ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Фещенка Богдана Григоровича

«Деформації гладких функцій на 2-торі»

подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія

Марстон Морс вперше знайшов алгебро-топологічний зв'язок між властивостями многовидів та гладких функцій, що на ньому задані. Його результати спричинили значний прогрес у дослідженні алгебраїчних, геометричних та топологічних властивостей многовидів. Варто відзначити результати відомих математиків, як Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнірельман, Л. Е. Ельсгольц, Р. Ботт, С. П. Новіков, С. Смейл, В. В. Шарко, які продовжували розвиток ідей Морса.

Дисертаційну роботу Б. Г. Фещенка присвячено дослідженню деформаційних властивостей гладких функцій на двовимірному торі. Приведу приклад виникнення таких задач з симплектичної топології. А. Т. Фоменко побудував теорію типу Морса для вивчення цілком інтегровних гамільтонових систем на чотиривимірних многовидах. Такі системи мають два функціонально-незалежних перших інтеграли, які є гладкими функціями. Аналогом функції Морса в цій теорії виступає відображення моменту, що будується за їх допомогою. А. Т. Фоменко та його учні показали, що критичні точки (точки біфуркації) відображення моменту «кодують» перебудови торів Ліувіля таких систем. Для їх дослідження розглядають звуження одного з інтегралів на окіл критичної точки іншого інтегралу. Це приводить до дослідження гладких функцій на 3-многовидах. Але, оскільки такий окіл має структуру розшарування Зейферта, то обмеження інтегралу системи на об'єднання околів критичних точок після склейки по граничним торам Ліувіля факторизується до гладкої функції на поверхні, що є базою розшарування Зейферта. Таким чином, задачі дослідження перебудов торів Ліувіля можна звести до дослідження деформаційних властивостей гладких функцій на поверхнях.

Група дифеоморфізмів поверхні природно діє на множені гладких функцій поверхні. С. І. Максименко вперше досліджував гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії групи дифеоморфізмів. Для широкого класу таких функцій він повністю описав гомотопійні групи стабілізаторів, вищі гомотопійні групи орбіт таких функцій та фундаментальну групу орбіт для всіх компактних поверхонь, крім 2-тора, 2-сфери, стрічки Мебіуса та пляшки Клейна. Дисертаційна робота присвячена описанню фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі.

Дисертація складається зі вступу, 4 розділів та списку використаних джерел.

Вступ містить інформацію про актуальність, мету та новизну дослідження, формулювання основних результатів дисертації та інші нормативні відомості про дисертацію.

У розділі 1 автор наводить основні результати про природні класи гладких функцій на поверхнях, орбіти яких будуть досліджуватись. Це функції класу $\mathscr{F}(M)$, що є гладко еквівалентними однорідним многочленам без кратних лінійних множників, та класу $\mathscr{E}(M)$, що є гладко еквівалентними однорідним многочленам без кратних множників. Також у першому розділі дається означення стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях та описуються відомі їх гомотопійні властивості, а також надається допоміжна інформація, яка потрібна автору для доведення результатів.

У розділі 2 дисертант досліджує дії скінченних груп на поверхнях та їх підняття до дій груп дифеоморфізмами, що зберігають задану функцію. Для функцій з $\mathscr{F}(M)$ автор у підрозділі 2.1 визначає спеціальні вершини графу Кронрода-Ріба (або KR-графу) функції, а у підрозділі 2.2 показує як виникає спеціальне розбиття поверхні, якщо KR-граф містить таку вершину. У підрозділі 2.3 дається означення комбінаторних дій скінченних груп на поверхнях. Головним результатом розділу є теорема 2.3.0.4., яка описує достатні умови коли комбінаторна дія скінченної групи піднімається до дії дифеоморфізмами, що зберігають задану функцію. Розділ 2.5 присвячений доведенню теореми 2.3.0.4.

У розділі 3 доводиться теорема про існування спеціальних вершин KR-графу для функцій з класу $\mathscr{E}(T^2)$ на 2-торі, коли KR-граф є деревом. Основним результатом розділу є теорема 3.2.0.1., яка дає повний опис фундаментальної групи орбіт гладких функцій на 2-торі, KR-граф яких є деревом. Структура локального стабілізатора спеціальних вершин (твердження (i) теореми 3.2.0.1) описується в підрозділі 3.3, а основна частина теореми 3.2.0.1 (твердження (ii)) — в підрозділах 3.4. та 3.5.

У розділі 4 автор знаходить повний опис фундаментальної групи орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{E}(T^2)$ на 2-торі, KR-граф яких містить цикл. Цей результат описується теоремою 4.1.1.2 в дисертації.

На мій погляд основні результати дисертації повністю збігаються з поставленими до дисертації завданнями, а саме:

— описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл;
— описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, а стабілізатори цих функцій діють на зірках відповідних спеціальних вершин графів Кронрода-Ріба тривіально;
— дано опис фундаментальних груп орбіт для випадку, коли стабілізатори цих функцій діють нетривіально на відповідних зірках;
— знайдено умови, за яких «комбінаторна» дія скінченної групи на деякому розбитті компактної поверхні є індукованою дією цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану гладку функцію.

Зауваження до тексту дисертації:

(1) Для повноти опису у розділі 1 можна було б привести інформацію про топології на просторах гладких функцій на поверхнях.
(2) Підпункти 1.7.2 та 1.7.3 містять стандартну відому інформацію про гамільтонові векторні поля та поля градієнтів гладких функцій. Варто було б привести посилання на літературу.
(3) На стр. 66 можна було б явно побудувати функцію β_{ri}.
(4) Текст роботи містить ряд помилок друкарського характеру, наприклад:

Стр. 7. «...парну степінь», треба «... парний степінь»,

Стр. 22, у формулюванні теореми треба уточнити де саме «біля p_0», треба писати «в околі p_0»,

Стр. 58. «виклад як в (2) доведення» треба змінити на «виклад, як в частині (2) доведення»,

Стр. 86. «по модулю», краще «за модулем»,

В багатьох місцях в тексті «постійні» краще замінити на «сталі» та «замкнутий (замкнута)» треба змінити на «замкнений (замкнена)»,
на які автору було вказано усно.

Незважаючи на висловленні вище зауваження, дисертаційна робота Богдана Григоровича Фещенка «Деформації гладких функцій на 2-торі» є завершеною науковою роботою, яку написано на високому науковому рівні.

Результати дисертації Б. Г. Фещенка опубліковано у 5 фахових наукових виданнях, три з яких входять до наукометричних баз даних Web of Science та Scopus, а також у 7 збірниках праць конференцій та шкіл.

Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Всі наукові результати дисертації Б. Г. Фещенка є новими, наведені твердження чітко сформульовані та супроводжуються доведеннями, які не викликають сумніву. Дисертація добре проілюстрована.

Вважаю, що дисертаційна робота Б. Г. Фещенка «Деформації гладких функцій на 2-торі» задовольняє всі вимоги «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року), щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор – Богдан Григорович Фещенко заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент
старший науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь та геометрії
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник Д. В. Болотов

Болотова Д.В.
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ ім. Б.І.Вєркіна
Національної академії наук України
кандидат фізико-математичних наук
Касименко О.М.

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України
Ідентифікаційний код 03534601
Україна, м.Харків

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія

Надійшла до спеціалізованої вченої ради Д26.206.03 22.05.2017р.
Секретар ради (Артемигенко Ю.Я.)