція є єдиною і сім'я множин $\{\mathbf{F}_{t\alpha}\}_{t \in I}$ встановлює ізотопію між h та id_M , [29, лема 16].*

(2) *Нехай C – регулярна компонента деякої множини рівня f і $h \in \mathcal{S}(f)$ є таким, що $h(C) = C$ і h зберігає орієнтацію C . Нехай також N – довільний відкритий окіл C . Тоді кожен $h \in \mathcal{S}(f)$ є ізотопним в $\mathcal{S}(f)$ за допомогою ізотопії в N до дифеоморфізму g , що є нерухомим на деякому меншому околі C . Зокрема, $[h] = [g] \in \pi_0 \mathcal{S}(f)$, [23, лема 4.14].*

1.8 Фундаментальна група $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$

В цьому пункті ми дамо опис $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$. Оскільки тор T^2 є зв'язною групою Лі, то він діє на собі правими зсувами, які є дифеоморфізмами. Ця діє індукує вкладення $i : T^2 \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$.

Теорема 1.8.0.1 ([4, 5, 13]). *Вкладення $i : T^2 \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$ є гомотопійною еквівалентністю. Зокрема, відображення $i_1 : \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$ є ізоморфізмом.*

Наслідок 1.8.0.2. *Нехай $\omega : T^2 \times [0, 1] \rightarrow T^2$ – петля в $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$, тобто ізоморфізм така, що $\omega_0 = \omega_1 = \text{id}_{T^2}$. Нехай також $q \in T^2$ і $\omega_q : \{q\} \times [0, 1] \rightarrow T^2$ – петля в T^2 задана формулою $\omega_q(t) = \omega(q, t)$. Петля ω гомотопна нулю в $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$ тоді і лише тоді, коли петля ω_q гомотопна нулю в T^2 .*

На підставі теореми 1.8.0.1 отримуємо, що послідовність (1.6) у випадку функцій на 2-торі має такий вигляд:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{p} \pi_1 \mathcal{O}_f f \xrightarrow{\partial} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1.$$

1.9 Вінцеві добутки груп

Вінцеві добутки відіграють важливу роль у теорії груп. Зазначимо, що вони незалежно з'явилися в роботах А. Lowely [20], L. Kaloujnine [19], G. Pólya [39], див. також В. Н. Neumann [35]. В цьому пункті ми наведемо означення спеціального класу вінцевих добутків груп, які будуть відігравати важливу роль у подальшому формулюванні результатів дисертації.

Нехай B – множина, H – підгрупа групи перестановок $\mathfrak{S}(B)$ множини B і S – інша група. Позначимо через $\text{Map}(B, S)$ – множину всіх відображень $B \rightarrow S$ відносно операції поточкового множення. Тоді група H діє на множині $\text{Map}(B, S)$ за таким правилом

$$\alpha \cdot h = \alpha \circ h : B \xrightarrow{h} B \xrightarrow{\alpha} S,$$

де $\alpha \in \text{Map}(B, S)$ і $h \in H$. Відносно цієї дії ми можемо визначити напівпрямий добуток $\text{Map}(B, S) \rtimes H$, який позначатиметься $S \wr_B H$ і називатиметься *вінцевим добутком S і H над B* . Отже,

$$S \wr_B H := \text{Map}(B, S) \rtimes H.$$

Нагадаємо, що $\text{Map}(B, S) \rtimes H$ – це прямий добуток множин $\text{Map}(B, S) \times H$ з операцією множення, яка визначається наступним чином:

$$(\alpha_1, h_1) \cdot (\alpha_2, h_2) = ((\alpha_1 \circ h_2) \cdot \alpha_2, h_1 \circ h_2).$$

Нехай $\varepsilon : B \rightarrow S$ – постійне відображення в одиницю S . Тоді пара $(\varepsilon, \text{id}_S)$ є одиницею $S \wr_B H$.

Нехай далі $(\alpha, h) \in S \wr_B H$ і $\bar{\alpha} \in \text{Map}(B, S)$ – поточково обернений елемент до α , тобто $\bar{\alpha}(b) = (\alpha(b))^{-1} \in S$ для всіх $b \in B$. Тоді $(\bar{\alpha} \circ h^{-1}, h^{-1})$ є оберненим до (α, h) в $S \wr_B H$.

Відмітимо також, що має місце коротка точна послідовність:

$$1 \longrightarrow \text{Map}(B, S) \rtimes H \xrightarrow{i} S \wr_B H \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1,$$

де $i(\alpha) = (\alpha, e)$ – вкладення, а $\pi(\alpha, h) = h$ – проекція. Відображення π допускає переріз:

$$s : H \rightarrow S \wr_B H, \quad s(h) = (\varepsilon, h).$$

Опишемо спеціальні типи вінцевих добутків.

1.9.1 Вінцеві добутки $G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$

Нехай G – група з одиницею 1 , $n, m \geq 1$, і $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ – група всіх відображень $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow G$ відносно поточкового множення. Таким чином, якщо $\alpha, \beta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow G$ – два відображення з $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$, то

$$(\alpha \cdot \beta)(i, j) = \alpha(i, j) \cdot \beta(i, j), \quad (i, j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m.$$

Група \mathbb{Z}^2 діє справа на $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ за таким правилом: якщо $\alpha \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ і $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, то результат цієї дії $\alpha^{k,l}$ задається формулою:

$$\alpha^{k,l}(i, j) = \alpha(i + k \bmod n, j + l \bmod m), \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1.12)$$

Напівпрямий добуток $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$, що відповідає цій дії, позначимо через

$$G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2 := \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$$

і будемо називати *вінцевим добутком G і \mathbb{Z}^2 над $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$* .

Таким чином, $G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$ — це прямий добуток множин

$$\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$$

з такою операцією

$$(\alpha, (k_1, k_2))(\beta, (l_1, l_2)) = (\alpha^{l_1, l_2}\beta, (k_1 + l_1, k_2 + l_2))$$

для всіх $(\alpha, (k_1, k_2)), (\beta, (l_1, l_2)) \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$.

1.9.2 Вінцеві добутки $G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$

Нехай $\text{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ — група всіх відображень $\mathbb{Z}_n \rightarrow G$ відносно поточкового множення. Тоді група \mathbb{Z} діє на множині $\text{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ за таким правилом: якщо $\alpha \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ і $k \in \mathbb{Z}$, то результат $\alpha^k : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ дії k на α визначається за формулою

$$\alpha^k(i) = \alpha(i + k \bmod n), \quad i \in \mathbb{Z}_n. \quad (1.13)$$

Напівпрямий добуток $\text{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \rtimes \mathbb{Z}$, що відповідає такій дії, називається *вінцевим добутком G і \mathbb{Z} над \mathbb{Z}_n* . Отже,

$$G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z} := \text{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Таким чином, $G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$ є декартовим добутком $\text{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \times \mathbb{Z}$ з такою операцією

$$(\alpha, k) \cdot (\beta, l) = (\alpha^l \beta, k + l),$$

для всіх $(\alpha, k), (\beta, l) \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \times \mathbb{Z}$.

1.10 Висновки

В даному розділі дисертаційної роботи були сформульовані деякі означення та результати, що будуть використовуватися в подальшому викладі роботи.

Розділ 2. Дії скінченних груп і гладкі функції на поверхнях

2.1 Спеціальні вершини KR-графу функції f

Нехай M — замкнута поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$ і Γ_f — KR-граф функції f .

Нагадаємо, що дифеоморфізм $h \in \mathcal{S}(f)$ індукує автоморфізм $\rho(h)$ KR-графу Γ_f функції f , а саме, має місце гомоморфізм $\rho : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$, див. п. п. 1.6.2. Нехай $\mathcal{G} = \rho(\mathcal{S}(f))$ — образ $\mathcal{S}(f)$ в $\text{Aut}(\Gamma_f)$. Нехай v — вершина Γ_f , $\mathcal{G}_v = \{g \in \mathcal{G} \mid g(v) = v\}$ — стабілізатор вершини v відносно дії \mathcal{G} на Γ_f . Довільний зв'язний \mathcal{G}_v -інваріантний окіл v , що не містить інших вершин Γ_f будемо називати *зіркою* v . Зірку вершини v будемо позначати через $\text{st}(v)$.

Означення 2.1.0.1. Вершину v KR-графу Γ_f функції f називатимемо *спеціальною*, якщо існує бієкція між зв'язними компонентами $\text{st}(v) \setminus v$ і $M \setminus V$. Відповідну зв'язну компоненту $V = p_f^{-1}(v)$ будемо також називати *спеціальною*.

На підставі означення KR-графу Γ_f маємо, що для спеціальної вершини v також має місце бієкція між зв'язними компонентами доповнення до v в $\text{st}(v)$ і зв'язними компонентами $\Gamma_f \setminus v$.

Приклад 2.1.0.2. Нехай Υ_1 і Υ_2 — графи, зображені на рис. 2.1.0.1 (а) і (б) відповідно.

Вершина u графу Υ_1 не є спеціальною, бо число зв'язних компонент $\text{st}(u) \setminus u$ дорівнює 5, а число зв'язних компонент $\Gamma_f \setminus u$ дорівнює 3, див. рис. 2.1.0.2.

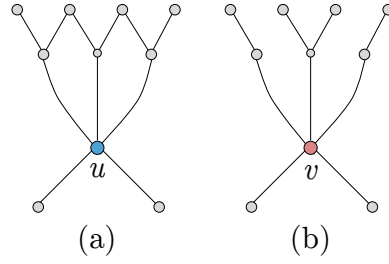


Рис. 2.1.0.1: (a) — граф Υ_1 , (b) — граф Υ_2

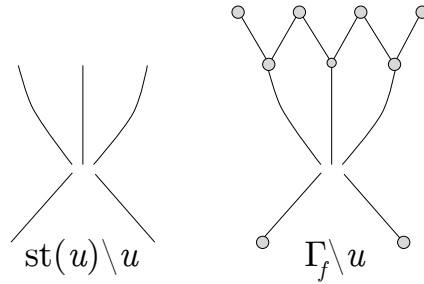


Рис. 2.1.0.2: Множини $st(u) \setminus u$ і $\Gamma_f \setminus u$ графу Υ_1

З іншого боку, вершина v графу Υ_2 є спеціальною, тому що число зв'язних компонент $st(v) \setminus v$ дорівнює числу зв'язних компонент $\Gamma_f \setminus v$ і дорівнює 5, див. рис. 2.1.0.3.

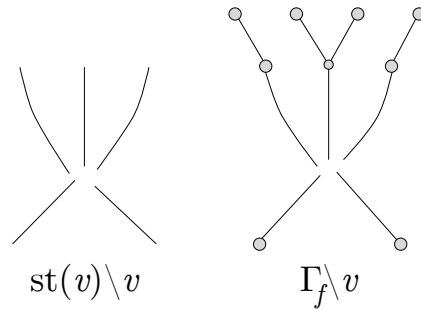


Рис. 2.1.0.3: Множини $st(v) \setminus v$ і $\Gamma_f \setminus v$ графу Υ_2

2.2 Розбиття поверхні спеціальною компонентою критичного рівня

Нехай M — замкнута поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$ — функція на M і Γ_f — КР-граф функції f . Припустимо, що Γ_f має спеціальну вершину v . Нехай також V — спеціальна зв'язна компонента, що відповідає v . Нагадаємо, що V є вкладеним в поверхню M графом. Тоді компонента V задає розбиття Ξ поверхні M таке, що 0-вимірними компонентами Ξ є вершини V , 1-вимірними компонентами Ξ є ребра V , а 2-вимірними компонентами Ξ є зв'язні компоненти доповнення до V в M . Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 2.2.0.1. Нехай $M = S^2$ і $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функція на S^2 така, що f має 4 локальних мінімуми n_i , ($i = 1, 2, 3, 4$), 4 локальних максимуми m_i , ($i = 1, 2, 3, 4$), 6 сідел l_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) і така, що

$$f(n_i) = f(n_j), \quad f(m_i) = f(m_j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.1)$$

$$f(l_1) = f(l_2), \quad f(l_3) = f(l_4), \quad f(l_5) = f(l_6) \quad (2.2)$$

$$f(n_1) < f(l_3) < f(l_6) < f(l_1) < f(m_1).$$

На рисунку 2.2.0.4 зображена така функція.

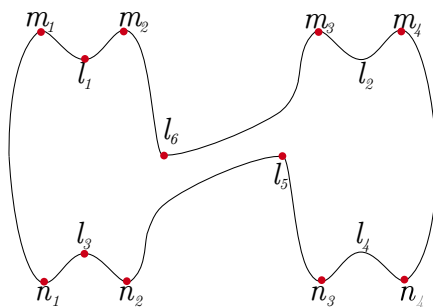


Рис. 2.2.0.4: Поверхня, що задовольняє умови 2.1 та 2.2

Розбиття компонентою V сфери S^2 зображене на рис. 2.2.0.5.

Таким чином, маємо таке розбиття: одновимірні клітини Ξ — це вершини V , а одновимірні клітини Ξ — ребра V . Далі до цього остову приклеєні 2-диски, що

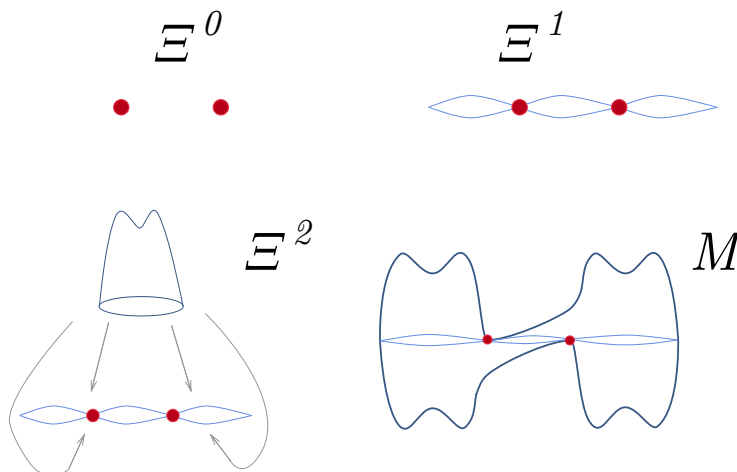


Рис. 2.2.0.5: Розбиття поверхні M за допомогою спеціальної критичної компоненти V

є 2-вимірними клітинами Ξ .

Також зауважимо, що оскільки M є компактною, то Ξ має скінченне число елементів кожної розмірності.

2.3 Комбінаторні дії скінченних груп на поверхнях

Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$. Припустимо, що KR-граф Γ_f функції f містить спеціальну вершину v і V – спеціальна компонента множини рівня f , що відповідає v . Нехай також $\text{st}(v)$ – зірка v , та \mathcal{G}_v – стабілізатор v .

Множина

$$\mathcal{G}_v^{loc} = \{g|_{\text{st}(v)} \mid g \in \mathcal{G}_v\}$$

що складається з обмежень елементів \mathcal{G}_v на зірку $\text{st}(v)$ вершини v є підгрупою $\text{Aut}(\text{st}(v))$. Будемо називати її *локальним стабілізатором вершини v* відносно групи \mathcal{G} . Нехай також $r : \mathcal{G}_v \rightarrow \mathcal{G}_v^{loc}$ – відображення обмеження на зірку, тобто $r(g) = g|_{\text{st}(v)}$.

Нехай $S_V(f) = \{h \in \mathcal{S}(f) \mid h(V) = V\}$ – підгрупа в $\mathcal{S}(f)$ дифеоморфізмів, що залишають компоненту V інваріантною. З означення випливає, що $\rho(\mathcal{S}_V(f)) \subset$

\mathcal{G}_v . Позначимо через ϕ таку композицію

$$\phi = r \circ \rho : \mathcal{S}_V(f) \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}_v \xrightarrow{r} \mathcal{G}_v^{loc},$$

де відображення $r : \mathcal{G}_v \rightarrow \mathcal{G}_v^{loc}$ є відображенням обмеження на $\text{st}(v)$, тобто $r(g) = g|_{\text{st}(v)}$.

Нехай H — підгрупа в \mathcal{G}_v^{loc} і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ — підгрупа в $\mathcal{S}_V(f)$.

Означення 2.3.0.1. Будемо говорити, що група \mathcal{H} має властивість (C), якщо виконана така умова.

(C) Нехай $h \in \mathcal{H}$ і E — 2-вимірний елемент Ξ . Припустимо, що $h(E) = E$.

Тоді $h(e) = e$ для всіх інших $e \in \Xi$ і відображення h зберігає орієнтацію кожного елементу Ξ .

Має місце такий результат.

Лема 2.3.0.2. Якщо $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ має властивість (C), то H діє на множині всіх елементів розбиття Ξ , причому ця дія є вільною на множині 2-вимірних елементів Ξ .

Доведення. Нехай $g \in H$ і $h \in \mathcal{H}$ такий, що $\phi(h) = g$. Визначимо відображення $\tau : H \times \Xi \rightarrow \Xi$ за таким правилом:

$$\tau(g, e) = h(e), \quad e \in \Xi.$$

(1) Ми стверджуємо, що це означення не залежить від вибору h . Нехай $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ такі, що $\phi(h_1) = \phi(h_2)$. Тоді $\phi(h_1 \circ h_2^{-1}) = 1_H$, де 1_H — одиниця H , тобто $(h_1 \circ h_2^{-1})(E) = E$ для кожного 2-вимірного елементу Ξ . На підставі умови (C), $(h_1 \circ h_2^{-1})(e) = e$ для всіх інших $e \in \Xi$, тобто $h_1(e) = h_2(e)$ для всіх $e \in \Xi$. Отже, τ є коректно визначеним відображенням.

(2) Перевіримо, що τ є H -дією на Ξ . Очевидно, що $\tau(1_H, e) = e$ для всіх $e \in \Xi$. Нехай $g_1, g_2 \in H$ і $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ такі, що $\phi(h_1) = g_1$ та $\phi(h_2) = g_2$. Тоді

$\tau(g_1, \tau(g_2, e)) = \tau(g_1, h_2(e)) = h_1(h_2(e)) = (h_1 \circ h_2)(e) = \tau(g_1 \circ g_2, e)$ для всіх $e \in \Xi$. Отже, $\tau \in H$ -дією на Ξ .

(3) Доведемо, що $\tau \in$ вільною H -дією на множині 2-вимірних елементів Ξ . Нехай $h \in \mathcal{H}$ такий, що $h(E) = E$ для деякого 2-вимірного елемента E розбиття Ξ . Тоді, на підставі умови (C), $h(E') = E'$ для всіх 2-вимірних елементів E' розбиття Ξ . Звідси, $\tau(h) = 1_H$. Це означає, що H -дія τ на множині 2-вимірних елементів Ξ є вільною. \square

Таким чином, група \mathcal{H} , що має властивість (C), діє на розбитті поверхні M . Введемо таке означення.

Означення 2.3.0.3. Нехай H – підгрупа \mathcal{G}_v^{loc} . Будемо говорити, що група H комбінаторно діє на M , якщо виконані такі дві умови:

(C1) H діє на розбитті Ξ поверхні M ,

(C2) група $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ задовольняє умову (C).

Умова (C1) означає, що H «переміщує» елементи розбиття Ξ поверхні M , а умова (C2) накладає обмеження на цю дію.

Головним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 2.3.0.4. Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ така, що її KR-граф Γ_f містить спеціальну вершину v , \mathcal{G}_v^{loc} – локальний стабілізатор v відносно дії \mathcal{G}_v . Нехай також H – підгрупа в \mathcal{G}_v^{loc} що комбінаторно діє на M і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ – підгрупа в $S^V(f)$. Тоді існує переріз $s : H \rightarrow \mathcal{H}$ відображення ϕ , тобто відображення s є гомоморфізмом, що задовольняє умову $\phi \circ s = \text{id}_H$.

Іншими словами, якщо \mathcal{H} задовольняє умову (C), то комбінаторна дія H на M піднімається до «справжньої дії» H на M дифеоморфізмами, що зберігають f . Теорема 2.3.0.4 буде доведена в пункті 2.5.

2.4 Топологічна структура атома $\mathcal{E}_{V,a}$

Нехай f — гладка функція з $\mathcal{F}(M)$, $\varepsilon_1 > 0$, $c \in \mathbb{R}$ і V — зв'язна компонента деякого критичного рівня $f^{-1}(c)$ функції f . Під атомом компоненти V ми будемо розуміти зв'язний окіл V , що складається з шарів функції f та не містить інших критичних точок f окрім тих, що належать до V . Дамо більш формальне означення.

Нехай також \mathcal{E} — зв'язна компонента $f^{-1}([c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1])$, що містить V . Припустимо, що межа $\partial\mathcal{E}$ містить $n + k$ зв'язних компонент A_i , $i = 1, 2, \dots, n + k$, тобто $\partial\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{j=1}^k A_{-j}$. Оскільки $f \in \mathcal{F}(M)$ то $f|_{\mathcal{E}}$ належить до $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, і значить на підставі умови (В), $f|_{\mathcal{E}}$ приймає постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі $\partial\mathcal{E}$. Припустимо, що $f(A_i) = c_i \in [c, c + \varepsilon_1]$, $i \geq 1$ і $f(A_i) = d_i \in [c - \varepsilon_1, c]$, $i \leq 1$. Покладемо $c' = \min\{c_i\}$ і $d' = \max\{d_i\}$. Зафіксуємо $a > 0$ таке, що $[c - a, c + a] \subset [d', c']$.

Зв'язну компоненту $f^{-1}([c - a, c + a])$, яка містить V , називатимемо *атомом* V і позначатимемо через $\mathcal{E}_{V,a}$.

Нехай H — підгрупа в \mathcal{G}_v^{loc} і $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H) \subset S^V(f)$. Нам буде потрібна така лема.

Лема 2.4.0.1. *Нехай $\mathcal{E}_{V,a}$ — атом спеціальної критичної компоненти V , A — зв'язна компонента межі $\partial\mathcal{E}_{V,a}$ і $h \in \mathcal{H}$. Припустимо, що група \mathcal{H} задовольняє умову (С). Якщо $h|_{\mathcal{E}_{V,a}}(A) = A$, то h зберігає орієнтацію A .*

Доведення. Зафіксуємо ріманову метрику $g : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ на M . Нехай $\nabla_g f$ — поле градієнта функції f в цій рімановій метриці. Нехай Q — множина точок $x \in A$ таких, що існує інтегральна крива c_x поля $\nabla_g f$, що з'єднує точку x з деякою точкою $y_x \in V$, див. рис. 2.4.0.6. Тоді Q є об'єднанням відкритих інтервалів в A , а відображення $\psi : Q \rightarrow V$, задане формулою $\psi(x) = y_x$, є вкладенням. Образ $\psi(Q)$ є циклом в V . Отже, зв'язна компонента A межі $\partial\mathcal{E}_{V,a}$ визначає цикл γ_A в V . Крім того, орієнтація A індукує орієнтацію γ_A і навпаки,

див. [65].

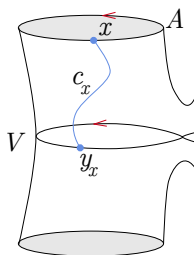


Рис. 2.4.0.6: Орієнтація A та циклу на V

Припустимо, що \mathcal{H} задовольняє умову (C). Нехай $h \in \mathcal{H}$ і E – 2-вимірний елемент Ξ такий, що $h(E) = E$. Тоді на підставі умови (C), $h(e) = e$ для всіх інших елементів $e \in \Xi$. Зокрема $h(\gamma_A) = \gamma_A$ і h зберігає орієнтацію γ_A . Тоді $h(A) = A$ і h зберігає орієнтацію A . \square

2.5 Доведення теореми 2.3.0.4

Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ така, що її KR-граф Γ_f містить спеціальну вершину v , $V = p_f^{-1}(v)$ – спеціальна компонента деякої множини рівня, що відповідає v і \mathcal{G}_v^{loc} – локальний стабілізатор v .

Нехай H – підгрупа в \mathcal{G}_v^{loc} така, що $\mathcal{H} = \phi^{-1}(H)$ має властивість (C). Ми побудуємо підняття H -дії на $\text{st}(v)$ до дії $\Sigma : H \times M \rightarrow M$ групи H на поверхні M .

Нехай \mathbf{V} – об'єднання всіх вершин графу V . Так як вершини V , тобто критичні точки f , є елементами розбиття Ξ і \mathbf{V} є інваріантною відносно H , то ми маємо коректно визначене звуження $\sigma^0 = \tau|_{H \times \mathbf{V}} : H \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ дії H з Ξ на \mathbf{V} . Відмітимо, що для довільної вершини z і $h \in \mathcal{H}$

$$\sigma^0(\phi(h), z) = h(z).$$

Стратегія доведення теореми 2.3.0.4

Розіб'ємо доведення на 3 кроки. На першому кроці ми побудуємо таку H -дію σ^1 на множині деяких околів вершин графу V , що $\sigma^1|_V = \sigma^0$. На другому кроці продовжимо її до дії на атомі V , а на третьому кроці — до дії на всій поверхні M .

Крок 1

Ми продовжимо дію σ^0 групи H до H -дії σ^1 на множині околів вершин V . Припустимо, що дія σ^0 має s орбіт $V_r = \{z_{r0}, z_{r1}, \dots, z_{rk(r)}\}$ для деякого $k(r) \in \mathbb{N}$, $r = 1, 2, \dots, s$. Зокрема, $V = \bigcup_{r=1}^s V_r$.

На підставі означення класу $\mathcal{F}(M)$, для кожного $r = 1, 2, \dots, s$ існує карта (U_{r0}, q_{r0}) , що містить z_{r0} така, що відображення $f \circ q_{r0}^{-1} = f_r$ є однорідним поліномом без кратних лінійних множників. Ми також можемо припускати, що $q_{r0}(U_{r0}) \subset \mathbb{R}^2$ є 2-диском з центром в $0 \in \mathbb{R}^2$ радіусу ε , і що група $\mathcal{L}(f_r)$ має властивості, описані в лемі 1.2.0.1.

Зафіксуємо дифеоморфізми $h_{ri} \in \mathcal{H}$ такі, що $h_{ri}(z_{r0}) = z_{ri}$, $i = 1, 2, \dots, k(r)$ і визначимо карти (U_{ri}, q_{ri}) для вершин z_{ri} , $i = 1, 2, \dots, k(r)$ за наступним правилом:

- $U_{ri} = h_{ri}(U_{r0})$,
- а відображення q_{ri} робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{array}{ccc} U_{r0} & \xrightarrow{h_{ri}} & U_{ri} \\ q_{r0} \downarrow & & \swarrow q_{ri} \\ q_{r0}(U_{r0}) & & \end{array}$$

тобто $q_{ri} = q_{r0} \circ h_{ri}^{-1}$.

Зменшуючи ε ми можемо вважати, що $U_{ri} \cap U_{rj} = \emptyset$ для $i \neq j$.

Отже, карта (U_{ri}, q_{ri}) вибрана так, що відображення

$$f \circ q_{ri}^{-1} : q_{r0}(U_{r0}) \rightarrow \mathbb{R}$$

є однорідним многочленом без кратних лінійних множників, і збігається із заданим многочленом f_r для карти (U_{r0}, q_{r0}) . Ми також покладемо $U_r = \bigcup_{i=0}^{k(r)} U_{ri}$ і $U = \bigcup_{r=1}^s U_r$.

Лема 2.5.0.1. *Існують гомоморфізм $\lambda_1 : \mathcal{H} \rightarrow \text{Diff}(U)$ і мономорфізм $\chi_1 : H \rightarrow \text{Diff}(U)$, які роблять комутативною таку діаграму:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\lambda_1} & \text{Diff}(U) \\ \phi \downarrow & \nearrow \chi_1 & \\ H & & \end{array}$$

Доведення. (1) Спочатку ми побудуємо відображення λ_1 . Нехай $h \in \mathcal{H}$ такий, що $h(z_{ri}) = z_{rj}$ для деяких $i, j = 0, 1, \dots, k(r)$ і $r = 1, 2, \dots, s$. Нехай також $\gamma_h = q_{rj} \circ h \circ q_{ri}^{-1}$ — дифеоморфізм $q_{r0}(U_{r0})$. Легко бачити, що відображення γ_h зберігає многочлен f_r . На підставі леми 1.2.0.2, дотичне відображення $T_0\gamma_h$ також зберігає многочлен f_r . Тоді $T_0\gamma_h \in \mathcal{L}(f_r)$. Визначимо лінійне відображення $A_h \in \mathcal{L}(f_r)$ за наступним правилом. Якщо $\deg f_r = 2$, то на підставі леми 1.2.0.1,

$$T_0\gamma_h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad a \neq 0,$$

і ми покладемо

$$A_h = \text{sign}(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо ж $\deg f_r \geq 3$, то згідно леми 1.2.0.1 і припущень про околиці U_{ri} , $\mathcal{L}(f_r)$ є циклічною підгрупою $\text{SO}(2)$. У цьому випадку ми покладемо

$$A_h = T_0\gamma_h$$

і визначимо дифеоморфізм $\lambda_1(h) \in \text{Diff}(U)$ за формулою:

$$\lambda_1(h)|_{U_{ri}} = q_{rj}^{-1} \circ A_h \circ q_{ri}. \quad (2.3)$$

(2) Доведемо, що відображення λ_1 є гомоморфізмом. Нехай $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ такі, що $h_1(z_{ri}) = z_{rj}$ і $h_2(z_{rj}) = z_{rk}$. На підставі (2.3) ми маємо:

$$\lambda_1(h_1)|_{U_{ri}} = q_{rj}^{-1} \circ A_{h_1} \circ q_{ri}, \quad \lambda_1(h_2)|_{U_{rj}} = q_{rk}^{-1} \circ A_{h_2} \circ q_{rj},$$

$$\lambda_1(h_2)|_{U_{rj}} \circ \lambda_1(h_1)|_{U_{ri}} = q_{rk}^{-1} \circ A_{h_2} \circ A_{h_1} \circ q_{rj}.$$

З іншого боку,

$$\lambda_1(h_2 \circ h_1)|_{U_{ri}} = q_{rk}^{-1} \circ A_{h_2 \circ h_1} \circ q_{ri}.$$

Тоді з визначення лінійних відображень A_h випливає, що $A_{h_2 \circ h_1} = A_{h_2} \circ A_{h_1}$. Отже,

$$\lambda_1(h_2 \circ h_1) = \lambda_1(h_2) \circ \lambda_1(h_1).$$

Це означає, що λ_1 є гомоморфізмом.

(3) Нехай $g \in H$ і $h \in \mathcal{H}$ такий, що $\phi(h) = g$. Визначимо відображення $\chi_1 : H \rightarrow \text{Diff}(U)$ за правилом:

$$\chi_1(g) = \lambda_1(h).$$

Нехай $g_1, g_2 \in H$ і $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ такі, що $\phi(h_1) = g_1$ та $\phi(h_2) = g_2$ і крім того $h_1(U_{ri}) = U_{rj}$ та $h_2(U_{rj}) = U_{rk}$. Поклавши $\chi_1(g_1)|_{U_{ri}} = q_{rj}^{-1} \circ A_{h_1} \circ q_{ri}$ та $\chi_1(g_2)|_{U_{rj}} = q_{rk}^{-1} \circ A_{h_2} \circ q_{rj}$ та проробивши аналогічний виклад як в (2) доведення, легко переконатися, що $\chi_1(g_1 \circ g_2) = \chi_1(g_1) \circ \chi_1(g_2)$. Це означає, що відображення χ_1 є гомоморфізмом.

Залишається довести, що χ_1 є мономорфізмом. Для цього нам необхідно перевірити, що $\text{Ker} \chi_1 = \text{Ker} \phi$, тобто $\lambda_1(h) = \text{id}$ тоді і тільки тоді, коли h тривіально діє на множині 2-вимірних елементів розбиття Ξ .

Припустимо, що h тривіально діє на множині 2-вимірних елементів Ξ . На підставі умови (C), h тривіально діє на множині вершин V . Оскільки $h(z_{ri}) = z_{ri}$ для всіх $i = 0, 1, \dots, k(r)$ і $r = 1, 2, \dots, s$, то з (2.3) отримаємо, що $\lambda_1(h) = \text{id}_U$.

Припустимо, що $h \in \mathcal{H}$ такий, що $\lambda_1(h) = \text{id}_U$. Тоді $h(e) = e$ для всіх ребер e графу V і h зберігає орієнтацію e . Тоді, згідно леми 2.4.0.1, h залишає інва-

ріантним кожну зв'язну компоненту $\partial\mathcal{E}_{V,a}$ та зберігає її орієнтацію. А отже, h тривіально діє на множині 2-вимірних елементів розбиття Ξ . \square

Визначимо відображення $\sigma^1 : H \times U \rightarrow U$ так:

$$\sigma^1(g, x) = \chi_1(g)(x), \quad x \in U.$$

Оскільки χ_1 є гомоморфізмом, то σ^1 є H -дією на U .

Крок 2

На цьому кроці ми продовжимо дію σ^1 до H -дії σ на атомі $\mathcal{E}_{V,a}$.

Нехай (U_{ri}, q_{ri}) – карта M , що містить z_{ri} , визначена в кроці 1 доведення. Проекція q_{ri} індукує відображення $Tq_{ri} : TU_{ri} \rightarrow Tq_{ri}(U_{ri})$ між дотичними розшаруваннями до U_{ri} та $q_{ri}(U_{ri}) \subset \mathbb{R}^2$ відповідно. Зафіксуємо таку ріманову метрику g на M , що діаграма

$$\begin{array}{ccc} TU_{ri} & \xrightarrow{Tq_{ri}} & Tq_{ri}(U_{ri}) \\ \nabla_g f|_{U_{ri}} \downarrow & & \downarrow \nabla f_r|_{q_{ri}(U_{ri})} \\ U_{ri} & \xrightarrow{q_{ri}} & q_{ri}(U_{ri}) \end{array}$$

є комутативною, де $\nabla_g f$ і ∇f_r – відповідно, поле градієнта f в рімановій метриці на M та поле градієнта f_r в стандартній рімановій метриці на \mathbb{R}^2 . Нехай також \mathbf{G} – потік поля градієнта $\nabla_g f$ на M .

Для подальшої конструкції нам буде зручно дати інший опис відображення $\lambda_1(h)$.

Інший опис відображення $\lambda_1(h)$

Нехай $x \in U_{ri}$ – точка, $i = 0, 1, \dots, k(r)$, $r = 1, 2, \dots, s$ і $y = \lambda_1(h)(x)$ – образ x відносно відображення $\lambda_1(h)$. Нехай також ω_x і ω_y – траєкторії потоку градієнта \mathbf{G} такі, що $x \in \omega_x$ і $y \in \omega_y$. Оскільки $\lambda_1(h)$ зберігає траєкторії потоку \mathbf{G} на U , то

$$\lambda_1(h)(\omega_x \cap U_{ri}) = \omega_y \cap \lambda_1(h)(U_{ri}).$$

За означенням відображення $\lambda_1(h)$ ми маємо, що $f(x) = f(y)$. Зокрема, якщо траєкторія ω_x перетинає деяке ребро R графу V в деякій точці x' , і $y' = \lambda_1(h)(x')$, то $y = f^{-1}(f(x)) \cap \omega_{y'}$, де $\omega_{y'}$ – траєкторія \mathbf{G} , що проходить через точку y' . Отже, образ точки x при відображенні $\lambda_1(h)$ однозначно визначається образом точки x' .

На підставі леми 2.3.0.2, група H діє на множині всіх ребер \mathbf{R} графу V . Припустимо, що ця діє має u орбіт $\mathbf{R}_r = \{R_{r0}, R_{r1}, \dots, R_{rn(u)}\}$ для деякого $n(u) \in \mathbb{N}$ і $r = 1, 2, \dots, u$. Ми також покладемо $\mathbf{R} = \bigcup_{r=1}^u \mathbf{R}_r$.

Для кожного ребра R_{ri} зафіксуємо

(I) C^∞ -дифеоморфізм $\ell_{ri} : (-1, 1) \rightarrow R_{ri}$ такий, що обмеження $\ell_{ri}|_{(-1, -1+\varepsilon)}$ і $\ell_{ri}|_{(1-\varepsilon, 1)}$ є ізометріями,

де ε – радіус диску $q_{r0}(U_{r0})$, що визначений в Кроці 1.

Лема 2.5.0.2. *Існують гомоморфізм $\lambda_2 : \mathcal{H} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{E}_{V,a})$ і мономорфізм $\chi_2 : H \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{E}_{V,a})$, які роблять комутативною таку діаграму*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\lambda_2} & \text{Diff}(\mathcal{E}_{V,a}) \\ \phi \downarrow & \nearrow \chi_2 & \\ H & & \end{array}$$

причому $\lambda_2(h)|_U = \lambda_1(h)|_{U \cap \mathcal{E}_{V,a}}$.

Доведення. Нехай $h \in \mathcal{H}$. Ми продовжимо дифеоморфізм $\lambda_1(h)$ до дифеоморфізму $\lambda_2(h)$ атома $\mathcal{E}_{V,a}$. Нехай $x \in \mathcal{E}_{V,a}$ – точка атому. Якщо $x \in U_{ri}$ для деяких $i = 0, 1, \dots, k(r)$, $r = 1, 2, \dots, s$, то покладемо

$$\lambda_2(h)(x) := \lambda_1(h)(x).$$

Припустимо, що $x \notin U_{ri}$. Нехай ω_x – траєкторія потоку \mathbf{G} , що проходить через точку x . Тоді ми маємо один з двох таких випадків: траєкторія ω_x або

(1) перетинає деяке ребро R графу V в точці, скажімо y , або

(2) збігається до деякої вершини z графу V .

Розглянемо випадок (1). Нехай $R' = h(R)$, $\ell : (-1, 1) \rightarrow R$ і $\ell' : (-1, 1) \rightarrow R'$ – відображення, що задовольняють (I) для R та R' відповідно, і

$$h' = \ell' \circ \ell^{-1} : R \xrightarrow{\ell^{-1}} (-1, 1) \xrightarrow{\ell'} R'.$$

Нехай $y' = h'(y) \in R'$, $\omega_{y'}$ – траєкторія \mathbf{G} , що проходить через y' і x' – єдина точка в $\omega_{y'}$ така, що $f(x) = f(x')$. Тоді ми покладемо $\lambda_2(h)(x) = x'$, див. рис. 2.5.0.7.

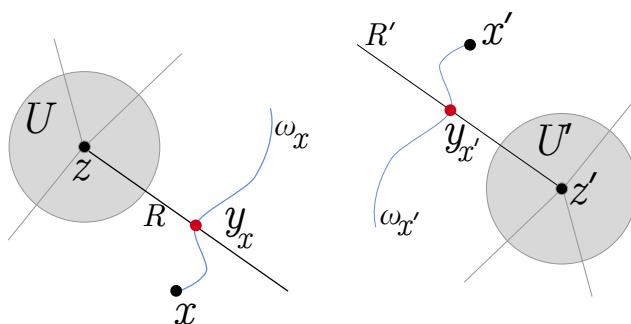


Рис. 2.5.0.7: Відображення λ_2 у випадку (1)

Розглянемо випадок (2). Нехай U – окіл точки z , означений в Кроці 1, $z' = \lambda_1(h)(z)$ – відповідна точка в $U' = \lambda_1(h)(U)$, $\omega_{z'}$ – траєкторія \mathbf{G} така, що

$$\omega_{z'} \cap U' = \lambda_1(h)(\omega_x \cap U),$$

і x' – єдина точка в $\omega_{z'}$ така, що $f(x) = f(x')$. В цьому випадку ми покладемо $\lambda_2(h)(x) = x'$, див. рис. 2.5.0.8.

За означенням $\lambda_2(h)|_U = \lambda_1(h)|_{U \cap \mathcal{E}_{V,a}}$.

Не важко довести, що відображення λ_2 є гомоморфізмом. Нехай h і h' – дифеоморфізми з \mathcal{H} . Для цього треба перевірити, що

$$\lambda_2(h \circ h')(x) = \lambda_2(h) \circ \lambda_2(h')(x) \quad (2.4)$$

для всіх $x \in \mathcal{E}_{V,a}$. Оскільки за побудовою відображення λ_2 має місце тотожність $\lambda_2|_U = \lambda_1$, то (2.4) справедлива для $x \in U$. Так як \mathcal{H} переводить ребра V в ребра,

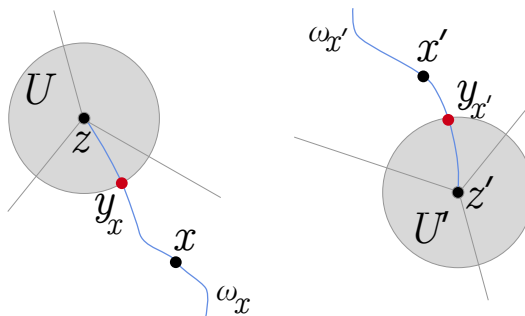


Рис. 2.5.0.8: Відображення λ_2 у випадку (2)

а траєкторії градієнту ∇f в траєкторії градієнту, то на підставі побудови $\lambda_2(h)$ та $\lambda_2(h')$ маємо, що (2.4) також виконується для $x \in \mathcal{E}_{V,a} \setminus \mathbf{U}$. Таким чином, (2.4) справедлива для всіх $x \in \mathcal{E}_{V,a}$. Це означає, що λ_2 – гомоморфізм.

Нехай $\chi_2 : H \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{E}_{V,a})$ – відображення, що визначене так: якщо $g \in H$ і $h \in \mathcal{H}$ такий, що $\phi(h) = g$, то $\chi_2(g) = \lambda_2(h)$. Подібним міркуваннями, як в доведенні, що λ_2 є гомоморфізмом, можна показати, що відображення χ_2 є гомоморфізмом. Більш того, $\lambda_2(h) = \text{id}_{\mathcal{E}_{V,a}}$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1(h) = \text{id}_{\mathbf{U}}$. Тому χ_2 – мономорфізм. \square

Визначимо відображення $\sigma : H \times \mathcal{E}_{V,a} \rightarrow \mathcal{E}_{V,a}$ за таким правилом:

$$\sigma(g, x) = \chi_2(g)(x).$$

Оскільки χ_2 є гомоморфізмом, то відображення $\sigma \in H$ -дією на атомі $\mathcal{E}_{V,a}$.

Крок 3

На цьому кроці ми продовжимо H -дію σ до H -дії на поверхні M .

Нехай \mathbf{E} – множина 2-вимірних елементів розбиття Ξ . На підставі леми 2.3.0.2, група H діє на множині \mathbf{E} . Припустимо, що ця дія має y орбіт

$$\mathbf{E}_r = \{E_{r0}, E_{r1}, \dots, E_{rk(r)}\},$$

$i = 0, 1, \dots, k(r)$ і $r = 1, 2, \dots, y$. Ми покладемо $\mathbf{E} = \bigcup_{r=1}^y \mathbf{E}_r$. Зафіксуємо дифеоморфізми $h_{ri} \in \mathcal{H}$ такі, що $h_{ri}(E_{r0}) = E_{ri}$.

Нехай $Y_r = E_{r0} \cap f^{-1}([-a, -a/2] \cup [a/2, a]) \cap \mathcal{E}_{V,a}$. Оскільки v – спеціальна вершина, то множина Y_r це – зв'язна підповерхня, що не містить критичних точок f , причому f приймає постійні значення на її межі. Тому Y_r є циліндром. Покладемо $Y_{ri} = h_{ri}(Y_r)$ і $Y = \bigcup_{r=1}^y \bigcup_{i=0}^{k(r)} Y_{ri}$.

Виберемо $a_1 > a$ таке, що множина \mathcal{E}_{V,a_1} є також атомом V . Нехай

$$Z_r = E_{r0} \cap f^{-1}([-a_1, a/2] \cup [a/2, a_1]) \cap \mathcal{E}_{V,a}.$$

За означенням, $Y_r \subset Z_r$ і Z_r не містить критичних точок f . Покладемо також $Z_{ri} = h_{ri}(Z_r)$ і $Z = \bigcup_{r=1}^y \bigcup_{i=0}^{k(r)} Z_{ri}$.

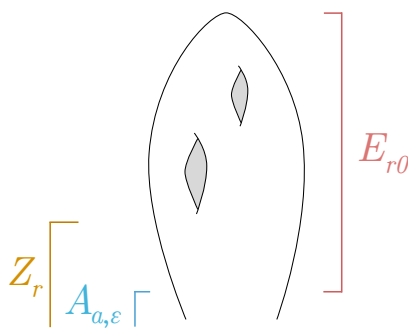


Рис. 2.5.0.9: Відображення λ_2 у випадку (2)

Зафіксуємо векторне поле F на Z таке, що його орбіти тотожні із зв'язними компонентами множин рівня обмеження $f|_Z$ і \mathbf{F} – потік поля F .

Оскільки всі орбіти \mathbf{F} є замкненими, то на підставі леми 1.7.4.1 відображення \mathbf{F}_α є дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли похідна Лі $F\alpha$ функції α уздовж F задовольняє нерівність $F\alpha > -1$. Легко бачити, [21], що $(\mathbf{F}_\alpha)^{-1} = \mathbf{F}_\xi$, де

$$\xi = -\alpha \circ \mathbf{F}_\alpha^{-1}. \quad (2.5)$$

Твердження 2.5.0.3. Для кожного $g \in H$ відображення $\chi_2(g)$ продовжується до дифеоморфізму $\Sigma(g) \in \mathcal{S}(f)$ такого, що відповідність $g \mapsto \Sigma(g)$ є гомоморфізмом $\Sigma : H \rightarrow \mathcal{S}(f)$.

Доведення. Нам необхідні такі дві леми.

Лема 2.5.0.4. Нехай $g \in H$ і $h \in \mathcal{H}$ такий, що $\phi(h) = g$ і $h(E_{r0}) = E_{ri}$. Тоді існує єдина C^∞ -функція $\xi_{ri} : Y_r \rightarrow \mathbb{R}$ така, що

$$\chi_2(g)|_{Y_r} = h_{ri}|_{Y_r} \circ \mathbf{F}_\xi : Y_r \rightarrow Y_r.$$

Зокрема, функція ξ_{ri} залежить лише від елемента g .

Лема 2.5.0.5. Дифеоморфізм $\mathbf{F}_{\xi_{ri}}$ продовжується до дифеоморфізму $w_{ri} : E_{r0} \rightarrow E_{r0}$ такого, що $f \circ w_{ri} = f$ на E_{r0} .

Ми доведемо леми 2.5.0.4 і 2.5.0.5 нижче, а зараз ми продовжимо доведення теореми 2.3.0.4.

Для кожної пари індексів r, i визначимо дифеоморфізм $\tilde{h}_{ri} : E_{r0} \rightarrow E_{r0}$ такою формулою:

$$\tilde{h}_{ri} = h_{ri} \circ w_{ri}.$$

Далі для кожного $h \in \mathcal{H}$ задамо дифеоморфізм $\lambda_3(h) \in \text{Diff}(E)$ за таким правилом: якщо $h(E_{ri}) = E_{rj}$, то

$$\lambda_3(h)|_{E_{ri}} = \tilde{h}_{rj} \circ \tilde{h}_{ri}^{-1} : E_{ri} \xrightarrow{\tilde{h}_{ri}^{-1}} E_{r0} \xrightarrow{\tilde{h}_{rj}} E_{rj}.$$

На підставі леми 2.5.0.5, відображення λ_3 збігається з λ_2 на Y .

Перевіримо, що відображення $h \mapsto \lambda_3(h)$ є гомоморфізмом. Нехай h_1 і h_2 — дифеоморфізми з \mathcal{H} такі, що $h_1(E_{ri}) = E_{rj}$ і $h_2(E_{rj}) = E_{rk}$. Згідно означення,

$$\lambda_3(h_1)|_{E_{ri}} = \tilde{h}_{rj} \circ \tilde{h}_{ri}^{-1}, \quad \lambda_3(h_2)|_{E_{rj}} = \tilde{h}_{rk} \circ \tilde{h}_{rj}^{-1}.$$

Тоді

$$\lambda_3(h_2)|_{E_{rj}} \circ \lambda_3(h_1)|_{E_{ri}} = \tilde{h}_{rk} \circ \tilde{h}_{rj}^{-1} \circ \tilde{h}_{rj} \circ \tilde{h}_{ri}^{-1} = \tilde{h}_{rk} \circ \tilde{h}_{ri}^{-1} = \lambda_3(h_2 \circ h_1)|_{E_{ri}}.$$

Отже, λ_3 є гомоморфізмом.

Нехай $g \in H$ і $h \in \mathcal{H}$ такий, що $\phi(h) = g$. На підставі умови (С), $\lambda_3(h) = \text{id}$ тоді і тільки тоді, коли $h(E_{ri}) = E_{ri}$ для деяких $r = 1, 2, \dots, y$, $i = 0, 1, \dots, k(r)$.

Тоді відображення $\chi_3 : H \rightarrow \text{Diff}(\mathbf{E})$, визначене за правилом $\chi_3(g) = \lambda_3(h)$, є мономорфізмом.

Визначимо відображення $\sigma' : H \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ за формулою

$$\sigma'(g, x) = \chi_3(g)(x), \quad x \in \mathbf{E}.$$

Оскільки χ_3 – гомоморфізм, то σ' є H -дією на \mathbf{E} . □

Задамо H -дію Σ на M за таким правилом:

$$\Sigma = \begin{cases} \sigma', & \text{на } H \times \mathbf{E}, \\ \sigma, & \text{на } H \times \mathcal{E}_{V,a} \end{cases}$$

Теорему 2.3.0.4 доведено.

2.5.1 Доведення лема 2.5.0.4

Згідно [23, лема 4.12.], див. також лему 1.7.4.2, для дифеоморфізму

$$h'_{ri} = \chi_2(g)^{-1}|_{Y_{ri}} \circ h_{ri}|_{Y_r} : Y_r \rightarrow Y_r$$

циліндру Y_r існує гладка функція α_{ri} така, що $h'_{ri} = \mathbf{F}_{\alpha_{ri}}$, як тільки для кожної траєкторії ω потоку \mathbf{F} ми маємо $h'_{ri}(\omega) = \omega$ і h'_{ri} зберігає орієнтацію ω .

Нехай ω – траєкторія \mathbf{F} . На підставі умови (C), $\omega = f^{-1} \cap Y_r$ для деякого $t \in \mathbb{R}$. Множини $f^{-1}(t)$ і Y_r є h'_{ri} -інваріантними, а тому множина $f^{-1}(t) \cap Y_r$ також є h'_{ri} -інваріантною. Отже, $h'_{ri}(\omega) = \omega$ для всіх траєкторій ω потоку \mathbf{F} . Зокрема, за лемою 2.4.0.1, h'_{ri} зберігає орієнтацію кожної орбіти ω потоку \mathbf{F} . Тоді $h'_{ri} = \mathbf{F}_{\alpha_{ri}}$ для єдиної гладкої функції $\alpha_{ri} : Y_r \rightarrow \mathbb{R}$. Тепер з формули (2.5) випливає, що функція $\xi_{ri} : Y_r \rightarrow \mathbb{R}$, визначена за формулою

$$\xi_{ri} = -\alpha_{ri} \circ \mathbf{F}_{\alpha_{ri}}^{-1},$$

задовольняє твердження лема.

2.5.2 Доведення леми 2.5.0.5

На підставі результату Seeley [43], функція ξ_{ri} продовжується до гладкої функції β'_{ri} на E_{ri} . Легко побудувати функцію $\delta_r \in C^\infty(E_{r0}, [0, 1])$, яка задовольняє такі умови:

- (1) $\delta_r = 1$ на Y_r ,
- (2) $\delta_r = 0$ на деякому околі $Z_r \cap (f^{-1}(-a_1) \cup f^{-1}(a_1))$,
- (3) $F\delta_r = 0$, тобто δ_r є постійною уздовж орбіт F ,
- (4) функція $\beta_{ri} = \delta_r \beta'_{ri}$ задовольняє нерівність $F\beta_{ri}|_{Z_r} > -1$.

Дійсно, оскільки $\beta'_{ri} = \xi_{ri}$ на Y_{ri} і $\mathbf{F}_{\alpha_{ri}}$ є дифеоморфізмом, то $F\beta'_{ri} > -1$ на Y_{ri} . Тоді існує $b \in (a, a_1)$ таке, що $F\beta'_{ri} > -1$ на

$$A_r = E_{r0} \cap f^{-1}([-b, -a/2] \cup [a/2, b]) \cap \mathcal{E}_{V,a}.$$

Нехай $\delta_r : E_{r0} \rightarrow [0, 1]$ – гладка функція така, що $\delta_r = 1$ на Y_r , $\delta_r = 0$ на $E_{r0} \setminus A_r$ і $F\delta_r = 0$. Тоді $\delta_r F\beta'_{ri}$ на E_{ri} . Тепер шуканий дифеоморфізм $w_{ri} : E_{r0} \rightarrow E_{r0}$ можна визначити за такою формулою

$$w_{ri}(x) = \begin{cases} \mathbf{F}_{\beta_{ri}}, & x \in Z_r, \\ x, & x \in E_{r0} \setminus Z_r. \end{cases}$$

Лема доведена.

2.6 Висновки

В цьому розділі ми вивчали дії комбінаторні груп автоморфізмів зірок спеціальних вершин KR-графу функції f на поверхні. Отримані результати будуть застосовані в розділі 3 для доведення основної теореми.

Розділ 3. Фундаментальна група орбіт гладких функцій на 2-торі KR-граф яких є деревом

Нехай T^2 – 2-тор. Множину всіх гладких функцій $f \in \mathcal{E}(T^2)$ KR-граф яких є деревом ми будемо позначати через $\mathcal{N}(T^2)$. Для фіксованої $f \in \mathcal{N}(T^2)$ покладемо:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, X) &= \mathcal{D}_X, & \mathcal{O}_f(f, X) &= \mathcal{O}_X & \mathcal{S}_{\text{id}}(f, X) &= \mathcal{S}_X, \\ \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \emptyset) &= \mathcal{D}, & \mathcal{O}_f(f, \emptyset) &= \mathcal{O}, & \mathcal{S}_{\text{id}}(f, \emptyset) &= \mathcal{S}. \end{aligned}$$

3.1 Спеціальні вершини KR-графу для гладких функцій на 2-торі

В розділі 2 ми розглядали спеціальні вершини KR-графів гладких функцій на поверхнях. Для гладких функцій на 2-торі T^2 має місце така теорема.

Теорема 3.1.0.1. *Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$ – гладка функція і Γ_f – її KR-граф. Тоді існує така єдина вершина v графу Γ_f , що кожна компонента доповнення $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є відкритим диском.*

Нехай $\rho|_{\mathcal{S}'(f)} : \mathcal{S}'(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$ – гомоморфізм, див п.п. 2.1 і $\mathcal{G} = \rho(\mathcal{S}'(f))$ – образ $\mathcal{S}'(f)$ в $\text{Aut}(\Gamma_f)$ відносно ρ . Нехай \mathcal{G}_v – стабілізатор v відносно дії \mathcal{G} на Γ_f і $\text{st}(v)$ – зірка v в Γ_f відносно дії \mathcal{G}_v . З теореми 3.1.0.1 випливає, що має місце бієкція $\pi_0(\text{st}(v) \setminus v) \rightarrow \pi_0(\Gamma_f \setminus v)$. Тому вершина v і відповідна їй зв'язна компонента V є спеціальними.

3.1.1 Доведення теореми 3.1.0.1

Наступна лема є простим наслідком означення КР-графу гладкої функції та властивостей замкнутих кривих на 2-торі.

Лема 3.1.1.1. *Нехай e – відкрите ребро дерева Γ_f , $z \in e$ – точка на ребрі e , і $C = p_f^{-1}(z)$ – відповідна регулярна компонента деякої множини рівня f , що є простою замкненою кривою в T^2 . Тоді*

- (1) z розбиває Γ_f ;
- (2) C розбиває T^2 і, значить, рівно одна з компонент зв'язності $T^2 \setminus C$ є 2-диском.

Нехай $e = (u_0u_1)$ – відкрите ребро дерева Γ_f , $z \in e$ і $C = p_f^{-1}(z)$ такі як і в лемі 3.1.1.1. Для $i = 0, 1$ позначимо через T_{zu_i} замикання зв'язної компоненти $\Gamma_f \setminus z$, що містить точку u_i , і покладемо

$$A_i = p_f^{-1}(T_{zu_i}).$$

Згідно леми 3.1.1.1, рівно одна з підповерхонь A_0 або A_1 є 2-диском. Орієнтуємо ребро e від u_0 до u_1 , якщо A_0 є 2-диском і від u_1 до u_0 в протилежному випадку, тобто коли A_1 є диском.

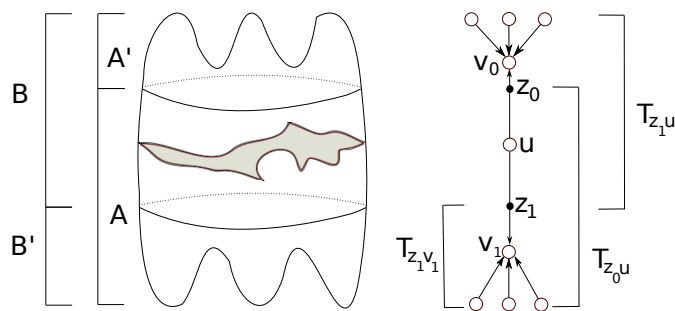
Таким чином на кожному ребрі заданий напрям, тобто Γ_f стає орієнтованим деревом.

Лема 3.1.1.2. *З кожної вершини u дерева виходить не більше одного ребра.*

Доведення. Припустимо, що з вершини u виходять два ребра, які входять в вершини v_0 і v_1 відповідно. Виберемо довільні точки $z_0 \in (uv_0)$ і $z_1 \in (uv_1)$ і позначимо:

$$A = p_f^{-1}(T_{z_0u}), \quad A' = p_f^{-1}(T_{z_0u_0}), \quad B = p_f^{-1}(T_{z_1u}), \quad B' = p_f^{-1}(T_{z_1v_1}),$$

див. рис. 3.1.1.1 За означенням орієнтації ребер, A і B є 2-дисками. Оскільки $T^2 = A \cup A' = B \cup B'$, то

Рис. 3.1.1.1: Диски A , A' , B , B'

$$A' \subset B, \quad B' \subset A. \quad (3.1)$$

Крім того, перетини $A \cap A' = p_f^{-1}(z_0)$ і $B \cap B' = p_f^{-1}(z_1)$ – прості замкнені криві. Тому кожна з поверхонь A' і B' є тором з діркою. Але тоді ані A' і ані B' не може бути вкладеною в 2-диск, що суперечить включенням (3.1). Отже з кожної вершини дерева Γ_f виходить не більше одного ребра. \square

Нехай v – вершина графу Γ_f . Тоді доповнення $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є об'єднання дисків тоді і тільки тоді, коли всі ребра, що інцидентні v входять в цю вершину. Будемо називати таку вершину *максимальною*.

Таким чином для доведення теореми 3.1.0.1 необхідно показати, що в орієнтованому дереві Γ_f існує єдина максимальна вершина. Це впливає з такої леми.

Лема 3.1.1.3. *Нехай Γ – орієнтоване дерево.*

- (а) *Якщо Γ – скінченне, то в ньому існують максимальні вершини.*
- (б) *Якщо з будь-якої вершини Γ виходить не більше ніж одне ребро (інші ребра, що їй інцидентні, входять в цю вершину), то максимальних вершин не більше ніж одна.*

Доведення. (а) Припустимо, що в Γ немає максимальних вершин, тобто з будь-якої вершини виходить хоча б одне ребро. Нехай v_0, \dots, v_{n-1}, v_n – довільний орієнтований шлях в Γ , який складається з попарно різних вершин. Оскільки ребро $(v_{n-1}v_n)$ входить в v_n , то знайдеться ребро (v_nv_{n+1}) , яке виходить з

v_n . Зауважимо, що $v_{n+1} \neq v_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, бо інакше v_0, \dots, v_n, v_{n+1} був би циклом в дереві Γ , що неможливо. Відтак, будь-який орієнтовний шлях може бути продовжений до довшого шляху. Але це суперечить тому, що Γ – скінчене дерево. Отже, максимальні вершини існують.

(b) Припустимо, що Γ має дві максимальні вершини v_1 та v_2 і нехай $\gamma : e_0, \dots, e_k$ – єдиний шлях, що з'єднує v_1 і v_2 . Оскільки ребра e_0 і e_k направлені до v_1 і v_2 відповідно, то для однієї з вершин u шляху γ , інцидентні їм ребра e_i та e_{i+1} виходять з u , що не можливо. Отримали протиріччя. Отже, існує не більше однієї максимальної вершини графу Γ . Лема доведена. \square

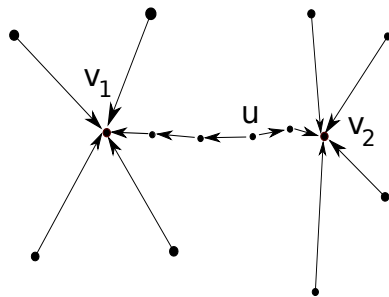


Рис. 3.1.1.2: Шлях між v_1 і v_2

Існування максимальної вершини в Γ_f впливає з (a) леми 3.1.1.3, а її єдиність з (b). Теорема доведена.

Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$ – гладка функція на T^2 , Γ_f – її KR-граф, v – спеціальна вершина.

Домовленість. Нагадаємо, що в п.п. 1.6.2 ми показали, що має місце гомоморфізм $\rho : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$. В цьому розділі ми будемо розглядати звуження відображення ρ на $\mathcal{S}'(f)$, позначаючи його тією ж буквою. Тоді покладемо

$$\mathcal{G} = \rho(\mathcal{S}'), \quad \mathcal{G}_v = \{g \in \mathcal{G} \mid g(v) = v\}.$$

Для зірки $\text{st}(v)$ позначимо $\mathcal{G}_v^{\text{loc}} = \{g|_{\text{st}(v)} \mid g \in \mathcal{G}_v\}$ локальний стабілізатор v в $\text{st}(v)$ відносно дії $\mathcal{G} = \rho(\mathcal{S}')$ на Γ_f .

3.2 Опис $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для функцій з $\mathcal{N}(T^2)$

Основним результатом розділу є така теорема:

Теорема 3.2.0.1. *Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$ і v – спеціальна вершина її KR-графу Γ_f . Тоді*

(i) $\mathcal{G}_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$;

(ii) існують замкнені 2-диски $D_1, D_2, \dots, D_r \subset T^2$ такі, що $f|_{D_i} \in \mathcal{N}(D_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ і має місце такий ізоморфізм

$$\xi : \pi_1\mathcal{O} \cong \prod_{i=1}^r \pi_0\mathcal{S}^i \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}} \mathbb{Z}^2,$$

де $\mathcal{S}^i = \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i)$. Зокрема, у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$ отримуємо ізоморфізм:

$$\xi : \pi_1\mathcal{O} \cong \pi_0\mathcal{S}' \times \mathbb{Z}^2.$$

Структура доведення 3.2.0.1

В підрозділі 3.3 ми доведемо частину (i) теореми 3.2.0.1, а в підрозділі 3.3 – частину (ii).

3.3 Структура локального стабілізатора \mathcal{G}_v^{loc}

Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$, v – спеціальна вершина графу Γ_f і $V = p_f^{-1}(v)$ – відповідна спеціальна критична компонента.

Оскільки V є спеціальною компонентою, що відповідає v , то V задає клітинне розбиття T^2 , див підрозділ 2.2: 0- та 1-клітини цього розбиття – це відповідно вершини (тобто критичні точки f) та ребра V , а 2-клітини – це компоненти доповнення до V в T^2 .

З леми 2.3.0.2 випливає, що для кожного $h \in \ker(r \circ \rho)$ виконані такі умови:

(1) $h(e) = e$ для будь-якої клітини e ,

(2) відображення $h : e \mapsto h(e)$ зберігає орієнтацію кожної клітини e розмірності $\dim e \geq 1$.

Нагадаємо означення числа Лефшеця неперервного відображення. Нехай X – топологічний простір і $f : X \rightarrow X$ – неперервне відображення. Тоді f індукує лінійні відображення $H_i f : H_i(X, k) \rightarrow H_i(X, k)$ груп гомологій простору X з коефіцієнтами в полі k , $i \geq 0$. Числом Лефшеця $\mathfrak{L}(f)$ називається вираз

$$\mathfrak{L}(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{tr}(H_i f).$$

Лема 3.3.0.1 ([27], Proposition 5.4.). *Нехай M – замкнута орієнтована поверхня, Ξ – деяке клітинне розбиття M і $h : M \rightarrow M$ – гомеоморфізм, що задовольняє такі умови:*

- h зберігає кліткову структуру, тобто якщо $e \in \Xi$, то $h(e) \in \Xi$ та $\dim(e) = \dim(h(e))$;
- h зберігає орієнтацію клітин;
- h не є Ξ -тривіальним, тобто $h(e) \neq e$ для деякої $e \in \Xi$.

Тоді число h -інваріантних клітин розбиття Ξ дорівнює

$$\mathfrak{L}(f) = \operatorname{tr}(H_0 h) - \operatorname{tr}(H_1 h) + \operatorname{tr}(H_2 h).$$

Доведення (i) теореми 3.2.0.1

Нехай $h \in \mathcal{S}'$ – дифеоморфізм. Згідно леми 3.3.0.1, або всі клітини є h -інваріантними, або число інваріантних клітин автоморфізму h дорівнює числу Лефшеця $\mathfrak{L}(h)$. Оскільки h ізотопний тотожному відображенню тора T^2 , то $\mathfrak{L}(h) = \chi(T^2) = 0$. Таким чином, «комбінаторна дія» h на множині клітин визначається його дією на довільній фіксованій 2-клітині, тобто дією $\rho(h)$ на довільному ребрі зірки $\operatorname{st}(v)$.

На підставі теореми 2.3.0.4 існує переріз

$$s : \mathcal{G}_v^{loc} \rightarrow \mathcal{S}'(f)$$

відображення $r \circ \rho$ такий, що $s(\mathcal{G}_v^{loc})$ діє вільно на T^2 . Зокрема, фактор-відображення $q : T^2 \rightarrow T^2/\mathcal{G}_v^{loc}$ є накриттям, а отже T^2/\mathcal{G}_v^{loc} є або тором, або пляшкою Клейна. Але оскільки \mathcal{G}_v^{loc} -дія на T^2 є дією групи дифеоморфізмів, що зберігають орієнтацію, то фактор-простір T^2/\mathcal{G}_v^{loc} є тором. Зокрема ми отримуємо точну послідовність:

$$1 \longrightarrow \pi_1 T^2 \xrightarrow{q} \pi_1 T^2 / \mathcal{G}_v^{loc} \longrightarrow \mathcal{G}_v^{loc} \longrightarrow 1.$$

Оскільки q – мономорфізм, то твердження (ii) теореми 3.2.0.1 випливає з такої леми.

Лема 3.3.0.2 ([40], розділ E). *Нехай A, B – вільні абелеві групи рангу 2, і $q : A \rightarrow B$ – вкладення. Тоді існують $L, M \in A$ і $X, Y \in B$ такі, що породжують A та B , тобто $A = \langle L, M \rangle$, $B = \langle X, Y \rangle$, і*

$$q(L) = nX, \quad q(M) = mnY,$$

для деяких $n, m \in \mathbb{N}$. Зокрема $B/A \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$.

Отже, $\mathcal{G}_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$. Крім того, у випадку $n = m = 1$, маємо $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$.

3.4 Доведення твердження (ii) теореми 3.2.0.1 у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$. Побудова перерізу

Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ – гладка функція така, що Γ_f є деревом і v – спеціальна вершина Γ_f . Нам необхідно показати, що послідовність

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathcal{D} \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O} \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}' \longrightarrow 1$$

розщеплюється.

Зауважимо, що на підставі теореми 1.4.0.3 образ $p_1(\pi_1\mathcal{D})$ міститься в центрі групи $\pi_1\mathcal{O}$. Тому, для того, щоб ця послідовність розщеплювалась, достатньо показати, що існує переріз $s : \pi_0\mathcal{S}' \rightarrow \pi_1\mathcal{O}$, тобто такий гомоморфізм, що $\partial_1 \circ s = \text{id}$.

Твердження (ii) теореми 3.2.0.1 у випадку $\mathcal{G}_v^{\text{loc}} = 1$ є наслідком такої леми:

Лема 3.4.0.1. *Нехай v – максимальна вершина дерева Γ_f , (uv) – яке-небудь ребро Γ_f інцидентне v , $z \in (vu)$ – точка і $C = p_f^{-1}(z)$ – відповідна проста замкнута крива на T^2 . Якщо група $\mathcal{G}_v^{\text{loc}}$ тривіальна, то мають місце такі твердження.*

(i) *Нехай $h \in \mathcal{S}'$. Тоді $h(C) = C$ і існує ізотопія $h_t : T^2 \rightarrow T^2$, $t \in [0, 1]$ така, що*

$$h_0 = \text{id}_{T^2}, \quad h_1 = h, \quad h_t(C) = C, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

(ii) *Якщо $\{h'_t\}$ – інша ізотопія, що задовольняє (3.2), то шляхи $\{h_t\}$ і $\{h'_t\}$ – гомотопні в \mathcal{D} відносно кінців. Зокрема, петлі $\{f \circ h_t\}$ і $\{f \circ h'_t\}$ представляють один і той же елемент в $\pi_1\mathcal{O}$. Позначимо його через $s(h)$.*

(iii) *Відображення $s : h \mapsto s(h)$ є гомоморфізмом $s : \pi_0\mathcal{S}' \rightarrow \pi_1\mathcal{O}$ таким, що $\partial_1 \circ s = \text{id}$. Зокрема, s розщеплює послідовність.*

Доведення. Нам необхідна така лема, також див [58].

Лема 3.4.0.2. *Нехай M – гладка компактна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M)$, $\rho : \mathcal{S} \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$ – гомоморфізм дії \mathcal{S} на Γ_f , v – вершина Γ_f , $\text{st}(v)$ – зірка v і $N = p_f^{-1}(\text{st}(v))$. Нехай далі $h \in \mathcal{S}'$ і $\rho(h) : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_f$ – відповідний автоморфізм Γ_f індукований h . Припустимо, що $\rho(h)(v) = v$ і $\rho(h)|_{\text{st}(v)} = \text{id}$. Тоді існує ізотопія $g_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$ така, що*

$$(1) \quad g_0 = h;$$

$$(2) \quad g_t \in \mathcal{S}';$$

(3) g_1 є нерухомим на N ;

(4) $\rho(h) = \rho(g_t) = \text{id}$ для кожного $t \in [0, 1]$.

Зокрема, $[h] = [g_t] \in \pi_0 \mathcal{S}'$.

Доведення. Нехай $V = p_f^{-1}(v)$ – критична компонента критичного рівня f , що відповідає вершині v . Тоді V є скінченним графом, що вкладений в M і з $\rho(h)(v) = v$ випливає, що $h(V) = V$. Оскільки h ізотопний до id_M і тривіально діє на зірці $\text{st}(v)$, то на підставі результату [23, теорема 7] h переводить кожне ребро e графу s в себе і зберігає орієнтацію e . Існування ізотопії, що задовольняє (1) – (4) випливає з [23, леми 6.4 та 4.14]. Лема доведена. \square

Доведемо (i). Не втрачаючи загальності можна вважати, що знайдуться дві зірки $\text{st}_1(v)$ і $\text{st}_2(v)$ такі, що $z \in \text{st}_1(v) \subset \text{Int}(\text{st}(v))$, де $\text{Int}(\text{st}(v))$ – внутрішність $\text{st}(v)$. Іншими словами, якщо покласти $N_1 = p_f^{-1}(\text{st}_1(v))$ і $N = p_f^{-1}(\text{st}(v))$, то $N_1 \subset \text{Int}(N)$.

Нехай тепер $h \in \mathcal{S}'$ і $g_t : T^2 \rightarrow T^2$, $t \in [0, 1]$ – ізотопія, що має властивості (1)–(4) леми 3.4.0.2. Тоді з (3) випливає, що $\rho(g_t)(z) = z$, а значить $g_t(C) = C$ для всіх $t \in [0, 1]$. Оскільки g_1 нерухомий на N , а доповнення $T^2 \setminus N_1$ складається з 2-дисків, то g_1 ізотопний до id_{T^2} за допомогою ізотопії нерухомії на N_1 , а значить і на C .

Отже, h ізотопний до id_T^2 за допомогою ізотопії, що залишає криву C інваріантною.

(ii) Нехай тепер $\alpha = \{h_t\}$ і $\beta = \{h'_t\}$ – два шляхи, що задовольняють умови леми 3.4.0.2 і D – 2-диск, який обмежує C в T^2 . Розглянемо петлю $\omega = \alpha\beta^{-1}$ в \mathcal{D} . Оскільки $\omega(C \times t) = C$, $t \in [0, 1]$, то $\omega(D \times t) = D$. Тоді для всіх $q \in D$ петля $\omega_q : \{q\} \times [0, 1] \rightarrow T^2$ – гомотопна нулю в T^2 , а тому, на підставі леми 1.8.0.2, петля ω гомотопна нулю в \mathcal{D} , тобто α і β є гомотопними відносно кінців.

(iii) Нехай $\{h_t\}$ і $\{h'_t\}$ – шляхи в \mathcal{S}' , що задовольняють умову (3.2). Розглянемо

ШЛЯХ

$$g_t = \begin{cases} h_{2t}, & t \in [0, 1/2], \\ h \circ h'_{2t-1}, & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

в \mathcal{D} і відповідну петлю

$$f \circ g_t = \begin{cases} f \circ h_{2t}, & t \in [0, 1/2], \\ f \circ h \circ h'_{2t-1} = f \circ h'_{2t-1}, & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

в \mathcal{O} . Тоді, за означенням групової операції в $\pi_1 \mathcal{O}$, маємо:

$$[\{f \circ h_t\}] \cdot [\{f \circ h'_t\}] = [\{f \circ g_t\}].$$

З іншого боку, $g_1 = h \circ h'$ і $g_t(C) = C$ для всіх $t \in [0, 1]$, тобто $[\{f \circ g_t\}] = s(h \circ h')$.

Отже, $s(h) \circ s(h') = s(h \circ h')$. \square

3.5 Доведення твердження (ii) теореми 3.2.0.1

Нехай $f \in \mathcal{N}(T^2)$ – гладка функція, Γ_f – її KR-граф і v – спеціальна вершина Γ_f .

3.5.1 Вибір спеціальних твірних для $\pi_1 T^2$ і $\pi_1 T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$

Нехай $y \in T^2$ – точка. Нагадаємо, що \mathcal{G}_v^{loc} вільно діє на T^2 , а відображення $q : T^2 \rightarrow T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$, що індуковане цією вільною дією, є накриттям. Позначимо через $z = q(y) \in T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$ – образ y під дією накриваючого відображення q .

Тоді ми маємо таку комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(T^2, y) & \xrightarrow{q_1} & \pi_1(T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}, z) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{G}_v^{loc} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm} \longrightarrow 0 \end{array}$$

де $q : T^2 \rightarrow T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$ та $\partial : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$ задані формулами:

$$q(\lambda, \mu) = (n\lambda, nm\mu), \quad \partial(x, y) = (x \bmod n, y \bmod nm).$$

Нехай $\widehat{X}, \widehat{Y} : T^2/\mathcal{G}_v^{loc} \times [0, 1] \rightarrow T^2/\mathcal{G}_v^{loc}$ – ізотопії такі, що

$$\widehat{X}_0 = \widehat{X}_1 = \widehat{Y}_0 = \widehat{Y}_1 = \text{id}_{T^2/\mathcal{G}_v^{loc}},$$

$$\widehat{X}_s \circ \widehat{Y}_t = \widehat{Y}_t \circ \widehat{X}_s,$$

для всіх $s, t \in [0, 1]$, причому петлі $\widehat{X}_z, \widehat{Y}_z : I \rightarrow T^2/\mathcal{G}_v^{loc}$, визначені формулами $\widehat{X}_z = \widehat{X}(z, t)$ та $\widehat{Y}_z = \widehat{Y}(z, t)$, представляють елементи

$$[\widehat{X}_z] = (1, 0), \quad [\widehat{Y}_z] = (0, 1) \in \mathbb{Z}^2 = \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}, z).$$

Продовжимо \widehat{X} і \widehat{Y} до відображень

$$X, Y : \pi_1 T^2/\mathcal{G}_v^{loc} \times \mathbb{R} \rightarrow \pi_1 T^2/\mathcal{G}_v^{loc}$$

за формулами

$$X(x, t) = \widehat{X}(x, t \bmod 1), \quad Y(x, t) = \widehat{Y}(x, t \bmod 1).$$

Нехай $L, M : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ – єдині підняття відповідно X та Y відносно q такі, що L та M комутують і $L_0 = M_0 = \text{id}_{T^2}$. Тобто

$$X_t \circ q = q \circ L_t, \quad Y_t \circ q = q \circ M_t.$$

Нехай $s : \mathcal{G}_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm} \rightarrow \mathcal{S}'$ – переріз $r \circ \rho$, див. теорему 2.3.0.4. Тоді $L_t \circ M_{t'} = M_{t'} \circ L_t$ для всіх $t, t' \in \mathbb{R}$ і

$$L_k = s(k \bmod n, 0), \quad M_k = s(0, k \bmod nm),$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Зокрема

$$L_{kn} = M_{kmn} = \text{id}_{T^2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а петлі

$$L_z : [0, n] \rightarrow T^2, \quad M_z : [0, mn] \rightarrow T^2$$

представляють елементи

$$[L_z] = (1, 0), \quad [M_z] = (0, 1) \in \mathbb{Z}^2 = \pi_1(T^2, y)$$

групи $\pi_1(T^2, y)$. З того, що \mathcal{G}_v^{loc} діє вільно на T^2 випливає, що компоненти зв'язності $\overline{T^2 \setminus N}$ можна занумерувати трьома індексами D_{ijk} такими, що $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $k = 0, 1, \dots, nm-1$. Причому, якщо $\gamma = (a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm} = \mathcal{G}_v^{loc}$, то

$$\gamma(D_{ijk}) = D_{i, j+a, \text{mod } n, k+b \text{ mod } nm}.$$

Покладемо також $\mathcal{S}_{ijk} = \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{D_{ijk}}, \partial D_{ijk})$ і

$$\mathcal{S}^0 = \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{nm-1} \mathcal{S}_{ijk}.$$

Визначимо відображення

$$\tau : \mathcal{S}^0 \rightarrow \text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00})$$

за такою формулою: якщо $\alpha = (h_{ijk}) \in \mathcal{S}^0$, то

$$\tau(\alpha) : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}$$

задається формулою

$$\tau(\alpha)(k, j) = ([\mathbf{M}_k^{-1} \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ h_{ijk} \circ \mathbf{L}_j \circ \mathbf{M}_k]), \quad i = 1, 2, \dots, r), \quad (3.3)$$

для $(k, j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} = \mathcal{G}_v^{loc}$.

Лема 3.5.1.1. *Відображення τ є ізоморфізмом.*

Доведення. Доведемо, що τ – гомоморфізм. Нехай $\alpha = (h_{ijk})$ і $\beta = (\tilde{h}_{ijk})$. Тому для $i \geq 0$ маємо:

$$\begin{aligned} \tau(\alpha\beta)(k, j) &= [\mathbf{M}_k^{-1} \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ h_{ijk} \circ \tilde{h}_{ijk} \circ \mathbf{L}_j \circ \mathbf{M}_k] \\ &= [\mathbf{M}_k^{-1} \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ h_{ijk} \circ \mathbf{L}_j \circ \mathbf{M}_k \circ \mathbf{M}_k^{-1} \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \tilde{h}_{ijk} \circ \mathbf{L}_j \circ \mathbf{M}_k] \\ &= \tau(\alpha)(k, j)\tau(\beta)(k, j). \end{aligned}$$

Таким чином, τ є гомоморфізмом.

Нехай $\alpha = (h_{ijk})$ та $\beta = (\tilde{h}_{ijk})$. З того, що $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, на підставі (3.3), випливає, що $(h_{ijk}) = (\tilde{h}_{ijk})$, тобто $\alpha = \beta$. Це означає, що τ – мономорфізм. Не важко переконатись, що відображення τ є епіморфізмом. Таким чином, τ – ізоморфізм. Отже, τ – ізоморфізм. □

3.5.2 Епіморфізм $\psi : \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}') \rightarrow \pi_1 T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$

Нехай $h : I \rightarrow \mathcal{D}$ – петля в \mathcal{D} така, що $h(0) = h(1) = \text{id}_{T^2}$, тобто h можна розглядати як ізотопію $h : T^2 \times I \rightarrow T^2$ тора T^2 . Нехай $x \in T^2$ – точка. Тоді $h_x : \{x\} \times I \rightarrow T^2$ – петля в T^2 з початком в x . Визначимо відображення $\ell : \pi_1 \mathcal{D} \rightarrow \pi_1 T^2$ за формулою:

$$\ell([h]) = [h_x] \in \pi_1 T^2.$$

Відомо, що відображення ℓ є ізоморфізмом, див. теорему 1.8.0.1.

Лема 3.5.2.1. *Існує епіморфізм $\psi : \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}') \rightarrow \pi_1 T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$ такий, що наступна діаграма є комутативною*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1 \mathcal{D} & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}') & \longrightarrow & \pi_0 \mathcal{S}' \longrightarrow 1 \\ & & \cong \downarrow \ell & & \downarrow \psi & & \downarrow \widehat{\rho}_0 \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1 T^2 & \longrightarrow & \pi_1 T^2 / \mathcal{G}_v^{loc} & \longrightarrow & \mathcal{G}_v^{loc} \longrightarrow 1 \end{array} \quad (3.4)$$

а рядки є точними.

Доведення. Зафіксуємо довільну вершину $z \in V$ спеціальної компоненти V і визначимо відображення:

$$\psi_0 : \mathcal{D} \rightarrow T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}, \quad \psi_0(h) = q(h(z)),$$

для $h \in \mathcal{D}$, де $q : T^2 \rightarrow T^2 / \mathcal{G}_v^{loc}$ – накриття, індуковане вільною дією \mathcal{G}_v^{loc} на T^2 . Очевидно, що відображення ψ_0 є неперервним. Оскільки \mathcal{G}_v^{loc} -дія та \mathcal{S}' -дія збігаються на вершинах V , то $\psi_0(h)$ належить до \mathcal{G}_v^{loc} -орбіти точки z для $h \in \mathcal{S}'$.

Тому відображення ψ_0 індукує відображення трійок:

$$\psi_0 : (\mathcal{D}, \mathcal{S}', \text{id}) \rightarrow (T^2/\mathcal{G}_v^{loc}, z', z'), \quad \psi(\widehat{h}) = q(\widehat{h}(z)).$$

Зокрема, ми отримуємо гомоморфізм відносних гомотопійних множин

$$\psi : \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}', \text{id}) \rightarrow \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}, z', z').$$

Оскільки рядки діаграми (3.4) є точними послідовностями, відображення ℓ є ізоморфізмом, відображення $\widehat{\rho}_0$ є епіморфізмом, то, на підставі 5-леми, відображення ψ – епіморфізм. \square

3.5.3 Ядро відображення ψ

Нехай $f(V) = c$, і N – деякий атом критичного рівня V . Нагадаємо, що

$$\mathcal{S}'_N = \{h \in \mathcal{S}' \mid h|_N = \text{id}_N\}.$$

Наступна лема описує ядро відображення ψ .

Лема 3.5.3.1. *Існують ізоморфізми між такими п'ятьма групами:*

$$\ker \psi \xrightarrow{\zeta} \ker \widehat{\rho}_0 \xleftarrow{\iota} \pi_0 \mathcal{S}'_N \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^0 \xrightarrow{\tau} \text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}).$$

Доведення. 1) Побудуємо ізоморфізм $\zeta : \ker \psi \rightarrow \ker \widehat{\rho}_0$. Розглянемо діаграму, у якій всі рядки і стовпчики є точними:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & (3.5) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \pi_1 \mathcal{D} & \xrightarrow{\cong \ell} & \pi_1 T^2 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker \psi & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}') & \xrightarrow{\psi} & \pi_1 T^2/\mathcal{G}_v^{loc} \longrightarrow 1 \\ & & \cong \downarrow \zeta & & \downarrow \partial \circ \lambda_1^{-1} & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \ker \widehat{\rho}_0 & \longrightarrow & \pi_0 \mathcal{S}' & \xrightarrow{\widehat{\rho}_0} & \mathcal{G}_v^{loc} \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}$$

Оскільки відображення ℓ – ізоморфізм, то на підставі 3×3 -леми, гомоморфізм $\zeta = \partial \circ \lambda_1^{-1}|_{\ker \psi}$ є ізоморфізмом.

2) Відмітимо, що має місце ізоморфізм

$$\sigma : \mathcal{S}'_N \cong \prod_{i,j,k} \mathcal{S}'(f|_{D_{ijk}}, \partial D_{ijk}), \quad \sigma(h) = (h|_{D_{ijk}})_{i,j,k},$$

який індукує ізоморфізм

$$\sigma : \pi_0 \mathcal{S}'_N \cong \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^n \prod_{k=1}^{nm-1} \mathcal{S}_{ijk} = \mathcal{S}^0.$$

3) Досить показати, що вкладення $\iota : \mathcal{S}' \rightarrow \ker(r \circ \rho)$ є гомотопійною еквівалентністю. Тоді воно індукуватиме ізоморфізм

$$\iota : \pi_0 \mathcal{S}' \rightarrow \pi_0 \ker(r \circ \rho) = \ker \widehat{\rho}_0.$$

Покажемо, що існує ізотопія $H : \ker(r \circ \rho) \times I \rightarrow \ker(r \circ \rho)$ така, що виконуються такі умови:

- (i) $H_0 = \text{id}$,
- (ii) $H_t(\mathcal{S}'_N) \subset \mathcal{S}'_N$ для всіх $t \in I$,
- (iii) $H_1(\ker(r \circ \rho)) \subset \mathcal{S}'_N$.

Нехай F – гамільтонове векторне поле функції $f \in \mathcal{N}(T^2)$, $\mathbf{F} : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ – потік поля F , і N, N' – атоми V такі, що $\overline{N} \subset \text{Int} N'$. Для кожної функції $\gamma : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ визначимо відображення $\mathbf{F}_\gamma : T^2 \rightarrow T^2$ за такою формулою:

$$\mathbf{F}_\gamma(x) = \mathbf{F}(x, \gamma(x)).$$

З леми 1.4.0.3, див. також [28, Claim 1], випливає, що для кожного $h \in \ker r \circ \rho$ існує єдина гладка функція $\beta_h \in C^\infty(N')$ така, що $h = \mathbf{F}_{\beta_h}$, тобто

$$h(x) = \mathbf{F}(x, \beta_h(x)), \quad x \in N',$$

причому відображення

$$\widehat{s} : \ker r \circ \rho \rightarrow C^\infty(N'), \quad \widehat{s}(h) = \beta_h$$

є неперервним відносно відповідних C^∞ -топологій. Більш того, якщо h –нерухомий на N , то $\beta_h = 0$ та N .

Продовжимо функцію β_h до гладкої функції $\alpha_h \in C^\infty(T^2)$ такої, що $\alpha_h|_N = \beta_h$ і $\alpha_h = 0$ на $T^2 \setminus N'$ наступним чином. Нехай $\varepsilon : T^2 \rightarrow [0, 1]$ – гладка функція на T^2 така, що

(1) ε є постійною на орбітах \mathbf{F} ,

(2) $\varepsilon = 1$ на N ;

(3) $\varepsilon = 0$ на $T^2 \setminus N'$.

Покладемо $\alpha_h = \varepsilon\beta_h$ на N' і $\alpha_h = 0$ на $T^2 \setminus N'$. Очевидно, що тоді відповідність $h \mapsto \alpha_h$ є неперервним відображенням $\alpha : \ker r \circ \rho \rightarrow C^\infty(T^2)$. Більш того, з умови (1) на ε на підставі леми 1.4.0.3 випливає, що відображення $\mathbf{F}_{t\alpha_h} : T^2 \rightarrow T^2$, визначене формулою $\mathbf{F}_{t\alpha_h} = \mathbf{F}(x, t\alpha_h(x))$, $x \in T^2$, є дифеоморфізмом для всіх $t \in I$. Також, з умов (2) і (3) слідує, що

$$\mathbf{F}(x, \alpha_h(x)) = \begin{cases} h(x), & x \in N, \\ x, & x \in T^2 \setminus N'. \end{cases}$$

Визначимо ізотопію $H : \ker r \circ \rho \times I \rightarrow \ker r \circ \rho$ формулою:

$$H(h, t) = h \circ \mathbf{F}_{t\alpha_h}^{-1}$$

і покажемо, що H задовольняє умови (i)-(iii).

(i) $H_0 = h \circ \mathbf{F}_0^{-1} = h$, тобто $H_0 = \text{id}|_{\ker r \circ \rho}$.

(ii) Припустимо, що $h \in \mathcal{S}'$. Тоді $\beta_h = t\alpha_h = 0$ на N , а отже $\mathbf{F}_{t\alpha_h}|_N = \text{id}_N$ для всіх $t \in I$. Зокрема,

$$H_t(h)|_N = h|_N = \text{id}_N.$$

(iii) $H_1(h)|_N = h \circ \mathbf{F}_{\alpha_h}^{-1} = h \circ h^{-1}|_N = \text{id}_N$. □

Лемі доведено.

3.5.4 Побудова ізоморфізму ξ

Визначимо відображення

$$\xi : \text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) \rtimes \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}', \text{id}_{T^2})$$

за таким правилом. Нехай $\alpha : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \equiv \mathcal{G}_v^{loc} \rightarrow \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}$ – довільне відображення і $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \equiv \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc})$. Для кожної трійки (i, j, k) виберемо $h_{ijk} \in \mathcal{S}'(f|_{D_{i00}}, \partial D_{i00})$ такий, щоб

$$\alpha(j, k) = ([h_{1jk}], [h_{2jk}], \dots, [h_{rjk}])$$

і нехай $h_{ijk}^t : D_{i00} \rightarrow D_{i00}$, $t \in [0, 1]$ – довільна ізотопія між $h_{ijk}^0 = \text{id}_{D_{i00}}$ та $h_{ijk}^1 = h_{ijk}$. Визначимо відображення

$$h : (I, 0, 1) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{S}', \text{id}_{T^2})$$

за такою формулою:

$$h(x) = \begin{cases} \mathbf{M}_{k+at} \circ \mathbf{L}_{j+bt} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}(x), & x \in D_{ijk} \\ \mathbf{M}_{at} \circ \mathbf{L}_{bt}(x), & x \in N. \end{cases}$$

Легко бачити, що h визначено коректно. Покладемо

$$\xi(\alpha, (a, b)) = [h] \in \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}', \text{id}_{T^2}).$$

Лема 3.5.4.1. *Відображення ξ є гомоморфізмом.*

Доведення. Нехай

$$\alpha = ([h_{ijk}], \beta = ([\tilde{h}_{ijk}]) \in \text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}),$$

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Тоді, на підставі означення ξ , маємо

$$\xi(\alpha, (a_1, b_1))(x) = [\mathbf{M}_{k+a_1t} \circ \mathbf{L}_{j+b_1t} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}](x), \quad x \in D_{ijk},$$

$$\xi(\beta, (a_2, b_2))(x) = [\mathbf{M}_{k+a_2t} \circ \mathbf{L}_{j+b_2t} \circ \tilde{h}_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}(x)], \quad x \in D_{ijk}.$$

За формулою (1.12) маємо

$$(\alpha^{a_2, b_2} \beta) = ([\mathbf{M}_{a_2t}^{-1} \circ \mathbf{L}_{b_2t}^{-1} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{M}_{a_2t} \circ \mathbf{L}_{b_2t} \circ \tilde{h}_{ijk}^t]).$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \xi(\alpha^{a_2, b_2} \beta, (a_1 + a_2, b_1 + b_2))(x) &= [\mathbf{M}_{k+(a_1+a_2)t} \circ \mathbf{L}_{j+(b_1+b_2)t} \circ \\ &\quad \circ \mathbf{M}_{a_2t}^{-1} \circ \mathbf{L}_{b_2t}^{-1} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{M}_{a_2t} \circ \mathbf{L}_{b_2t} \circ \tilde{h}_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}] \\ &= [\mathbf{M}_{k+a_1t} \circ \mathbf{L}_{j+b_1t} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{M}_{a_2t} \circ \mathbf{L}_{b_2t} \circ \tilde{h}_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}] \\ &= [\mathbf{M}_{k+a_1t} \circ \mathbf{L}_{j+b_1t} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1} \circ \\ &\quad \circ \mathbf{M}_k \circ \mathbf{L}_j \circ \mathbf{M}_{a_2t} \circ \mathbf{L}_{b_2t} \circ \tilde{h}_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}] \\ &= [\mathbf{M}_{k+a_1t} \circ \mathbf{L}_{j+b_1t} \circ h_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1} \circ \\ &\quad \circ \mathbf{M}_{k+a_2t} \circ \mathbf{L}_{j+b_2t} \circ \tilde{h}_{ijk}^t \circ \mathbf{L}_j^{-1} \circ \mathbf{M}_k^{-1}] \\ &= \xi(\alpha, (a_1, b_1)) \xi(\beta, (a_2, b_2))(x), \quad x \in D_{ijk} \end{aligned}$$

Таким чином, відображення ξ є гомоморфізмом. \square

Більш того з леми 3.5.3.1 та формули (3.3) для τ випливає, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow 1 & \downarrow 1 \\ \text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) & \xrightarrow[\cong]{(\tau \circ \sigma \circ \iota \circ \zeta)^{-1}} & \ker \psi \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) \times \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}) & \xrightarrow{\xi} & \pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}', \text{id}_{T^2}) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}) \\ & \downarrow 1 & \downarrow 1 \end{array}$$

Тому, на підставі 5-леми, ξ є ізоморфізмом.

Зокрема, у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$, маємо, що $\pi_1(T^2/\mathcal{G}_v^{loc}) = \pi_1 T^2$, і $r = 1$. Тому

$$\text{Map}(\mathcal{G}_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) = \mathcal{S}',$$

а отже, $\pi_1(\mathcal{D}, \mathcal{S}') \cong \pi_0 \mathcal{S}' \times \pi_1 T^2$.

3.6 Висновки

В даному розділі, ми описали структуру фундаментальної групи орбіт гладких функцій з $\mathcal{N}(T^2)$ на 2-торі.

Розділ 4. Фундаментальна група орбіт гладких функцій на 2-торі, KR-граф яких містить цикл

Множину функцій $f \in \mathcal{E}(T^2)$, KR-граф яких містить цикл, будемо позначати через $\mathcal{L}(T^2)$.

4.1 Паралельні криві на T^2

Означення 4.1.0.1. *Непорожню скінченну сім'ю C_0, C_1, \dots, C_{n-1} простих замкнутих кривих на T^2 будемо називати паралельною, якщо ці криві попарно диз'юнктивні і не є гомотопними нулю.*

Якщо $n = 1$, то $T^2 \setminus C_0$ є відкритим циліндром. В цьому випадку ми будемо розглядати T^2 як циліндр Q , основи якого ототожені, див. рис. 4.1.0.1 а).

Припустимо, що $n \geq 2$. Тоді всі криві паралельної сім'ї повинні бути ізотопними одна до одної. В цьому випадку ми завжди припускати, що вони циклічно занумеровані уздовж T^2 , тобто криві C_i та C_{i+1} обмежують циліндр Q_i , який не містить інших кривих C_j , де всі індекси взяті по модулю n , див. рис. 4.1.0.1 б).

Також ми використовуватимемо такі позначення:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^{n-1} C_i, \quad C_i := C_{i \bmod n}, \quad Q_i := Q_{i \bmod n}$$

для всіх цілих $i \in \mathbb{Z}$.

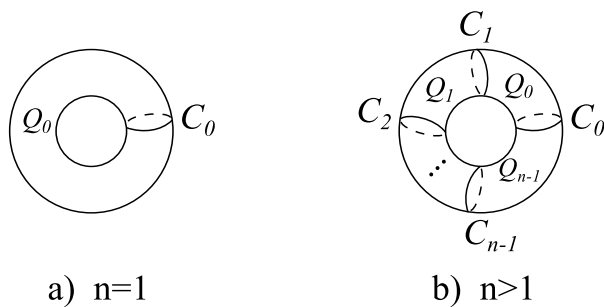
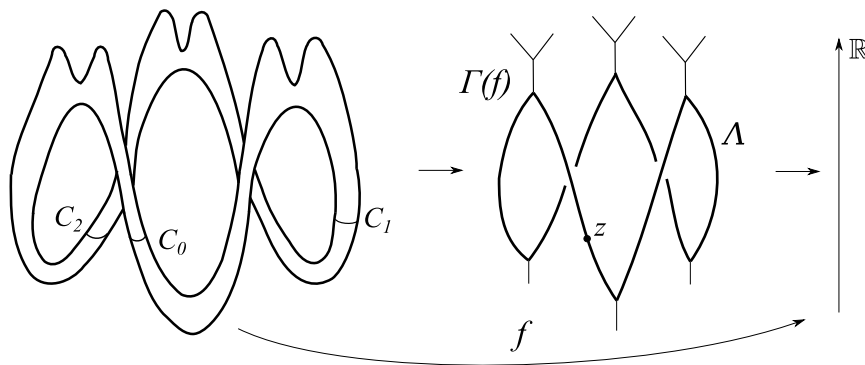


Рис. 4.1.0.1

4.1.1 Циклічний індекс функції f

Нехай $f \in \mathcal{L}(T^2)$ – гладка функція на T^2 , тобто $f \in \mathcal{F}(T^2)$ і її KR-граф Γ_f містить єдиний простий цикл, який ми позначатимемо через Λ , див. рис. 4.1.1.1.

Рис. 4.1.1.1: Функція з класу $\mathcal{L}(T^2)$ та її KR-граф

Нехай також $C \subset T^2$ – регулярна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, і z – відповідна точка на Γ_f . Легко перевірити, що z належить Λ в Γ_f , тоді і лише тоді, коли C не розбиває тор T^2 . Відмітимо, що $f^{-1}(c)$ складається зі скінченного числа зв'язних компонент і є інваріантною відносно кожного $g \in \mathcal{S}(f)$. Нехай

$$\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$$

– множина образів кривої C відносно дії $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$. Тоді \mathcal{C} складається зі скінченного числа зв'язних компонент

$$\mathcal{C} = \{C_0 = C, C_1, \dots, C_{n-1}\}, \quad n \geq 1,$$

множини $f^{-1}(c)$. Відмітимо, що ми розглядаємо образи C лише для тих дифе-

оморфізмів h , які зберігають функцію f і є ізотопними до id_{T^2} . Проте, може існувати такий $h \in \mathcal{S}(f)$, що не є ізотопний до id_{T^2} , але $h(C) \subset f^{-1}(c) \setminus \mathcal{C}$.

Криві з \mathcal{C} є попарно диз'юнктивними і, оскільки C_0 не розбиває тор T^2 , то жодна з них також не розбиває тор T^2 . Тому вони є паралельними в сенсі означення 4.1.0.1. Це означає, що ми можемо припускати, що вони так циклічно занумеровані уздовж T^2 , що C_i та C_{i+1} обмежують циліндр Q_i , внутрішність якого не перетинається з \mathcal{C} .

Означення 4.1.1.1. Число n кривих в \mathcal{C} називатимемо **циклічним індексом** функції f .

Легко бачити, що циклічний індекс f не залежить від вибору регулярної компоненти C множини рівня f , яка не розбиває тор T^2 .

Нехай $f|_{Q_0}$ – обмеження функції f на Q_0 і $\mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0)$ – зв'язна компонента орбіти $\mathcal{O}(f|_{Q_0}, \partial Q_0)$, що містить $f|_{Q_0}$, відносно дії групи дифеоморфізмів $\mathcal{D}_{\text{id}}(Q_0, \partial Q_0)$ циліндру Q_0 , ізотопних до id_{Q_0} та нерухомих на деякому околі межі ∂Q_0 .

Основним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 4.1.1.2. Нехай $f \in \mathcal{L}(T^2)$, C – регулярна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$ функції f , що не розбиває T^2 , $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$, і n – циклічний індекс f , тобто число кривих в \mathcal{C} .

Якщо $n = 1$, то існує ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}(f, C) \times \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що $n \geq 2$ і нехай Q_0 – циліндр, обмежений кривими C_0 і C_1 .

Тоді має місце ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}.$$

4.2 Дифеоморфізми T^2 , нерухомі на паралельній сім'ї кривих

Нехай $C_0, C_1, \dots, C_{n-1} \subset T^2$ – сім'я паралельних кривих, циклічно впорядкованих уздовж T^2 , див. п.п. 4.1 та рис. 4.1.1.1. Для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$ нехай $\tau_i \in \mathcal{D}(T^2)$ – скручування Дена таке, що $\text{supp}(\tau_i) \subset \text{Int}(Q_i)$, а обмеження $\tau_i|_{Q_i}$ породжує $\pi_0 \mathcal{D}_{\text{id}}(Q_i, \partial Q_i) \cong \mathbb{Z}$, див. лему 1.5.0.1. Замінюючи, при необхідності, τ_i на τ_i^{-1} , ми можемо припускати, що всі τ_i є попарно ізотопними як дифеоморфізми T^2 .

Нехай

$$G = \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C}) \quad (4.1)$$

– група дифеоморфізмів нерухомих на деякому околі кожної кривої C_i , що є ізотопними до тотожного дифеоморфізму за допомогою ізотопії, яка не обов'язково є нерухомою в околі \mathcal{C} . Нехай також $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$ – зв'язна компонента групи G , що містить id_{T^2} . Тому

$$\pi_0 G \cong G / \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}).$$

Має місце така теорема.

Теорема 4.2.0.1. *Нехай $\theta_i \in G$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ – слайд уздовж C_i такий, що*

- (i) $\text{supp}(\theta_i) \subset \text{Int}(Q_{i-1}) \cup \text{Int}(Q_i)$ і, зокрема, θ_i є нерухомим в околі Q_i ;
- (ii) $\text{supp}(\theta_i) \cap \text{supp}(\theta_j) = \emptyset$ для $i \neq j$;
- (iii) $\theta|_{Q_i}$ є ізотопним до $\tau_{i-1} \circ \tau_i^{-1}$ відносно деякого околу $C_i \cup M \setminus (Q_{i-1} \cup Q_i)$, див. рис. 4.2.0.2.

Позначимо через θ таку композицію $\theta_0 \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_{n-1}$. Тоді $\theta \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$, тобто θ є ізотопним до id_{T^2} відносно деякого околу \mathcal{C} . Крім того,

$$\pi_0 G \cong \langle [\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_{n-1}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1}, \quad (4.2)$$

причому класи ізотопії слайдів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ утворюють вільний базис G .

Зокрема, якщо $n = 1$, то $\pi_0 G = \{1\}$ і ми маємо:

$$G = \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C}) = \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}).$$

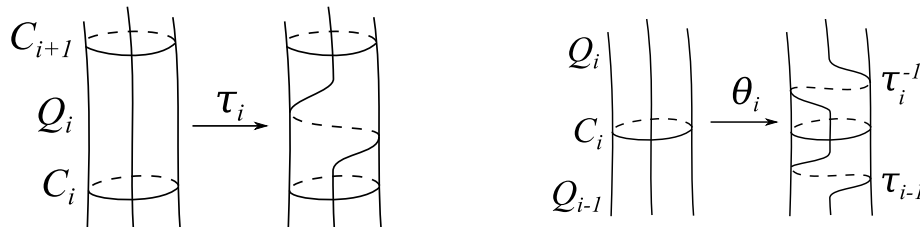


Рис. 4.2.0.2

Доведення. Нехай $n = 1$, а отже $\mathcal{C} = \{C\}$ – негомотопна нулю крива. Доведемо, що $\mathcal{D}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C}) = \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$. Включення $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C})$ є очевидним. Встановимо обернене включення.

Нехай $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C})$, тобто h є нерухомим на C і ізотопний до id_{T^2} . Потрібно довести, що $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$, тобто h є ізотопним id_{T^2} за допомогою ізотопії, що нерухома на C .

Нехай $C' \subset T^2$ – довільна проста замкнена крива, яка є ізотопною до C і не перетинає C , а $\tau : T^2 \rightarrow T^2$ – скручування Дена уздовж C' нерухоме на C . Розріжемо тор T^2 уздовж C і позначимо отриманий циліндр через Q .

Відмітимо, що обмеження $h|_Q : Q \rightarrow Q$ є нерухомим на ∂Q . Відомо, що клас ізотопії $\tau|_Q$ породжує групу $\pi_0 \mathcal{D}(Q, \partial Q) \cong \mathbb{Z}$ див. лему 1.5.0.1. Отже, існує $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $h|_Q$ є ізотопним до $\tau^n|_Q$ відносно ∂Q . Ця ізотопія індукує ізотопію між h і τ^n нерухому на C .

За припущенням h є ізотопним id_{T^2} , а дифеоморфізм τ^n є ізотопним до id_{T^2} лише у випадку, коли $n = 0$. Тоді h є ізотопним до $\tau^0 = \text{id}_{T^2}$ за допомогою ізотопії нерухомій на C .

Припустимо, що $n \geq 2$. Тоді з (iii) випливає, що θ є ізотопний відносно деякого

околу \mathcal{C} до

$$\tau_0 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_1 \circ \tau_2^{-1} \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \tau_0^{-1} = \text{id}_{T^2},$$

звідки маємо: $\theta \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$.

Залишилось встановити справедливість формули (4.2). Очевидно, якщо $h \in G$, то $h(Q_i) = Q_i$ і h є нерухомим на деякому околі $\partial Q_i = C_i \cup C_{i+1}$. Іншими словами, обмеження $h|_{Q_i}$ належить до $\mathcal{D}(Q_i, \partial Q_i)$. Отже, на підставі леми 1.5.0.1, $h|_{Q_i}$ є ізотопним відносно деякого околу \mathcal{C} до добутку

$$\tau_0^{a_0} \circ \tau_1^{a_1} \circ \dots \circ \tau_{n-1}^{a_{n-1}} \quad (4.3)$$

для деяких цілих $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, що визначені однозначно.

Легко бачити, що відповідність $h \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ є коректно визначеним гомоморфізмом

$$q : G \rightarrow \mathbb{Z}^n.$$

Розглянемо таку підгрупу групи \mathbb{Z}^n :

$$\Delta = \{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n \mid a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0\}.$$

Лема 4.2.0.2. $\text{Ker}(q) = \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$ і $q(G) = \Delta$. Тому ми маємо таку точну послідовність

$$1 \longrightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}) \xrightarrow{\subset} G \xrightarrow{q} \Delta \longrightarrow 1,$$

а отже, $\pi_0 G \cong G / \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}) \cong \Delta \cong \mathbb{Z}^{n-1}$.

Доведення. Рівність $\text{Ker}(q) = \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$ випливає з леми 1.5.0.1.

Доведемо, що $q(G) = \Delta$. Припустимо, що $q(h) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, тобто h є ізотопним відносно деякого околу \mathcal{C} до добутку $\tau_0^{a_0} \circ \tau_1^{a_1} \circ \dots \circ \tau_{n-1}^{a_{n-1}}$. На підставі конструкції, всі τ_i є попарно ізотопні, як дифеоморфізми T^2 . Тому h є ізотопним до $\tau_0^{a_0+a_1+\dots+a_{n-1}}$. З іншого боку, за припущенням, h є ізотопним до id_{T^2} а τ_0 не є ізотопним до тотожного дифеоморфізму і його клас ізотопії в $\pi_0 \mathcal{D}(T^2)$ має нескінчений порядок. Отже, $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$, тобто $q(h) \in \Delta$. \square

Тепер ми можемо завершити доведення теореми 4.2.0.1. На підставі (ii), відображення θ_i є ізотопним відносно \mathcal{C} до добутку $\tau_{i-1} \circ \tau_i^{-1}$, див. рис. 4.2.0.2. Це означає, що

$$q(\theta_i) = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, -1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Відмітимо, що елементи $q(\theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ задають базис для Δ , а їх класи ізотопії в G задають базис для $\pi_0 G$. \square

Наслідок 4.2.0.3. *Для будь-якого $h \in G$ існують єдині $b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ і $g \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$ такі, що $h = \theta_1^{b_1} \circ \theta_2^{b_2} \circ \dots \circ \theta_{n-1}^{b_{n-1}} \circ g$.*

4.3 f -адаптовані допоміжні конструкції

Далі ми будемо розглядати коло S^1 і тор T^2 як фактор-групи \mathbb{R}/\mathbb{Z} і $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ відповідно. Для точки $s \in S^1$ і $\varepsilon \in (0, 1/2)$ нехай

$$J_\varepsilon = (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset S^1$$

— відкритий ε -окіл $s \in S^1$.

Нехай далі $f \in \mathcal{L}(T^2)$, C — регулярна зв'язна компонента деякої множини рівня функції f , що не розбиває T^2 , і

$$\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\},$$

див. рис. 4.1.0.1. Зараз ми означимо декілька допоміжних конструкцій, «адаптованих» до функції f .

4.3.1 Спеціальні координати

Оскільки криві $\{C_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$ є «паралельними», ми можемо вважати (після правильного вибору системи координат на T^2), що виконані наступні дві умови:

(a) $C_i = \{\frac{i}{n}\} \times S^1 \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \equiv T^2$;

(b) існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $t \in J_\varepsilon = (\frac{i}{n} - \varepsilon, \frac{i}{n} + \varepsilon)$ крива $\{t\} \times S^1$ є регулярною зв'язною компонентою деякої множини рівня f .

Зручно розглядати кожну C_k як меридіан тора T^2 . Нехай $C' = S^1 \times \{0\}$ – відповідна *паралель*. Тоді $C' \cap C_i = (\frac{i}{n}, 0) \in T^2$.

4.3.2 Ізотопії \mathbf{L} і \mathbf{M}

Нехай $\mathbf{L}, \mathbf{M} : T^2 \times [0, 1] \rightarrow T^2$ – дві ізотопії, визначені за такими формулами:

$$\mathbf{L}(x, y, t) = (x + t \bmod 1, y), \quad \mathbf{M}(x, y, t) = (x, y + t \bmod 1) \quad (4.4)$$

для $x \in C', y \in C$ і $t \in [0, 1]$.

Зауважимо, що «геометрично» \mathbf{L} є «обертанням» тора уздовж його паралелей, а \mathbf{M} – «обертанням» уздовж меридіанів. Ми також можемо розглядати їх як петлі в $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$.

Позначимо через \mathcal{L} і \mathcal{M} підгрупи в $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$, породжені петлями \mathbf{L} і \mathbf{M} відповідно. Відомо, що групи \mathcal{L} і \mathcal{M} є циклічними групами нескінченного порядку, і має місце ізоморфізм:

$$\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cong \mathcal{L} \times \mathcal{M}.$$

Також зауважимо, що \mathbf{L} і \mathbf{M} можна розглядати, як *потоки* $\mathbf{L}, \mathbf{M} : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ визначені за тими само формулами що і формула (4.4) для $(x, y, t) \in T^2 \times \mathbb{R}$. Всі орбіти потоків \mathbf{L} і \mathbf{M} є періодичними періоду 1.

Нехай \mathbf{F} – потік гамільтонового типу функції $f \in \mathcal{L}(T^2)$, див. п. п. 1.7.2. Кожна крива $\{t\} \times S^1$ для $t \in J_\varepsilon(\frac{i}{n})$ та $i = 0, 1, \dots, n-1$, є орбітою \mathbf{F} . З іншого боку, ця крива є також орбітою потоку \mathbf{M} . Внаслідок цього, ми завжди можемо вибрати \mathbf{F} так, що

$$\mathbf{M}(x, y, t) = \mathbf{F}(x, y, t) \quad (4.5)$$

для $(x, y, t) \in J_\varepsilon(\frac{i}{n}) \times S^1 \times \mathbb{R}$ та $i = 0, 1, \dots, n-1$.

4.3.3 Спеціальні слайди

З формул (4.4) і (4.5) випливає, що кожна крива C_k є орбітою потоку \mathbf{F} періоду 1. Нехай $\alpha, \beta : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ – функції, визначені в п. п. 1.5, та ε таке як в (4.5). Визначимо два дифеоморфізми $\tau_i, \theta_i : T^2 \rightarrow T^2$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ за формулами

$$\tau_i(x, y) = \begin{cases} \mathbf{F}(x, y, \alpha((y - \frac{i}{n})/2\varepsilon)), & (x, y) \in J_\varepsilon(\frac{i}{n}) \times S^1, \\ (x, y), & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\theta_i(x, y) = \begin{cases} \mathbf{F}(x, y, \beta((y - \frac{i}{n})/2\varepsilon)), & (x, y) \in J_\varepsilon(\frac{i}{n}) \times S^1, \\ (x, y), & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Очевидно, що τ_i є скручуванням Дена, а θ_i є слайдом в сенсі п. п. 1.5.

Зауважимо, що $f \circ \theta_i = f$, відображення θ_i є ізотопним до id_{T^2} і є нерухомим на деякому околі \mathcal{C} . Іншими словами

$$\theta_i \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C}) = \mathcal{S}(f) \cap G,$$

див. (4.1) Крім того, $\text{supp}(\theta_i) \cap \text{supp}(\theta_j) = \emptyset$ для $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Нехай також

$$\theta = \theta_0 \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_{n-1}. \quad (4.8)$$

Тоді, за теоремою 4.2.0.1,

$$\theta \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}) = \mathcal{S}'(f, \mathcal{C}).$$

Позначимо через $[\theta]_{\mathcal{C}}$ клас ізотопії θ в $\pi_0 \mathcal{S}'(f, \mathcal{C})$ і нехай $\Theta = \langle [\theta]_{\mathcal{C}} \rangle$ – підгрупа в $\mathcal{S}'(f, \mathcal{C})$, що породжена $[\theta]_{\mathcal{C}}$. Тоді має місце така лема:

Лема 4.3.3.1. $\theta = \mathbf{F}_\sigma = \mathbf{M}_\sigma$ для деякої гладкої функції σ такої, що $\sigma = 1$ на \mathcal{C} . Причому, оскільки σ є постійною уздовж орбіт потоку \mathbf{F} , то, $\theta^k = \mathbf{F}_{k\sigma}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Доведення випливає з формул (4.7) та (4.8). □

4.4 Епіморфізми φ і κ

Нехай $f \in \mathcal{L}(T^2)$, C — регулярна зв'язна компонента деякої множини рівня $f^{-1}(c)$, яка не розбиває тор T^2 , $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$ — відповідна сім'я кривих паралельних C і n — кількість кривих в \mathcal{C} .

Для простоти, в цьому розділі використовуватимемо такі позначення

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{id}} &:= \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), & \mathcal{O} &:= \mathcal{O}_f(f), & \mathcal{S} &:= \mathcal{S}'(f), \\ \mathcal{D}_C^{\text{id}} &:= \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}), & \mathcal{O}_C &:= \mathcal{O}_f(f, \mathcal{C}), & \mathcal{S}_C &:= \mathcal{S}'(f, \mathcal{C}), \\ \mathcal{D}^Q &:= \mathcal{D}_{\text{id}}(Q_0, \partial Q_0), & \mathcal{O}^Q &:= \mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0), & \mathcal{S}^Q &:= \mathcal{S}'(f|_{Q_0}, \partial Q_0), \\ \mathcal{S}^{\text{id}} &:= \mathcal{S}_{\text{id}}(T^2), & \mathcal{S}_C^{\text{id}} &:= \mathcal{S}_{\text{id}}(f, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Наша мета — побудувати ізоморфізм $\pi_1 \mathcal{O} \cong \pi_1 \mathcal{O}^Q \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$. Так як згідно з теоремою 1.4.0.2 ми маємо ізоморфізми

$$\pi_1(\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C) \cong \pi_1 \mathcal{O}_C, \quad \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}) \cong \pi_1 \mathcal{O}, \quad \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q) \cong \pi_1 \mathcal{O}^Q,$$

то задача зводиться до встановлення ізоморфізму

$$\xi : \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q) \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}). \quad (4.9)$$

Нехай $i : (\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C) \subset (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$ — відображення вкладення. Це відображення дає морфізм між точними послідовностями гомотопійних груп цих пар, див. теорему 1.4.0.2. Нетривіальна частина цих морфізмів міститься в такій комутативній діаграмі

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C) & \xrightarrow{\partial_C} & \pi_0 \mathcal{S}_C & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_0 & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1 \mathcal{D}^{\text{id}} & \xrightarrow{q} & \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_0 \mathcal{S} & \longrightarrow & 1 \end{array} \quad (4.10)$$

В цьому розділі ми опишемо ядро та образи всіх гомоморфізмів діаграми 4.10, див. теорему 4.4.0.1 нижче.

$$(a) \ q(\mathcal{M}) = i_1 \circ \partial_c^{-1}(\Theta);$$

(b) всі рядки і стовпчики діаграми (4.11) є точними;

(c) існує такий шлях $\gamma : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id}_{T^2})$, що

$$\varphi([\gamma]) = 1, \quad \gamma(1)^n = \text{id}_{T^2}.$$

4.4.1 Доведення твердження (а) теореми 4.4.0.1

Нехай $\mathbf{M} : T^2 \times I \rightarrow T^2$ – петля в \mathcal{D}^{id} , що породжує підгрупу \mathcal{M} групи \mathcal{D}^{id} , див. (4.4). Нехай також $\theta = \theta_0 \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_{n-1}$ – добуток слайдів уздовж всіх кривих \mathcal{C} , див (4.8), θ^{-1} – його обернений елемент і $[\theta^{-1}]_c \in \Theta$ – клас ізоtopії θ^{-1} в $\pi_0 \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$. Тоді елемент $[\theta^{-1}]_c$ також вільно породжує $\Theta = \langle [\theta]_c \rangle$. Тому достатньо довести, що

$$q(\mathbf{M}) = i_1 \circ \partial_c^{-1}([\theta^{-1}]_c).$$

Відмітимо, що $q(\mathbf{M})$ представляється ізоtopією $\{\mathbf{M}_t\}_{t \in I}$.

Нагадаємо, що ми можемо розглядати \mathbf{M} як потік на торі T^2 , що визначається за формулою (4.4). Оскільки всі орбіти \mathbf{M} мають період 1, то $\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{M}_{\alpha+k}$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$ і довільної функції α .

Зокрема, на підставі леми 4.3.3.1,

$$\theta^{-1} = \mathbf{M}_{-\sigma} = \mathbf{M}_{1-\sigma}$$

для функції $\sigma : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $\sigma = 1$ на деякому малому околі U множини \mathcal{C} і $\sigma = 0$ зовні деякого більшого околу N .

Нехай тепер $\mathbf{G}_t = \mathbf{M}_{t(1-\sigma)}$, $t \in I$ – ізоtopія між $\mathbf{G}(0) = \text{id}_{T^2}$ і дифеоморфізмом $\mathbf{G}(1) = \theta^{-1}$, нерухомим на деякому околі \mathcal{C} . Цю ізоtopію можна розглядати як шлях $\mathbf{G} : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}, \mathcal{S}_{\mathcal{C}}, \text{id}_{T^2})$. Тоді $\partial_{\mathcal{C}}([\mathbf{G}]_c) = [\mathbf{G}(1)]_c = [\theta^{-1}]_c$, а отже

$$[\mathbf{G}]_c = \partial_{\mathcal{C}}^{-1}[\theta^{-1}]_c,$$

оскільки $\partial_{\mathcal{C}}$ є ізоморфізмом. Крім того, $i_1 \circ \partial_{\mathcal{C}}^{-1}([\theta^{-1}]_c)$ є гомотопійним класом \mathbf{G} , що розглядається як відображення

$$\mathbf{G} : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id}_{T^2}), \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{M}_{t(1-\sigma)}. \quad (4.12)$$

Зауважимо, що гомотопія між $\{\mathbf{G}_t\}_{t \in I}$ і $\{\mathbf{M}_t\}_{t \in I}$ в $C((I, \partial I, 0), (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id}_{T^2}))$ задається формулою:

$$\mathbf{H} : (I, \partial I, 0) \times I \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id}_{T^2}), \quad \mathbf{H}(t, s) = \mathbf{M}_{t(1-s\sigma)}. \quad (4.13)$$

За допомогою (4.13) не важко показати, що $[\mathbf{G}] = q(\text{id}_{T^2} \times \mathbf{M}) \in \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$. Очевидно маємо, $[\mathbf{G}] = [\mathbf{H}_1] = [\mathbf{M}] = q(\text{id}_{T^2} \times \mathbf{M})$. Твердження (а) доведене.

4.4.2 Доведення твердження (b) теореми 4.4.0.1

Зауважимо, що верхній рядок діаграми (4.11) збігається з (4.10), а точність нижнього ряду є очевидною. Тому залишається побудувати епіморфізми ϕ і κ і довести, що точними є стовпчики діаграми (4.11).

4.4.3 (b1) Побудова епіморфізму $\kappa : \pi_0 \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

Нехай $h \in \mathcal{S}$. Тоді $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Оскільки криві в \mathcal{C} є циклічно впорядкованими, то існує $\kappa(h) \in \mathbb{Z}_n$ таке, що

$$h(C_i) = C_{i+\kappa(h) \bmod n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.14)$$

де всі індекси беруться по модулю n . Очевидно, що $\kappa(h)$ залежить лише від класу ізотопії $[h]$ дифеоморфізму h в \mathcal{S} , а відповідність $h \mapsto \kappa([h])$ є гомоморфізмом $\kappa : \pi_0 \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}_n$. Крім того, κ є епіморфізмом, оскільки, за означенням, \mathcal{C} збігається з всіма образами C відносно \mathcal{S} .

4.4.4 (b2) Побудова $\varphi : \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}$

Нехай $\eta : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow T^2 \equiv S^1 \times S^1$ – накриваюче відображення, визначене за такою формулою:

$$\eta(x, y) = \left(\frac{x}{n} \bmod 1, y\right).$$

Оскільки $C_i = \frac{i}{n} \times S^1$, то

$$\eta(\{i\} \times S^1) = C_{i \bmod n}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (4.15)$$

і, зокрема, $\eta^{-1}(\mathcal{C}) = \mathbb{Z} \times S^1$.

Нехай $\omega : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id}_{T^2})$ представляє деякий елемент в $\pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$. Тоді ω можна розглядати як ізотопію $\omega : T^2 \times I \rightarrow T^2$ таку, що $\omega_0 = \text{id}_{T^2}$ і $\omega_1 \in \mathcal{S}$, тобто $\omega_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Відмітимо, що ω піднімається до єдиної ізотопії $\tilde{\omega} : (\mathbb{R} \times S^1) \times I \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ такої, що $\tilde{\omega}_0 = \text{id}_{\mathbb{R} \times S^1}$ і $\eta \circ \tilde{\omega}_t = \omega_t \circ \eta$ для всіх $t \in I$.

Оскільки $\omega_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, то з (4.15) випливає, що якщо існує таке число $\varphi_\omega \in \mathbb{Z}$, яке задовольняє

$$\tilde{\omega}_1(\{i\} \times S^1) = (\{i + \varphi_\omega\} \times S^1), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (4.16)$$

то $\tilde{\omega}_1(\mathbb{Z} \times S^1) = \mathbb{Z} \times S^1$.

Легко бачити, що φ_ω залежить лише від класу гомотопії $[\omega]$ ізотопії ω в $\pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$, а відповідність $[\omega] \mapsto \varphi_\omega$ є гомоморфізмом $\varphi : \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

4.4.5 (b3) Комутативність діаграми (4.11)

На підставі (4.10) верхній квадрат діаграми є комутативним.

Нижній правий квадрат. Ми повинні перевірити, що

$$\kappa \circ \partial = \varphi \bmod n. \quad (4.17)$$

В позначеннях (b2), маємо, що $\partial([\omega]) = [\omega_1] \in \pi_0 \mathcal{S}$ за означенням граничного гомоморфізму. Тоді для $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\omega_1(C_i) \stackrel{(4.15)}{=} \omega_1 \circ \tilde{\omega}_1(\{i\} \times S^1) \stackrel{(4.16)}{=} \eta(\{i + \varphi([\omega])\} \times S^1) = C_{i + \varphi([\omega]) \bmod n}.$$

Тепер (4.17) є наслідком (4.14).

Нижній лівий квадрат. Ми повинні довести, що

$$\varphi \circ q([\mathbf{L}]) = n. \quad (4.18)$$

Очевидно, що шлях $q(\mathbf{L}) : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id}_{T^2})$ можна розглядати як ізо-топію

$$\mathbf{L} : T^2 \times I \rightarrow T^2, \quad \mathbf{L}(x, y, t) = (x + t \bmod n, y)$$

для $(x, y) \in T^2$, див (4.4). Тоді \mathbf{L} піднімається до ізотопії $\tilde{\mathbf{L}} : (\mathbb{R}, S^1) \times I \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$, визначеної за формулою

$$\tilde{\mathbf{L}}(x, y, t) = (x + nt, y).$$

Зокрема, з (4.16) і того, що $\varphi \circ q([\mathbf{L}]) = n$, маємо $\tilde{\mathbf{L}}(\{i\} \times S^1) = \{i + n\} \times S^1$.

4.4.6 (b4) Точність правого стовпчика

Ми повинні довести, що послідовність

$$1 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{\subset} \pi_0 \mathcal{S}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{i_0} \pi_0 \mathcal{S} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 1$$

є точною. За побудовою, Θ є підгрупою в $\pi_0 \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ і, як доведено вище, відображення κ – епіморфізм. Тому потрібно перевірити, що $\Theta = \text{Ker} i_0$ і $i_0(\pi_0 \mathcal{S}_{\mathcal{C}}) = \text{Ker} \kappa$.

Вкладення $\Theta \subset \text{Ker} i_0$.

Нагадаємо, що кожен $\theta_i \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$, а отже і їх добуток θ , належить до $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Тому $i_0([\theta]_{\mathcal{C}}) = [\theta] = [\text{id}_{T^2}] \in \pi_0 \mathcal{S}$. Це показує, що $\Theta = \langle [\theta]_{\mathcal{C}} \rangle \subset \text{Ker} i_0$.

Обернене включення $\Theta \supset \text{Ker} i_0$.

Зауважимо, що ядро відображення $i_0 : \pi_0 \mathcal{S}_{\mathcal{C}} \rightarrow \pi_0 \mathcal{S}$ складається з класів ізотопії дифеоморфізмів в $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$, які є ізотопними до id_{T^2} за допомогою зберігаючої f ізотопії, причому така ізотопія не обов'язково повинна бути нерухомою на \mathcal{C} . Іншими словами, якщо позначити

$$\mathcal{K} := \mathcal{S}^{\text{id}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{C}^{\text{id}}} = \mathcal{S}_{\text{id}}(f) \cap \mathcal{D}(T^2, \mathcal{C}),$$

то

$$\text{Ker}i_0 = \pi_0\mathcal{K}. \quad (4.19)$$

Очевидно, що $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C})$ є компонентою зв'язності \mathcal{K} , яка містить id_{T^2} , а тому

$$\text{Ker}i_0 = \pi_0\mathcal{K} = \mathcal{K}/\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}.$$

З іншого боку за теоремою 4.2.0.1, $\theta \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}$, і, як відмічалось вище $\theta \in \mathcal{S}^{\text{id}}$, а отже

$$\theta \in \mathcal{S}^{\text{id}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}} = \mathcal{K}.$$

Лема 4.4.6.1. *Має місце ізоморфізм $\pi_0\mathcal{K} = \langle [\theta]_{\mathcal{C}} \rangle \cong \mathbb{Z}$. Іншими словами, кожен $h \in \mathcal{K}$ є ізотопним в \mathcal{K} до θ^b для деякого $b \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Нехай $h \in \mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{K} := \mathcal{S}^{\text{id}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}} \subset \mathcal{S}^{\text{id}}$, то на підставі леми 1.7.4.2 існує єдина гладка функція $\alpha \in C^\infty(T^2)$ така, що $h = \mathbf{F}_\alpha$.

Оскільки h є нерухомим на деякому околі N_i кривої C_i , тобто

$$h(x) = \mathbf{F}_\alpha(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)) = x$$

для всіх $x \in N_i$, то значення $\alpha(x)$ для є цілочисельним кратним періоду траєкторії точки x відносно потоку \mathbf{F} , див. також [23, лема 4.2]. Тому, за неперервністю, функція α повинна приймати постійне значення на N_i , див. [23, лема 4.14]. Оскільки траєкторії потоку \mathbf{F} в N_i мають період 1, то α приймає на N_i деяке постійне ціле значення k .

Ми можемо вибрати його таким, щоб це значення було однаковим для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$. Дійсно, нехай Q_i – циліндр, обмежений кривими C_i і C_{i+1} , h є ізотопним до id_Q відносно деякого околу ∂Q_i і τ_i – скручування Дена визначене формулою (4.6). Зокрема, $\text{supp}\tau_i \subset \text{Int}(Q_i)$. За лемою 1.5.0.1 класи ізотопії обмеження $\tau_i|_{Q_i}$ породжують групу $\pi_0\mathcal{D}(Q_i, \partial Q_i)$. Тепер легко бачити, що $h|_{Q_i}$ є ізотопним в $\mathcal{D}(Q_i, \partial Q_i)$ до τ^b тоді і лише тоді, коли $\alpha(Q_{i+1}) - \alpha(Q_i) = b$. За

припущенням $h|_{Q_i}$ є ізотопним до $\text{id}_{Q_i} = \tau_i^0$ відносно ∂Q_i , а отже, $\alpha(Q_{i+1}) - \alpha(Q_i) = 0$ для всіх i .

Задамо ізотопію між $h = \mathbf{F}_\alpha$ і $\theta^k = \mathbf{F}_{k\sigma}$ в \mathcal{S}_C такими формулами:

$$h_t = \mathbf{F}_{(1-t)\alpha + tk\sigma},$$

див. лему 1.7.4.2.

Залишається відмітити, що оскільки f має критичні точки у внутрішності Q_i , то θ^k не ізотопний θ^l для $k \neq l$. \square

Вкладення $\text{Im}(i_0) \subset \text{Кер}\kappa$. Нехай $h \in \mathcal{S}_C$. Тоді h є нерухомим на C і, зокрема, $h(C_i) = C_i$, для всіх i . Тому, на підставі формули (4.14), $\kappa \circ i_0([h]_c) = 0$, тобто $\text{Im}(i_0) \subset \text{Кер}\kappa$.

Обернене включення $\text{Im}(i_0) \supset \text{Кер}\kappa$. Нехай $h \in \mathcal{S}$ такий, що $\kappa([h]) = 0$, тобто $h(C_i) = C_i$ для всіх i . Оскільки h є ізотопним до тотожного дифеоморфізму id_{T^2} , то він також зберігає орієнтацію кожної кривої C_i , а, отже, на підставі леми 1.7.4.2, ми можемо вважати, що h є нерухомим на деякому околі C і що така заміна не змінює його клас ізотопії $[h] \in \pi_0\mathcal{S}$. Отже, можна припускати, що $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \cap \mathcal{D}(T^2, C) = \mathcal{G}$ див. (4.1). Тоді на підставі наслідку 4.2.0.3

$$h = \theta_1^{a_1} \circ \theta_2^{a_2} \circ \dots \circ \theta_{n-1}^{a_{n-1}} \circ g$$

для деяких $a_i \in \mathbb{Z}$ і $g \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, C)$. Але $\theta_i \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$, тому $[h] = [g] \in \pi_0\mathcal{S}$ і

$$g \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, C) \equiv \mathcal{S}_C.$$

Іншими словами, $[h] = [g] = i_0([g]_c)$, а отже, $\text{Im}(i_0) \supset \text{Кер}\kappa$.

4.4.7 (b5) Точність середнього стовпчика

Ми повинні перевірити, що така коротка послідовність

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C) \xrightarrow{i_1} \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

є точною.

Оскільки відображення ∂ , κ і $\text{mod } n$ є сюр'єкціями, то з формули (4.17) випливає, що φ також є сюр'єктивним відображенням. Тому нам залишається довести, що i_1 є ін'єкцією і $\text{Im}(i_1) = \text{Ker}\varphi$.

Включення $\text{Im}(i_1) \subset \text{Ker}\varphi$. Використовуючи позначення з (b2), нехай

$$\omega : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C, \text{id}_{T^2})$$

— шлях, що представляє деякий елемент в $\pi_1(\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C, \text{id}_{T^2})$. Тоді ω можна розглядати як ізотопію $\omega : T^2 \times I \rightarrow T^2$ нерухому на \mathcal{C} , а отже її підняття $\tilde{\omega} : (\mathbb{R} \times S^1) \times I \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ є нерухомим на $\mathbb{Z} \times S^1$ і $\tilde{\omega}_1(\{i\} \times S^1) = \{i\} \times S^1$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$. Тому, на підставі формули (4.16), $\varphi \circ i_1([\omega]_c) = \varphi([\omega]_c) = 0$, тобто $\omega \in \text{Ker}\varphi$.

Обернене включення $\text{Im}(i_1) \supset \text{Ker}\varphi$. Нехай $x \in \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$ такий, що $\varphi(x) = 0$, тобто $x \in \text{Ker}\varphi$. Тоді

$$0 = \varphi(x) \text{ mod } n = \kappa \circ \partial(x).$$

Отже, $\partial(x) \in \text{ker } \kappa = \text{Im}(i_0) = i_0(\Theta)$. Іншими словами, $\partial(x) = i_0(\theta^k)$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$, де для простоти запису ми позначили через θ його клас ізотопії $[\theta]_c \in \pi_0\mathcal{S}_C$.

Покладемо $y = i_1 \circ \partial_C^{-1}(\theta^k) \in \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$. Тоді

$$\partial(y) = \partial \circ i_1 \circ \partial_C^{-1}(\theta^k) = i_0 \circ \partial_C \circ \partial_C^{-1}(\theta^k) = i_0(\theta^k) = \partial(x).$$

Отже, елемент $xy^{-1} \in \text{Ker}\partial = \text{Im}(q)$. Іншими словами,

$$x = q(\mathbf{L})^a \cdot q(\mathbf{M})^b \cdot y$$

для деяких $a, b \in \mathbb{Z}$.

Ми стверджуємо, що $a = 0$, звідки $x = q(\mathbf{M})^b \cdot y$. Дійсно, оскільки $\varphi \circ q(\mathbf{L}) = n$, $\varphi \circ q(\mathbf{M}) = 0$ і $\varphi(y) = \varphi \circ i_1 \circ \partial_C^{-1}(\theta^k) = 0$, то ми бачимо, що

$$0 = \varphi(x) = \varphi(q(\mathbf{L})^a \cdot q(\mathbf{M})^b \cdot y) = an + 0 + 0.$$

Отже $a = 0$.

Крім того, на підставі (а) маємо, що $q(\mathbf{M}) = i_1 \circ \partial_{\mathcal{C}}^{-1}(\theta^{-1})$, звідки

$$x = q(\mathbf{M})^b \cdot y = i_1 \circ \partial_{\mathcal{C}}^{-1}(\theta^{-b}) \cdot i_1 \circ \partial_{\mathcal{C}}^{-1}(\theta^k) = i_1 \circ \partial_{\mathcal{C}}^{-1}(\theta^{k-b}) \in \text{Im}(i_1).$$

4.4.8 Доведення твердження (с) теореми 4.4.0.1

Для $n = 1$ ми можемо взяти γ постійним шляхом в id_{T^2} .

Припустимо, що $n \geq 2$. Нехай $\mathbf{L}_t : T^2 \rightarrow T^2$, $t \in I$ – ізотопія, що визначена формулою (4.4) і яка породжує групу \mathcal{L} . Позначимо $\lambda = \mathbf{L}_{1/n}$. Тоді

$$\lambda(x, y) = (x + \frac{1}{n} \bmod 1, y).$$

Ми будемо використовувати такі три властивості λ :

- $f \circ \lambda$ збігається з f в деякому околі N множини \mathcal{C} , див (4.5);
- $\lambda^n = \text{id}_{T^2}$;
- $\lambda(Q_i) = Q_{i+1}$ для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Зауважимо, що на підставі означення циклічного індексу функції f , існує такий $h \in \mathcal{S}$, що $h(Q_i) = Q_{i+1}$.

Ми можемо вважати, що $h = \lambda$ в деякому околі N множини \mathcal{C} . Дійсно, оскільки λ і h зберігають орієнтацію T^2 і $f \circ h = f$, то $h \circ \lambda^{-1}$ залишає інваріантними всі регулярні компоненти множин рівня функція f , що належать N . Тому h є ізотопним в \mathcal{S} до дифеоморфізму $h_2 \in \mathcal{S}$ такого, що $h_1 \circ \lambda^{-1}$ є нерухомим на деякому околі N_1 множини \mathcal{C} , звідки $h_1 = \lambda$ в меншому околі \mathcal{C} . Отже, ми можемо замінити h на h_1 і N на N_1 .

Крім того, можна також вважати, що $h^n = \text{id}_{T^2}$. Дійсно, маємо

$$h^{n-1}|_N = \lambda^{n-1}|_N = \lambda^{-1}|_N = h^{-1}|_N.$$

Визначимо відображення $h_1 : T^2 \rightarrow T^2$ за правилом: $h_1 = h$ на $M \setminus Q_{n-1}$ і $h_1 = h^{-1}$ на Q_{n-1} . Тоді h_1 є коректно визначним дифеоморфізмом таким, що $h_1^n = \text{id}_{T^2}$ і $f \circ h_1 = f$, тобто, $h_1 \in \mathcal{S}(f)$. Знову, ми можемо замінити h на h_1 .

Нарешті, можемо також припускати, що h є ізотопним до id_{T^2} . Дійсно, оскільки $h = \lambda$ на деякій відкритій множині, наприклад на околі \mathcal{C} , і λ зберігає орієнтацію, то h також зберігає орієнтацію. Але всі нетривіальні класи ізотопії дифеоморфізмів T^2 мають нескінченний порядок, звідки h є ізотопним id .

Нехай також $\gamma_t : T^2 \rightarrow T^2$, $t \in I$ – ізотопія між id_{T^2} і h . Вона може розглядатись як елемент в $\pi_1(\mathcal{D}(T^2), \mathcal{S}(f))$. Тоді $1 = \kappa([\gamma]) = \varphi([\gamma]) \pmod n$. Отже, $\varphi([\gamma]) = an + 1$ для деякого $a \in \mathbb{Z}$. Замінивши γ на будь-якого представника класу $[\gamma][\mathbf{L}]^{-a}$ і можемо вважати, що $\varphi([\gamma]) = 1$. Теорема 4.4.0.1 доведена.

4.5 Інтерлюдія: f -інваріантні вільні \mathbb{Z}_n -дії

Наступна теорема є переформулюванням пункту (с) теореми 4.4.0.1. Вона показує, що існує вільна f -інваріантна \mathbb{Z}_n -дія на T^2 а, отже, f факторизується до функції з того ж класу $\mathcal{L}(T^2)$ на фактор-просторі T^2/\mathbb{Z}_n , що також є тором T^2 .

Теорема 4.5.0.1. *Існує n -листне накриття $p : T^2 \rightarrow T^2$ і $\hat{f} \in \mathcal{L}(T^2)$ така, що діаграма*

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{p} & T^2 \\ & \searrow f & \swarrow \hat{f} \\ & \mathbb{R} & \end{array} \quad (4.20)$$

є комутативною. Зокрема, KR-граф \hat{f} також має цикл і циклічний індекс \hat{f} дорівнює 1.

Доведення. Нехай γ така як в пункті (с) теореми 4.4.0.1 і нехай $g = \gamma(1) \in \mathcal{S}(f)$. Тоді $g^n = \text{id}_{T^2}$. Відмітимо, що g не має нерухомих точок, оскільки $\kappa(g) = \varphi(\gamma) \pmod n = 1$, тобто $g(Q_i) = Q_{i+1}$ для всіх i . Іншими словами, g індукує вільну f -інваріантну дію групи \mathbb{Z}_n на T^2 дифеоморфізмами, що зберігають орієнтацію. Отже, відповідне фактор-відображення $p : T^2 \rightarrow T^2/\mathbb{Z}_n$ є n -листним накриттям T^2 і фактор-простір T^2/\mathbb{Z}_n дифеоморфний до T^2 .

Крім того, оскільки ця дія f -інваріантна, то f індукує гладку функцію

$$\widehat{f} : T^2/\mathbb{Z}_n = T^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

таку, що діаграма (4.5.0.1) є комутативною.

Залишається відмітити, що оскільки p є локальним дифеоморфізмом, то функція \widehat{f} має властивість (PQ), як і функція f . Тоді $\widehat{f} \in \mathcal{L}(T^2/\mathbb{Z}_n)$. Легко переконатись, що $\Gamma_{\widehat{f}}$ містить цикл і \widehat{f} має циклічний індекс 1. \square

4.6 Доведення теореми 4.1.1.2

Ми повинні побудувати ізоморфізм

$$\xi : \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q) \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}).$$

Нехай $\gamma : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}, \text{id})$ – шлях, визначений в пункті (с) теореми 4.4.0.1 і $g = \gamma(1) \in \mathcal{S}$. Тоді $g(Q_i) = Q_{i+1}$ і $g^n = \text{id}_{T^2}$.

Нагадаємо, що група \mathbb{Z} діє на $\text{Map}(\mathbb{Z}_1, \pi_1 \mathcal{O}^Q)$ за формулою (1.13).

Лема 4.6.0.1. *Існує ізоморфізм*

$$\eta : \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)) \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}_C^{\text{id}}, \mathcal{S}_C).$$

Крім того, нехай $\alpha \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q))$, $k \in \mathbb{Z}$ і $\alpha^k \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q))$ – результат дії k на α , див. (1.13). Тоді

$$i_1(\eta(\alpha^k)) = [\gamma^k] i_1(\eta(\alpha)) [\gamma^{-k}]. \quad (4.21)$$

Доведення. Нехай $\alpha : \mathbb{Z}_n \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$ – довільне відображення і

$$\omega_i : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q, \text{id}_Q)$$

– представник $\alpha(i)$ в $\pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$, $i = 0, \dots, n-1$. Тоді $\omega_i(t)$ є нерухомим в околі ∂Q , а тому шлях $\omega : I \rightarrow \mathcal{D}_C^{\text{id}}$ задається формулою:

$$\omega(t)|_{Q_i} = g^i \circ \omega_i(t) \circ g^{-i}|_{Q_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.22)$$

Зауважимо, що

$$\omega(0)|_{Q_i} = g \circ \omega_i(0) \circ g^{-i} = \text{id}_{Q_i}, \quad f \circ \omega(1)|_{Q_i} = f \circ g \circ \omega_i(1) \circ g^{-i} = f,$$

звідки $\omega(0) = \text{id}_{T^2}$ і $\omega(1) \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, \mathcal{C}) = \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$. Крім того, ω є відображенням трійок $\omega : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}, \mathcal{S}_{\mathcal{C}}, \text{id}_{T^2})$ і значить воно представляє деякий елемент $[\omega]_c$ в $\pi_1(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}, \mathcal{S}_{\mathcal{C}})$. Легко бачити, що клас $[\omega]_c$ залежить лише від класу $[\omega_i]$ в $\pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$.

Визначимо відображення $\eta : \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)) \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}, \mathcal{S}_{\mathcal{C}})$ за формулою:

$$\eta(\alpha) = [\omega]_c.$$

Лема 4.6.0.2. *Відображення η є ізоморфізмом.*

Доведення. Нехай $\alpha, \beta : \mathbb{Z}_n \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$ і $\omega_i, \omega'_i : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q, \text{id}_Q)$ – представники $\alpha(i)$ та $\beta(i)$ в $\pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$. На підставі (4.22), задамо шляхи $\omega, \omega' : I \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}$ так:

$$\omega(t)|_{Q_i} = g^i \circ \omega_i(t) \circ g^{-i}|_{Q_i}, \quad \omega'(t)|_{Q_i} = g^i \circ \omega'_i(t) \circ g^{-i}|_{Q_i},$$

для $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Нехай $\tilde{\eta} : \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)) \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}$ – відображення, задане так: $\tilde{\eta}(\alpha) = [\omega]$. Тому для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$ маємо, що

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\alpha\beta)(i)|_{Q_i} &= [g^i \circ \omega_i(t) \circ \omega'_i(t) \circ g^{-i}|_{Q_i}] \\ &= [g^i \circ \omega_i(t) \circ g^{-i} \circ g^i \circ \omega'_i(t) \circ g^{-i}|_{Q_i}] \\ &= \tilde{\eta}(\alpha)(i)\tilde{\eta}(\beta)(i). \end{aligned}$$

Таким чином, відображення $\tilde{\eta}$ є гомоморфізмом. Оскільки ω та ω' є відображеннями трійок $\omega, \omega' : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}, \mathcal{S}_{\mathcal{C}}, \text{id}_{T^2})$ і тому представляють деякі класи $[\omega]_c$ та $[\omega']_c$ в $\pi_1(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\text{id}}, \mathcal{S}_{\mathcal{C}})$. Очевидно, що з того, що $\tilde{\eta}$ є гомоморфізмом випливає, що η – гомоморфізм.

На підставі означення (4.22) шляху ω та відображення η , легко переконатись, що з того, що $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$, випливає $\alpha = \beta$, звідки, η є мономорфізмом. Доведемо, що η — епіморфізм. Нехай $\omega : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}_c^{\text{id}}, \mathcal{S}_c, \text{id})$ — шлях. Визначимо шляхи $\omega_i : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q, \text{id}_Q)$ за правилом

$$\omega_i(t) = g^{-i} \circ \omega(t)|_{Q_i} \circ g^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

і нехай функція $\alpha : \mathbb{Z}_n \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$ задається формулою: $\alpha(i) = [\omega_i]$. Тоді $\eta(\alpha) = [\omega]_c$. Це означає, що η — епіморфізм, а отже і ізоморфізм. \square

Нехай $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, за означенням дії, $\alpha^k(i) = \alpha(i + k \bmod n)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Крім того, якщо $\omega_i : (I, \partial I, 0) \rightarrow (\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q, \text{id}_Q)$ представник $\alpha(i)$ в $\pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$, то $\omega_{i+k \bmod n}$ є представником $\alpha^k(i)$. Тому шлях $\omega' : I \rightarrow \mathcal{D}_c^{\text{id}}$, заданий формулою

$$\omega'(t)|_{Q_i} = g^i \circ \omega_{i+k \bmod n}(t) \circ g^{-i}|_{Q_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

відповідає α^k , тобто $\eta(\alpha^k) = [\omega']_c$. Зауважимо, що

$$\omega'(t)|_{Q_i} = g^{-k} \circ g^{i+k} \circ \omega_{i+k \bmod n}(t) \circ g^{-i-k} \circ g^k|_{Q_i} = g^{-k} \circ \omega(t) \circ g^k|_{Q_i}.$$

Отже,

$$\omega'(t)|_{Q_i} = g^{-k} \circ \omega(t) \circ g^k = \gamma_1^k \circ \omega_t \circ \gamma_1^{-k}.$$

Відмітимо, що $i_1(\eta(\alpha)) = [\omega]$ і $i_1(\eta(\alpha^k)) = [\omega']$ є класами гомотопії ω і ω' , що розглядаються як елементи в $\pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$. Тоді, на підставі (1.9)

$$i_1(\eta(\alpha^k)) = [\gamma_1^k \circ \omega_t \circ \gamma_1^{-k}] = [\gamma_t^k][\omega_t][\omega_t^{-1}] = [\gamma_t^k]i_1(\eta(\alpha))[\gamma_t^{-k}].$$

Лема доведена. \square

Наступна лема завершує доведення теореми 4.1.1.2.

Лема 4.6.0.3. *Визначимо відображення $\xi : \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q) \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S})$ за формулою*

$$\xi(\alpha, k) = [\gamma_t^k]i_1(\eta(\alpha)) \quad (4.23)$$

де $\alpha \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q))$ і $k \in \mathbb{Z}$. Тоді ξ є гомоморфізмом, що робить таку діаграму з точних рядків комутативною:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & \text{Map}(\mathbb{Z}_n, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)) & \xrightarrow{\zeta} & \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q) & \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \cong \eta & & \downarrow \xi & & & \parallel & & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{D}_c^{\text{id}}, \mathcal{S}_c) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1(\mathcal{D}^{\text{id}}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

Тому, на підставі 5-леми, ξ є ізоморфізмом.

Доведення. Ми повинні перевірити, що ξ є ізоморфізмом.

Нехай $\alpha, \beta \in \text{Map}(\mathbb{Z}, \pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q))$ і $k, l \in \mathbb{Z}$. Тоді в $\pi_1(\mathcal{D}^Q, \mathcal{S}^Q)$ ми маємо, що

$$(\alpha, k)(\beta, l) = (\alpha^l \beta, k + l).$$

На підставі (4.23) маємо

$$\xi(\alpha, k) = [\gamma^k] i_1(\eta(\alpha)), \quad \xi(\beta, l) = [\gamma^l] i_1(\eta(\beta)).$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
 \xi(\alpha^l \beta, k + l) &= [\gamma^{k+l}] i_1(\eta(\alpha^l \beta)) = [\gamma_t^{k+l}] i_1(\eta(\alpha^l)) i_1(\eta(\beta)) \\
 &= [\gamma_t^{k+l}] [\gamma_t^{-l}] i_1(\eta(\alpha)) [\gamma_t^l] i_1(\eta(\beta)) \\
 &= [\gamma_t^k] i_1(\eta(\alpha)) [\gamma_t^l] i_1(\eta(\beta)) \\
 &= \xi(\alpha, k) \xi(\beta, l),
 \end{aligned}$$

а отже, ξ є гомоморфізмом. Зауважимо, що

$$\xi \circ \zeta(\alpha) = \xi(\alpha, 0) = i_1 \circ \eta(\alpha),$$

$$\varphi \circ \xi(\alpha, k) = \varphi([\gamma^k] \eta(\alpha)) = \varphi \circ \eta(\alpha) + \varphi([\gamma^k]) = 0 + k = k = p(\alpha, k).$$

Тому діаграма в твердженні леми є комутативною і, згідно 5-леми, ξ є ізоморфізмом. \square

4.7 Висновки

В даному розділі, ми описали структуру фундаментальної групи орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{L}(T^2)$ на 2-торі.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню гладких функцій на 2-торі та їх деформацій. В роботі отримані такі результати:

- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл;
- описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, а стабілізатори цих функцій діють на зірках відповідних спеціальних вершин графів Кронрода-Ріба тривіально;
- також дано опис фундаментальних груп орбіт для випадку, коли стабілізатори цих функцій діють нетривіально на відповідних зірках;
- знайдено умови, за яких «комбінаторна» дія скінченної групи на деякому розбитті компактної поверхні є індукованою дією цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану гладку функцію.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] *Cori, Robert*. Construction of maps with prescribed automorphism group / Robert Cori, Antonio Machì // *Theoret. Comput. Sci.* — 1982. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 91–98.
- [2] *Dancer, E. N.* Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities / E. N. Dancer // *J. Reine Angew. Math.* — 1984. — Vol. 350. — Pp. 1–22.
- [3] *Dehn, M.* Die Gruppe der Abbildungsklassen / M. Dehn // *Acta Mathematica*. — 1938. — Vol. 69. — Pp. 135–206.
- [4] *Earle, C. J.* A fibre bundle description of Teichmüller theory / C. J. Earle, J. Eells // *J. Differential Geometry*. — 1969. — Vol. 3. — Pp. 19–43.
- [5] *Earle, C. J.* Teichmüller theory for surfaces with boundary / C. J. Earle, A. Schatz // *J. Differential Geometry*. — 1970. — Vol. 4. — Pp. 169–185.
- [6] *Feshchenko, B.* Deformations of smooth functions on 2-torus and wreath products / B. Feshchenko // Book of abstracts of International Algebraic Conference dedicated to 100th of anniversary of L. A. Kaluzhnin, (Kyiv). — 2014. — Pp. 96–97.
- [7] *Feshchenko, B.* Deformations of smooth functions on 2-torus whose Kronrod–Reeb graph is a tree / B. Feshchenko // Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків, (м. Київ). — 2015. — С. 10.
- [8] *Feshchenko, Bohdan*. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces /

- Bohdan Feshchenko // *Methods of Functional Analysis and Topology*. — 2016. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 210–219.
- [9] *Feshchenko, B.* Actions of finite groups and smooth functions on surfaces / B. Feshchenko // Abstracts of International conference «Geometry and Topology in Odessa – 2016», (Odesa). — 2016. — P. 19.
- [10] *Feshchenko, B.* Fundamental groups of orbits of smooth functions on 2-torus / B. Feshchenko // Тези доповідей 11-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз», (м. Одеса). — 2016. — С. 128–129.
- [11] *Feshchenko, B.* Fundamental groups of orbits of smooth functions on 2-torus / B. Feshchenko // Book of Abstracts of International Conference «Modern Advances in Geometry and Topology» in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday, (Kharkiv). — 2016. — P. 19.
- [12] *Frucht, R.* Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe / R. Frucht // *Compositio Math.* — 1939. — Vol. 6. — Pp. 239–250.
- [13] *Gramain, André.* Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte / André Gramain // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1973. — Vol. 6. — Pp. 53–66.
- [14] *Hatcher, Allen.* Algebraic topology / Allen Hatcher. — Cambridge University Press, Cambridge, 2002. — Pp. xii+544.
- [15] *Ikegami, Kazuichi.* Cobordism group of Morse functions on surfaces / Kazuichi Ikegami, Osamu Saeki // *J. Math. Soc. Japan.* — 2003. — Vol. 55, no. 4. — Pp. 1081–1094.
- [16] *Jordan, Camille.* Sur les assemblages de lignes / Camille Jordan // *J. Reine Angew. Math.* — 1869. — Vol. 70. — Pp. 185–190.

- [17] *Kadubovsky, A. A.* Classification of O -topologically non-equivalent functions with color chord diagrams / A. A. Kadubovsky, A. V. Klimchuk // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2004. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 23–32.
- [18] *Kalmár, Boldizsár.* Cobordism group of Morse functions on unoriented surfaces / Boldizsár Kalmár // *Kyushu J. Math.* — 2005. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 351–363.
- [19] *Kaloujnine, Léo.* Sur les p -groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m / Léo Kaloujnine // *C. R. Acad. Sci. Paris*. — 1945. — Vol. 221. — Pp. 222–224.
- [20] *Loewy, Alfred.* Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen / Alfred Loewy // *J. Reine Angew. Math.* — 1927. — Vol. 157. — Pp. 239–254.
- [21] *Maksymenko, Sergiy.* Smooth shifts along trajectories of flows / Sergiy Maksymenko // *Topology Appl.* — 2003. — Vol. 130, no. 2. — Pp. 183–204.
- [22] *Maksymenko, Sergey.* Path-components of Morse mappings spaces of surfaces / Sergey Maksymenko // *Comment. Math. Helv.* — 2005. — Vol. 80, no. 3. — Pp. 655–690.
- [23] *Maksymenko, Sergiy.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2006. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 241–285.
- [24] *Maksymenko, Sergiy.* Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Travaux Mathématiques*. — 2008. — Vol. 18. — Pp. 39–44.
- [25] *Maksymenko, Sergiy.* Connected components of partition preserving di-

- ffeomorphisms / Sergiy Maksymenko // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2009. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 264–279.
- [26] *Maksymenko, Sergiy*. Deformations of circle-valued Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Укр. мат. журн.* — 2010. — Т. 62, № 10. — С. 1360–1366.
- [27] *Maksymenko, Sergiy*. Functions on surfaces and incompressible subsurfaces / Sergiy Maksymenko // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 167–182.
- [28] *Maksymenko, Sergiy*. Functions with isolated singularities on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Геометрія та топологія функцій на многовидах. Праці Інституту математики НАН України*. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 7–66.
- [29] *Maksymenko, Sergiy*. Functions with isolated singularities on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Geometry and topology of functions on manifolds. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2010. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 7–66.
- [30] *Maksymenko, Sergiy*. Functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle / Sergiy Maksymenko, Bohdan Feshchenko // *Methods of Functional Analysis and Topology*. — 2015. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 22–40.
- [31] *Maksymenko, Sergiy*. Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types / Sergiy Maksymenko, Bohdan Feshchenko // *Matematychni Studii*. — 2015. — Vol. 44, no. 1. — Pp. 67–83.
- [32] *Matsumoto, Yukio*. An introduction to Morse theory / Yukio Matsumoto. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. — Vol. 208 of *Translations of Mathematical Monographs*. — Pp. xiv+219. — Translated from the

- 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [33] *Morse, Marston*. The foundations of a theory in the calculus of variations in the large / Marston Morse // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1928. — Vol. 30, no. 2. — Pp. 213–274.
- [34] *Morse, Marston*. The critical points of a function of n variables / Marston Morse // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1931. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 72–91.
- [35] *Neumann, B. H.* Twisted wreath products of groups / B. H. Neumann // *Arch. Math. (Basel)*. — 1963. — Vol. 14. — Pp. 1–6.
- [36] *Nummela, Eric C.* Cayley’s theorem for topological groups / Eric C. Nummela // *Amer. Math. Monthly*. — 1980. — Vol. 87, no. 3. — Pp. 202–203.
- [37] *Polulyakh, E. O.* On conjugate pseudo-harmonic functions / E. O. Polulyakh // Геометрія, топологія та їх застосування, *Праці Інституту математики НАН України*. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 505–517.
- [38] *Polulyakh, E.* On the Pseudo-harmonic functions defined on the disk / E. Polulyakh, I. Yurchuk. *Праці Інституту математики НАН України*. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 151.
- [39] *Pólya, G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen / G. Pólya // *Acta Math.* — 1937. — Vol. 68, no. 1. — Pp. 145–254.
- [40] *Pontryagin, L. S.* Topological groups / L. S. Pontryagin. Translated from the second Russian edition by Arlen Brown. — Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York-London-Paris, 1966. — Pp. xv+543.

- [41] *Prishlyak, A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface / A. O. Prishlyak // *Topology Appl.* — 2002. — Vol. 119, no. 3. — Pp. 257–267.
- [42] *Reeb, Georges.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées / Georges Reeb. *Actualités Sci. Ind.*, no. 1183. — Hermann & Cie., Paris, 1952. — P. no book paging given. — *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg* 11, pp. 5–89, 155–156.
- [43] *Seeley, R. T.* Extension of C^∞ functions defined in a half space / R. T. Seeley // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1964. — Vol. 15. — Pp. 625–626.
- [44] *Sergeraert, Francis.* Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications / Francis Sergeraert // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1972. — Vol. 5. — Pp. 599–660.
- [45] *Sharko, V. V.* Classification of Morse functions on surfaces / V. V. Sharko // *Low-Dimensional Topology and Combinatorial Group Theory.* — 1996. — Pp. 19–25.
- [46] *Smale, Stephen.* Diffeomorphisms of the 2-sphere / Stephen Smale // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1959. — Vol. 10. — Pp. 621–626.
- [47] *Smale, Stephen.* Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four / Stephen Smale // *Ann. of Math. (2)*. — 1961. — Vol. 74. — Pp. 391–406.
- [48] *Širáň, Jozef.* Orientable and nonorientable maps with given automorphism groups / Jozef Širáň, Martin Škoviera // *Australas. J. Combin.* — 1993. — Vol. 7. — Pp. 47–53.
- [49] *Адельсон-Вельский, Г. М.* О множествах уровня непрерывных функций с частными производными / Г. М. Адельсон-Вельский, А. С. Кронрод // *Докл. Акад. Наук СССР.* — 1945. — Т. 49, № 4. — С. 239–241.

- [50] *Болсинов, А. В.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности / А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко // *Успехи мат. наук.* — 1990. — Т. 45, № 2(272). — С. 49–77.
- [51] *Болсинов, А. В.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. — Москва: Наука, 1997. — Р. 352.
- [52] *Браилов, Ю.* Алгебраические свойства симметрий атомов / Ю. Браилов // Топологическая классификация в теории гамильтоновых систем. — Москва: Факториал, 1999. — Рр. 24–40.
- [53] *Кадубовський, О. А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях / О. А. Кадубовський // *Укр. мат. журн.* — 2006. — Т. 58, № 3. — С. 343–351.
- [54] *Кронрод, А. С.* О функциях двух переменных / А. С. Кронрод // *Успехи мат. наук.* — 1950. — Т. 5, № 1(35). — С. 24–134.
- [55] *Кудрявцева, Е. А.* Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты / Е. А. Кудрявцева // *Мат. сборник.* — 1999. — Т. 190, № 3. — С. 29–88.
- [56] *Кудрявцева, Е. А.* О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях / Е. А. Кудрявцева // *Матем. сб.* — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 79–118.
- [57] *Кудрявцева, Е. А.* Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия / Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко // *Матем. сб.* — 2008. — Т. 199, № 9. — С. 3–96.
- [58] *Кудрявцева, Е. А.* Группы симметрий правильных функций Морса на по-

- верхностях / Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко // *Докл. Акад. Наук.* — 2012. — Vol. 446, no. 6. — Pp. 615–617.
- [59] *Кудрявцева, Е. А.* Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты (“Атом”-бифуркация) / Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* — 2013. — Т. 68, № 3. — С. 148–155.
- [60] *Кудрявцева, Е. А.* Топология пространств функций Морса на поверхностях / Е. А. Кудрявцева // *Мат. Заметки.* — 2012. — Vol. 92, no. 1-2. — Pp. 219–236.
- [61] *Лычак, Д. П.* Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками / Д. П. Лычак // *Геометрія, топологія та їх застосування, Праці Інституту математики НАН України.* — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 426–439.
- [62] *Максименко, Сергій.* Гомотопічний тип правих стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях / Сергій Максименко // *Український математичний журнал.* — 2012. — Т. 64, № 9. — С. 1186–1203.
- [63] *Максименко С. И., Феценко Б. Г.* Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе / Феценко Б. Г. Максименко С. И. // *Український математичний журнал.* — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1205–1212.
- [64] *Милнор, Дж.* Теория Морса / Дж. Милнор. — Москва: Мир, 1965. — С. 184.
- [65] *Ошемков, А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А. А. Ошемков // *Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Тр. МИАН.* — 1994. — Т. 205. — С. 131–140.
- [66] *Пришляк, А. О.* Сопряженность функций Морса на поверхностях со зна-

- чениями в прямой и окружности / А. О. Пришляк // *Укр. мат. журн.* — 2000. — Т. 52, № 10. — С. 1421–1425.
- [67] *Фещенко, Богдан.* Деформації гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом / Богдан Фещенко // *Праці Інституту математики НАН України.* — 2015. — Т. 12, № 6. — С. 22–40.
- [68] *Фещенко, Б. Г.* Гомотопічні властивості просторів гладких функцій на 2-торі / Б. Г. Фещенко // Тези доповідей п'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені Михайла Кравчука, II том Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз, (м. Київ). — 2014. — С. 192.
- [69] *Фещенко, Б. Г.* Фундаментальна група орбіт гладких функцій на 2-торі / Б. Г. Фещенко // Тези доповідей четвертої міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана, (м. Чернівці). — 2014. — С. 204–205.
- [70] *Фоменко, А. Т.* Некоторые нерешенные проблемы в теории интегрируемых гамильтоновых систем / А. Т. Фоменко // *Топологическая классификация в теории гамильтоновых систем.* — Москва: Факториал, 1999. — Рр. 5–23.
- [71] *Фоменко, А. Т.* Курс гомотопической топологии / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. — Наука, Москва, 1989. — Р. 496.
- [72] *Хирш, М.* Дифференциальная топология / М. Хирш. — Москва: Мир, 1979. — С. 280.
- [73] *Шарко, В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты) / В. В. Шарко. — Киев: Наук. думка, 1990. — С. 196.
- [74] *Шарко, В. В.* Функции на поверхностях, I / В. В. Шарко // *Некоторые проблемы современной математики.* Праці Інституту математики НАН України. — Киев: Ин-т. математики НАН Украины, 1998. — Т. 25. — С. 408–434.

- [75] Шарко, В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В. В. Шарко // *Укр. мат. журн.* — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 687–700.
- [76] Юрчук, І. Топологічна класифікація функцій з класу $F(D^2)$ / І. Юрчук // Проблеми топології та суміжні питання, *Праці Інституту математики НАН України.* — 2006. — Т. 3, № 3. — С. 474–486.