ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Фещенка Богдана Григоровича

«Деформації гладких функцій на 2-торі»

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія

Актуальність теми дисертації. Дисертаційну роботу Б.Г. Фещенка присвячено дослідженню деформаційних властивостей гладких функцій на двовимірному торі.

Дослідження гладких функцій на многовидах є класичною задачею математики, оскільки вони часто виникають у наукових дослідженнях та є зручними для моделювання різних процесів та явищ, де певні класи гладких функцій виступають як розв'язки відповідних рівнянь, а многовиди — в якості фазових просторів моделі, тощо. М. Морс вперше знайшов зв'язок між топологічною будовою многовиду та гладкими функціями, що на ньому визначені. Його результати (лема Морса, нерівності Морса) показали, що «геометрична» будова многовиду суттєво визначається функціями Морса на ньому. Розвитком цих ідей займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, С. Смейл, В. Шарко. Розвиток цих методів привів до дослідження функцій більш загальних класів та постановок нових задач, зокрема про топологічну еквівалентність гладких функцій, застосування топологічних методів в теорії динамічних систем та дослідження їх деформаційних властивостей, що відображенно у роботах А. Фоменка, С. Матвеєва, О. Болсінова, А. Ошемкова, О. Пришляка, С. Максименка, О. Кудрявцевої, Є. Полуляха, K. Ikegami, O. Saeki, B. Kalmara та багатьох інших.

С. Максименко досліджував гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій для спеціальних класів гладких функцій на поверхнях. Йому вдалося встановити гомотопійний тип стабілізаторів та орбіт гладких функцій. Зокрема, він дав повний опис вищих гомотопійних груп орбіт гладких функцій на замкнених поверхнях та фундаментальних груп орбіт для всіх замкнених поверхонь крім сфери, тора, листа Мебіуса та пляшки Клейна. З цих результатів випливає, що якщо поверхня є асферичною, то орбіта є простором Ейленберга-Маклейна $K(\pi, 1)$, де π – фундаментальна група орбіти. В дисертації Б. Г. Фещенко повністю описує фундаментальну групу орбіт гладких функцій на 2-торі.

Слід відзначити, що представлена робота виконана в лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України в рамках державної науково-дослідної теми «Алгебрачні, геометричні та топологічні властивості многовидів з додатковими структурами», номер державної реєстрації 0111U000159.

З урахуванням зазначеного, тему дисертації Б. Г. Фещенка «Деформації гладких функцій на 2-торі» слід визнати актуальною.

Аналіз змісту дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, 4 розділів та списку використаних джерел.

Вступ містить огляд літератури за темою дисертації, формулювання основних результатів роботи, актуальність дослідження та інші технічні атрибути дисертації.

У Розділі 1 дисертант наводить основні результати з теорії Морса та описує властивості гладких функцій з досліджуваних класів. В підпункті 1.1.2 вводяться два класи функцій $\mathscr{F}(M)$ та $\mathscr{E}(M)$ на поверхнях, що будуть досліджуватись. В підпункті 1.1.2 приводиться опис локальної структури шарування в околі критичних точок функцій з класу $\mathscr{F}(M)$, а у підрозділі 1.2 наведено результати про локальні «симетрії» функцій з класу $\mathscr{F}(M)$. В підрозділі 1.3 даються означення стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів. Підрозділ 1.4 включає відомі результати про гомотопійні властивості стабілізаторів та орбіт функцій з класу $\mathscr{F}(M)$. В підрозділах 1.6, 1.7 та 1.8 наводяться результати про граф Кронрода-Ріба гладких функцій, означення гамільтонових та градієнтних полів гладких функцій та опис фундаментальної групи зв'язної компоненти групи дифеоморфізмів 2-тора, що містить тотожне відображення. В підрозділі 1.9 дається означення вінцевих добутків спеціального вигляду, які відповідають неефективним діям $\mathbb{Z}$ на циклічних групах $\mathbb{Z}_n$.

Розділ 2 присвячений дослідженню дії скінченних груп на поверхнях та їх підняття до дій груп дифеоморфізмів, що зберігають задану функцію. В підрозділі 2.1 дається означення спеціальної вершини графу Кронрода-Ріба для функцій з класу $\mathscr{F}(M)$ на гладкій компактній поверхні. В підрозділі 2.2 показано, що якщо граф Кронрода-Ріба містить спеціальну вершину, то на поверхні виникає спеціальне розбиття. В підрозділі 2.3 автором вивчено комбінаторні дії скінченної групи на поверхні та сформульовано головний результат розділу – Теорема 2.3.0.4, доведення якої наведено в підрозділі 2.5.

Розділ 3 присвячений повному опису фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{E}(T^2)$ на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом. В підрозділі 3.1 дисертант доводить, що граф Кронрода-Ріба таких функцій завжди містить спеціальну вершину (Теорема 3.1.0.1). В підрозділі 3.2 автор формулює основний результат розділу (Теорема 3.2.0.1). Підрозділ 3.3 включає опис структури локальних стабілізаторів спеціальних вершин. В підрозділах 3.4 та 3.5 автор доводить теорему 3.2.0.1.

Розділ 4 присвячений повному опису фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathscr{E}(T^2)$ на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл. Основним результатом розділу є Теорема 4.1.1.2., доведення якої наведено в підрозділі 4.6.

Отримані нові наукові результати. Основні результати дисертаційної роботи Б. Г. Фещенка полягають у наступному:

— описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких містить цикл;

— описано структуру фундаментальних груп орбіт гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, а стабілізатори цих функцій діють на зірках відповідних спеціальних вершин графів Кронрода-Ріба тривіально;

— також дано опис фундаментальних груп орбіт для випадку, коли стабілізатори цих функцій діють нетривіально на відповідних зірках;

— знайдено умови, за яких «комбінаторна» дія скінченної групи на деякому розбитті компактної поверхні є індукованою дією цієї групи дифеоморфізмами, що зберігають задану гладку функцію.

Обгрунтування отриманих результатів. Результати дисертаційного дослідження оформлено у вигляді теорем, тверджень та лем, доведення яких містять всі необхідні обгрунтування з дотриманням належного рівня математичної строгості. Дисертація добре проілюстрована.

Зауваження. У вигляді зауважень та побажань до роботи Б. Г. Фещенка «Деформації гладких функцій на 2-торі» маю зазначити наступне:

1) Оглядовий підпункт «1.7.4 Відображення зсуву» доцільно було би розширити за рахунок ілюстративних прикладів.
2) В підрозділі 1.8 відображення «i» можна вказати явно.
3) В підрозділі 2.4 використовується зарезервований у літературі термін «атом»; і хоча вживання цього терміну в наведеному контексті не викликає неоднозначності, проте для «спеціальних» околів спеціальних зв'язних компонент критичних рівнів краще використовувати іншу назву.
4) При доведенні твердження (ii) теореми 3.2.0.1 у випадку $\mathcal{G}_v^{loc} = 1$ краще користуватися відносними групами $\pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f))$ замість $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$, що, на мою дуку, спростило б формулювання допоміжних результатів.
5) На стор. 7 (абзац 2) у фразі «... замкнена компактна поверхня ...» достатньо залишити «... компактна поверхня ...»;
6) На стор. 78 (7 рядок зверху) у формулі під знаком третього добутку слід писати $k = 0$;
7) Крім того, у тексті дисертації зустрічається й незначна кількість граматичних та синтаксичних помилок, «русизмів» і необов'язкових повторів. Наприклад:
   (a) на стор. 13, 26 – тавтологія «Якщо $X = \emptyset$ є порожньою множиною...»;
   (b) на стор. 14, абз. 3 – замість «... орбіт на стабілізаторів ...» слід писати «... орбіт та стабілізаторів ...»;
   (c) на стор. 66 – замість «... вивчали дії комбінаторні груп ...» слід писати «... вивчали комбінаторні дії груп ...»;
   (d) всюди по тексту доцільно замінити слова «замкнута» і «постійне» на загально вживані «замкнена» та «стале» відповідно.

Зауваження щодо автореферату носять суто редакторський характер та не впливають на загальну позитивну оцінку викладу матеріалу в авторефераті.

Слід зазначити, що наведені зауваження і недоліки не знижують наукової та практичної цінності результатів дисертаційної роботи і повинні сприйматись як технічні недоліки в оформленні виконаних досліджень. Більше того, незважаючи на зазначені зауваження, дисертаційна робота Богдана Григоровича Фещенка «Деформації гладких функцій на 2-торі» є цілком завершеною науковою роботою, яку написано на високому науковому рівні.

Повнота викладу основних положень дисертації в опублікованих працях та авторефераті. Основні результати дисертації Б. Г. Фещенка опубліковано у 12 наукових працях, серед яких 5 статей у фахових наукових виданнях, 3 з них – у виданнях, що входять до наукометричних баз даних Web of Science та Scopus, та 7 тез і матеріалів міжнародних наукових конференцій та шкіл.

Результати дисертаційного дослідження Б. Г. Фещенка доповідались на семінарах лабораторії топології Інституту математики НАН України, семінарі з фрактального аналізу НПУ ім. М.П. Драгоманова та міському геометричному семінарі в м. Харків.

Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Висновки. Всі наукові результати дисертації Б. Г. Фещенка є новими, достовірними, строго обґрунтованими та сформульовані у вигляді тверджень, доведення яких не викликає сумнівів. На мою думку одержані дисертантом результати є досить оригінальними та можуть отримати розвиток у подальших дослідженнях.

Вважаю, що дисертаційна робота Б. Г. Фещенка «Деформації гладких функцій на 2-торі» задовольняє всім вимогам «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року), щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор – Богдан Григорович Фещенко впевнено заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри геометрії та методики
викладання математики
Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет» Кадубовський О. А.

10.05.2017

Особистий підпис О.А. Кадубовського засвідчую
Начальник відділу кадрів ДВНЗ «ДДПУ» Є. С. Сілін

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.03 12.05.2017р.
секретар ради [illegible] / [illegible]ченко [illegible]/